



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

ESTUDIO ANALÍTICO Y POR ELEMENTOS FINITOS DE POSTPANDEO DE PANELES AERONÁUTICOS

Autor

Jorge Andrés González

Director

José Luis Pérez Aparicio

Universidad Politécnica de Valencia

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Valencia - Julio de 2018

ESTUDIO ANALÍTICO Y POR ELEMENTOS FINITOS
DE POSTPANDEO DE PANELES AERONÁUTICOS

Jorge Andrés González

Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Julio de 2018

*“To invent an airplane is nothing.
To build one is something.
But to fly is everything.”*

Otto Lilienthal

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo la ayuda de Miguel Ángel Rosique, quien ha estado siempre dispuesto a atender cualquiera de mis dudas. Gracias a mi tutor, José Luis Pérez Aparicio, por sus consejos, dedicación y exigencia. Por supuesto, gracias a toda mi familia por su inestimable apoyo, ya que nada de esto hubiese salido adelante sin ella. Gracias también a mis compañeros y compañeras de clase, con quienes he compartido momentos y experiencias inolvidables. Por último, pero no menos importante, gracias a Gema por haberme aguantado y acompañado en los buenos y en los malos momentos.

Resumen

Se aborda el estudio del pandeo de placas y paneles rectangulares, presentes en las estructuras semimoncasco típicas de construcciones aeronáuticas. En primer lugar, se analiza el inicio de pandeo por compresión de dos aproximaciones a un panel aeronáutico: placas con bordes elásticos y placa con un larguerillo rigidizador. Se hace énfasis en la distinción entre modos de pandeos locales y globales, así como en el comportamiento de las distintas zonas del larguerillo. A continuación, se estudia el postpandeo por compresión de una placa teniendo en cuenta diferentes combinaciones en cuanto a la restricción de los bordes laterales, pudiendo así realizar una comparativa y obtener conclusiones. Se finaliza abordando un estudio completo del postpandeo de un panel a compresión.

Para el análisis de cada aspecto, son empleados tanto métodos analíticos como el método de los elementos finitos, basado en el software comercial *Abaqus*[®], permitiendo así el contraste de resultados. El postprocesado de gráficas se realiza principalmente por medio del software *Gnuplot*[®], a través de una conexión con *Matlab*[®].

Abstract

The study of buckling of rectangular plates, present in the typical aeronautic semi-monocoque structures, is discussed. First, the initial buckling under compression of two approaches to an aeronautical panel is analyzed: plates with elastic edges and a stiffened plate by a single stringer. Emphasis is placed on the distinction between local and global buckling modes, as well as on the behavior of the different areas of the stringer. Next, the postbuckling under compression of a plate is studied taking into account different combinations in terms of the restriction of the lateral edges, thus being able to perform a comparison and obtain some conclusions. Finally, a complete study of the post-buckling of a panel by compression is approached.

For the analysis of each aspect, both analytical methods and the finite element method, based on *Abaqus*[®] commercial are used, thus allowing the results to be compared. The post-processing of graphs is mainly done by means of the software *Gnuplot*[®], through a connection with *Matlab*[®].

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Índice general	V
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	XI
Lista de símbolos	XIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.1.1. Introducción al pandeo en estructuras aeronáuticas	1
1.1.2. Antecedentes	4
1.1.3. Estado actual	5
1.2. Objetivos	6
1.3. Organización de la memoria	6
2. Fundamentos teóricos	7
2.1. Teoría de placas	7
2.1.1. Teoría de pequeñas deformaciones	8
2.1.2. Teoría de deformación intermedia: ecuaciones de Von Karman	9
2.2. Teoría de vigas	13
2.2.1. Equilibrio	14
2.2.2. Formulación energética	15
2.3. Condiciones de contorno	17
2.3.1. Condiciones de contorno ideales	17
2.3.2. Condiciones de contorno elásticas	21
3. Inicio de pandeo en paneles	23
3.1. Métodos de resolución	23
3.1.1. Resolución analítica	23
3.1.2. Resolución numérica	25
3.2. Placa con bordes elásticos	26
3.2.1. Restricciones al movimiento lateral	26
3.2.2. Restricciones al giro	28
3.2.3. Método de los elementos finitos	30
3.2.4. Comparación con el documento ESDU® 72019	32
3.3. Parámetros de los larguerillos	33
3.4. Panel articulado con un larguerillo	37
3.4.1. Método de Levy	37
3.4.2. Método de Ritz	39
3.4.3. Método de los elementos finitos	45

3.4.4. Resultados	46
3.5. Estudios paramétricos	52
3.5.1. Posición del larguerillo	52
3.5.2. Rigidez del larguerillo	53
3.6. Pandeo local del larguerillo	55
3.6.1. Subpanel 1-2: SSSF	55
3.6.2. Subpaneles 2-3 y 3-4: SSSS	57
3.6.3. Subpanel 4-5: pandeo entre remaches	58
3.7. Conclusiones generales	61
4. Postpandeo de placas a compresión	63
4.1. Resolución de las ecuaciones de Von Karman	63
4.2. Postpandeo en elementos finitos: algoritmo de Riks	68
4.3. Placa con bordes descargados inmóviles	72
4.3.1. Limitaciones	73
4.3.2. Reacción lateral y movimientos en el plano	74
4.3.3. Contraste de resultados	75
4.3.4. Comparación con el documento DES 8726	83
4.4. Placa con bordes descargados rectos	89
4.4.1. Limitaciones	90
4.4.2. Reacción lateral y movimientos en el plano	90
4.4.3. Contraste de resultados	91
4.4.4. Comparación con el documento DES 8726	95
4.5. Placa con bordes descargados no restringidos	97
4.5.1. Contraste de resultados	98
4.5.2. Comparación con el documento DES 8726	101
4.6. Conclusiones generales	103
5. Postpandeo de paneles	105
5.1. Planteamiento energético: método de Ritz	105
5.2. Análisis por elementos finitos	107
5.3. Resultados	110
5.3.1. Deformada	110
5.3.2. Tensiones en la piel	111
5.3.3. Análisis del larguerillo	113
6. Conclusiones, trabajos futuros y presupuesto	119
6.1. Conclusiones	119
6.2. Trabajos futuros	121
6.3. Presupuesto	122
Bibliografía	123

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de estructuras aeronáuticas. Izquierda: sección de fuselaje aeronáutico [17]. Derecha: cajón de torsión del ala del Boeing 787-9 [18].	2
1.2. Modos de fallo de un panel aeronáutico. OHC: <i>open hole compression</i> . OHT: <i>open hole tension</i> . Misc.: misceláneos. [6]	2
1.3. Entrada en régimen de postpandeo de una sección del fuselaje del Boeing B-52 [19].	3
1.4. Fallo de panel aeronáutico en postpandeo [20].	3
1.5. Evolución de las estructuras aeronáuticas. Izquierda: sección del fuselaje de un Vickers Wellington [21]. Derecha: sección del fuselaje de un Airbus A350 [22]. . .	4
1.6. Viga armada sometida a cortante: el pandeo del alma se produce en diagonal [23]. Sección de timón de cola pandeando por sollicitación cortante [24].	4
1.7. Ejemplos de estructuras aeronáuticas formadas por paneles rigidizados. Izquierda: mamparo de presión delantero [25]. Derecha: larguero principal del ala del Boeing 747-8 [26].	5
2.1. Placa plana rectangular con espesor mucho menor que los lados, $t \ll a, b$. Carga transversal al plano de la placa: p_z . Cargas aplicadas en el plano de la placa: N_x , N_y , N_{xy}	7
2.2. Configuración deformada de un elemento diferencial de placa en el plano xz . Para facilitar la visualización, se ha exagerado la inclinación: $\arctan(\partial w/\partial x) \cong \partial w/\partial x$.	10
2.3. Equilibrio diferencial en el plano.	11
2.4. Viga de pared delgada con su correspondiente sistema de referencia.	13
2.5. Equilibrio sobre un elemento diferencial de viga en configuración deformada. . . .	14
2.6. Giro de un larguerillo contenido en un panel aeronáutico; coordenadas y_s , z_s referidas a la sección del larguerillo.	16
2.7. CC ideales en una placa.	18
2.8. Deformada y giro de un panel. Arriba: larguerillos de sección abierta. Abajo: cerrada.	20
2.9. Borde de placa con acoplamientos elástico lineal de rigidez k_w y elástico rotacional de rigidez k_ϕ , ambas por unidad de longitud.	21
2.10. Borde de placa delimitado por un larguerillo.	22
3.1. Placa articulada con restricciones al movimiento lateral en $y = 0$, b	26
3.2. Placa con restricciones al giro de los lados $y = \pm b/2$	28
3.3. Tensión crítica vs. ratio de lados para distintos μ_L . Curvas correspondientes a resultados analíticos plenamente coincidentes con <i>Data Unit</i> [9].	32
3.4. Tensión crítica vs. ratio de lados para distintos μ_ϕ . Curvas correspondientes a resultados analíticos plenamente coincidentes con <i>Data Unit</i> [9].	33
3.5. Izquierda: esquema de una sección de larguerillo en forma de Ω . Derecha: detalle de la estructura del fuselaje de un Boeing 747.	34
3.6. Detalle del flujo cortante en la sección Ω	35
3.7. Representación del alabeo unitario en la sección Ω	36
3.8. Panel articulado con un larguerillo situado a distancia $b/2$ de los bordes $y = cte$.	37
3.9. Equilibrio en configuración deformada sobre un dx situado en $y = 0$	38
3.10. Panel articulado sometido a compresión uniforme.	39

3.11. Valor de r que minimiza la carga crítica del primer modo de pandeo del panel vs. rigidez adimensional a flexión del larguerillo.	44
3.12. Geometría del panel en <i>Abaqus</i> [®]	45
3.13. Mallado del panel en <i>Abaqus</i> [®]	45
3.14. CC y carga aplicada en el larguerillo.	46
3.15. Convergencia del factor de pandeo vs. relación de aspecto por método de Ritz ($t. \equiv \#$ términos).	46
3.16. Factor de pandeo vs. relación de aspecto por varios métodos.	47
3.17. Deformada U3 del primer modo de pandeo para $r = 1$ en <i>Abaqus</i> [®]	48
3.18. Giro UR1 en el primer modo de pandeo para $r = 1$ en <i>Abaqus</i> [®]	49
3.19. Cuatro primeros modos de pandeo para $r = 1$. Columna izquierda: <i>Mathematica</i> [®] , Ritz 16 términos. Columna derecha: <i>Abaqus</i> [®]	50
3.20. Cuatro primeros modos de pandeo para $r = 2$. Columna izquierda: <i>Mathematica</i> [®] , Ritz 16 términos. Columna derecha: <i>Abaqus</i> [®]	51
3.21. Factor de pandeo vs. relación de aspecto para distintas posiciones del larguerillo.	52
3.22. Esquema de las secciones empleadas en el estudio paramétrico, de sección t constante y con propiedades de la Tabla 3.1. De izquierda a derecha: sección plana, doble T y cuadrada.	53
3.23. Factor de pandeo vs. relación de lados para las secciones de la Figura 3.22.	54
3.24. Función de prueba en la dirección y con $n = 1$	56
3.25. Esquema de la unión del larguerillo a la placa: d_r , espacio entre remaches.	58
3.26. Carga crítica de pandeo entre remaches.	60
4.1. Izquierda, A: bordes descargados inmóviles. Centro, B: rectos. Derecha, C: libres.	63
4.2. Modos # 1 y 2 de pandeo por compresión uniforme N_x	64
4.3. Respuesta estática inestable. Indicaciones referidas al punto de bifurcación.	69
4.4. Algoritmo de Riks modificado.	71
4.5. Placa a compresión con bordes descargados restringidos.	72
4.6. Evolución del LPF de carga en <i>Abaqus</i> [®]	75
4.7. Deformada en el centro de la placa vs. ratio de postpandeo; modo # 1.	76
4.8. Representación de la deformada a lo largo de distintas líneas $y = cte$ con $\mathcal{P}_x = 2$; sólo primer modo para Von Karman.	77
4.9. Deformada en el punto $(x, y) = (a/4, b/2)$ vs. ratio de postpandeo; modo # 2.	77
4.10. Deformada U3 en <i>Abaqus</i> [®] para distintos ratios de postpandeo.	78
4.11. Movimientos u, v del plano medio de la placa para $\mathcal{P}_x = 2$. Arriba: resultados analíticos, <i>Mathematica</i> [®] . Abajo: resultados numéricos, <i>Abaqus</i> [®]	79
4.12. Función coseno encargada de modelar la redistribución de tensiones en postpandeo. Análoga en la dirección del eje y	80
4.13. Redistribución de tensión σ_x en varias secciones de la placa; régimen de postpandeo.	80
4.14. Evolución de la tensión ς_x en el plano medio de la placa. Fila superior: <i>Mathematica</i> [®] . Fila inferior: <i>Abaqus</i> [®]	81
4.15. Distribución de tensión normal ς_x a lo largo del borde $x = 0$. Arriba: primer modo de pandeo. Abajo: segundo modo.	82
4.16. Tensión de Von Mises ς_{vm} en el plano medio de la placa.	83
4.17. Parámetro de relación de tensiones vs. relación de lados, $\nu = 0.25$	85

ÍNDICE DE FIGURAS

4.18. Relación entre tensiones media y máxima. Pendiente del segundo tramo definida γ .	86
4.19. Pérdida de rigidez compresiva. Pendiente del segundo tramo definida μ .	87
4.20. Representación esquemática de las tensiones/solicitaciones junto con modelo del ancho efectivo en borde de placa paralelo a dirección de carga externa.	88
4.21. Ancho efectivo vs. tensión máxima adimensional.	89
4.22. Placa a compresión con bordes laterales forzados a mantenerse rectos.	89
4.23. Evolución del LPF en <i>Abaqus</i> [®] .	92
4.24. Deformada U3 en <i>Abaqus</i> [®] para distintos ratios de carga de postpandeo.	92
4.25. Movimientos u, v del plano medio de la placa para $\mathcal{P}_x = 2$. Arriba: resultados analíticos, <i>Mathematica</i> [®] . Abajo: resultados numéricos, <i>Abaqus</i> [®] .	93
4.26. Evolución de la tensión normal ς_x en el plano medio de la placa. Fila superior: <i>Mathematica</i> [®] . Fila inferior: <i>Abaqus</i> [®] .	94
4.27. Tensión de Von Mises ς_{vm} en el plano medio de la placa extraída de <i>Abaqus</i> [®] .	94
4.28. Relación entre tensiones media y máxima. Pendiente del segundo tramo definida γ .	95
4.29. Pérdida de rigidez compresiva. Pendiente del segundo tramo definida μ .	96
4.30. Ancho efectivo vs. tensión máxima adimensional.	97
4.31. Placa a compresión con bordes laterales no restringidos.	97
4.32. Evolución del LPF en <i>Abaqus</i> [®] .	98
4.33. Deformada U3 en <i>Abaqus</i> [®] para distintos ratios de postpandeo.	99
4.34. Movimientos u, v del plano medio de la placa para $\mathcal{P}_x = 2$. Arriba: resultados analíticos, <i>Mathematica</i> [®] . Abajo: resultados numéricos, <i>Abaqus</i> [®] .	100
4.35. Tensión de Von Mises ς_{vm} en el plano medio de la placa extraída de <i>Abaqus</i> [®] .	100
4.36. Relación entre tensiones media y máxima. Pendiente del segundo tramo definida γ .	101
4.37. Pérdida de rigidez compresiva. Pendiente del segundo tramo definida μ .	102
4.38. Ancho efectivo vs. tensión máxima adimensional.	103
4.39. Comparación de la relación entre tensión promedio y máxima obtenida en <i>Abaqus</i> [®] .	103
4.40. Comparación de la pérdida de rigidez a compresión obtenida en <i>Abaqus</i> [®] .	104
4.41. Comparación del ancho efectivo obtenido en <i>Abaqus</i> [®] .	104
5.1. Panel articulado sometido a compresión uniforme.	105
5.2. Modo # 1 de pandeo por compresión del panel.	106
5.3. Cuatro primeros modos de pandeo del panel en <i>Abaqus</i> [®] (véase también la Figura 3.19).	108
5.4. Evolución de la tensión σ_x máxima en el larguerillo para $\mathcal{P}_x = 1.5$ vs. número de elementos de malla en el mismo.	109
5.5. Deformada del panel en <i>Abaqus</i> [®] para cuatro distintos LPF.	110
5.6. Evolución de la deformada máxima del panel en <i>Abaqus</i> [®] .	111
5.7. Distribución de tensión normal σ_x en el panel.	112
5.8. Vista lateral de la Figura 5.1 en la posición $x = 0$: redistribución de tensión normal hacia los bordes laterales y hacia el larguerillo con $\mathcal{P}_x = 1.5$.	112
5.9. Distribución de tensión equivalente de Von Mises en el panel.	113
5.10. Detalle del giro del larguerillo obtenido en <i>Abaqus</i> [®] .	114
5.11. Ley de giro del larguerillo. Arriba: $\mathcal{P}_x = 1.1$. Abajo: $\mathcal{P}_x = 1.5$.	114
5.12. Momentos torsores a lo largo del larguerillo: torsor de Saint-Venant T_J , torsor de alabeo T_Γ y torsor total $T = T_J + T_\Gamma$.	115

5.13. Distribución de tensión normal σ_x en el larguero. 116
5.14. Comparación de tensión normal en la sección $\xi = 3/4$ del larguero para $\mathcal{P}_x = 1.1$.117

Índice de tablas

2.1. Resumen de las CC ideales. Las funciones de prueba en $y = cte$ son análogas. . .	18
2.2. Resumen de los movimientos de sólido rígido en <i>Abaqus</i> [®]	20
2.3. Desplazamientos restringidos en <i>Abaqus</i> [®] para las CC ideales.	20
3.1. Datos numéricos de la estructura; el material es un aluminio aeronáutico [6]. . .	37
3.2. Momentos de área de las secciones de la Figura 3.22.	54
3.3. Resultados de inicio de pandeo.	57
3.4. Carga crítica vs. número de remaches para $r = 200$	61
4.1. Parámetros de longitud de arco introducidos en <i>Abaqus</i> [®]	72
5.1. CC del panel en <i>Abaqus</i> [®] . Valor de U2 en $y = cte$ tomado de la Ec. (4.65).	108
5.2. Parámetros de longitud de arco introducidos en <i>Abaqus</i> [®] para el estudio de un panel en régimen de postpandeo, obtenidos tras aplicar un control del paso al LPF.	109
6.1. Presupuesto del trabajo.	122

Lista de Símbolos

Mayúsculas

A	—	Área (m^2).
C	—	Perímetro (m).
C_i	—	Constante.
D	—	Rigidez a flexión de una placa (N m).
E	—	Módulo de Young (N/m^2).
F	—	Fuerza (N).
G	—	Módulo de rigidez a cortante (N/m^2).
I	—	Momento de inercia de área (m^4).
J	—	Módulo de torsión (m^4).
K	—	Factor de pandeo (-).
\mathcal{K}	—	Rigidez adimensional de una viga (-).
L	—	Longitud (m).
M	—	Momento flector en una viga (N m) o en una placa (N m/m).
N	—	Carga en el plano (N/m).
\mathcal{N}	—	Solicitación en el plano (N/m).
P	—	Fuerza puntual (N).
\mathcal{P}	—	Ratio de carga de postpandeo (-).
Q	—	Cortante en una viga (N) o en una placa (N/m).
S	—	Superficie de control (m^2).
T	—	Momento torsor (N m).
U_i	—	Desplazamiento en <i>Abaqus</i> [®] (m).
UR_i	—	Giro en <i>Abaqus</i> [®] (rad).
U	—	Energía interna (N m).
V	—	Energía de las cargas externas (N m).
W	—	Peso (N).
X	—	Función de prueba en la dirección x (-).
Y	—	Función de prueba en la dirección y (-).

Minúsculas

a	—	Dimensión de una placa en la dirección x (m).
b	—	Dimensión de una placa en la dirección y (m).
c	—	Coefficiente de pandeo entre remaches (-).
d	—	Distancia o diámetro (m).
e	—	Posición del centro de esfuerzos cortantes (m).
f	—	Función.
h	—	Longitud característica de una sección (m).
i	—	Unidad imaginaria (-).
k	—	Rigidez por unidad de longitud de un acoplamiento elástico lineal (N/m^2) o rotacional (N/rad).
l	—	Longitud de arco (m).

m	—	Contador para los sumatorios (-).
n	—	Contador para los sumatorios (-).
p	—	Carga repartida en una placa (N/m^2) o en una viga (N/m).
q	—	Flujo cortante (N/m).
r	—	Relación de aspecto de una placa (-).
s	—	Coordenada curvilínea (m).
t	—	Espesor (m).
u	—	Desplazamiento en la dirección x (m).
v	—	Desplazamiento en la dirección y (m).
w	—	Desplazamiento en la dirección z (m).
x, y, z	—	Componentes de los ejes espaciales (m).
\bar{y}	—	Distancia en y al centro de gravedad (m).
\bar{z}	—	Distancia en z al centro de gravedad (m).

Letras griegas

α	—	Ángulo (rad).
β	—	Relación entre cargas en compresión biaxial (-).
Γ	—	Módulo de alabeo (m^6).
γ	—	Relación entre tensiones promedio y máxima.
γ_{ij}	—	Deformación angular (-).
Δ	—	Incremento.
δ	—	Relación entre perímetros (-).
ϵ	—	Deformación adimensional (-).
ϵ_{ij}	—	Deformación lineal (-).
η	—	Coordenada curvilínea adimensional (-).
κ	—	Curvatura (m^{-1}).
λ	—	Parámetro.
λ_T	—	Esbeltez torsional (-).
μ	—	Parámetro de rigidez adimensional (-).
ν	—	Coefficiente de Poisson (-).
ξ	—	Coordenada longitudinal adimensional de una viga (-).
Π	—	Energía potencial (N m).
ρ	—	Parámetro de ponderación de fuerza residual en el método de Riks (-).
σ_{ij}	—	Tensión normal (N/m^2).
ς	—	Tensión adimensional (-).
τ_{ij}	—	Tensión tangencial (N/m^2).
Φ	—	Función de tensiones de Airy (N).
ϕ	—	Giro de una sección (rad).
Ψ	—	Función de contadores y constantes geométricas.
Ω	—	Volumen de control (m^3).
ω	—	Alabeo unitario (m^2).
∇	—	Operador gradiente (m^{-1}).

LISTA DE SÍMBOLOS

Superíndices

M	—	Grado de libertad.
N	—	Grado de libertad.
τ	—	Traspuesto.

Subíndices

av	—	Valor medio.
b	—	De flexión.
c	—	De compresión.
cr	—	Crítico.
e	—	En el eje.
ef	—	Efectivo.
ext	—	Externo.
G	—	Gaussiana.
H	—	Homogéneo.
i	—	Subíndice entero.
int	—	Interno.
J	—	De Saint-Venant.
j	—	Subíndice entero.
L	—	Lateral.
l	—	Longitudinal.
max	—	Máximo.
min	—	Mínimo.
n	—	En la dirección normal.
P	—	Particular.
p	—	Referido a una placa.
r	—	De remaches.
s	—	Referido un larguerillo.
T	—	De torsión.
t	—	En la dirección tangencial.
tot	—	Total.
tr	—	De transición.
u	—	Último.
V	—	De cortante.
vm	—	De Von Mises.
w	—	Referido a una deflexión vertical.
x, y, z	—	En las direcciones de los ejes espaciales.
Γ	—	De alabeo.
ϕ	—	Rotacional.
0	—	De referencia.
∞	—	En el infinito.

Matrices y vectores

A	—	Vector de estados de equilibrio en el método de Riks.
b	—	Vector de fuerzas por unidad de volumen (N/m^3).
C	—	Vector de constantes de integración.
c	—	Vector desplazamiento residual (m).
F	—	Vector de fuerzas externas (N).
i	—	Vector unitario en dirección x (m).
j	—	Vector unitario en dirección y (m).
K	—	Matriz de rigidez (N/m).
M	—	Matriz de coeficientes.
P	—	Vector de fuerzas puntuales (N).
R	—	Vector de fuerzas internas (N).
t	—	Vector de fuerzas por unidad de superficie (N/m^2).
u	—	Vector desplazamiento (m).
v	—	Vector desplazamiento normalizado (-).
w	—	Vector de modos de pandeo (-).
w*	—	Vector de imperfecciones iniciales (-).
β	—	Vector de funciones de forma (-).
Δ	—	Vector fuerza residual (N).
ε	—	Vector de deformaciones (-).
ν	—	Vector tangente (-).
σ	—	Vector de tensiones (N/m^2).

Siglas

CC	—	Condiciones de contorno.
<i>cdg</i>	—	Centro de gravedad.
<i>cec</i>	—	Centro de esfuerzos cortantes.
<i>cte</i>	—	Constante.
<i>gdl</i>	—	Grado de libertad.
EDO	—	Ecuación diferencial ordinaria.
EDP	—	Ecuación en derivadas parciales.
err	—	Error relativo.
ESDU	—	<i>Engineering Sciences Data Unit.</i>
LPF	—	<i>Load Proportionality Factor.</i>
MEF	—	Método de los elementos finitos.
NACA	—	<i>National Advisory Committee for Aeronautics.</i>
OHC	—	<i>Open hole compression.</i>
OHT	—	<i>Open hole tension.</i>
PVE	—	Principio del valor estacionario.
VK	—	Von Karman.

1.1. Motivación

1.1.1. Introducción al pandeo en estructuras aeronáuticas

El pandeo es una inestabilidad estructural que aparece como respuesta ante un determinado estado de cargas, concretamente de compresión y cortante. Dicho fenómeno adquiere gran importancia en estructuras esbeltas y/o de pared delgada que sufren cargas en la dirección o direcciones de mayor longitud característica. Los elementos estructurales más comunes sobre los que tiene lugar el pandeo son:

- Viga: elemento unidimensional (1D, una longitud característica mucho mayor que las otras dos) que tiende a pandear ante cargas de compresión. Ante una carga ligeramente mayor que la que da lugar al inicio de pandeo, la viga desarrolla momentos flectores muy elevados que la inestabilizan rápidamente, provocando su colapso casi inmediato.
- Placa: elemento bidimensional (2D, dos longitudes características mucho mayores que la otra) que puede pandear tanto ante cargas de compresión como de cortante, ambas aplicadas en su propio plano. A diferencia de las vigas, las placas resisten mucho mejor el pandeo, pues se generan deformaciones en forma de semiondas que redistribuyen las tensiones y provocan que la estructura completa trabaje de forma óptima. Precisamente este motivo, entre otros, las hace tan atractivas en el diseño estructural de aeronaves.
- Lámina: elemento tridimensional (3D, por ejemplo, cilindro, cono, elipsoide . . .) cuyo comportamiento ante el pandeo es bastante diferente al de placas, pues generalmente desarrollan deformaciones en forma de "arrugas" en lugar de semiondas.

En estructuras aeronáuticas, están muy presentes tanto las vigas como las placas, en general de pared delgada, de modo que el pandeo se convierte inevitablemente en un fenómeno a tener en cuenta de cara al diseño. Por un lado, en la Figura 1.1 izquierda, se muestra una sección de fuselaje aeronáutico formado por una piel de aluminio (placas) rigidizada con larguerillos (vigas). Por otro lado, la Figura 1.1 derecha muestra una sección del cajón de torsión del ala de un Boeing 787-9. Ambos son ejemplos de secciones aeronáuticas sometidas a pandeo. En ambos casos, se combina la utilización de placas con vigas o larguerillos, lo que en conjunto se conoce como panel rigidizado. Estructuras como las de la Figura 1.1 son ampliamente utilizadas en aeronáutica, pues combinan la capacidad de resistir el pandeo de las placas con la buena rigidez a flexión y torsión de las vigas. En este sentido, existen dos formas o modos diferentes de que la estructura completa entre en régimen de pandeo:

- Pandeo local: aparece en elementos que estructuralmente pueden considerarse aislados. En el caso de un panel como el de la Figura 1.1 izquierda, el pandeo local tiene lugar cuando, bien los larguerillos o bien la piel (por separado), desarrolla deformaciones como consecuencia del pandeo.

- Pandeo global: se presenta en el conjunto estructural completo. Observando de nuevo la Figura 1.1 izquierda, tanto la piel como los larguerillos desarrollarían patrones de deformación similares cuando la estructura entra pandea globalmente.



Figura 1.1: Ejemplos de estructuras aeronáuticas. Izquierda: sección de fuselaje aeronáutico [17]. Derecha: cajón de torsión del ala del Boeing 787-9 [18].

Cuando en una placa se aplican cargas de compresión o cortante, el desarrollo de su respuesta estructural sigue una progresión concreta:

- Primero, la placa trabaja en régimen lineal, desarrollando deformaciones en su plano.
- A continuación, se alcanza la denominada carga crítica de pandeo, dando lugar al inicio de pandeo, que matemáticamente se conoce como punto de bifurcación. Si se aumenta la carga, la placa comienza a desarrollar desplazamientos fuera de su propio plano.
- Al sobrepasar la carga crítica, la placa entra en régimen de postpandeo; las deformaciones, que continúan desarrollándose fuera del plano, dejan de ser proporcionales a la carga.
- Una vez se alcanza la tensión de rotura en algún punto de la placa, tiene lugar el colapso. Es lo que se conoce como carga última de pandeo.

En cuanto al último punto, en un panel aeronáutico existen diferentes modos de fallo. En la Figura 1.2 se recogen los más importantes; más de un 50% están relacionados con el pandeo.

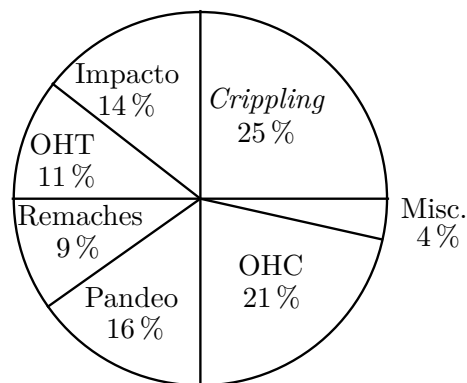


Figura 1.2: Modos de fallo de un panel aeronáutico. OHC: *open hole compression*. OHT: *open hole tension*. Misc.: misceláneos. [6]

Al trabajar en régimen de postpandeo, se desarrollan desplazamientos del orden del espesor de la estructura e incluso mayores, de modo que se entra en regímenes de comportamiento no lineales. Por lo tanto, las hipótesis de elasticidad lineal y de cinemática de pequeñas deformaciones deben ser dejadas a un lado si se quiere llevar a cabo un estudio detallado del pandeo, debiendo complementarlas además con un análisis por elementos finitos. En la Figura 1.3, se pone de manifiesto la magnitud de las deformaciones que genera el pandeo en estructuras aeronáuticas.



Figura 1.3: Entrada en régimen de postpandeo de una sección del fuselaje del Boeing B-52 [19].

Uno de los mayores retos de la industria aeronáutica es la reducción del peso de la aeronave; una estructura eficiente no sólo debe ser capaz de aguantar las cargas aplicadas sino que además debe ser ligera. Esto último no sería posible si las estructuras aeronáuticas no se diseñasen para trabajar a postpandeo, fenómeno cuya plena comprensión continúa, aún a día de hoy, siendo un reto para las grandes compañías, dadas las complejidades que ello conlleva. La problemática incluye el modelado de imperfecciones geométricas, los modelos de comportamiento plástico de materiales, la descripción detallada de la cinemática, etc. Otra ventaja de un buen diseño en el que se contempla la entrada en régimen de postpandeo es que se consigue que los paneles trabajen de forma óptima, es decir, todos los componentes desarrollan tensiones y deformaciones del mismo orden de magnitud. Además, se debe procurar que el primer pandeo se produzca en la piel del panel, consiguiendo así que las vigas o larguerillos no fallen a modo de columna; en la Figura 1.4, se aprecia el fallo por pandeo de un panel aeronáutico.

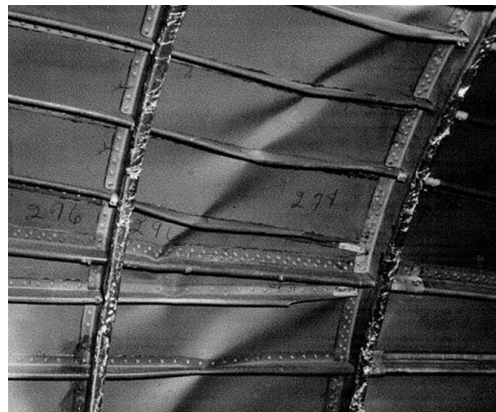


Figura 1.4: Fallo de panel aeronáutico en postpandeo [20].

1.1.2. Antecedentes

Las primeras estructuras aeronáuticas consistían en configuraciones sencillas formadas mayoritariamente por celosías. Ejemplos de ello son los fuselajes de tipo Warren y/o Pratt, similares a los mostrados en la Figura 1.5 izquierda en los que la piel no está preparada para resistir esfuerzos. Esta clase de estructuras presentaba grandes problemas de peso, además de que el pandeo era de tipo columna, pudiendo resistir muy poca carga adicional antes de colapsar. Por otra parte, estudios de la NACA han probado que la piel que constituye el alma de una viga armada no falla cuando pandeo bajo cortante, sino que desarrolla tensiones en diagonal. Ello ha permitido diseñar las denominadas estructuras semimonocasco, como la de la Figura 1.5 derecha, mucho más ligeras y donde la piel y los refuerzos resisten las cargas conjuntamente.

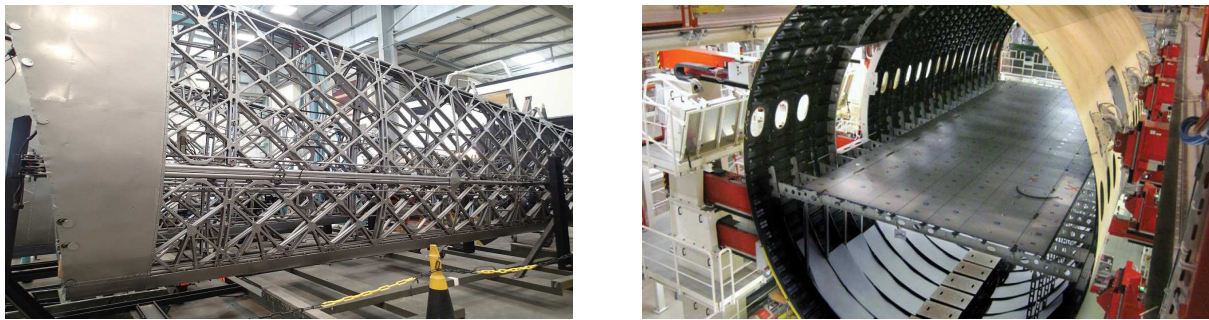


Figura 1.5: Evolución de las estructuras aeronáuticas. Izquierda: sección del fuselaje de un Vickers Wellington [21]. Derecha: sección del fuselaje de un Airbus A350 [22].

Este hecho pone de manifiesto que las placas aguantan mucho mejor el pandeo que las columnas, especialmente bajo cortante. En la Figura 1.6 izquierda, puede observarse un ensayo de una viga armada bajo cortante, mientras que en la Figura 1.6 derecha, se aprecia una sección de timón de cola donde el pandeo claramente se produce en diagonal.

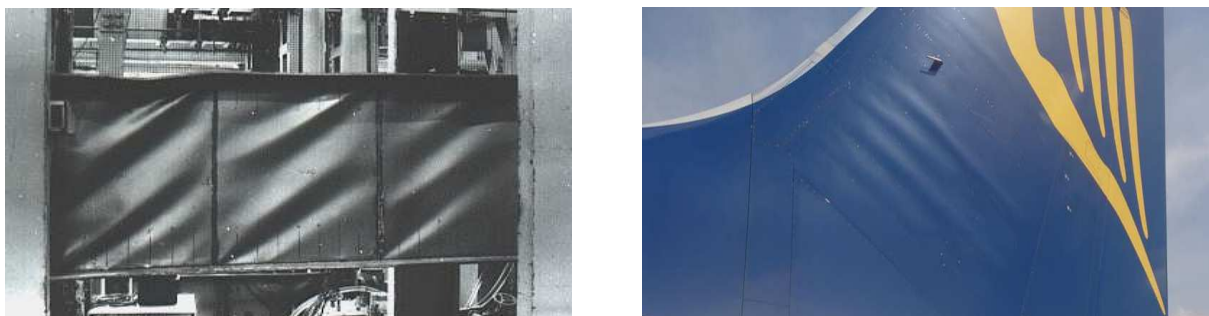


Figura 1.6: Viga armada sometida a cortante: el pandeo del alma se produce en diagonal [23]. Sección de timón de cola pandeando por sollicitación cortante [24].

Debido a las ventajas de las estructuras semimonocasco, formadas por una combinación entre placa y larguerillos, éstas se han empleado a fondo en componentes aeronáuticos. No sólo los fuselajes más recientes son ejemplo de ello, sino también los largueros principales del ala que forman el cajón de torsión, el timón de cola o los mamparos de presión (véase la Figura 1.7).

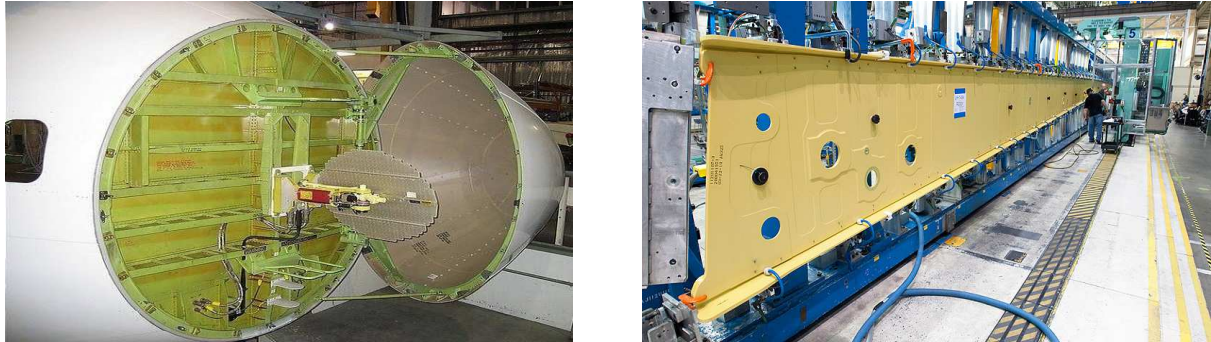


Figura 1.7: Ejemplos de estructuras aeronáuticas formadas por paneles rigidizados. Izquierda: mamparo de presión delantero [25]. Derecha: larguero principal del ala del Boeing 747-8 [26].

No obstante, una de las grandes dificultades a la hora de diseñar estructuras aeronáuticas considerando el pandeo ha sido su modelado matemático y/o geométrico, especialmente de sus condiciones de contorno CC. En consecuencia, este trabajo incide en este último aspecto realizando una aproximación más cercana a la estructura semimonocasco, ya que se estudia el panel aeronáutico en su conjunto.

1.1.3. Estado actual

Se ha visto que los componentes estructurales aeronáuticos que más ventajas presentan son las placas combinadas con larguerillos rigidizadores, constituyendo los paneles de la estructura semimonocasco. Sin embargo, para conseguir diseños eficientes y fiables es necesario contar con metodologías de cálculo que permitan obtener resultados similares a la realidad. En principio, los métodos analíticos son baratos y suponen un coste computacional pequeño, además de que permiten realizar buenas aproximaciones en una etapa preliminar de diseño. No obstante, no siempre se puede disponer de una solución analítica cerrada para cada problema, especialmente si la geometría es complicada o si se necesita simular detalladamente el postpandeo. Es por ello crucial recurrir al método de los elementos finitos MEF de cara a un diseño más avanzado, pudiendo realizar simulaciones más complejas, aunque con un coste computacional elevado, y terminar realizando ensayos experimentales que, si bien son los que mejor reproducen la realidad, no son recomendables hasta las últimas etapas de diseño debido a su elevado coste económico.

En un trabajo como el actual, es casi inevitable dejar de lado los ensayos experimentales, debiendo por tanto exprimir al máximo los resultados analíticos proporcionados por la bibliografía (o incluso ampliarlos e investigar más a fondo) y compararlos con el MEF. Los más recientes estudios relacionados con el postpandeo en placas utilizan cinemáticas de deformación intermedia, dando lugar a las ecuaciones de Von Karman, las teorías de tensión diagonal, algunas correcciones por plasticidad, etc. En el presente trabajo, se aplican varios de dichos métodos al estudio de paneles aeronáuticos y/o placas con CC elásticas y no sólo de placas o vigas por separado. Queda por tanto claro que el análisis del pandeo en estructuras aeronáuticas es un campo de investigación abierto.

1.2. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es reproducir el comportamiento de la estructura semimonocasco en régimen de postpandeo de cara a obtener un diseño resistente, barato y ligero. Para ello, se combinan las teorías de placas y vigas para conformar el estudio de paneles rigidizados. Se sigue un orden creciente de complejidad, desarrollando primero soluciones de inicio de pandeo por compresión en dos modelos de panel, continuando con un estudio en profundidad del pandeo de placas y finalizando con el estudio del postpandeo de un panel aeronáutico.

Los métodos de cálculo utilizados son los analíticos, para lo cual se utilizan programas informáticos como *Mathematica*[®] y *Matlab*[®], y el MEF, empleando el software comercial *Abaqus*[®]. Los resultados de ambos métodos se comparan también con otras referencias para discutir su alcance y llegar a varias conclusiones.

1.3. Organización de la memoria

Además de este capítulo introductorio, la memoria se contiene otros 5 capítulos, organizados de la siguiente forma:

- En el Capítulo 2, se describe la teoría de cálculo de placas rectangulares en los regímenes de pequeña e intermedia deformación. También se revisa una parte de la teoría de vigas, fundamental en el posterior cálculo de paneles.
- En el Capítulo 3, se lleva a cabo un estudio de inicio de pandeo en paneles, haciendo énfasis en el tipo de CC elásticas y la distinción entre pandeo local y global. Parte de los resultados analíticos se comparan con *Abaqus*[®] y con otras referencias externas.
- En el Capítulo 4, se estudia el postpandeo de placas sometidas a compresión utilizando la teoría de deformación intermedia. Se distinguen tres casos en función de las CC aplicadas al movimiento del plano medio de la placa. Los resultados se abordan analítica y numéricamente y se comparan a su vez con otras referencias.
- En el Capítulo 5 se realiza el estudio, tanto analítico como MEF, de un panel aeronáutico en régimen de postpandeo por compresión. Para la realización completa del capítulo, se aprovechan algunos resultados obtenidos anteriormente, habiendo sido éstos contrastados debidamente.
- En el Capítulo 6 se muestran las conclusiones, los posibles trabajos y/o vías de investigación futuras y un presupuesto global.

2.1. Teoría de placas

Las placas son elementos estructurales muy frecuentes en las estructuras aeronáuticas, debido a su excelente relación resistencia/peso. Otra propiedad que las hace interesantes es su capacidad para resistir el pandeo: mientras que las vigas colapsan casi inmediatamente después de ser aplicada la carga crítica de pandeo, las placas no sólo no colapsan, sino que pueden resistir cargas muy superiores (régimen de postpandeo), redistribuyendo además el campo de tensiones. En el presente trabajo, se trabaja con placas delgadas, es decir, con espesor mucho menor que sus lados $t \ll a, b$.

En la Figura 2.1, se presenta el sistema de referencia junto con las dimensiones y las cargas externas en una placa plana rectangular.

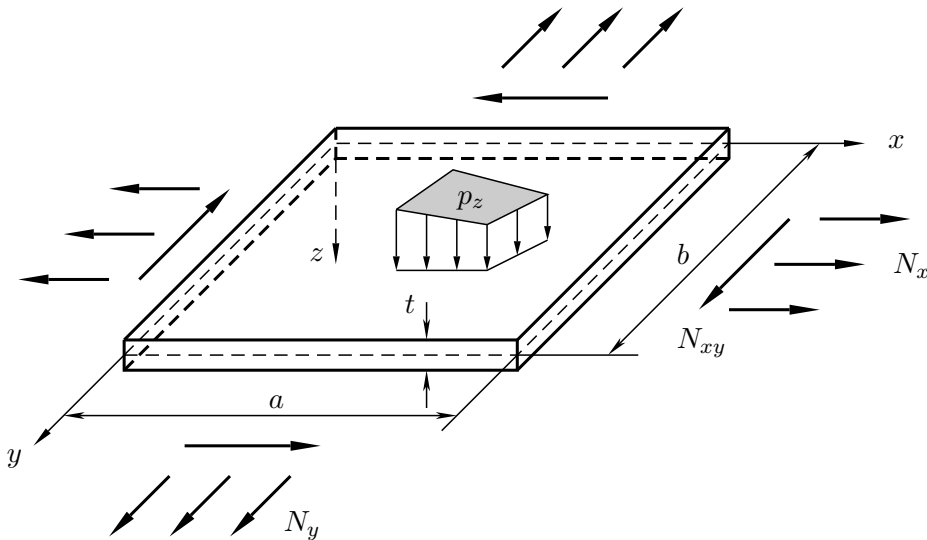


Figura 2.1: Placa plana rectangular con espesor mucho menor que los lados, $t \ll a, b$. Carga transversal al plano de la placa: p_z . Cargas aplicadas en el plano de la placa: N_x, N_y, N_{xy} .

Nótese que el eje z está dirigido hacia abajo, de modo que la carga transversal p_z es positiva en dicha dirección. Las cargas normales N_x, N_y se definen positivas a tracción y negativas a compresión, mientras que la carga cortante N_{xy} es positiva según se muestra en la Figura 2.1.

2.1.1. Teoría de pequeñas deformaciones

Ecuaciones de gobierno

La teoría de pequeñas deformaciones en placas se basa en las hipótesis de Kirchhoff [3], que permiten simplificar considerablemente el problema a partir de la formulación cinemática. Definiendo la deformación transversal $w(x, y)$ de una placa ante un cierto estado de cargas, las hipótesis de Kirchhoff reducen el problema a dos dimensiones y permiten hallar las deformaciones ε_{ij} en función de las curvaturas κ_{ij} , dando lugar a las ecuaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z \kappa_x & \varepsilon_y &= z \kappa_y & \gamma_{xy} &= 2z \kappa_{xy} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \kappa_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Esta teoría permite determinar las condiciones en las que tiene lugar el comienzo de la inestabilidad por pandeo, conocida como inicio de pandeo.

El objetivo es obtener una sola ecuación con una incógnita: el desplazamiento $w(x, y)$. Combinando las ecuaciones cinemáticas Ec. (2.1) junto con las constitutivas del material y formulando un equilibrio de fuerzas y momentos, se obtiene la ecuación diferencial de gobierno de una placa isótropa en régimen de pequeñas deformaciones [3]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p_z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

siendo $D = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)}$ la rigidez a flexión de la placa.

En el estudio del inicio de pandeo, sólo se tienen en cuenta las cargas en el plano de la placa, de modo que se puede eliminar el término p_z de la Ec. (2.2). En consecuencia, ésta se vuelve homogénea y su resolución se convierte en un problema de autovalores y autovectores, donde el comienzo del pandeo viene dado por la solución no trivial: $w \neq 0$.

Energías

Los métodos de cálculo por energías se basan en el principio del valor estacionario (PVE): dado un sistema estructural con un estado genérico de cargas, la configuración de equilibrio es aquella que minimiza su energía potencial total Π . Ésta se expresa como la diferencia entre la energía interna de deformación U y el trabajo de las cargas externas V :

$$\Pi = U - V \quad (2.3)$$

Utilizando la definición de energía interna de deformación [3] y sustituyendo las ecuaciones cinemáticas y constitutivas, se obtiene la expresión de la energía interna en una placa plana delgada que cumple las hipótesis de Kirchhoff:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dy dx \quad (2.4)$$

donde el primer término contiene el primer invariante del tensor curvatura y el segundo su determinante, conocido como curvatura gaussiana κ_G :

$$\kappa_G = \kappa_x \kappa_y - \kappa_{xy}^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (2.5)$$

Para una placa sometida únicamente a cargas en su plano, la energía externa V que éstas le aportan es la siguiente [3]:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy dx \quad (2.6)$$

El PVE se puede expresar entonces de la siguiente forma:

$$d\Pi = d(U - V) = 0 \quad (2.7)$$

donde, si las cargas aplicadas son estacionarias, la única variable que aparece en las Ecs. (2.4) y (2.6) es w . Por tanto, la Ec. (2.7) puede reformularse según se muestra:

$$\frac{\partial(U - V)}{\partial w} = 0 \quad (2.8)$$

2.1.2. Teoría de deformación intermedia: ecuaciones de Von Karman

Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones de Von Karman permiten obtener resultados precisos para movimientos del orden del espesor de la placa, lo que a su vez sirve para reproducir su comportamiento a post-pandeo en régimen de deformación intermedia. Por ello, su desarrollo implica considerar una cinemática en la que existen algunas diferencias con respecto a la Ec. (2.1) [3], [7]:

- La hipótesis de Kirchhoff que indica que el plano medio de la placa es inextensible bajo flexión ya no es aceptable.
- Se retienen los términos cuadráticos de la serie de Taylor.

Como consecuencia del primer ítem, en deformación intermedia, los desplazamientos en las direcciones x, y , esto es, u, v por flexión no son nulos.

Las relaciones cinemáticas pasan a ser no lineales:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.9}$$

Con el objetivo de eliminar las variables u, v y trabajar sólo con el desplazamiento transversal w , se desarrolla a partir de la Ec. (2.9) la ecuación de compatibilidad de Saint-Venant. Ésta se obtiene derivando ε_x dos veces respecto a y , sumándole la segunda derivada de ε_y respecto a x y restándole la segunda derivada cruzada de γ_{xy} respecto a x, y :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\tag{2.10}$$

La primera ecuación de Von Karman se deriva a partir de un equilibrio de fuerzas y momentos sobre un elemento diferencial de placa como el de Figura 2.2.

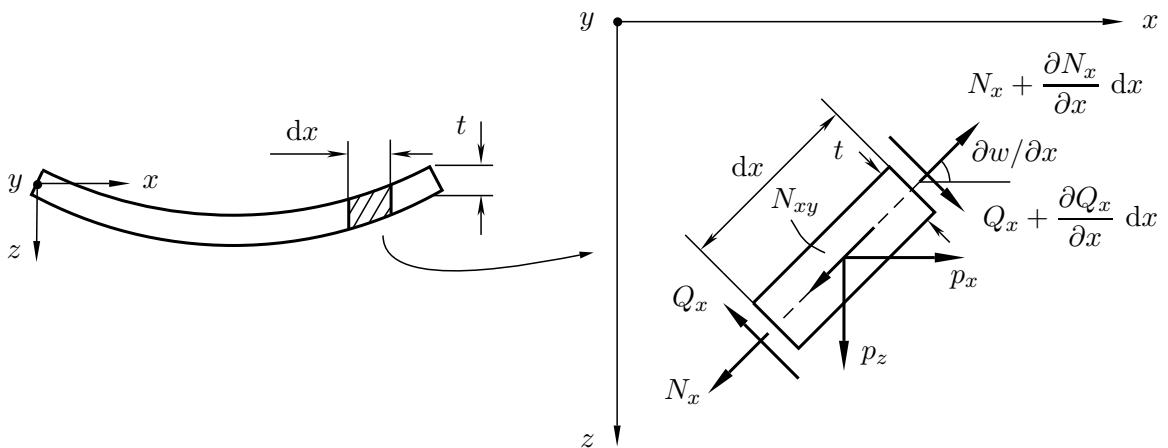


Figura 2.2: Configuración deformada de un elemento diferencial de placa en el plano xz . Para facilitar la visualización, se ha exagerado la inclinación: $\arctan(\partial w/\partial x) \cong \partial w/\partial x$.

Los valores de p_x, p_y (este último tiene la dirección perpendicular al plano de la Figura 2.2) se obtienen en función de las cargas en el plano mediante un equilibrio de fuerzas:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \cos \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy - N_x \cos \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \\
 &+ \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) \cos \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx - N_{xy} \cos \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + p_x dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Estableciendo a continuación la hipótesis de ángulo de inclinación pequeño, $\cos(\partial w/\partial x) \cong 1$, y realizando el proceso análogo en la dirección y , se obtiene:

$$p_x = -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad p_y = -\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial N_y}{\partial y} \tag{2.12}$$

Por equilibrio en el plano de la placa, se obtiene $p_x = p_y = 0$:

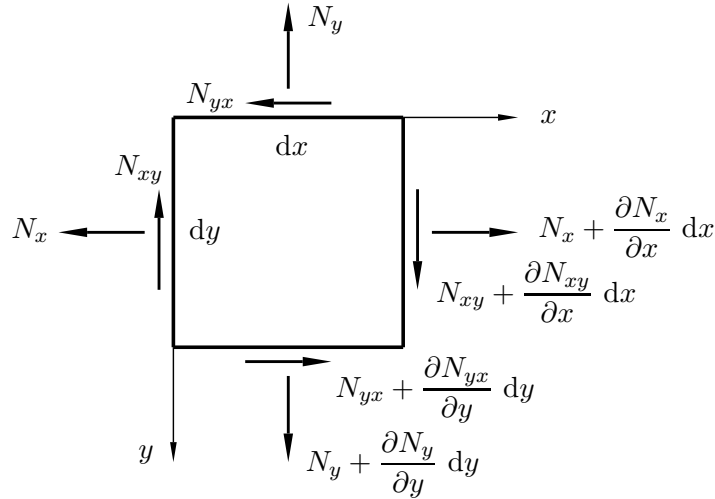


Figura 2.3: Equilibrio diferencial en el plano.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \\
 \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

siendo $N_{xy} = N_{yx}$ por equilibrio de la tensión cortante en el plano.

Dado que el objeto del desarrollo de este capítulo es el análisis del pandeo, se omite la influencia de la carga repartida p_z . Con esto en mente, se introduce la función $\Phi(x, y)$ de tensiones de Airy:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{2.14}$$

donde si la carga en el plano es constante a lo largo del espesor, se tiene: $N_{ij} = t \sigma_{ij}$.

Siendo p_x, p_y, p_z nulas, se retoma la Ec. (2.2) y sustituyendo las cargas en el plano por la función Φ de Airy de acuerdo con la Ec. (2.14), la primera ecuación de Von Karman se escribe:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)} \quad (2.15)$$

Para desarrollar la segunda ecuación de Von Karman, se deben tener presentes las ecuaciones constitutivas [3]. Escribiendo los esfuerzos N_{ij} , constantes a lo largo del espesor de la placa, en función de las deformaciones y despejando éstas últimas se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E t} (N_x - \nu N_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E t} (N_y - \nu N_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu)}{E t} N_{xy} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si se inserta la Ec. (2.16) en la Ec. (2.10), se llega a:

$$\frac{1}{E t} \left[\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} \right) - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} \right] = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

Finalmente, introduciendo la Ec. (2.14) en la Ec. (2.17) (sin olvidar la equivalencia $N_{ij} = t \sigma_{ij}$), se obtiene la segunda ecuación de Von Karman:

$$\boxed{\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \quad (2.18)$$

Energías

Al igual que en la teoría de pequeñas deformaciones, es posible trabajar con la formulación energética o débil de las ecuaciones de equilibrio. La energía interna U de una placa sometida a un régimen de deformación intermedia es igual a la suma de la energía acumulada en el régimen de pequeñas deformaciones, es decir, antes del inicio de pandeo, y la acumulada durante el postpandeo. Por tanto, a la Ec. (2.4) se le suma el término de energía interna U_l debida a la deformación longitudinal del plano medio de la placa:

$$U_l = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dy dx \quad (2.19)$$

Sustituyendo en la Ec. (2.19) la Ec. (2.16) y aplicando la definición de la función de Airy, dada en la Ec. (2.14), se obtiene:

$$U_l = \frac{t}{2E} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dy dx \quad (2.20)$$

Simplificando la Ec. (2.20) y sumándole la contribución U_b debida a flexión de la Ec. (2.4), se obtiene la energía interna de deformación total:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dy dx \quad (2.21)$$

$$+ \frac{t}{2E} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 + \nu) \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dy dx$$

Mientras el término de pequeña deformación de U contiene los parámetros del tensor curvatura, el término U_l contiene el tensor tensión en términos de Φ : primer invariante y determinante.

2.2. Teoría de vigas

Las vigas son elementos estructurales con una longitud característica mucho mayor que las otras dos. En el presente trabajo, las vigas se utilizan a modo de larguerillos en los paneles aeronáuticos, de modo que la sección de éstas es de pared delgada. Además, se trabaja con vigas cuya sección es constante a lo largo de toda su longitud.

El sistema de referencia empleado en la formulación de vigas se muestra en la Figura 2.4.

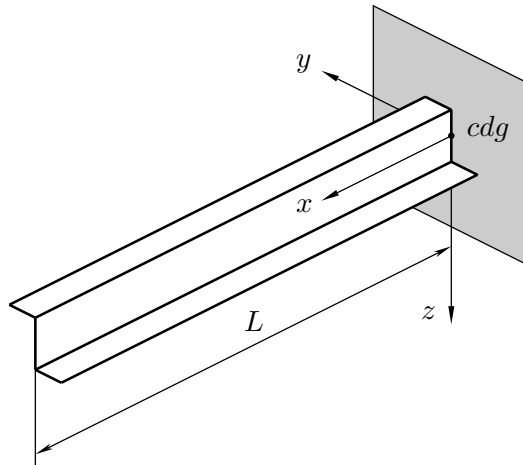


Figura 2.4: Viga de pared delgada con su correspondiente sistema de referencia.

2.2.1. Equilibrio

La formulación de equilibrio o formulación fuerte de vigas se basa otra vez en las hipótesis de Kirchhoff, aunque esta vez tanto las ecuaciones cinemáticas como constitutivas se plantean de forma unidimensional. Así tomando un elemento diferencial en configuración deformada debida a cargas transversales a su plano y de compresión:

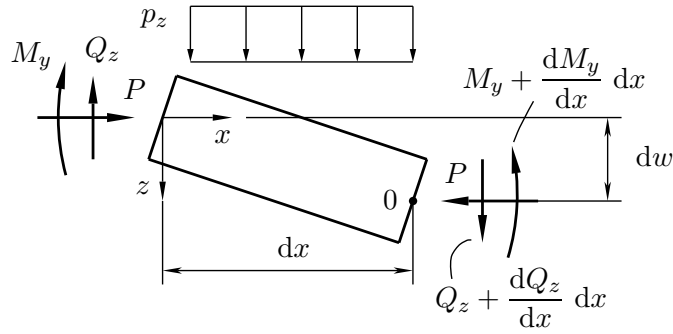


Figura 2.5: Equilibrio sobre un elemento diferencial de viga en configuración deformada.

Aplicando equilibrio de fuerzas en la dirección vertical y equilibrio de momentos respecto al punto 0, en el que el momento del cortante $Q_z + \frac{dQ_z}{dx}$ es nulo:

$$\begin{aligned} \sum F_z &= Q_z + \frac{dQ_z}{dx} x \, dx - Q_z + p_z \, dx = 0 \\ \sum M_y|_0 &= M_y + \frac{dM_y}{dx} \, dx - M_y - Q_z \, dx + p_z \, dx \frac{dx}{2} - P \, dw = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde se asume que p_z es constante en la dirección y ; en consecuencia sus unidades son (N/m), a diferencia de placas. Despreciando los términos que contienen diferenciales de orden cuadrático y aproximando el dw mediante el término de primer orden de la serie de Taylor, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_z}{dx} + p_z &= 0 \\ \frac{dM_y}{dx} - P \frac{dw}{dx} - Q_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

A continuación, si se deriva respecto a x la segunda ecuación para después combinarla con la primera, se llega a una única ecuación:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} - P \frac{d^2 w}{dx^2} + p_z = 0 \quad (2.24)$$

Recordando la ley de Navier para un estado unidimensional de tensiones [5], combinándola con la ecuación constitutiva de un material isótropo y elástico lineal e introduciendo la relación cinemática en la dirección x según la Ec. (2.1), se obtiene la relación momento-curvatura de vigas:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -E z \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{I_y} z \quad \Rightarrow \quad M_y = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -EI_y \kappa_x \quad (2.25)$$

siendo I_y el momento de inercia respecto al eje y de la sección. Finalmente, introduciendo la Ec. (2.25) en la Ec. (2.24), se obtiene la ecuación diferencial de vigas considerando cargas de flexión y compresión [2]:

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = p_z \quad (2.26)$$

El convenio general de signos asume que P es positiva a tracción y negativa a compresión; no obstante, en la Figura 2.5 se ha dibujado a compresión, de forma que en la Ec. (2.26) debe introducirse positiva a compresión.

Otro fenómeno a considerar cuando los paneles aeronáuticos trabajan a pandeo es la torsión, debida al giro de la placa cuando el larguerillo está unido a ella o a la excentricidad de las cargas. Dado que estos larguerillos son de pared delgada, es necesario considerar tanto los fenómenos debidos a torsión uniforme como los debidos al alabeo seccional, lo que se traduce en emplear la teoría de torsión mixta, cuya ley viene dada a continuación [14]:

$$T = T_J + T_\Gamma = GJ \frac{d\phi}{dx} - E\Gamma \frac{d^3 \phi}{dx^3} \quad (2.27)$$

donde ϕ es el giro de la sección, T_J el torsor de Saint-Venant y T_Γ el torsor de alabeo. Los parámetros J y Γ son los módulos de torsión y de alabeo respectivamente, y dependen únicamente de la geometría de la sección.

2.2.2. Formulación energética

Manteniendo la hipótesis de pequeñas deformaciones, es posible plantear la formulación energética o débil del problema elástico en una viga. Ello permite complementar la resolución energética de vigas con la de placas a la hora de resolver el problema de pandeo en un panel aeronáutico.

En primer lugar, la energía interna asociada a la flexión vertical de una viga se obtiene tomando la definición de energía interna de deformación e introduciendo la Ec. (2.25) [5]:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2(x)}{EI_y} dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.28)$$

donde se ha asumido que la sección de la viga tiene al menos un eje de simetría y sólo hay flexión vertical (la energía de flexión lateral es completamente análoga a la de la Ec. (2.28)). Por otra parte, las vigas de pequeña esbeltez geométrica y/o pared muy delgada pueden desarrollar tensiones y deformaciones debidas a cortante de cierta importancia. La energía interna de una viga debida a cortante en la dirección del eje z se expresa como sigue [5]:

$$U_V = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V_z^2(x)}{GA_z} dx \quad (2.29)$$

siendo A_z el área reducida a cortante según el eje z y asumiendo que sólo hay cortante en dicha dirección (de nuevo, la energía por cortante en la dirección y es análoga a la Ec. (2.29)). Finalmente, la torsión en vigas de pared delgada se presenta en general de dos formas: si $T_J(x) = GJ \phi'(x)$ es el torsor de Saint-Venant y $M_\Gamma = -E\Gamma \phi''(x)$ el bimomento de alabeo [14]. La energía interna asociada (U_J la de Saint-Venant y U_Γ la alabeada) es la siguiente:

$$\begin{aligned} U_J &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T_J^2(x)}{GJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx \\ U_\Gamma &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_\Gamma^2(x)}{E\Gamma} dx = \frac{1}{2} \int_0^L E\Gamma \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.30)$$

El giro de la sección de los larguerillos contenidos en un panel aeronáutico puede expresarse según la relación $\phi = \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{n_i}$ gracias a las hipótesis de Kirchhoff y asumiendo $\phi = cte$ en toda la sección; n es la coordenada normal de la placa (la coordenada tangencial se denomina t) y n_i la posición que ocupa el larguerillo. Ello permite expresar las energías de viga y placa en función de una sola incógnita. La Figura 2.6 ayuda a entender con mayor claridad esta relación.

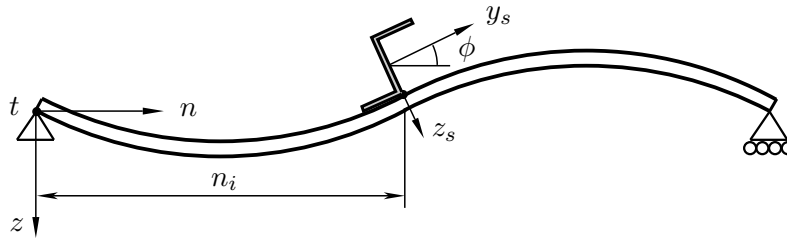


Figura 2.6: Giro de un larguerillo contenido en un panel aeronáutico; coordenadas y_s, z_s referidas a la sección del larguerillo.

Si además se necesita obtener la energía debida a la fuerza puntual externa P , puede recuperarse la Ec. (2.6) e integrar la carga N_x en el perímetro del larguerillo:

$$V_s = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (2.31)$$

2.3. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno CC son necesarias para determinar la solución de pandeo, ya que las ecuaciones de gobierno son diferenciales. Generalmente, se aplican en los bordes de la placa e introducen los siguientes tipos de restricciones:

- Restricciones geométricas: imponen restricciones al movimiento, ya sea desplazamiento o giro, de los bordes de la placa. Se conocen también como CC esenciales o de Dirichlet.
- Restricciones de fuerza: se aplican a esfuerzos internos en los bordes de la placa, ya sea momentos o cortantes. También se denominan CC naturales o de Neumann.

En muchas ocasiones, la resolución del pandeo de placas y/o paneles pasa por emplear métodos semianalíticos que asumen una solución w que puede separarse como el producto de una función dependiente de x y otra de y :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} X(x) Y(y) \quad (2.32)$$

siendo $X(x)$, $Y(y)$ funciones de prueba que deben satisfacer las CC y w_{mn} el término general del doble sumatorio.

La resolución de las ecuaciones en su forma fuerte implica que se deben cumplir tanto las restricciones geométricas como las de fuerza para satisfacer la Ec. (2.2) en inicio de pandeo y las Ecs. (2.15) y (2.18) en postpandeo. En cuanto a la formulación débil, basada en la resolución por energías, basta con que se cumplan las restricciones geométricas.

2.3.1. Condiciones de contorno ideales

Las CC ideales se aplican normalmente en problemas académicos o de carácter orientativo, siendo las más comunes:

- Empotramiento (C, *clamping*): se restringe el desplazamiento longitudinal en cualquier dirección así como el giro en el borde de la placa, de modo que la primera derivada de w en la dirección normal es nula.
- Articulación (S, *simple support*): se restringe el desplazamiento en cualquier dirección pero se permite el giro libre en el borde.
- Corredera (R, *roller*) se restringe el giro en el borde de la placa pero no el movimiento w .
- Borde libre (F, *free*): se permite cualquier tipo de movimiento.

En la práctica, las placas suelen estar delimitadas en sus bordes por vigas cuya función es rigidizadora. En primera aproximación, las vigas de escasa rigidez torsional, por ejemplo, los largueros de un ala o del fuselaje de un avión, se pueden modelar como articulaciones. Por el contrario, aquellas que presentan elevada rigidez a torsión se pueden modelar en forma de empotramientos, siendo un ejemplo de ello las cuadernas del fuselaje.

En la Tabla 2.1, se ofrece un resumen de las restricciones geométricas y de fuerza que cada una de estas CC impone, así como algunas posibles funciones de prueba [2].

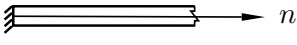
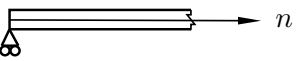
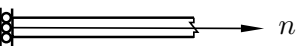
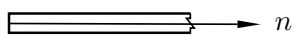
CC	Representación	Restr. geométrica	Restr. fuerza	F. prueba $x = cte$
C		$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$	-	$1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)$
S		$w = 0$	$M_n = 0$	$\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$
R		$\frac{\partial w}{\partial n} = 0$	$Q_n = 0$	$\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$
F		-	$M_n = 0, Q_n = 0$	$\left(1 - \frac{x}{a}\right)^m$

Tabla 2.1: Resumen de las CC ideales. Las funciones de prueba en $y = cte$ son análogas.

Además, la Figura 2.7 muestra la simbología empleada para cada una de las CC ideales de placa:

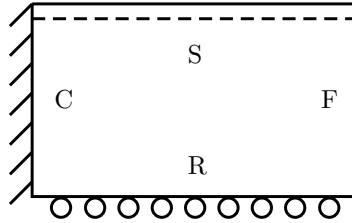


Figura 2.7: CC ideales en una placa.

Resulta interesante tener en cuenta que para placas con todos sus lados restringidos, la Ec. (2.4) se simplifica considerablemente, pues la curvatura gaussiana (véase la Ec. (2.5)) integra a cero. Así, asumiendo que w se puede expresar según la Ec. (2.32) e integrando por partes en y el segundo término de la Ec. (2.5) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy dx &= \left\{ \begin{array}{l} f_1 \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Rightarrow df_1 \equiv \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dy \\ df_2 \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Rightarrow f_2 \equiv \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (2.33) \\
 &= \int_0^a \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dy dx
 \end{aligned}$$

A continuación, se integra por partes en x el segundo término del resultado anterior:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dy dx &= \left\{ \begin{array}{l} f_1 \equiv \frac{\partial w}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad df_1 \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \\ df_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad f_2 \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{array} \right\} \\ &= \int_0^b \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy dx \end{aligned} \quad (2.34)$$

quedando:

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dy dx = \int_0^a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^b dx - \int_0^b \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_0^a dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy dx \quad (2.35)$$

Finalmente, la integral en toda el área de la placa de la Ec. (2.5) es:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \kappa_G dy dx &= - \int_0^a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^b dx + \int_0^b \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_0^a dy = \\ &= - \int_0^a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{y=b} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=b} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=0} \right] dx + \\ &\quad + \int_0^b \left[\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=a} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=a} - \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] dy \end{aligned} \quad (2.36)$$

A partir de este resultado y de la Tabla 2.1, se puede realizar el siguiente razonamiento:

- Si un borde está restringido, bien con un empotramiento o bien con una corredera, las derivadas primeras en su dirección normal evaluadas sobre éste se anulan.
- Si un borde está restringido con una articulación continua sobre él, las derivadas primeras y segundas en su dirección tangencial evaluadas en dicho borde se anulan. Como consecuencia, al aplicar la condición de momento nulo en el borde articulado, la derivada segunda en su dirección normal también se anula.

Es decir, cualquiera que sea la combinación de CC de la placa, si todos los bordes están restringidos (excepto cuatro correderas, ya que en dicho caso la placa y sus restricciones no configurarían una estructura estable), la integración de la curvatura gaussiana en toda la placa se anula.

Normalmente, las CC ideales se establecen en las placas que conforman los paneles aeronáuticos según el tipo de larguerillos que éstos a su vez contienen. Si son de baja rigidez torsional (sección transversal abierta), el panel gira con facilidad y pueden modelarse como articulaciones. Por el contrario, los larguerillos de elevada rigidez a torsión restringen dificultando el giro del panel y pueden modelarse como empotramientos. En la Figura 2.8, puede visualizarse el comportamiento de un panel en función del tipo de larguerillos que contiene.

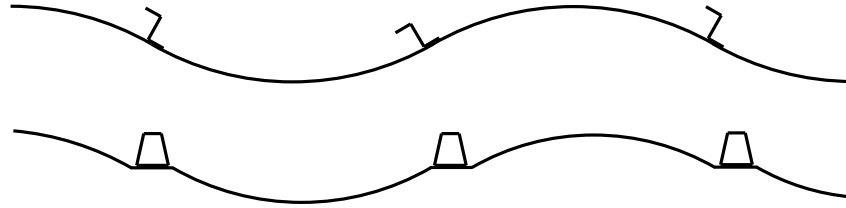


Figura 2.8: Deformada y giro de un panel. Arriba: larguerillos de sección abierta. Abajo: cerrada.

En *Abaqus*[®], las CC se introducen a partir de fuerzas o desplazamientos: Neumann y Dirichlet respectivamente. En el presente trabajo, se emplean las CC de Dirichlet, basadas en la restricción de movimientos de sólido rígido. Éstos se resumen en la Tabla 2.2 con la notación de *Abaqus*[®].

	Eje x	Eje y	Eje z
Desplazamiento	U1	U2	U3
Giro	UR1	UR2	UR3

Tabla 2.2: Resumen de los movimientos de sólido rígido en *Abaqus*[®].

En caso de emplear CC ideales en el MEF, es necesario introducir una combinación basada en los desplazamientos de la Tabla 2.2 en los bordes de la placa o en los extremos de los larguerillos. En la Tabla 2.3, se muestran los desplazamientos de sólido rígido impedidos en cada CC ideal.

CC	$x = cte$	$y = cte$
S	U3, UR3	U3, UR3
C	U3, UR2, UR3	U3, UR1, UR3
R	UR2, UR3	UR1, UR3
F	-	-

Tabla 2.3: Desplazamientos restringidos en *Abaqus*[®] para las CC ideales.

2.3.2. Condiciones de contorno elásticas

Si se desea obtener una solución analítica más realista, es necesario prescindir del modelado de CC ideales debidas a la colocación de larguerillos en las placas. Esto obliga a trabajar tanto con placas como con vigas para obtener así una mejor aproximación a los paneles que conforman la estructura semimonocasco.

En primera aproximación, es posible modelar los larguerillos en los bordes a partir de acoplamientos elásticos, ya sean lineales o rotacionales:

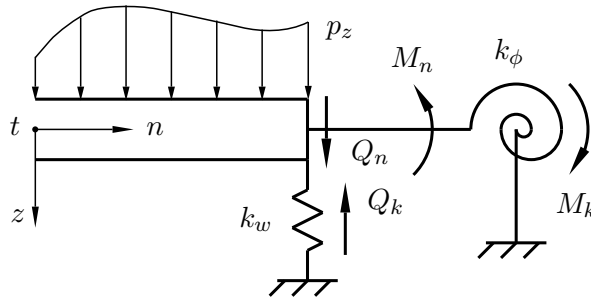


Figura 2.9: Borde de placa con acoplamientos elástico lineal de rigidez k_w y elástico rotacional de rigidez k_ϕ , ambas por unidad de longitud.

Aplicando equilibrio de fuerzas y momentos en el borde con ayuda de las expresiones de los cortantes Q_n y momentos M_n de placa [3], se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 &\Rightarrow Q_n = Q_k \Rightarrow -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} \right) = -k_w w \\ \sum M_t = 0 &\Rightarrow M_n = M_k \Rightarrow -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = -k_\phi \frac{\partial w}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para formular las CC, la Ec. (2.37) podría aplicarse a los bordes de una placa si se conociese el valor de las constantes de rigidez.

Es posible obtener aproximaciones más realistas empleando la teoría de vigas. La Figura 2.10 muestra una sección de placa con un larguerillo de sección tipo “ángulo” o L, de poca rigidez a torsión. Este larguerillo, muy empleado en vigas armadas, podría modelarse como un borde articulado. Nótese que sólo hay apoyos en los extremos del larguerillo, lo cual podría constituir las alas *flanges* de una viga armada o las costillas de un ala.

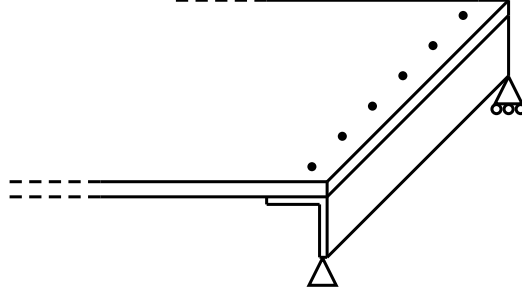


Figura 2.10: Borde de placa delimitado por un larguerillo.

Aplicando equilibrio de fuerzas y momentos de forma similar a la Figura 2.9, pero empleando la formulación de vigas (concretamente las Ecs. (2.26) y (2.27)), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 &\Rightarrow -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} \right) = -EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \sum M_t = 0 &\Rightarrow -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(GJ \frac{\partial \phi}{\partial t} - E\Gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde se ha despreciado la flexión lateral del larguerillo, P es el axil externo aplicado, en caso de existir, y ϕ se relaciona con w según muestra la Figura 2.6. Asimismo, los momentos de área I_y , Γ , que aparecen en la Ec. (2.38), de la sección del larguerillo de la Figura 2.10, deben estar referidos al punto de unión de éste con la placa o a la línea media de ésta. Por otra parte, si no existe un axil P aplicado sobre el larguerillo sino que la carga N_x se aplica en el borde completo del panel, el valor de P equivalente es:

$$P = \int_{C_s} N_x \, ds \quad (2.39)$$

siendo C_s el perímetro de la sección del larguerillo. Si N_x y t son constantes, la Ec. (2.39) se convierte en:

$$P = N_x C_s = \frac{N_x A}{t} \quad (2.40)$$

3

Inicio de pandeo en paneles

El estudio de la inestabilidad estructural por pandeo comienza determinando las condiciones de inicio de pandeo. Esto consiste, a grandes rasgos, en encontrar las cargas críticas y los modos de pandeo, ya sea de la estructura completa (pandeo global) o de una parte concreta de ésta (pandeo local). A la hora de presentar comparaciones o estudios paramétricos entre distintas configuraciones, es frecuente adimensionalizar la carga crítica N_{cr} para hacerla independiente del material y de parte de la geometría, dando lugar al factor K de pandeo:

$$K = \frac{N_{cr}}{\pi^2 D / b^2} \quad (3.1)$$

Existen numerosos estudios dedicados al estudio de inicio de pandeo en placas y vigas por separado. No obstante, de cara a un estudio del comportamiento a postpandeo, es interesante analizar el comportamiento de la configuración semimonocasco completa, es decir, el panel aeronáutico. Como ya es sabido, éste se construye a partir de un revestimiento en forma de piel rigidizada con una serie de vigas o larguerillos. Ello permite modelar la estructura mediante placas a las que se ensamblan una serie de vigas.

En este capítulo, se efectúa un estudio detallado de una placa con CC elásticas y un panel consistente en una placa articulada con un larguerillo ensamblado en mitad de ésta. Pese a que puedan parecer casos sencillos, dan pie a numerosos detalles y conclusiones que son de gran utilidad en análisis de postpandeo.

3.1. Métodos de resolución

3.1.1. Resolución analítica

El inicio de pandeo se puede resolver de forma bastante precisa utilizando la teoría de pequeñas deformaciones, basada en las hipótesis de Kirchhoff en placas y en los modelos de Euler-Bernoulli y/o Timoshenko para vigas.

Cuando las CC son iguales en dos de los bordes enfrentados de una placa o panel, resulta útil emplear el método de Levy [3]. Este método consiste en definir $w(x, y)$ en serie simple de Fourier mediante una función de prueba $X_m(x)$ en la coordenada de una de las CC conocidas y dejar la función correspondiente a la otra coordenada como incógnita $Y(y)$, por ejemplo:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m X_m(x) Y(y) \quad (3.2)$$

Introduciendo la Ec. (3.2) en la Ec. (2.2), se llega a una ecuación diferencial ordinaria EDO de cuarto orden, generalmente de coeficientes constantes. Cuando sólo hay cargas aplicadas en el

plano de la placa, dicha EDO es además homogénea; para calcular las constantes de integración a partir de las CC se llega a un sistema matricial homogéneo. Las cargas críticas de inicio de pandeo proporciona la solución no trivial de dicho sistema, que se obtiene igualando el determinante de la matriz de coeficientes a cero: problema de autovalores y autovectores. El método de Levy, presenta algunas ventajas, como son la posibilidad de obtener una solución analítica bastante precisa en muchos casos y la independencia del coste computacional con el número de términos de la función $w(x, y)$. Sin embargo, también presenta diversos inconvenientes:

- El estudio de paneles a partir del método de Levy queda limitado a aquellos que cuenten como mínimo con un eje central de simetría y cuyas CC en los bordes paralelos a dicho eje permitan encontrar una función de prueba conocida. Además, es imperativo que dicha función cumpla tanto las CC geométricas como las de fuerza.
- A la hora de establecer las CC en el estudio de paneles, es necesario realizar un equilibrio diferencial de fuerzas y/o momentos en el eje donde se encuentran situados los larguerillos. Dicho equilibrio varía dependiendo de los fenómenos a tener en cuenta y de la posición que ocupan dichos larguerillos. Esto complica la posibilidad de automatizar el problema.
- La ecuación que aparece a la hora de igualar a cero el determinante de la matriz de coeficientes es altamente no lineal. Además, suele presentar más de una raíz en el dominio de las cargas críticas, lo cual dificulta encontrar la solución deseada. Una vez más, este hecho reduce la posibilidad de automatizar el método de Levy orientado al inicio de pandeo.

Por otra parte, existen varios métodos basados en el PVE, cuya aplicación en cálculo estructural se traduce la minimización de la energía potencial total de una estructura. En este capítulo, se utiliza el método de Ritz, basado también en la elección de funciones de prueba pero esta vez en ambas coordenadas x, y :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m f_m(x, y) \quad (3.3)$$

siendo $f_m(x, y)$ la función de prueba, la cual puede expresarse como el producto de dos funciones X, Y y/o incluir un contador para cada una, por ejemplo: X_m, Y_n . El método de Ritz establece que, dado un número concreto de términos de la Ec. (3.3), cada uno de ellos debe provocar que la energía potencial total sea mínima, es decir:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_1} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_m} = 0 \quad (3.4)$$

conformando así un sistema de m ecuaciones ($m \times n$ en caso de utilizar dos contadores m, n , uno para cada función de prueba) en el que las incógnitas son los coeficientes w_m . Además, las energías U, V son función cuadrática de w_m , de modo que al derivar la relación es lineal y la Ec. (3.4) conduce a un sistema lineal homogéneo en el cual el inicio de pandeo pasa por encontrar su solución no trivial. Matemáticamente, esto constituye una vez más un problema de autovalores N_{cr} , cada uno de los cuales lleva asociados una serie de autovectores o modos de pandeo. Las ventajas principales del método de Ritz son que la función de prueba no necesita satisfacer las restricciones de fuerza, sino sólo las geométricas, ni la Ec. (2.2) *per se* y que la

estructura no necesita contar con ningún eje de simetría. Por otra parte, sus inconvenientes son la dificultad de escoger la función o funciones de prueba en algunos casos y el aumento importante de coste computacional a medida que aumenta el número de términos de la Ec. (3.3).

3.1.2. Resolución numérica

La resolución numérica de inicio de pandeo se aborda mediante el MEF, empleando el software comercial *Abaqus*[®]. En términos físicos, el inicio de pandeo es un problema de estabilidad estática de la estructura, de modo que conviene emplear la formulación débil de las ecuaciones de la elasticidad con un enfoque energético o variacional. Esto significa que, una vez discretizado el dominio de cálculo en una malla, se calculan la matriz de rigidez \mathbf{K} y el vector de fuerzas externas \mathbf{F} asociadas a cada elemento a partir de sus correspondientes energías interna y externa respectivamente, y posteriormente se ensamblan al sistema completo:

$$\begin{aligned} U &\approx \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \\ V &\approx \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_A \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} \, dS + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{P} &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde los vectores \mathbf{b} , \mathbf{t} y \mathbf{P} son las fuerzas de volumen, superficie y puntuales respectivamente. Obtenidas la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{F} del sistema completo, se minimiza la energía potencial aplicando el PVE:

$$\begin{aligned} \Pi &= U - V \approx \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

A la hora de plasmar lo anterior en *Abaqus*[®], se utiliza el *subspace eigensolver*, basado en el cálculo de autovalores y autovectores en la transición de equilibrio estable (prepandeo) a inestable (postpandeo) dada por la Ec. (3.6). Dado que las cargas críticas dependen de la geometría, material y CC, el *solver* sólo debe encontrar los autovalores de la matriz de rigidez completa:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0} &\Rightarrow \det(\mathbf{K}) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para que esto suceda, el programa sólo admite cierto tipo de cargas, esto es, aquellas que puedan inducir inestabilidad por pandeo: cargas en el plano (*shell edge loads*), cargas puntuales en los extremos (*concentrated forces*), diferencias de temperatura, etc.

Se utilizan CC esenciales o de Dirichlet, basadas en la restricción de movimientos, a la hora de comparar la solución analítica de problemas ideales. En caso de introducir CC basadas en larguerillos o acoplamientos elásticos en el presente capítulo, basta con ensamblar un larguerillo en la frontera de la placa dentro del contexto de modelado geométrico.

El MEF presenta ciertas ventajas en los cálculos de inicio de pandeo de paneles:

- Permite encontrar una solución alternativa a la analítica, pudiendo así comparar ambas y extraer conclusiones sobre ciertas hipótesis.
- Posibilita analizar estructuras más complejas que las que permiten los métodos analíticos.
- El coste computacional no aumenta significativamente si se desea obtener un mayor número de autovalores y autovectores.
- Dado que las placas y las vigas suelen ser geometrías sencillas, no es necesario refinar excesivamente la malla *a priori*.

Pero también varios inconvenientes:

- La solución es aproximada; esto no sólo es perjudicial desde un punto de vista de la precisión, sino que implica que el equilibrio no siempre se cumple en la frontera entre elementos o en su interior (sí en los nodos), lo cual es problemático a la hora de interpolar.
- El coste computacional aumenta al calcular geometrías complejas y/o refinar la malla.

En el presente capítulo, la solución numérica se utiliza como complemento a la analítica, con el objetivo de analizar las similitudes y diferencias y aprovecharlas para otros estudios.

3.2. Placa con bordes elásticos

Una primera aproximación al pandeo de paneles es el estudio de placas con bordes elásticos. Esto permite analizar casos intermedios entre CC articuladas y empotradas mediante la teoría de CC elásticas del Capítulo 2.

3.2.1. Restricciones al movimiento lateral

En este caso, existe algún componente (larguerrillo, muelle ...) que aporta cierta rigidez k_L al movimiento en el plano de los bordes no cargados de la placa, como en la Figura 3.1.

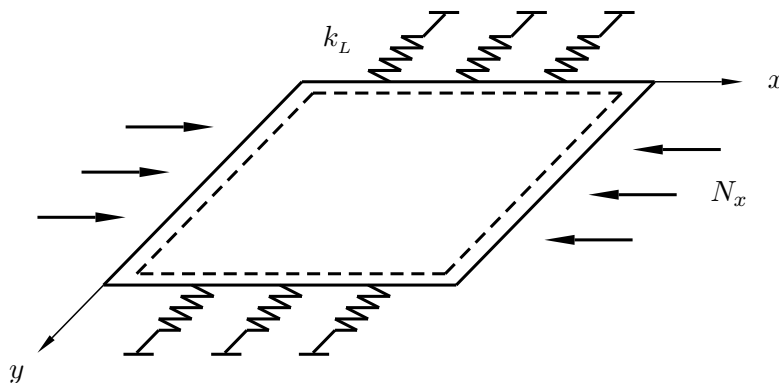


Figura 3.1: Placa articulada con restricciones al movimiento lateral en $y = 0, b$.

Nótese que el hecho de que todos los bordes de la placa estén articulados no contradice que pueda existir rigidez lateral k_L , ya que las articulaciones deslizantes sólo restringen el movimiento vertical de los bordes.

Aparece una reacción lateral como consecuencia de la coacción del efecto Poisson. Aplicando equilibrio de fuerzas en uno de los bordes $y = cte$ se puede despejar el valor de la reacción, representada por la carga N_y lateral:

$$\sum F_y = -N_y - k_L v = 0 \quad \Rightarrow \quad N_y = -k_L v \quad (3.8)$$

Se escribe ésta con signo negativo para considerar que la reacción es una compresión. El movimiento v en la dirección del eje y se calcula sabiendo que con cargas inferiores a la de inicio de pandeo la sollicitación N_y es constante a lo largo de todo el borde; en consecuencia, su deformación ε_y también lo es y la relación cinemática Ec. (2.1) segunda permite obtener:

$$\varepsilon_y = \frac{N_y - \nu N_x}{E t} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v = \int_0^b \varepsilon_y \, dy = \frac{N_y - \nu N_x}{E t} b \quad (3.9)$$

Introduciendo la Ec. (3.8) en la Ec. (3.9) segunda y despejando se obtiene:

$$N_y = \frac{\nu \mu_L}{1 + \mu_L} N_x \quad (3.10)$$

donde $\mu_L = \frac{k_L b}{E t}$ es la rigidez adimensionalizada.

Se ha visto que introducir rigidizadores laterales k_L se traduce en una carga adicional en la dirección perpendicular debida del efecto Poisson. La solución K de inicio de pandeo para una compresión biaxial general en placas con todos sus bordes articulados se da en [12]:

$$K = \frac{\left(\frac{m^2}{r^2} + n^2 \right)^2}{\frac{m^2}{r^2} + \beta n^2} \quad \beta = \frac{N_y}{N_x} = \frac{\nu \mu_L}{1 + \mu_L} \quad (3.11)$$

Cabe mencionar que la solución de la Ec. (3.11) coincide con la que proporciona [10] para $m = n = 1$ y $r = 1$. El valor de β para valores extremos de rigidez lateral μ_L es:

$$\begin{aligned} \mu_L = 0 & \quad \Rightarrow \quad \beta = 0 \\ \mu_L = \infty & \quad \Rightarrow \quad \beta = \nu \end{aligned} \quad (3.12)$$

Lógicamente, si no hay rigidez lateral no existe restricción al desplazamiento en la dirección y , de modo que no hay carga N_y inducida. Por otra parte, si el movimiento lateral está completamente restringido se recupera la carga $N_y = \nu N_x$ inducida por efecto Poisson.

La curva de inicio de pandeo se representa en la Subsección 3.2.4, contrastándola con *Abaqus*[®] y la referencia [9].

3.2.2. Restricciones al giro

La restricción al giro de los bordes de la placa implica la existencia de cierta rigidez a la rotación de los mismos, de modo que la CC es intermedia entre articulación y empotramiento.

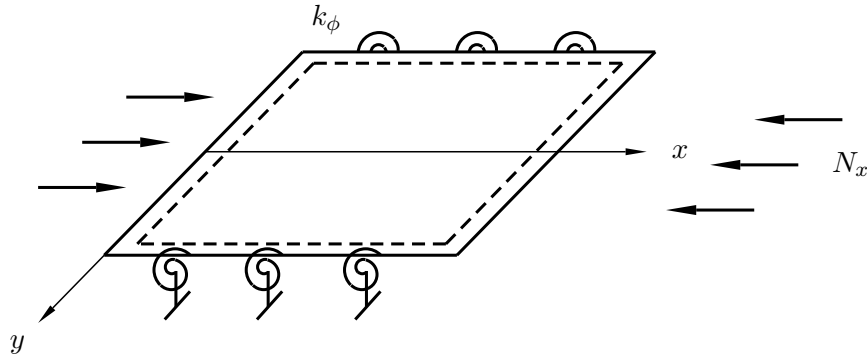


Figura 3.2: Placa con restricciones al giro de los lados $y = \pm b/2$.

Las articulaciones en $y = \pm b/2$ no introducen restricción al giro de estos bordes. Por tanto, en la Figura 3.2 una articulación implica $k_\phi = 0$, mientras que una restricción completa al giro $k_\phi \rightarrow \infty$; esta CC no tiene por qué ser un empotramiento, ya que la traslación lateral es libre.

Para resolver el problema de inicio de pandeo, se utiliza el método de Levy. Se comienza expresando la deformada $w(x, y)$ como el sumatorio simple del producto una función seno en dirección x y otra desconocida en dirección y :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) Y(y) \quad (3.13)$$

Sustituyendo la Ec. (3.13) en la Ec. (2.2) y estableciendo $N_y = N_{xy} = 0$, se obtiene:

$$\frac{d^4 Y(y)}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \right] Y(y) = 0 \quad (3.14)$$

La Ec. (3.14) es una EDO de cuarto orden y coeficientes constantes, es decir, tiene solución analítica. Nótese que si N_x fuese variable, los coeficientes no serían constantes y la resolución de la Ec. (3.14) sería muy complicada. La función $Y(y)$ se obtiene mediante la ecuación característica:

$$\lambda^4 - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \right] = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} \pm \sqrt{\frac{N_x}{D}} \right)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_3 \end{array} \right\} = \pm \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} + \sqrt{\frac{N_x}{D}} \right)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 \\ \lambda_4 \end{array} \right\} = \pm i \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(-\frac{m\pi}{a} + \sqrt{\frac{N_x}{D}} \right)}$$
(3.15)

En consecuencia, $Y(y)$ se escribe en suma de exponenciales con argumentos λ_1, λ_2 . De la segunda Ec. (3.15), se extrae un signo negativo de la raíz cuadrada en forma de unidad imaginaria, lo que implica asumir que $\sqrt{N_x/D} > m\pi/a$ y permite expresar $Y(y)$ con funciones trigonométricas:

$$Y(y) = C_1 \cosh \lambda_1 y + C_2 \sinh \lambda_1 y + C_3 \cos \lambda_2 y + C_4 \sin \lambda_2 y$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} + \sqrt{\frac{N_x}{D}} \right)} \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{m\pi}{a} \left(-\frac{m\pi}{a} + \sqrt{\frac{N_x}{D}} \right)}$$
(3.16)

A continuación, se imponen las CC en los bordes $y = cte$; no obstante, primero se establece una hipótesis fundamental: se asume que el primer pandeo se produce con modos simétricos respecto a la línea central $y = 0$ de la placa (en cada análisis MEF se comprueba que esto realmente es así). Esta hipótesis permite establecer las CC (desplazamiento vertical y momento) en sólo uno de los dos bordes $y = cte$:

$$w\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y\left(-\frac{b}{2}\right) = 0$$
(3.17)

Los momentos de reacción en $y = \pm b/2$ ahora no son nulos, pues existe un acoplamiento elástico rotacional que impone una restricción al giro. Asumiendo que el comportamiento de este acoplamiento es lineal (véase la Ec. (2.37)), la CC de momento en $y = -b/2$ queda de forma similar a la referencia [13]:

$$M_y\left(x, -\frac{b}{2}\right) = \begin{cases} -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=-b/2} \\ -k_\phi \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-b/2} \end{cases}$$
(3.18)

$$Y''\left(-\frac{b}{2}\right) - \frac{k_\phi}{D} Y'\left(-\frac{b}{2}\right) = 0$$

donde en la Ec. (3.18) se ha asumido que los bordes $y = \pm b/2$ tienen apoyos continuos en toda su longitud, de manera que $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ es nula en $y = -b/2$ y la primera implica la segunda.

La igualdad de CC en los lados $y = cte$ implica incluir las dos CC adicionales de simetría en $y = 0$, que son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b/2} &= - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-b/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Combinando las Ecs. (3.19), (3.17) y (3.18) se plantea un sistema matricial lineal homogéneo del tipo $\mathbf{M} \cdot \mathbf{C} = 0$, donde \mathbf{C} es el vector de constantes C_i y \mathbf{M} la matriz de coeficientes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 2 \lambda_1 C_{\lambda_1} & 0 & 2 \lambda_2 C_{\lambda_2} \\ C_{\lambda_1} & -S_{\lambda_1} & C_{\lambda_2} & -S_{\lambda_2} \\ \lambda_1^2 C_{\lambda_1} + \frac{k_\phi \lambda_1}{D} S_{\lambda_1} & -\lambda_1^2 S_{\lambda_1} - \frac{k_\phi \lambda_1}{D} C_{\lambda_1} & -\lambda_2^2 C_{\lambda_2} - \frac{k_\phi \lambda_2}{D} S_{\lambda_2} & \lambda_2^2 S_{\lambda_2} - \frac{k_\phi \lambda_2}{D} C_{\lambda_2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

donde λ_1, λ_2 se definen en la Ec. (3.16) y $C_{\lambda_1} = \cosh\left(\frac{b \lambda_1}{2}\right)$, $S_{\lambda_1} = \sinh\left(\frac{b \lambda_1}{2}\right)$ (ídem con λ_2).

Es frecuente adimensionalizar la rigidez k_ϕ según la relación:

$$\mu_\phi = \frac{k_\phi b}{D} \quad (3.21)$$

La carga crítica de pandeo, implícita en λ_1, λ_2 , se obtiene resolviendo:

$$\det(\mathbf{M}) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_x \rightarrow N_{cr} \quad (3.22)$$

Esta ecuación es altamente no lineal y debe resolverse numéricamente para cada valor de m y r .

Los resultados de se muestran en la Subsección 3.2.4 junto con los del apartado anterior.

3.2.3. Método de los elementos finitos

El cálculo por elementos finitos se realiza con ayuda del software comercial *Abaqus*[®]. Se distinguen tres etapas fundamentales en la realización de cualquier cálculo mediante el MEF: preproceso, cálculo y postproceso. La primera está dedicada a la preparación del caso, la segunda a su ejecución y la tercera a la muestra de los resultados y una interpretación crítica de éstos.

Preproceso

La preparación del cálculo en *Abaqus*[®] se basa en los siguientes pasos:

- Se modela la geometría con elementos *shell*, de pequeño espesor y que definen el contorno a partir de la línea media y cuyo enfoque se basa en las hipótesis de Kirchhoff. El material es elástico lineal y la sección homogénea.
- Una vez definida la geometría, se construye la malla. Se emplean elementos *shell* cuadrados, con cuatro nodos en la superficie, situados en las esquinas, cinco nodos de integración en el espesor e interpolación de orden lineal.
- La carga es una compresión N_x uniforme *shell edge load* aplicada en los bordes $x = cte$.
- Por último, las CC se definen en los bordes de la placa: $U3 = UR3 = 0$.

Además, se deben tener en cuenta una serie de aspectos adicionales:

- El programa permite introducir elementos lineales *spring* o muelles que aportan rigidez a un punto concreto de la geometría en un solo grado de libertad *gdl*.
- Una vez situados los *springs* en la estructura, la malla debe construirse de forma que los nodos de cada elemento en los bordes $y = cte$ coincidan con la posición de dichos *springs*.
- La rigidez definida en las Ecs. (3.8) y (3.18) está expresada por unidad de longitud, mientras que en *Abaqus*[®] los *springs* están dotados de rigidez con unidades (N/m) si restringen *gdl* de traslación o (N m/rad) si son de rotación.
- Para cuantificar la rigidez k^* que se ha de imponer a cada *spring*, se tiene en cuenta el espacio d_k entre éstos según la relación $k^* = k d_k$, donde k es la rigidez k_L o k_ϕ (según cada caso) y d_k es función de la longitud del lado a si se mantiene el número de *springs*.
- Debido a esto último, si existen nodos en los bordes $y = cte$ que no contienen *spring*, éstos se comportarán conforme a una articulación pura y se perderá precisión.
- En consecuencia, un refinamiento de malla en problemas de este tipo debe llevarse a cabo asegurando la introducción de más *springs* en cada nodo adicional.

Cálculo

Se define un *step* de perturbación lineal con pandeo *linear perturbation, buckle* y se emplea el *subspace eigensolver*, basado en la resolución de la Ec. (3.7). Hay que tener en cuenta que cada ejecución determina una carga crítica para cada valor de r , de modo se debe ir redefiniendo éste.

Postproceso

Una vez convergido el cálculo, se obtienen las cargas críticas y sus correspondientes modos. Las primeras se adimensionalizan según la Ec. (3.1) y se comparan con los resultados analíticos.

3.2.4. Comparación con el documento ESDU[®] 72019

Engineering Sciences Data Unit ESDU[®] es una asesoría de ingeniería con sede en Reino Unido que se encarga de proveer resultados e información fiable que numerosas industrias de ámbito ingenieril emplean para llevar a cabo sus diseños. Su origen se remonta a 1940, momento en que la *Royal Aeronautical Society* se ve obligada a recurrir a técnicas de diseño más precisas y rentables para sus aeronaves. Para lograr sus objetivos, ESDU[®] se organiza en distintos comités: aerodinámica, estructuras aeroespaciales, acústica, dinámica, transmisión de calor, etc. En esta sección, se comprueban los resultados ofrecidos en uno de los documentos relacionados con las estructuras aeroespaciales [9], cuya temática es el inicio de pandeo de placas con bordes elásticos.

La mayoría de ESDUs[®] y concretamente el documento [9] expresan el factor de pandeo elástico en términos de tensión. Así, el eje de ordenadas representa la tensión crítica adimensionalizada con la equivalente σ_0 en una placa larga completamente articulada bajo compresión uniforme:

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (3.23)$$

y la tensión crítica de pandeo no es más que:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{t} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (3.24)$$

De este modo es muy fácil comprobar que: $\sigma_{cr}/\sigma_0 = K/4$.

Comenzando con la comparación, se plasman los resultados de inicio de pandeo en una placa con bordes laterales rigidizados ante el movimiento lateral v . La Figura 3.3 representa la Ec. (3.11) y los resultados extraídos de *Abaqus*[®] utilizando *springs* que dotan rigidez al *gdl* U2.

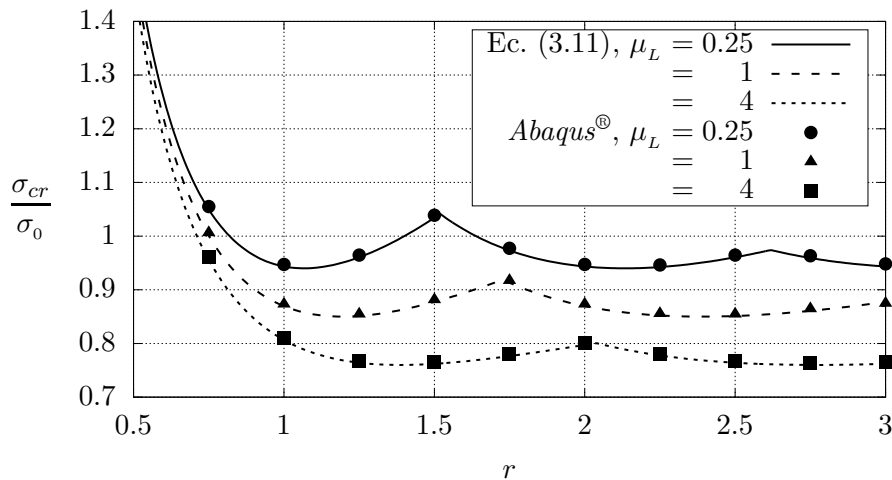


Figura 3.3: Tensión crítica vs. ratio de lados para distintos μ_L . Curvas correspondientes a resultados analíticos plenamente coincidentes con *Data Unit* [9].

Por otro lado, la Figura 3.4 ofrece la curva de inicio de pandeo para placa con bordes laterales dotados de rigidez ante el giro respecto a su propio eje: incluye los resultados extraídos de la resolución numérica de la Ec. (3.22) y los valores obtenidos en *Abaqus*[®] con *springs* que rigidizan el *gdl* UR1.

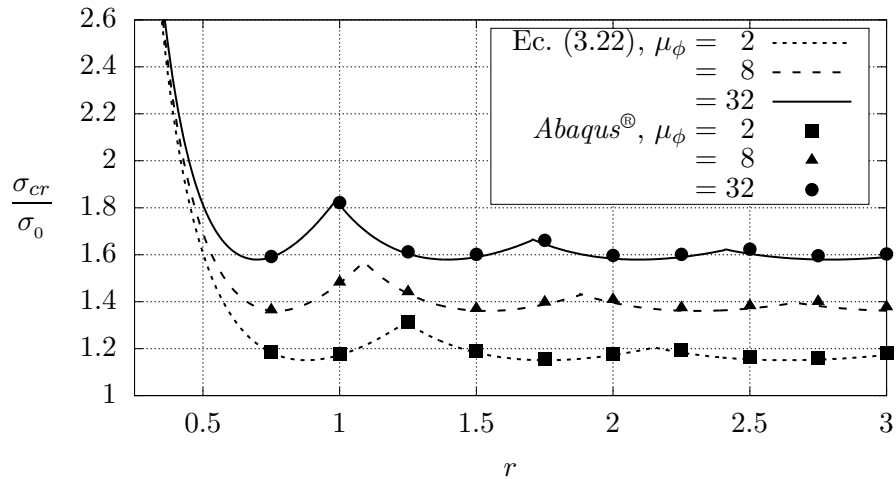


Figura 3.4: Tensión crítica vs. ratio de lados para distintos μ_ϕ . Curvas correspondientes a resultados analíticos plenamente coincidentes con *Data Unit* [9].

Puede comprobarse que las curvas analíticas representadas en las Figuras 3.3 y 3.4 coinciden plenamente con las del documento ESDU[®] 72019. Por tanto, los resultados tanto analíticos como MEF pueden considerarse validados.

3.3. Parámetros de los larguerillos

Como ya se ha explicado, los paneles aeronáuticos contienen una serie de vigas de pared delgada, denominadas larguerillos o simplemente rigidizadores, cuya función es aportar rigidez a la estructura. En consecuencia, se debe conocer con detalle el comportamiento de dichos larguerillos, para lo cual es imprescindible calcular los distintos puntos de interés y momentos de área de su sección transversal. Ésta puede ser abierta o cerrada, constituyendo así los dos grandes grupos de vigas de pared delgada presentes en estructuras aeronáuticas. Las vigas de sección cerrada son mucho más rígidas a torsión que las de sección abierta y sus parámetros se calculan de distinta forma.

En esta sección, se analiza un larguerillo de pared delgada con sección tipo Ω de espesor $t = cte$ mostrada en la Figura 3.5, donde Q_y es la sollicitación cortante en la dirección del eje y . Como puede observarse, esta sección es muy similar a la de los larguerillos del fuselaje de un Boeing 747, de modo que su uso es bastante frecuente en estructuras aeronáuticas.

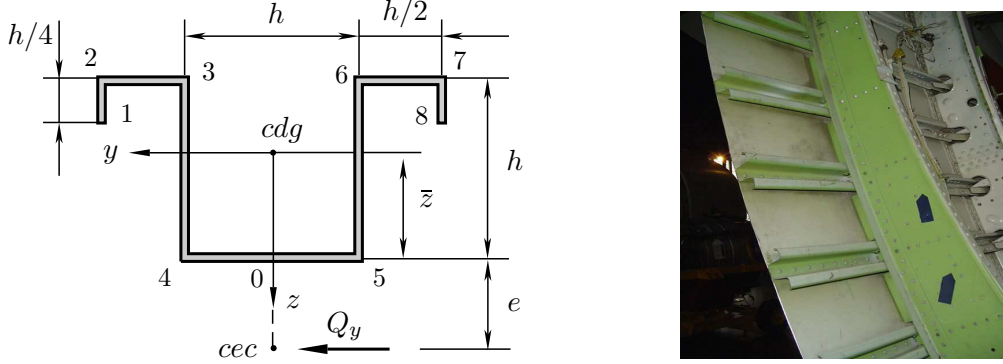


Figura 3.5: Izquierda: esquema de una sección de larguero en forma de Ω . Derecha: detalle de la estructura del fuselaje de un Boeing 747.

Los parámetros necesarios para analizar el pandeo de paneles son: el área A , las inercias I_y , I_z y los módulos de torsión de Saint-Venant J y de alabeo Γ . Se comienza calculando A :

$$A = \left(3h + 2\frac{h}{2} + 2\frac{h}{4} \right) t = \frac{9ht}{2} \quad (3.25)$$

Después, la posición \bar{z} del centro de gravedad cdg y los momentos de inercia I_y , I_z (el producto de inercia I_{yz} es nulo, pues la sección tiene un eje de simetría [5]) respecto a dicho cdg :

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{2h \frac{h}{2} + 2\frac{h}{2}h + 2\frac{h}{4} \frac{7h}{8}}{3h + 2\frac{h}{2} + 2\frac{h}{4}} = \frac{13h}{24} \\ I_y &= ht\bar{z}^2 + 2\frac{h^3t}{12} + 2ht\left(\frac{h}{2} - \bar{z}\right)^2 + 2\frac{ht}{2}(h - \bar{z})^2 + 2\frac{\left(\frac{h}{4}\right)^3t}{12} + 2\frac{ht}{4}\left(\frac{h}{8} - \bar{z}\right)^2 \\ &= \frac{281h^3t}{384} \\ I_z &= \frac{h^3t}{12} + 2ht\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3t}{12} + 2\frac{ht}{2}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 + 2\frac{ht}{4}h^2 = \frac{5h^3t}{3} \end{aligned} \quad (3.26)$$

El módulo J se obtiene de forma muy directa aplicando la ecuación correspondiente para secciones abiertas de pared delgada [5]:

$$J = \sum \frac{1}{3} h_i t_i^3 = \frac{1}{3} \left(3h + 2\frac{h}{2} + 2\frac{h}{4} \right) t^3 = \frac{3ht^3}{2} \quad (3.27)$$

Para determinar Γ , es necesario calcular la función de alabeo unitario $\omega(s)$ de la sección, que requiere a su vez conocer la posición e del cec . Por tanto, se obtiene primero el flujo cortante

$q(s)$ y se aplica equivalencia entre los momentos en la línea que pasa por el punto 5 generados por la fuerza externa Q_y y los generados por dicho flujo.

Los flujos q_{45} y q_{56} no generan momentos respecto al punto 5 ya que pasan por la misma línea de acción, de modo que no es necesario calcularlos. Además, al ser $I_{yz} = 0$, el flujo cortante se puede calcular de la siguiente forma [5]:

$$\begin{aligned}
 q_{12}(s) &= q_1 - \frac{Q_y}{I_z} \int_0^s h t \, ds &= -\frac{Q_y}{I_z} h t s \\
 q_{23}(s) &= q_2 - \frac{Q_y}{I_z} \int_0^s (h - s) t \, ds &= -\frac{Q_y}{I_z} \frac{(h^2 + 4 h s - 2 s^2) t}{4} \\
 q_{34}(s) &= q_3 - \frac{Q_y}{I_z} \int_0^s h t \, ds &= -\frac{Q_y}{I_z} \frac{h (5 h + 4 s) t}{8}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

En la Figura 3.6, se representa el flujo de cortante en los tramos calculados.

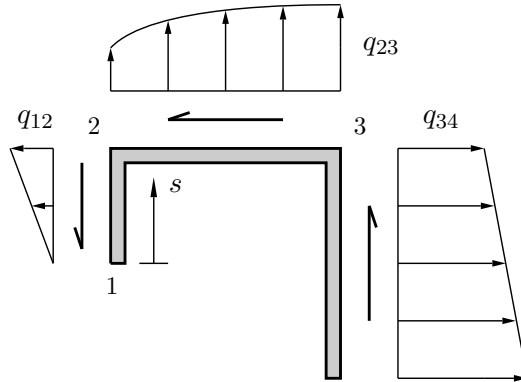


Figura 3.6: Detalle del flujo cortante en la sección Ω .

Aplicando equivalencia y teniendo en cuenta que por simetría $q_{12} = q_{78}$ y $q_{23} = q_{67}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \sum M_{ext}|_5 &= \sum M_{int}|_5 \quad \Rightarrow \\
 -Q_y e &= M(q_{12})|_5 + M(q_{23})|_5 + M(q_{34})|_5 + M(q_{67})|_5 + M(q_{78})|_5 \quad \Rightarrow \\
 &= -\int_0^{h/4} q_{12}(s) \frac{3h}{2} \, ds - \int_0^{h/2} q_{23}(s) h \, ds + \int_0^h q_{34}(s) h \, ds + \\
 &\quad -\int_0^{h/2} q_{67}(s) h \, ds - \int_0^{h/4} q_{78}(s) \frac{h}{2} \, ds \quad \Rightarrow \\
 e &= \frac{17h}{80}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Obtenida la posición del *cec*, se determina la función de alabeo unitario. Se comienza operando en el punto 0 de intersección del eje z con el panel 4 – 5, donde el alabeo es nulo [5]:

$$\begin{aligned}
 \omega_{05}(s) &= \omega_0 - 2 \frac{1}{2} s e &= -\frac{17h}{80} s \\
 \omega_{56}(s) &= \omega_5 + 2 \frac{1}{2} \frac{h}{2} s &= -\frac{h(17h - 80s)}{160} \\
 \omega_{67}(s) &= \omega_6 - 2 \frac{1}{2} (h + e) s &= \frac{h(63h - 194s)}{160} \\
 \omega_{78}(s) &= \omega_7 - 2 \frac{1}{2} h s &= -\frac{h(17h + 80s)}{80}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde el signo viene determinado por del el sentido del cortante positivo que recorre la sección respecto al *cec*: si coincide con el sentido en que se recorren los tramos, ω es positivo y de lo contrario negativo. El resto de tramos se calculan teniendo en cuenta que la función de alabeo es antisimétrica [5]. En la Figura 3.7, se representa la función de alabeo en toda la sección.

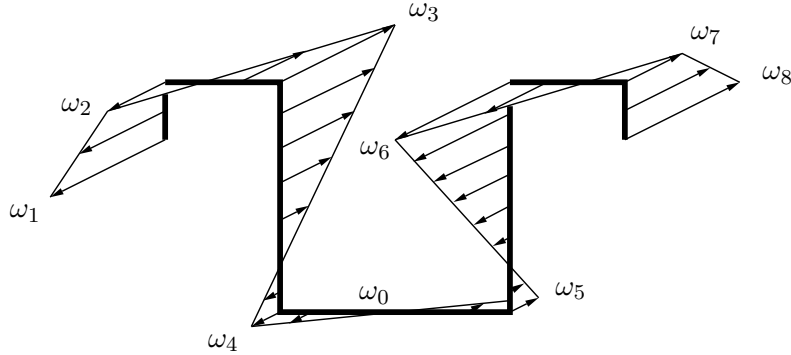


Figura 3.7: Representación del alabeo unitario en la sección Ω .

Finalmente, el módulo de alabeo se obtiene aprovechando la antisimetría de la función $\omega(s)$ [5]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \oint_C \omega^2(s) dA \\
 &= 2 t \left(\int_0^{h/2} \omega_{05}^2(s) ds + \int_0^h \omega_{56}^2(s) ds + \int_0^{h/2} \omega_{67}^2(s) ds + \int_0^{h/4} \omega_{78}^2(s) ds \right) \\
 &= \frac{237 h^5 t}{1280}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Se debe tener en cuenta que el larguerillo se une a la placa en el punto 0 de su sección (Figura 3.5 derecha), de modo que girará respecto al eje que pasa por dicho punto. Esto afecta al momento de inercia I_y y al módulo de alabeo Γ , que deben ser recalculados según el caso.

3.4. Panel articulado con un larguerillo

Para una mejor aproximación a un panel aeronáutico, se estudia una placa de bordes articulados a, b rigidizada por un larguerillo transversal de sección Ω situado en la mitad. La carga es una compresión uniforme N_x en la dirección de la coordenada longitudinal del larguerillo. Los datos numéricos referidos a la geometría y material de la estructura se dan en la Tabla 3.1.

	Mód. Young	Coef. Poisson	Long. característica	Espesor
Placa	$E = 70 \text{ GPa}$	$\nu = 0.25$	$b = 1 \text{ m}$	$t_p = 2 \text{ mm}$
Larguerillo	"	"	$h = 2 \text{ cm}$	$t_s = 1 \text{ mm}$

Tabla 3.1: Datos numéricos de la estructura; el material es un aluminio aeronáutico [6].

Como es sabido, existen diversos métodos para determinar la solución de inicio de pandeo. De cara a validar ciertas hipótesis y comparar soluciones, se emplean tres: Levy, Ritz y el MEF.

3.4.1. Método de Levy

Para resolver este caso concreto mediante Levy, conviene situar el origen de coordenadas a mitad del borde de coordenada y , según muestra la Figura 3.8.

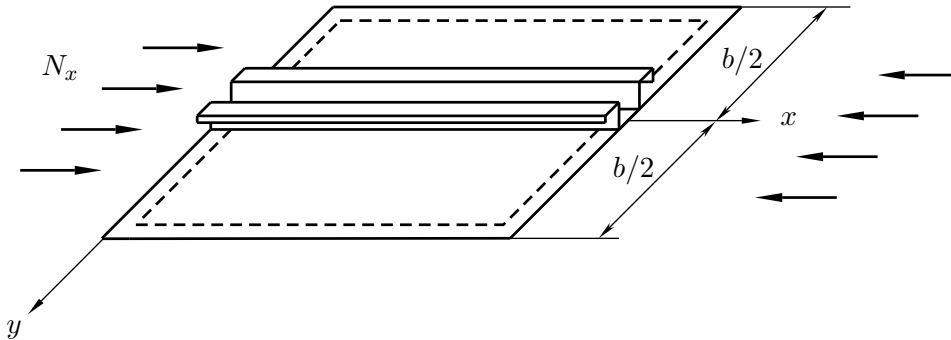


Figura 3.8: Panel articulado con un larguerillo situado a distancia $b/2$ de los bordes $y = cte$.

Se aplica la solución de prueba Ec. (3.13), ya que la función seno cumple las CC geométricas y de fuerza en los bordes $x = cte$. Además, el procedimiento a seguir para el cálculo de la función $Y(y)$ es análogo al de la Sección 3.2, de modo que también puede retomarse la Ec. (3.16).

El siguiente paso es hallar las constantes de la Ec. (3.16) superior, para lo cual se imponen las CC. Primero, en el borde $y = b/2$ puede establecerse, asumiendo que el apoyo es continuo:

$$\left. \begin{aligned} w(x, b/2) &= 0 & \Rightarrow & Y(b/2) = 0 \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=b/2} &= 0 & \Rightarrow & Y''(b/2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

A continuación, se establece la hipótesis de mayor relevancia en este problema: dado que el larguerillo se sitúa justo en el centro de la placa, tanto el pandeo local de la piel como el pandeo global tienen lugar desarrollando semiondas simétricas respecto a su eje x . Esta hipótesis permite asumir que la energía a torsión absorbida por el larguerillo es despreciable si $h \ll b$. Por tanto, la siguiente CC implica suponer que el giro de la placa es nulo en $y = 0$:

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y'(0) = 0 \quad (3.33)$$

Para aplicar la última CC, se separa el larguerillo, situado en $y = 0$, de la placa y se analiza la interacción entre ambos. La Figura 3.9 representan los esfuerzos internos: al cortar la placa, aparece una reacción cortante Q_y debida a la flexión interna del larguerillo que a su vez aparece como consecuencia de la aplicación de la carga N_x en configuración deformada.

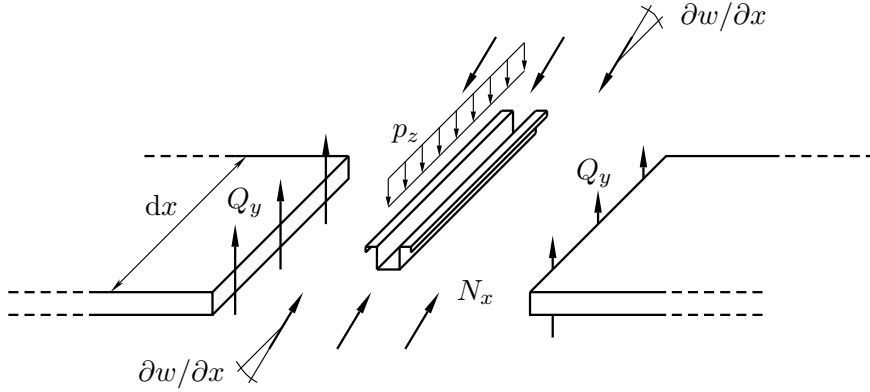


Figura 3.9: Equilibrio en configuración deformada sobre un dx situado en $y = 0$.

En consecuencia, aplicando equilibrio de fuerzas verticales se tiene $p_z = 2 Q_y$, donde Q_y se encuentra expresado en la Ec. (2.37), y ello permite reescribir la Ec. (2.26) de gobierno de vigas de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \left[EI_{y_0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{N_x A}{t_s} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \right]_{y=0} &= 0 \\ 2D Y'''(0) + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[EI_{y_0} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{N_x A}{t_s} \right] Y(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

donde por antisimetría en $y = 0$, el término cruzado de la expresión del cortante Q_y desaparece e I_{y_0} es el momento de inercia respecto al eje horizontal que pasa por el punto 0: $I_{y_0} = I_y + A \bar{z}^2$, según el teorema de Steiner.

Las CC dadas por las Ecs. (3.32), (3.33) y (3.34), junto con la Ec. (3.16), permiten construir el sistema homogéneo $\mathbf{M} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}$, donde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} C_{\lambda_1} & S_{\lambda_1} & c_{\lambda_2} & s_{\lambda_2} \\ \lambda_1^2 C_{\lambda_1} & \lambda_1^2 S_{\lambda_1} & -\lambda_2^2 c_{\lambda_2} & -\lambda_2^2 s_{\lambda_2} \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[EI_{y_0} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{N_x A}{t_s} \right] & 2D\lambda_1^3 & \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[EI_{y_0} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{N_x A}{t_s} \right] & -2D\lambda_2^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \left\{ C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \right\}^T, \quad c_{\lambda_i} = \cos\left(\frac{b\lambda_i}{2}\right), \quad s_{\lambda_i} = \sin\left(\frac{b\lambda_i}{2}\right)$$
(3.35)

En la Ec. (3.35), el inicio de pandeo viene dado por la solución no trivial, es decir, aquella que resulta de igualar el determinante de la matriz \mathbf{M} a cero. De este modo, se obtiene una ecuación algebraica altamente no lineal cuya incógnita es la carga crítica de pandeo N_{cr} y que se debe resolver numéricamente. Se procede de la siguiente manera: se particulariza el valor del número de semiondas m que desarrolla el panel en dirección x y se buscan numéricamente las raíces de la ecuación $\det(\mathbf{M}) = 0$ recorriendo en un bucle un determinado rango de valores de $r = a/b$.

Los resultados por Levy se dan en la Subsección 3.4.4, comparando con Ritz y *Abaqus*[®].

3.4.2. Método de Ritz

El método de Ritz aplica el PVE a cada término de la solución en serie $w(x, y)$. Para utilizar este método, se sitúa el sistema de referencia según la Figura 3.10.

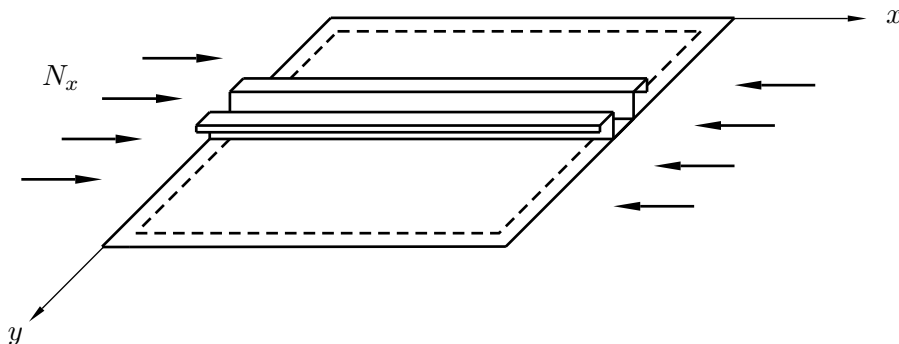


Figura 3.10: Panel articulado sometido a compresión uniforme.

Los métodos energéticos permiten expresar la solución $w(x, y)$ de forma que solamente cumpla las CC geométricas y no necesariamente las de fuerza. Por tanto, dado que los bordes son articulados, $w(x, y)$ puede escribirse como serie de funciones seno-seno [2]:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.36)$$

El potencial energético Π del panel se escribe considerando las contribuciones de la placa U_p , V_p y del larguerillo U_s , V_s :

$$\Pi = U - V = U_p - V_p + U_s - V_s \quad (3.37)$$

Se comienza calculando la energía interna de la placa. Para ello se introduce la Ec. (3.36) en la Ec. (2.4), en la que se tiene en cuenta que el término de curvatura gaussiana κ_G integra a cero, ya que los cuatro bordes del panel están articulados:

$$U_p = \frac{\pi^4 D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right]^2 dy dx \quad (3.38)$$

Para desarrollar el integrando de la la Ec. (3.38) se emplea el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \right]^2 &= [f_{11} + f_{12} + \dots + f_{1n} + f_{21} + f_{22} + \dots + f_{2n} + \dots + f_{mn}]^2 \\ &= [f_{11}^2 + f_{22}^2 + \dots + f_{mn}^2 + f_{11} f_{12} + \dots + f_{11} f_{1n} \\ &\quad + f_{11} f_{21} + f_{11} f_{22} + \dots + f_{11} f_{2n} + \dots] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^2 + \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ n_1 \neq n_2}} f_{m_1 n_1} f_{m_2 n_2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Según la Ec. (3.39), un doble sumatorio al cuadrado puede reescribirse como el sumatorio del cuadrado de cada uno de los términos más el sumatorio del producto de éstos entre sí cuando al menos uno de sus contadores m , n es distinto. Aplicando dicho razonamiento, se simplifica la Ec. (3.38), en la cual el segundo término contiene una función $\Psi = \Psi(m, n, a, b)$:

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{\pi^4 D}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right]^2 dy dx \\ &\quad + \frac{\pi^4 D}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ n_1 \neq n_2}} \Psi \sin\left(\frac{m_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) dy dx \end{aligned} \quad (3.40)$$

Extrayendo fuera de la integral los términos que no dependen de x , y es posible integrar de forma analítica. Teniendo en cuenta que los términos de la forma $\sin(n\pi)$ son nulos siempre que $n \in \mathbb{Z}$, puede comprobarse que al menos una de las integrales del último término de la Ec. (3.40) siempre es nula. Operando, la energía interna U_p de la placa admite la siguiente expresión:

$$U_p = \frac{\pi^4 D a b}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 w_{mn}^2 \quad (3.41)$$

El trabajo o energía de las cargas externas V_p se calcula conforme a la Ec. (2.6) con $N_x = cte$, $N_y = N_{xy} = 0$ y siguiendo de nuevo el razonamiento de la Ec. (3.39):

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right]^2 dy dx \\ &= \frac{N_x}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m\pi}{a} w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right]^2 dy dx \\ &+ \frac{N_x}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ n_1 \neq n_2}}^{\infty} \Psi \cos\left(\frac{m_1\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m_2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right) dy dx \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde la segunda integral es siempre nula sea cual sea el valor de la función Ψ . Por tanto, el trabajo V_p realizado por la carga N_x sobre la placa es:

$$V_p = \frac{\pi^2 N_x b}{8 a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 w_{mn}^2 \quad (3.43)$$

El hecho de poder expresar las energías U_p , V_p de forma analítica ahorra un enorme coste computacional, pues a mayor número de términos, el tiempo necesario para resolver las integrales anteriores aumenta notablemente.

El siguiente paso es calcular la energía interna que se acumula en el larguerillo U_s . Para ello, se consideran las energías de flexión y torsión según las Ecs. (2.28) y (2.30):

$$\begin{aligned} U_s &= U_{bs} + U_{Js} + U_{\Gamma s} \\ &= \left[\frac{EI_{y_0}}{2} \int_0^a \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{GJ}{2} \int_0^a \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx + \frac{E\Gamma_0}{2} \int_0^a \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx \right]_{y=b/2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Se ha asumido que la energía de cortante es despreciable frente a las de flexión y torsión debido a que la esbeltez geométrica del larguerillo es elevada en la mayor parte de casos de estudio [12].

Asumiendo que el larguerillo está empotrado en la placa, el giro $\phi(x)$ de su sección es:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2,4,6\dots}^{\infty} \frac{n\pi}{b} (-1)^{\frac{n}{2}} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\end{aligned}\quad (3.45)$$

donde se asume que $\phi = cte$ para $x = cte$ y Γ_0 se calcula otra vez respecto al eje que pasa por el punto 0 de la sección: $\Gamma_0 = \Gamma + e^2 I_z$ (I_{y_0} se da en la resolución por el método de Levy).

Para no saturar demasiado las expresiones, se desarrolla la Ec. (3.44) término a término, comenzando con la energía de flexión y utilizando el razonamiento de la Ec. (3.39):

$$\begin{aligned}U_{bs} &= \frac{\pi^4 EI_{y_0}}{2} \int_0^a \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2}{a^2} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]^2 dx \\ &= \frac{\pi^4 EI_{y_0}}{2} \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m^2}{a^2} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]^2 dx \\ &+ \frac{\pi^4 EI_{y_0}}{2} \int_0^a \sum_{\substack{m_1 \neq m_2 \\ n_1 \neq n_2}}^{\infty} \Psi \sin\left(\frac{m_1\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2\pi x}{a}\right) dx \sin\left(\frac{n_1\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.46)$$

En este caso, el segundo término de la Ec. (3.46) integra a cero si $m_1 \neq m_2$, pero no cuando $n_1 \neq n_2$ ($m_1 = m_2$), de modo que U_{bs} no se puede simplificar según la Ec. (3.39). Dado que el coste computacional asociado a este cálculo no es prohibitivo para un número razonable de términos, se utiliza la Ec. (3.46) para calcular la energía de flexión del larguerillo.

La energía debida a torsión de Saint-Venant se desarrolla a partir de la Ec. (3.44):

$$U_{Js} = \frac{\pi^4 GJ}{2} \int_0^a \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2,4,6\dots}^{\infty} \frac{m n}{a b} (-1)^{\frac{n}{2}} w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]^2 dx \quad (3.47)$$

Del mismo modo que en la Ec. (3.46), es posible prever que el término de la Ec. (3.47) con los productos cruzados no siempre integra a cero.

El último fenómeno considerado para el larguerillo es la torsión alabeada. Ésta es importante en vigas de pared delgada, pudiendo inducir tensiones normales de elevada magnitud. La energía asociada a este fenómeno se calcula siguiendo también la Ec. (3.44):

$$U_{\Gamma_s} = \frac{\pi^6 E\Gamma_0}{2} \int_0^a \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2,4,6\dots}^{\infty} \frac{m^2 n}{a^2 b} (-1)^{\frac{n}{2}+1} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]^2 dx \quad (3.48)$$

Al igual que las energías de flexión y torsión de Saint-Venant, la expresión de la energía de torsión alabeada no se simplifica según la Ec. (3.39).

Finalmente, queda calcular el trabajo V_s realizado sobre el larguerillo. Aplicando la Ec. (2.40), en la que P es la carga puntual que recibe como consecuencia de la compresión N_x , se tiene:

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{N_x A}{2t_s} \int_0^a \left(\frac{dw}{dx} \right)_{y=b/2}^2 dx \\ &= \frac{N_x A}{2t_s} \int_0^a \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m\pi}{a} (-1)^{\frac{n-1}{2}} w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]^2 dx \end{aligned} \quad (3.49)$$

De nuevo, la Ec. (3.49) no es simplificable de acuerdo a la Ec. (3.39).

Obtenidos los términos energéticos, se minimiza la energía potencial Π por el método de Ritz:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_{mn}} = \frac{\partial (U_p - V_p + U_s - V_s)}{\partial w_{mn}} = 0 \quad (3.50)$$

La Ec. (3.50) conduce a un sistema de $m \times n$ ecuaciones cuya solución no trivial permite hallar las cargas críticas. Lógicamente, es imposible operar con series infinitas, de modo que es necesario evaluar la convergencia en función del número de términos de la Ec. (3.36).

Para interpretar la importancia de los parámetros, se desarrolla la solución utilizando el primer término de la Ec. (3.36), correspondiente al modo con una semionda en toda la placa:

$$w(x, y) \cong w_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.51)$$

Primero, se dan las energías del panel completo, que se obtienen introduciendo la Ec. (3.51) en las Ecs. (3.41), (3.46), (3.47) y (3.48) para la energía interna y (3.43) y (3.49) para la externa:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\pi^4 w_{11}^2}{8 b^2 r^3} \left[D (1 + r^2)^2 + \frac{2EI_{y_0}}{b} \right] \\ V &= \frac{\pi^2 N_x w_{11}^2}{8 r} \left(1 + \frac{2A}{b t} \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

siendo $r = a/b$ la relación de aspecto del panel. En ambas expresiones, se distinguen las contribuciones debidas a la placa y al larguerillo. Tanto la rigidez a flexión de la placa D como la del larguerillo EI_{y_0}/b incrementan la energía interna del panel, retrasando así el inicio de pandeo. Por otra parte, las rigideces a torsión de Saint-Venant GJ/b y de alabeo $E\Gamma_0/b^3$ no aparecen en la Ec. (3.52); esto es lógico si sólo hay una semionda n en la dirección y , pues de esa forma se fuerza al larguerillo a permanecer recto, ocurriendo lo mismo si dicho número de semiondas es impar. Si por el contrario n es par, el giro no es nulo en la posición del larguerillo, de modo que aparecen esfuerzos de torsión. Es por tanto lógico que la rigidez a torsión sólo cobre importancia

en los términos w_{mn} de la solución de prueba en los que n es par. Conocidas las energías, se da la carga crítica, cuya expresión coincide con las que proporcionan [1] y [4]:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{(1+r^2)^2 + 2\mathcal{K}_b}{r^2(1+2\delta)} \quad (3.53)$$

donde $\mathcal{K}_b = \frac{EI_{y_0}}{bD}$ es la rigidez adimensional a flexión del larguero y $\delta = \frac{A}{bt_s}$ relaciona el perímetro de la sección con el lado b de la placa. La Ec. (3.53) lleva asociado un modo de pandeo y además presenta un mínimo relativo:

$$\frac{dN_{cr}}{dr} \propto \frac{2(1+r^2)(-1+r^2) - 4\mathcal{K}_b}{r^3(1+2\delta)} = 0 \quad (3.54)$$

$$r(N_{cr}|_{min}) = \sqrt[4]{1+2\mathcal{K}_b}$$

El valor de r que minimiza la carga crítica del primer modo de pandeo sólo depende de la rigidez adimensional a flexión. Dicha relación se da en la Figura 3.11.

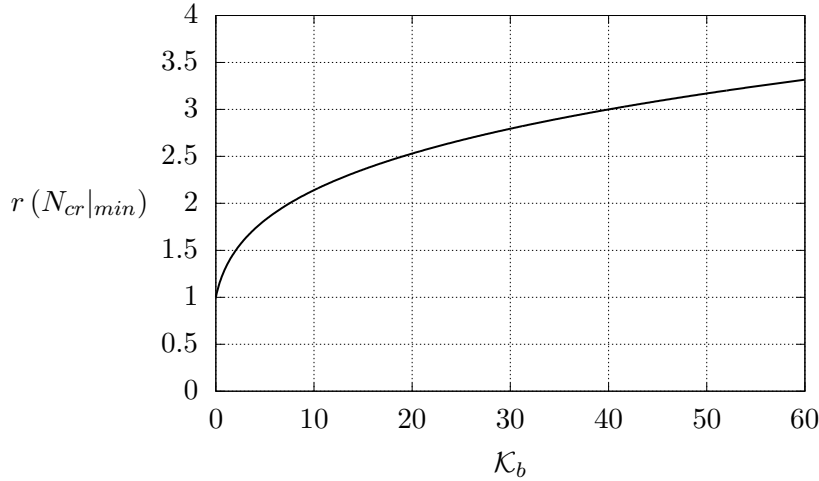


Figura 3.11: Valor de r que minimiza la carga crítica del primer modo de pandeo del panel vs. rigidez adimensional a flexión del larguero.

En ella, se aprecia que $r(N_{cr}|_{min})$ es mayor si la rigidez a flexión del larguero aumenta respecto a la de la placa. Esto puede ser interesante a la hora de escoger las propiedades de los larguerillos con el objetivo de que el panel trabaje fuera de dicho mínimo; por ejemplo, si $r = 2$, interesaría evitar que \mathcal{K} se situase en torno a 8. No obstante, hay que recordar que la Ec. (3.53) está limitada al rango de r en el cual el primer pandeo es con una sola semionda $m = n = 1$. Éste se analiza más adelante, una vez se disponga de los resultados completos.

3.4.3. Método de los elementos finitos

La metodología seguida en la preparación del cálculo MEF es la siguiente:

- Se modela la geometría de la estructura con los parámetros de la Tabla 3.1 dividida en dos partes: placa y larguerillo. El sistema de referencia global es análogo al de la Figura 3.10.
- El material es elástico lineal, con las características de la Tabla 3.1, y la sección homogénea con espesores dados también en la Tabla 3.1.
- A continuación, se ensambla el larguerillo en la placa a través de una serie de puntos de contacto (*attachment points*). El programa permite interpretar éstos como remaches, cuyo diámetro se establece de forma arbitraria en 5 mm.

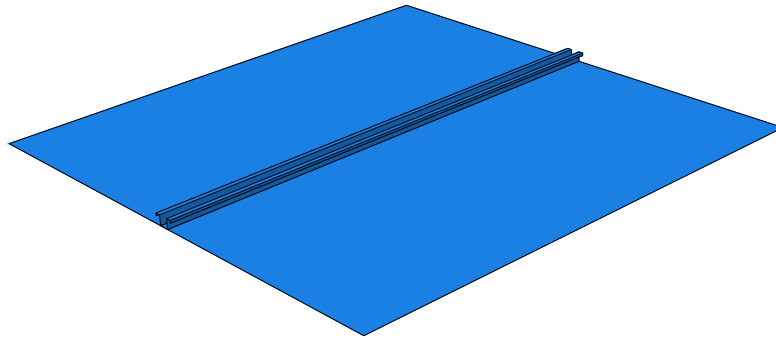


Figura 3.12: Geometría del panel en *Abaqus*®.

- La malla, mostrada en la Figura 3.13, se construye análogamente a la de la Sección 3.3.

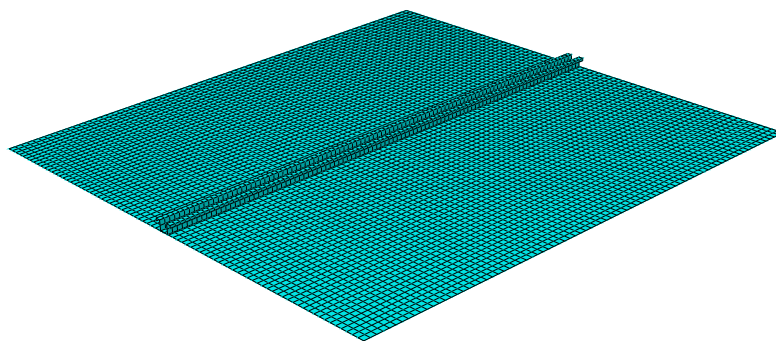


Figura 3.13: Mallado del panel en *Abaqus*®.

- En cuanto a la carga, es importante aplicarla también en las secciones $x = 0$, a del larguerillo, ya que de lo contrario se pierde la información dada por la Ec. (3.49).

- Por último, las CC se definen en los bordes de la placa y en los extremos del larguero. La introducción de las cuatro articulaciones se basa en la Tabla 2.3.

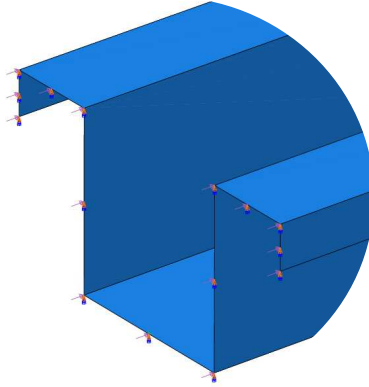


Figura 3.14: CC y carga aplicada en el larguero.

El postproceso es similar al descrito en la Sección 3.2. Además, los modos se visualizan en el módulo del vector desplazamiento U dado por el programa. Hay que tener en cuenta que éstos, al igual que las cargas críticas, sólo pueden extraerse para un valor concreto de r .

3.4.4. Resultados

Carga crítica de pandeo

En primer lugar, la Figura 3.15 estudia la convergencia del método de Ritz para 1, 4 y 16 términos a través de las curvas $K - r$.

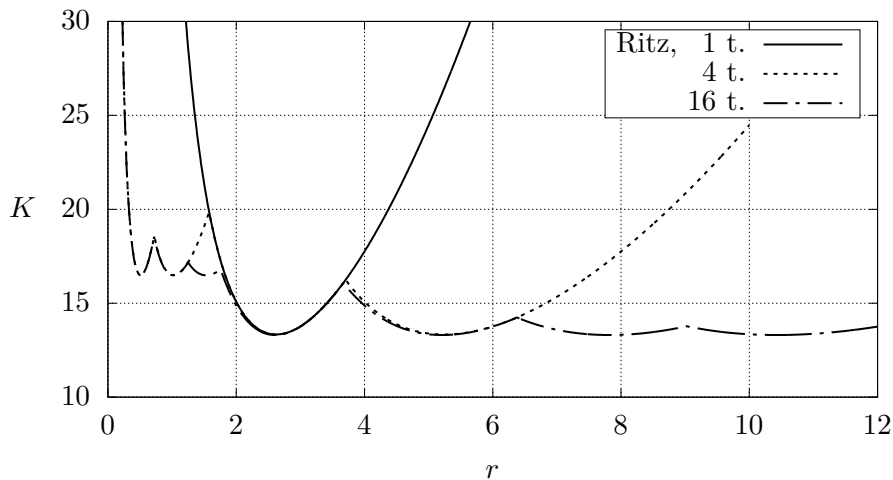


Figura 3.15: Convergencia del factor de pandeo vs. relación de aspecto por método de Ritz ($t. \equiv \#$ términos).

Se observa que un mayor número de términos permite identificar mayor número de modos, lo cual es lógico. Los modos que definen la solución con 1 y 4 términos son reproducidos prácticamente a la perfección por la solución con 16 términos. Esto sería una ventaja si se sólo desease analizar dichos modos en el panel, ya que un número pequeño de términos daría resultados precisos y permitiría un importante ahorro de coste computacional. Por otra parte, para representar correctamente el comportamiento a partir de $r \in [1.25 - 1.85]$ y $r > 6$ aproximadamente, es necesario pasar de la solución con 4 términos a la de 16.

Una vez analizada la convergencia del método de Ritz, se estudian las soluciones dadas por los métodos de Levy, Ritz con 16 términos y MEF en la Figura 3.16.

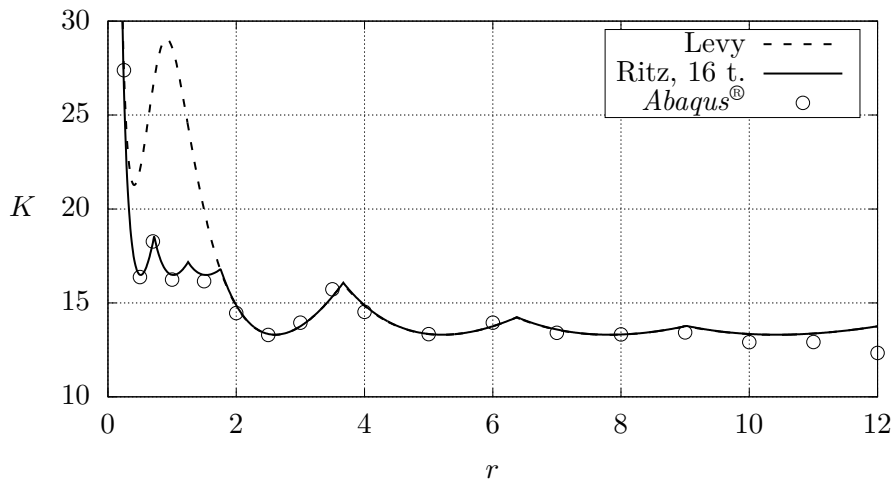


Figura 3.16: Factor de pandeo vs. relación de aspecto por varios métodos.

Se comienza con las diferencias entre los resultados que proporciona cada uno de los métodos:

- En rasgos generales, las soluciones analítica y numérica son muy similares en el rango $r \in [2 - 10]$. Por debajo de $r = 2$, sólo son similares los resultados de Ritz con 4 y 16 términos y del MEF, mientras que la solución de Levy toma valores muy diferentes.
- Como consecuencia de lo anterior, la hipótesis de despreciar el efecto de la torsión del larguerillo, utilizada en el método de Levy, sólo puede emplearse en paneles con $r \in [2 - 10]$. De lo contrario, es preferible utilizar la solución de Ritz incluyendo la torsión.
- Para $r > 10$, la solución del MEF comienza a tomar valores de K más pequeños que la de Ritz con 16 términos. Asimismo, las pequeñas discrepancias entre dichos métodos en el rango $r \in [2 - 10]$ pueden deberse a diversos aspectos: se ha despreciado el efecto del cortante, pese a que puede tener cierta importancia en larguerillos de pared muy delgada y sección abierta, o el modelado de la unión entre el larguerillo y la placa.

En cuanto a los resultados, si se aceptan los que proporcionan el método de Ritz con 16 términos y el MEF, se extraen las siguientes conclusiones:

- El hecho de incluir un larguerillo en la placa incrementa el valor de carga crítica $\forall r$, lo cual es favorable y explica la utilización de este tipo de estructuras en las aeronaves.
- En una placa completamente articulada, el valor de K se sitúa en torno a 4 cuando $r > 1$ [3], de modo que, con un sólo larguerillo, el incremento del factor de pandeo es muy significativo, pues el valor de K pasa a situarse en torno a 13 en los peores casos.
- Compensa estimar el incremento de peso del panel respecto al de la placa *per se*; suponiendo que el material de placa, larguerillo y remaches es el mismo, dicho incremento se puede expresar en términos de volumen. Los remaches se aproximan por un tramo cilíndrico de diámetro $d_l = 4$ mm y longitud $l_r = 1$ cm y cabeza semiesférica en cada extremo de diámetro $d_r = 5$ mm. Se asume también que el número de remaches es $n_r = 25 r$, es decir 25 remaches por cada metro de larguerillo (véanse los datos de la Tabla 3.1).

$$\Delta W = \frac{W_p + W_s + n_r W_r - W_p}{W_p} = \frac{A a + n_r \left(\frac{\pi d_r^3}{6} + \frac{\pi d_l^2 l_r}{4} \right)}{a b t_p} = 4.74\% \quad (3.55)$$

El incremento relativo ΔW es muy pequeño en comparación con el de la carga crítica.

- En el rango aproximado $r \in [0.5 - 1.5]$ aparecen, tanto en la solución de Ritz con 16 términos como en el MEF, tres modos que no tienen lugar en el inicio de pandeo de placas no rigidizadas [3]. Se trata de modos locales, es decir, el pandeo no ocurre en el panel completo sino que las semiondas sólo se desarrollan en la placa. Esto es muy beneficioso para el postpandeo, ya que el pandeo global del panel conduce a modos de fallo muy catastróficos. El principal causante de este fenómeno es el larguerillo, pues su longitud corresponde al lado a del panel y cuando ésta no es muy elevada, tiene mayor rigidez.

Esfuerzos en el larguerillo

Las Figuras 3.15 y 3.16 dejan entrever que los modos de pandeo en $r \in [0 - 2]$, salvo el que predice la solución de Ritz con un término, son locales. No obstante, el larguerillo se ve sometido a esfuerzos de torsión que pueden ser importantes. La Figura 3.17 muestra el patrón sinusoidal seguido por la deformada U3 en *Abaqus*[®] del primer modo de pandeo para panel cuadrado.

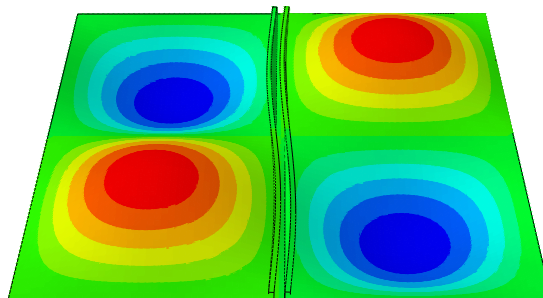


Figura 3.17: Deformada U3 del primer modo de pandeo para $r = 1$ en *Abaqus*[®].

Se observa que, en comparación con la deformada de las semiondas desarrolladas en la piel, el larguerillo apenas sufre desplazamientos verticales, mientras que el giro de su sección sí parece importante. La Figura 3.18 muestra el giro UR1 alrededor del eje x en el mismo modo de pandeo.

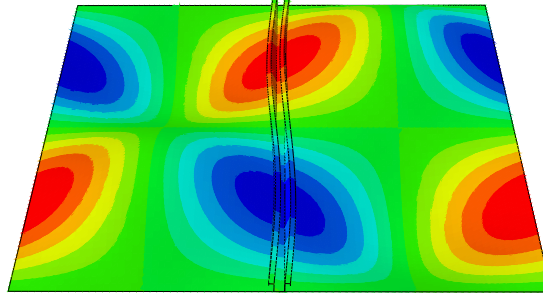


Figura 3.18: Giro UR1 en el primer modo de pandeo para $r = 1$ en *Abaqus*[®].

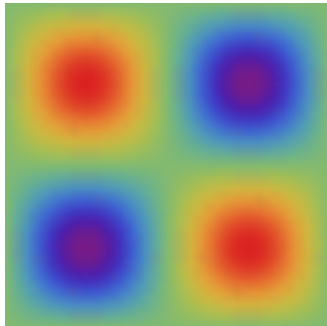
Se aprecia que hay zonas donde el giro del larguerillo adquiere importancia debido a la pendiente que sufre la placa como consecuencia de las semiondas de pandeo, lo cual explica en parte las discrepancias entre las soluciones dadas por el MEF y Ritz respecto al método de Levy en torno a $r = 1$. Estos giros ocasionan el desarrollo de momentos torsores, como se deduce de la Ec. (2.27), y a su vez de tensiones tangenciales. Éstas, junto con las tensiones normales debidas al alabeo, se expresan según la Ec. (3.56) [14]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_\Gamma}{\Gamma_0} \omega(s) &= -E \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \omega(s) \\ \tau_{xs} &= \frac{T_J}{J} t_s - \frac{T_\Gamma}{\Gamma_0 t_s} \int_A \omega(s) dS &= G t_s \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \int_{C_s} \omega(s) ds \end{aligned} \quad (3.56)$$

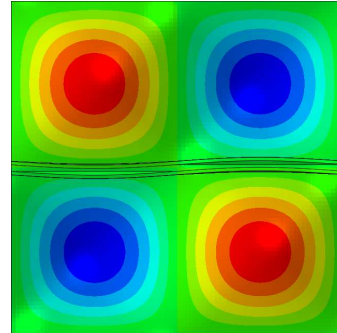
siendo C_s el perímetro de la sección del larguerillo. Dado que los modos de pandeo son autovectores, no puede cuantificarse *a priori* ϕ ni sus derivadas. No obstante, sí podrán estimarse en un análisis de postpandeo, de forma que la Ec. (3.56) permitirá una aproximación a las tensiones debidas a torsión en el larguerillo.

Modos de pandeo

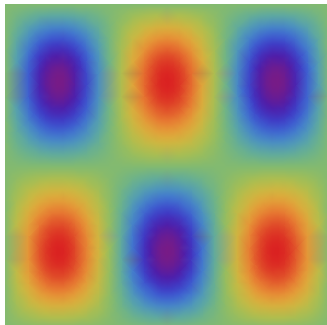
El cálculo y representación de los modos de pandeo es de interés, no sólo para comparar las soluciones analítica y numérica, sino también para un estudio de postpandeo. Esto es debido a que a la hora de introducir imperfecciones, necesarias para analizar el postpandeo, se introduce un patrón basado en los modos. Como ya se ha visto, existe un rango de valores de r en los que el primer modo de pandeo es global y otro en los que es local. Para visualizar ambos, se representan los cuatro primeros modos obtenidos mediante la solución de Ritz con 16 términos y mediante el MEF para $r = 1$ (primer pandeo local, Figura 3.19) y para $r = 2$ (primer pandeo global, Figura 3.20).



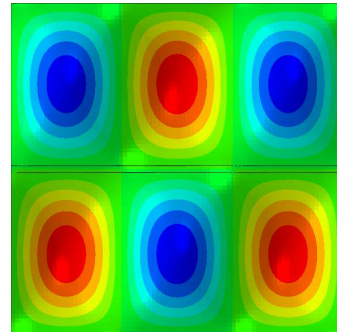
(a) Modo 1: $K = 16.49$



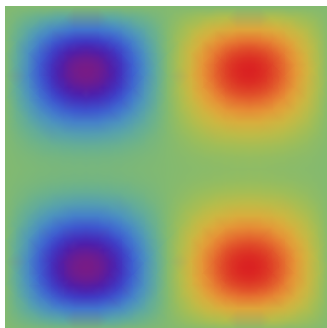
(b) Modo 1: $K = 16.21$



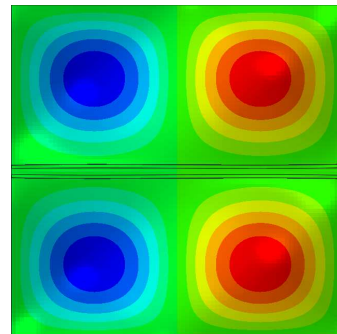
(c) Modo 2: $K = 19.68$



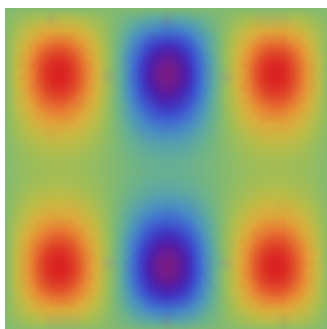
(d) Modo 2: $K = 19.22$



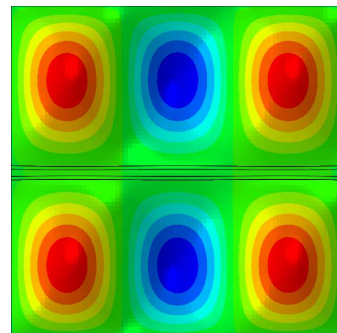
(e) Modo 3: $K = 23.35$



(f) Modo 3: $K = 21.71$



(g) Modo 4: $K = 23.37$



(h) Modo 4: $K = 22.01$

Figura 3.19: Cuatro primeros modos de pandeo para $r = 1$. Columna izquierda: *Mathematica*[®], Ritz 16 términos. Columna derecha: *Abaqus*[®].

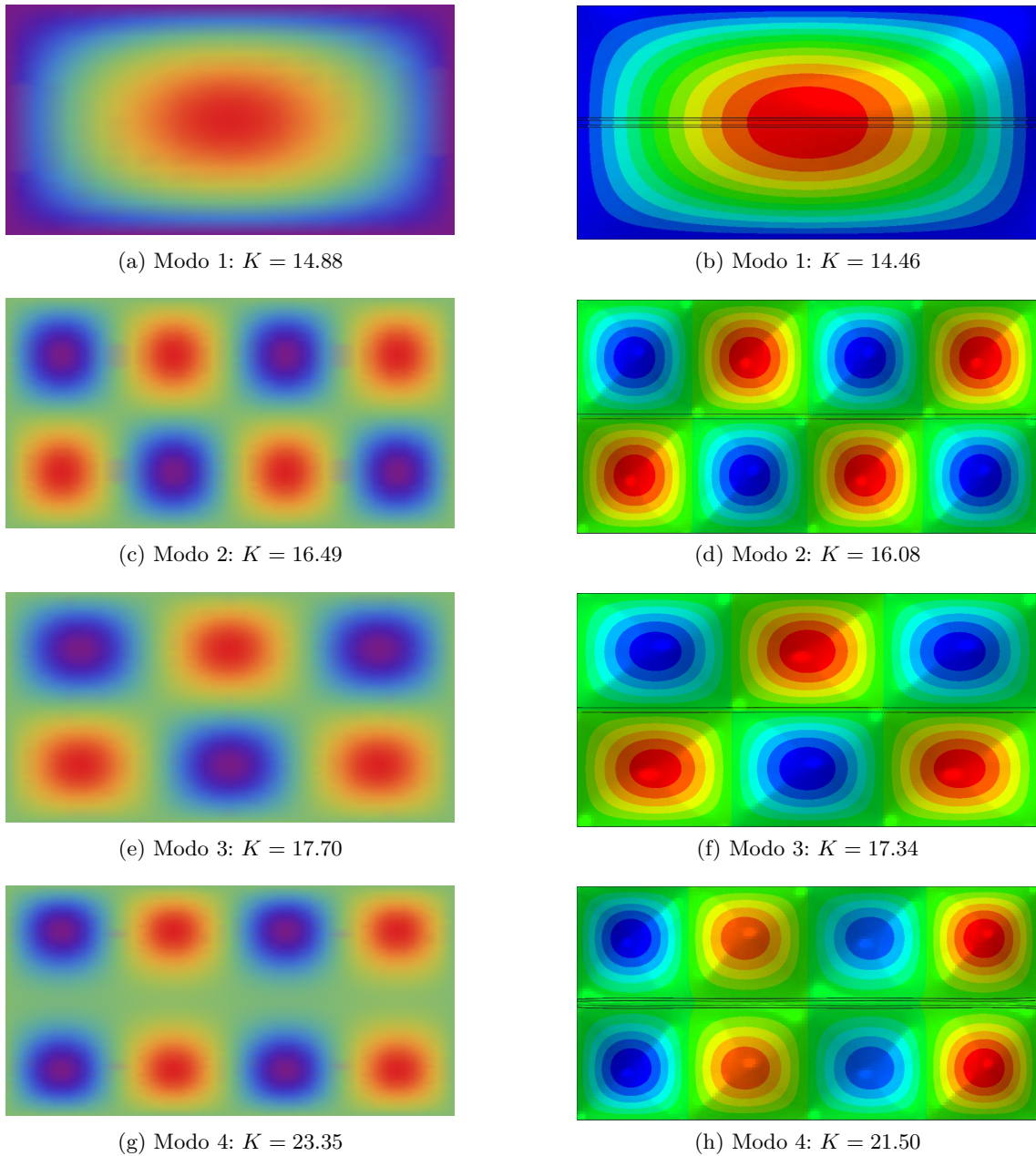


Figura 3.20: Cuatro primeros modos de pandeo para $r = 2$. Columna izquierda: *Mathematica*[®], Ritz 16 términos. Columna derecha: *Abaqus*[®].

Las Figuras 3.19 y 3.20 corroboran lo explicado anteriormente sobre la Figura 3.16: el primer modo para $r = 1$ es local, mientras que para $r = 2$ es global. A simple vista, la diferencia fundamental entre ambos es que el pandeo global se da con una sola semionda en todo el panel, mientras que el primer pandeo local de la placa para $r = 1$ ocurre con dos semiondas en la dirección del larguero. Por la naturaleza del pandeo de vigas, el modo de fallo de pandeo global

es muy perjudicial, ya que el hecho de que el larguerillo pandee junto con la placa, provoca el colapso casi inmediato del primero. Por ello, en caso de diseñar este panel con $r \approx 2$, interesaría que la carga siempre fuera superior a la crítica en régimen permanente. A pesar de que sólo se aprecia un modo de pandeo global, puede ocurrir que en el resto de modos el larguerillo desarrolle otros pandeos locales. Éstos pueden derivar en un modo de fallo denominado *cripling*, que consiste en el desarrollo de pequeñas semiondas en zonas concretas del larguerillo, provocando una elevada concentración de tensiones [6]. Por otra parte, observando los dos primeros modos para $r = 1$ y la Figura 3.17, puede afirmarse que en la Figura 3.16 las discrepancias del método de Levy con $r < 2$ se deben a la hipótesis de modos simétricos respecto a x (véase la Ec. (3.33)).

3.5. Estudios paramétricos

3.5.1. Posición del larguerillo

Para estudiar la posición del larguerillo dentro del panel, se retoma la Ec. (3.44) y se sustituye la coordenada $y_s = b/2$ por su valor deseado. En este estudio, se analizan las diferencias en la carga crítica de pandeo al situar el larguerillo en $y_s = b/2$ (ya resuelto), $y_s = b/3$ e $y_s = b/4$, según el sistema de referencia de la Figura 3.10. Para ello, se emplea el método de Ritz y *Abaqus*[®].

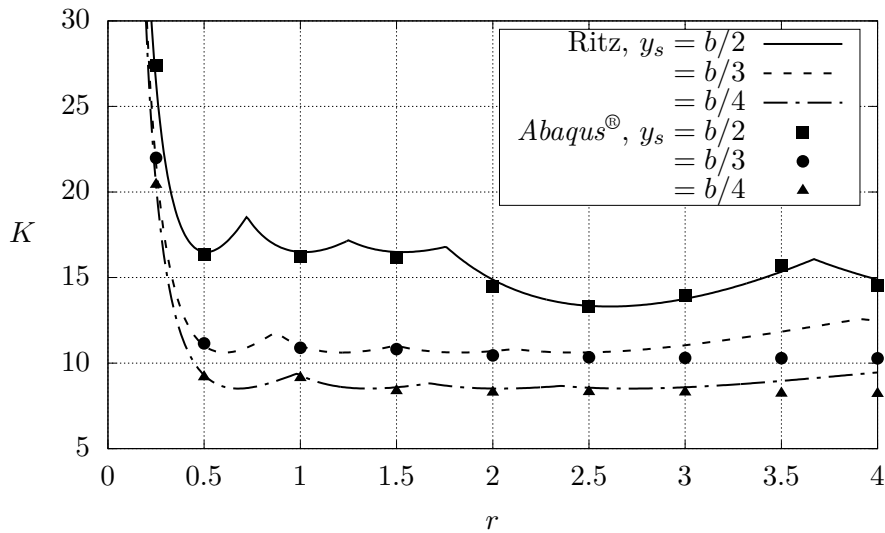


Figura 3.21: Factor de pandeo vs. relación de aspecto para distintas posiciones del larguerillo.

Cabe puntualizar algunos aspectos acerca de la convergencia y del comportamiento del panel representado en la Figura 3.21:

- Se sabe que en el rango $r \in [0-4]$ para $y_s = b/2$, los métodos de Ritz y MEF proporcionan resultados prácticamente idénticos. En cuanto $y_s = b/3$ e $y_s = b/4$, hay discrepancia entre ambos métodos a partir de $r \cong 2.5$ y $r \cong 3$ respectivamente.

- Cuando el larguerillo no está centrado, el panel deja de ser simétrico, habiendo dos placas de distinta relación de aspecto a cada lado. Esto significa que cada una desarrolla modos de pandeo muy diferentes y que por tanto el inicio de pandeo tiende a producirse antes en una de ellas.
- Para entender qué lado del panel propicia el inicio de pandeo, hay que tener en cuenta el efecto del larguerillo: al situarse más cerca de uno de los bordes, proporciona mayor rigidez a la zona del panel comprendida entre dicho borde y el propio larguerillo. Por tanto, la placa de menor r del panel es la que determina el inicio de pandeo.
- Esto último se ve reflejado en la Figura 3.21: los modos locales que en el caso $y_s = b/2$ tenían lugar antes del pandeo global ahora gobiernan prácticamente la totalidad de los modos de pandeo del panel (nótese que los ejes de las Figuras 3.16 y 3.21 son diferentes), ya que la zona del panel cuyo borde lateral se encuentra más cercano al larguerillo presenta gran dificultad para pandear. Si se desea una representación adecuada del pandeo más allá de cuatro semiondas en la dirección del eje x , es necesario añadir términos en la solución de Ritz.
- Queda claro que, de cara a un diseño que retrase el inicio de pandeo, es preferible situar los larguerillos de un panel equiespaciados.

3.5.2. Rigidez del larguerillo

En principio, podrían plantearse estudios paramétricos variando por un lado la rigidez a flexión y por otro la rigidez a torsión del larguerillo. No obstante, esto sería muy complicado de realizar con secciones reales. De este modo, se plantea un estudio con tres secciones diferentes, mostradas en la Figura 3.22.

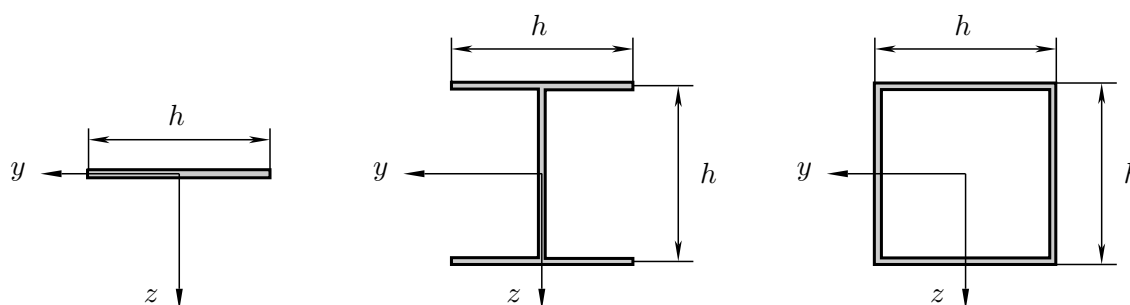


Figura 3.22: Esquema de las secciones empleadas en el estudio paramétrico, de sección t constante y con propiedades de la Tabla 3.1. De izquierda a derecha: sección plana, doble T y cuadrada.

Las dos secciones abiertas son de escasa rigidez a torsión y de distinta rigidez a flexión, mientras que la sección cerrada tiene elevada rigidez tanto a flexión como a torsión. Nótese que todas ellas tienen dos ejes de simetría, de modo que la posición del *cec* coincide con la del *cdg*. Sus respectivos momentos de área se dan en la Tabla 3.2 [5], [12].

Sección	A	I_y	I_z	J	Γ
Plana	ht	$\frac{ht^3}{12}$	$\frac{h^3t}{12}$	$\frac{ht^3}{3}$	≈ 0
Doble T	$3ht$	$\frac{7h^3t}{12}$	$\frac{h^3t}{6}$	ht^3	$\frac{h^5t}{24}$
Cuadr.	$4ht$	$\frac{2h^3t}{3}$	$\frac{2h^3t}{3}$	h^3t	0

Tabla 3.2: Momentos de área de las secciones de la Figura 3.22.

A continuación, se muestra la evolución de la carga crítica en función de la relación de aspecto:

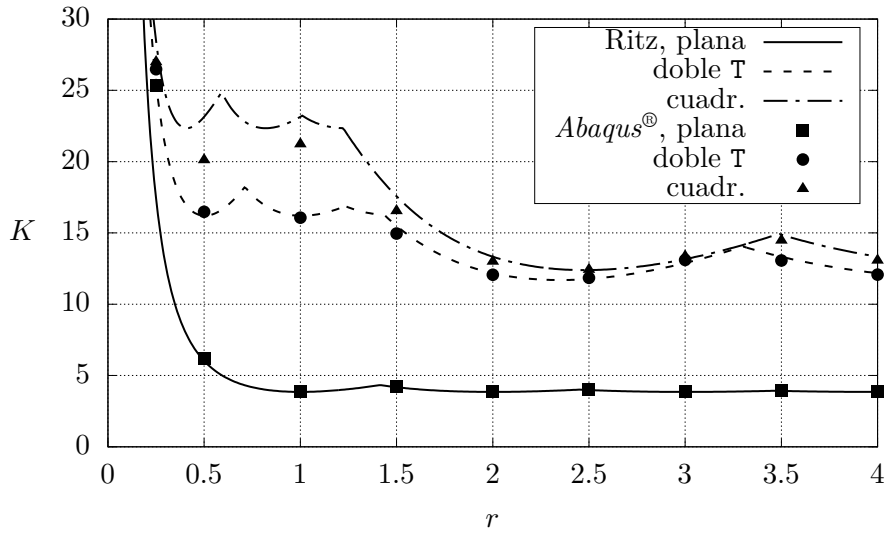


Figura 3.23: Factor de pandeo vs. relación de lados para las secciones de la Figura 3.22.

Los resultados de la Figura 3.23 pueden considerarse similares entre Ritz y MEF en todo el rango de r salvo en el larguero de sección cuadrada, en el que los resultados analíticos y numéricos sólo son similares en el rango $r \in [1.5 - 4]$. Por otra parte, del análisis de los resultados se extraen las siguientes conclusiones:

- El panel que contiene el larguero de sección plana tiene un comportamiento ante inicio de pandeo prácticamente idéntico al de una placa articulada en sus cuatro bordes [1]. Esto es debido a que la rigidez a flexión y torsión que aporta dicho larguero es muy pequeña, ya que, como se observa en la Tabla 3.2, ambas son proporcionales a t^3 .
- La mayor rigidez a flexión de la sección doble T respecto a la plana repercute en un aumento importante en la carga de pandeo. Por otra parte, la mayor rigidez a torsión de la sección

cuadrada respecto a la doble T apenas aumenta la carga crítica en el rango en el que los resultados de Ritz y MEF son similares. Esto explica, en parte, por qué los métodos de Levy, en el que se desprecia la rigidez a torsión, y Ritz ofrecen resultados prácticamente idénticos en la Figura 3.16.

- Si el pandeo sólo tiene lugar en la piel, la carga crítica aumenta cuando la rigidez a torsión es elevada, como es el caso de la sección cuadrada respecto a la doble T.

3.6. Pandeo local del larguerillo

Se estudia ahora el inicio de pandeo de las distintos tramos rectangulares del larguerillo por separado, denominados a partir de ahora subpaneles. Nótese que, debido a que la esbeltez geométrica λ_g del larguerillo es elevada (mayor que 10 en la mayor parte del rango r , tal y como se puede concluir de la Tabla 3.1), los subpaneles pueden estudiarse como placas de elevada relación de aspecto. Por ejemplo, tomando $r = 0.25$, bastante pequeño, la esbeltez geométrica sería $\lambda_g = L/h = a/h = r b/h = 0.25/0.02 = 12.5$, valor suficiente por otra parte para poder despreciar la energía de cortante [5].

Retomando la Figura 3.5 izquierda, el estudio de inicio de pandeo de los distintos subpaneles de la sección se lleva a cabo considerando que las uniones entre subpaneles se modelan como articulaciones.

Debido a que la compresión es uniaxial, la Ec. (2.2) se simplifica:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.57)$$

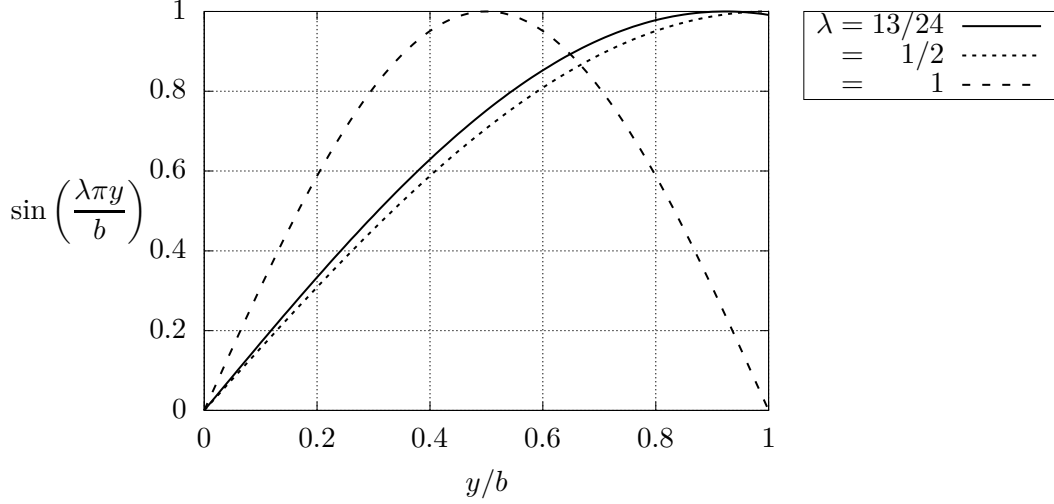
Como es lógico, para resolver la Ec. (3.57) se necesitan CC, las cuales dependen del subpanel del larguerillo que se pretende resolver.

3.6.1. Subpanel 1-2: SSSF

El subpanel 1-2 de la sección del larguerillo constituye una placa con tres bordes articulados y uno libre, siendo éste uno de los lados largos. La función de prueba empleada para cumplir las CC es la siguiente [7]:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\lambda n\pi y}{b}\right) \quad (3.58)$$

donde $a = L$, $b = h/4$ y λ es un parámetro cuyo valor se escoge para reproducir aproximadamente las flechas en la dirección y ; en todo caso, este λ es incapaz de cumplir las CC de fuerza en el borde libre. Con la función de forma habitual $\lambda = 1$ esta deformada es totalmente errónea, ya que no permite movimiento vertical (véase la Figura 3.24). En [7], se menciona que para valores cercanos a $\lambda = 1/2$ la función de prueba ofrece una buena representación de w .


 Figura 3.24: Función de prueba en la dirección y con $n = 1$.

En la Figura 3.24, se aprecia que las CC geométricas se cumplen. No obstante, para $\lambda = 1/2$ la pendiente de w en $y = b$ es nula, lo cual no tiene por qué ser cierto. Además, las CC de fuerza en el borde libre (momento y cortante nulo) nunca se cumplen simultáneamente, lo que introduce un pequeño error en los resultados. En cualquier caso, es preferible que se cumpla que el momento sea nulo antes que el cortante.

Para determinar la carga crítica, se introduce la Ec. (3.58) en la Ec. (3.57) y se simplifica:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \lambda^2 \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{N_x}{D} \right] w_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\lambda n\pi y}{b} \right) = 0 \quad (3.59)$$

$$w_{mn} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \lambda^2 \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{m b}{a} + \lambda^2 \frac{n^2 a}{m b} \right)^2$$

Observando la Ec. (3.59), se deduce que la carga crítica mínima tiene lugar para $n = 1$. Dado que se analizan placas de elevado r , interesa determinar el mínimo:

$$\frac{dN_{cr}}{dr} \propto \left(-\frac{m}{r^2} + \lambda^2 \frac{1}{m} \right) \left(\frac{m}{r} + \lambda^2 \frac{r}{m} \right) = 0 \quad (3.60)$$

$$r(N_{cr}|_{min}) = \frac{m}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad N_{cr}|_{min} = \frac{4 \lambda^2 \pi^2 D}{b^2}$$

Además, como el lado b sobre el que se reparte la carga es muy corto, puede ser preferible trabajar con carga puntual de pandeo en lugar de carga repartida:

$$P_{cr} = N_{cr} b = \frac{4 \lambda^2 \pi^2 D}{b} \quad (3.61)$$

En [8], se propone una solución alternativa para placas de elevada relación de aspecto que puede ser utilizada para comparar y discutir el valor de λ adecuado:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{12}{\pi^2} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (3.62)$$

donde, si r es grande, el segundo término es despreciable frente al primero y P_{cr} es:

$$P_{cr} \cong \frac{12 D}{b} = 1.49 \times 10^4 \text{ N} \quad (3.63)$$

Los resultados se dan en la Tabla 3.3, incluyendo el error relativo respecto a la Ec. (3.63).

	Carga crítica (N)	Error relativo
$\lambda = 13/24$	$P_{cr} = 1.44 \times 10^4$	err = 3.47 %
$\lambda = 1/2$	$P_{cr} = 1.23 \times 10^4$	err = 17.75 %

Tabla 3.3: Resultados de inicio de pandeo.

Hay que tener en cuenta que el punto 2 de unión se ha modelado como una articulación. Esto no es cierto, ya que el giro relativo entre ambos sería completamente libre. No obstante, tampoco sería correcta una modelización con empotramientos, ya que dicho giro no está impedido. La articulación es preferible, ya que sitúa la solución del lado de la seguridad.

3.6.2. Subpaneles 2-3 y 3-4: SSSS

Ambos tienen las mismas CC en sus cuatro bordes: dos articulaciones en los extremos del larguero y dos articulaciones para modelizar las uniones. La diferencia entre ambos es que, en el 2-3 el lado b es igual a $h/2$, mientras que en el 3-4 es igual a h . El factor de pandeo de una placa articulada con valores elevados de r es igual a 4 [3], de forma que la carga crítica es:

$$P_{cr} = \frac{4 \pi^2 D}{b} \quad (3.64)$$

es decir, por comparación con la Ec. (3.61), es $1/\lambda^2 \cong 4$ veces mayor que la del subpanel 1-2 si los lados b son iguales, lo que permite apreciar el efecto de tener un borde libre en vez de

articulado. Así, los valores de P_{cr} son:

$$\begin{aligned} P_{cr}|_{2-3} &= 2.46 \times 10^4 \text{ N} \\ P_{cr}|_{3-4} &= 1.23 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.6.3. Subpanel 4-5: pandeo entre remaches

La unión entre los larguerillos y la piel de un panel aeronáutico de aluminio normalmente se lleva a cabo por medio de remaches. Esto da lugar a la aparición de modos de fallo asociados al pandeo entre remaches del alma o alas del larguerillo unidas a la placa. Para determinar la carga crítica de inicio de pandeo del subpanel 4-5 se deben tener en cuenta estos remaches.

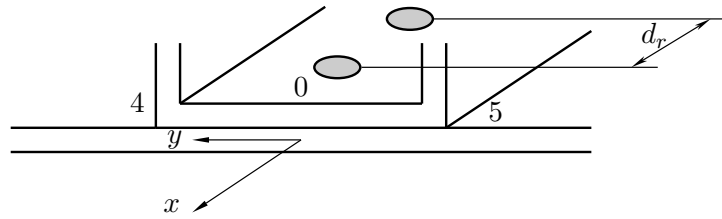


Figura 3.25: Esquema de la unión del larguerillo a la placa: d_r , espacio entre remaches.

Según [7], para analizar este caso es posible despreciar las derivadas en la dirección y de la Ec. (3.57), tratando así el problema como unidimensional:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.66)$$

Nótese que, de este modo, las derivadas parciales se convierten automáticamente en derivadas totales. La Ec. (3.66) tiene la siguiente solución general [7]:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} x\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} x\right) \quad (3.67)$$

A continuación, las CC se aplican en las coordenadas de los remaches. Si se asume que éstos actúan a modo de articulación en la piel del larguerillo, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} w(x=0) &= w(x=d_r) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=d_r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Sustituyendo en la Ec. (3.66), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_4 &= 0 \\ C_1 + C_2 d_r + C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} d_r\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} d_r\right) &= 0 \\ C_4 \frac{N_x}{D} &= 0 \\ C_3 \frac{N_x}{D} \sin\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} d_r\right) + C_4 \frac{N_x}{D} \cos\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} d_r\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

La primera y la tercera igualdad imponen directamente $C_1 = C_4 = 0$ para $N_x \neq 0$. Combinando entonces la segunda y la cuarta expresión de la Ec. (3.69), se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} C_2 d_r + C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} d_r\right) &= 0 \\ C_3 \frac{N_x}{D} \sin\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} d_r\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Si $C_3 = 0$, entonces $C_2 = 0$ y se obtiene la solución trivial $w = 0$, lo que indica que no hay inicio de pandeo. Para que $C_3 \neq 0$ y la solución de la Ec. (3.70) segunda sea no trivial, se establece:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}} d_r\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{N_x}{D}} d_r = m\pi \quad (3.71)$$

$$P_{cr} = \frac{m^2 \pi^2 b D}{d_r^2}$$

donde $b = h$ y el valor mínimo se da para el primer modo de pandeo $m = 1 \forall r$, es decir, una semionda de pandeo en cada espacio entre remaches. La Ec. (3.71) suele ponderarse por medio de un coeficiente de fijación c que depende del tipo de remaches empleados, siendo $c = 1$ o $c = 1.5$ para remaches avellanados y $c = 3$ para remaches de cabeza redondeada [7], [11]. Por otra parte, es posible expresar la distancia d_r entre remaches en función del número n_r de éstos y de la relación r de lados del subpanel:

$$d_r = \frac{a}{n_r + 1} = \frac{r b}{n_r + 1} \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = \frac{c \pi^2 D (n_r + 1)^2}{b r^2} \quad (3.72)$$

Lógicamente, la carga crítica aumenta si el número de remaches también lo hace, aunque ello puede repercutir en el peso de la estructura.

La referencia [11] proporciona una fórmula analítica para la tensión crítica σ_r de pandeo entre remaches, asumiendo régimen elástico:

$$\sigma_r = c \frac{\pi^2 E}{12} \left(\frac{t}{d_r} \right)^2 \quad (3.73)$$

siendo t el espesor del larguerillo. Desarrollando la Ec. (3.72) para obtener la tensión crítica, puede obtenerse una expresión similar a la Ec. (3.73):

$$\sigma_r = \frac{P_{cr}}{b t} = c \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{d_r} \right)^2 \quad (3.74)$$

Puede entenderse que la referencia [11] considera $\nu = 0$ en los larguerillos, debido a su comportamiento cuasi-unidimensional. No obstante, para garantizar la coherencia del documento se mantiene $\nu = 0.25$ según la Tabla 3.1.

La Ec. (3.72) se representa en la Figura 3.26 asumiendo conocido el número total de remaches.

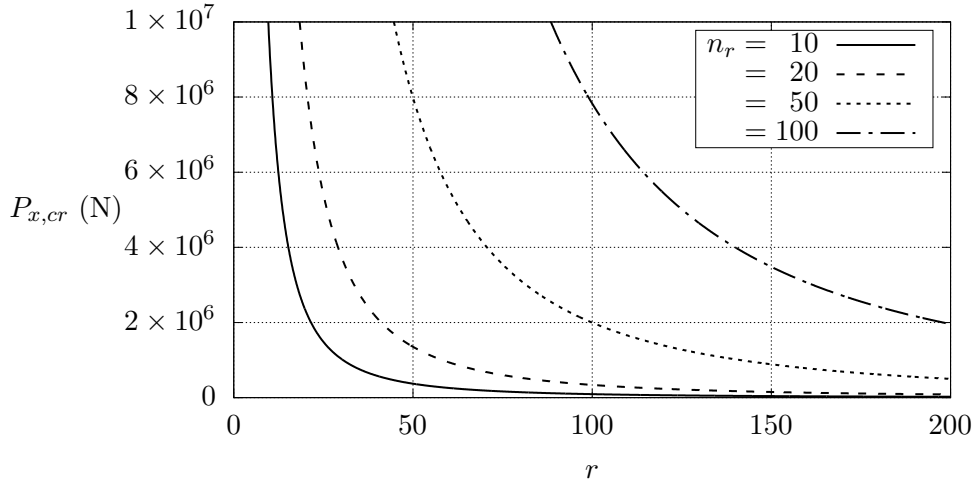


Figura 3.26: Carga crítica de pandeo entre remaches.

En la Figura 3.26, el máximo r es 200, lo que indica que para el subpanel $b = h = 0.02$ m y consecuentemente la longitud del larguerillo es $L = a = r b = 4$ m. Particularizando para esta longitud, puede apreciarse en la Tabla 3.4 que la carga de inicio de pandeo depende fuertemente del número de remaches.

# remaches	Carga crítica P_{cr} (N)
10	2.32×10^4
20	8.46×10^4
50	4.99×10^5
100	1.96×10^6

Tabla 3.4: Carga crítica vs. número de remaches para $r = 200$.

El hecho de incluir remaches aumenta mucho la carga crítica de pandeo, como es lógico. Sin embargo, ello puede ser perjudicial a la hora de introducir otros tipos de carga, ya que los agujeros, necesarios para insertar los remaches, son concentradores de tensiones.

3.7. Conclusiones generales

Durante la realización del capítulo, se ha llegado a una serie de conclusiones:

- La introducción única de acoplamientos elásticos que restringen el movimiento lateral de los bordes no cargados de una placa a compresión disminuye la carga de pandeo.
- Si sólo se introducen acoplamientos elásticos de rotación en los bordes no cargados de una placa bajo compresión, la carga crítica de pandeo aumenta.
- La introducción de un larguerillo en una placa, conformando un así un panel rigidizado, aumenta notablemente la carga crítica de pandeo por compresión.
- Los modos de pandeo de un panel son muy variados y dependen fuertemente de r .
- El hecho de situar los larguerillos equiespaciados en un panel rigidizado maximiza la carga de inicio de pandeo.
- La rigidez a flexión del larguerillo tiene importancia en los modos de pandeo globales, es decir, aquellos en los que placa y larguerillo pandean conjuntamente.
- La rigidez torsional del larguerillo es más importante en el pandeo local de placa o piel.
- Entre los modos de pandeo local del larguerillo, predomina el pandeo de las alas o almas no sujetas por remaches.

Postpandeo de placas a compresión

En este capítulo, se estudia el postpandeo de placas con cuatro bordes articulados bajo compresión uniforme N_x . Su análisis es imprescindible para entender el comportamiento a postpandeo de paneles, que se estudia en el Capítulo 5. En función de la restricción de los bordes $y = cte$, se distinguen tres casos:

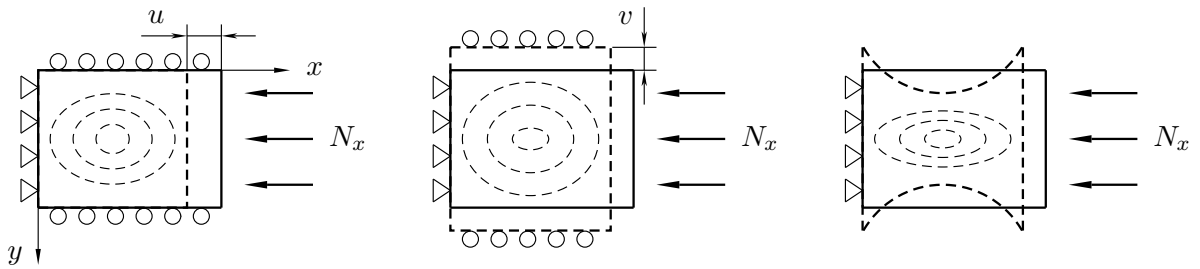


Figura 4.1: Izquierda, A: bordes descargados inmóviles. Centro, B: rectos. Derecha, C: libres.

En postpandeo, las solicitaciones desarrolladas en el plano $z = 0$ de la placa dejan de ser constantes. De esta forma, se crean solicitaciones de membrana y la placa adquiere curvatura, comportándose de forma similar a una lámina.

Para clarificar la notación, se utiliza N_x , N_y para designar las cargas aplicadas en los bordes de la placa y $\mathcal{N}_x(x, y)$, $\mathcal{N}_y(x, y)$ para las solicitaciones. Si sólo se aplica directamente carga N_x y los bordes laterales están restringidos, aparece una coacción del efecto Poisson que se traduce en una reacción $N_y \neq 0$. De este modo, la compresión deja de ser uniaxial y hay que considerar el efecto de esta carga tanto en inicio de pandeo como en postpandeo. Asimismo, en problemas de compresión uniforme la carga cortante N_{xy} es siempre nula [4].

4.1. Resolución de las ecuaciones de Von Karman

Se comienza calculando las incógnitas que contienen las ecuaciones de Von Karman: la deformada $w(x, y)$ y la función de Airy $\Phi(x, y)$. Dado que se estudian placas articuladas en sus cuatro bordes, se recupera la solución de prueba seno-seno dada por la Ec. (3.36). Posteriormente, se introduce ésta en el término de la derecha de la segunda Ec. (2.18) de Von Karman:

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 m n}{a b} w_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right]^2 - \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 w_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 w_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right] \quad (4.1)$$

La Ec. (4.1) es una ecuación en derivadas parciales EDP cuya incógnita primera es la función de Airy; w_{mn} se calcula a posteriori. Es muy complicado obtener una solución analítica exacta de Φ , por lo que se expande la Ec. (3.36) con un término simétrico w_{11} más otro asimétrico w_{21} para reproducir el postpandeo: el primero presenta una semionda en toda la placa y el segundo dos semiondas en la dirección de aplicación de N_x y una en la dirección perpendicular:

$$w(x, y) \cong w_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + w_{21} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (4.2)$$

Esta función es capaz de reproducir los dos primeros modos de pandeo \mathbf{w} por compresión uniforme, exista o no coacción del efecto Poisson [12]:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

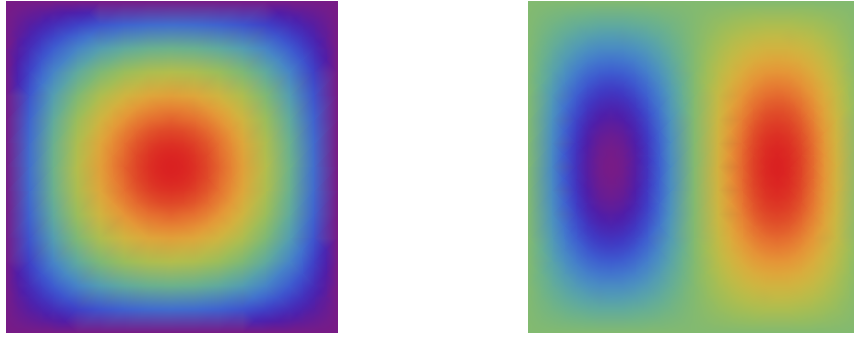


Figura 4.2: Modos # 1 y 2 de pandeo por compresión uniforme N_x .

La función de Airy se despeja de la Ec. (4.1) descomponiéndola en una solución homogénea y una particular: $\Phi = \Phi_H + \Phi_P$ [4]. Ya que para la homogénea sólo es necesario resolver $\nabla^4 \Phi_H(x, y) = 0$, se eligen las igualdades de la Ec. (2.14), que lo hacen automáticamente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial y^2} &= -\frac{N_x}{t} & \Rightarrow & \Phi_H(x, y) = -\frac{N_x}{2t} y^2 + f_1(x) \\ \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial x^2} &= -\frac{N_y}{t} & \Rightarrow & \Phi_H(x, y) = -\frac{N_y}{2t} x^2 + f_2(y) \\ \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial x \partial y} &= -\frac{N_{xy}}{t} = 0 & \Rightarrow & \Phi_H(x, y) = f_3(x) + f_4(y) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

donde N_x , N_y son constantes y sus signos negativos se deben a que se asumen positivas a compresión. La única manera de satisfacer las tres Ecs. (4.4) simultáneamente es estableciendo:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) = f_3(x) &= -\frac{N_y}{2t} x^2 \\ f_2(y) = f_4(y) &= -\frac{N_x}{2t} y^2 \end{aligned} \right\} \Phi_H(x, y) = -\frac{N_x}{2t} y^2 - \frac{N_y}{2t} x^2 \quad (4.5)$$

Esta solución homogénea se interpreta físicamente como una transición entre la tensión cerca del borde $x = a$ donde se aplica N_x y en cualquier sección $x = cte$ lejos de éste. De todas formas, la distribución N_x en $x = a$ debe tener una distribución equivalente a N_x ; la forma de satisfacer dicha equivalencia es a través de la solución homogénea, Ec. (4.5). En postpandeo por compresión, existe un aumento de N_x cerca de los bordes laterales de la placa, de ahí la importancia de distinguir entre sus CC laterales como véase en la Figura 4.1.

La solución particular debe satisfacer la Ec. (4.1) completa. En vez de introducir la Ec. (4.2) en la Ec. (2.18), es más cómodo desarrollar la Ec. (4.1) con $n = 1$ y hasta $m = 2$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \\ & \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \left\{ \left[\cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] w_{11}^2 + \right. \\ & \left[4 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) - 5 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] w_{11} w_{21} + \\ & \left. \left[\cos^2 \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) - \sin^2 \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] 4 w_{21}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

A continuación, se emplean las igualdades $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ para simplificar el primer término del lado derecho de la Ec. (4.6):

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 - (1 - \cos^2 \alpha_1) (1 - \cos^2 \alpha_2) = \\ & \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 - 1 = \cos 2\alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 + \cos 2\alpha_2 + \sin^2 \alpha_2 - 1 = \\ & \cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 - (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 - 1) = \\ & \cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 - (\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2) \Rightarrow \\ & \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

El segundo término de la Ec. (4.6) no se puede simplificar mucho más y el último admite un proceso análogo al del primero. Por tanto, el lado derecho de la Ec. (4.6) queda:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 w_{11}^2}{2 a^2 b^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) + \cos \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right] + \frac{2 \pi^4 w_{21}^2}{a^2 b^2} \left[\cos \left(\frac{4\pi x}{a} \right) + \cos \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right] \\ & \frac{\pi^4 w_{11} w_{21}}{a^2 b^2} \left[4 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) - 5 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por observación de la Ec. (4.8), puede deducirse que la solución particular ha de contener cinco términos de prueba diferentes. No obstante, si éstos se introducen en la Ec. (2.18), aparecerán otros dos conteniendo cosenos y un seno cruzados y viceversa. Finalmente, se deduce que es posible emplear la siguiente función de prueba para poder identificar todos los términos:

$$\begin{aligned} \Phi_p(x, y) = & C_1 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) + C_2 \cos \left(\frac{4\pi x}{a} \right) + C_3 \cos \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \\ & + C_4 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) + C_5 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ & + C_6 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) + C_7 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

La función de Airy depende de x, y a través de relaciones trigonométricas, de manera que en postpandeo las tensiones σ_{ij} y sollicitaciones $\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y$ (ambas magnitudes son equivalentes) también lo hacen. Introduciendo la Ec. (4.9) en la Ec. (4.1) e identificando términos, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{16 C_1}{r^2} - \frac{E w_{11}^2}{2} &= 0 \\ \frac{256 C_2}{r^2} - 2 E w_{21}^2 &= 0 \\ 16 C_3 - \frac{E}{r^2} \left(\frac{w_{11}^2}{2} + 2 w_{21}^2 \right) &= 0 \\ \left(\frac{41}{r^4} + \frac{20}{r^2} + 8 \right) C_4 + \frac{16 C_5}{r^2} - \left(\frac{20}{r^2} + \frac{8}{r^4} \right) C_6 - \left(\frac{40}{r^4} + \frac{16 C_7}{r^2} \right) - \frac{4 E}{r^2} w_{11} w_{21} &= 0 \\ \frac{16 C_4}{r^2} + \left(\frac{41}{r^4} + \frac{20}{r^2} + 8 \right) C_5 - \left(\frac{40}{r^4} + \frac{16}{r^2} \right) C_6 - \left(\frac{20}{r^2} + 8 \right) C_7 + \frac{5 E}{r^2} w_{11} w_{21} &= 0 \\ - \left(\frac{20}{r^2} + 8 \right) C_4 - \left(\frac{40}{r^4} + \frac{16}{r^2} \right) C_5 + \left(\frac{41}{r^4} + \frac{20}{r^2} + 8 \right) C_6 + \frac{16 C_7}{r^2} &= 0 \\ - \left(\frac{40}{r^4} + \frac{16}{r^2} \right) C_4 - \left(\frac{20}{r^2} + 8 \right) C_5 + \frac{16 C_6}{r^2} + \left(\frac{41}{r^4} + \frac{20}{r^2} + 8 \right) C_7 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Resolviendo el sistema anterior, se despeja cada una de las constantes C_i de la Ec. (4.9):

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{E r^2}{32} w_{11}^2 \\
 C_2 &= \frac{E r^2}{128} w_{21}^2 \\
 C_3 &= \frac{E}{32 r^2} (w_{11}^2 + 4 w_{21}^2) \\
 C_4 &= -\frac{4 E (128 r^8 + 640 r^6 + 872 r^4 - 369) r^2}{9 (16 r^4 + 40 r^2 + 9)^2} w_{11} w_{21} \\
 C_5 &= -\frac{E (640 r^8 + 3200 r^6 + 5080 r^4 + 3276 r^2 + 1845) r^2}{9 (16 r^4 + 40 r^2 + 9)^2} w_{11} w_{21} \\
 C_6 &= -\frac{8 E (2 r^2 + 5) (32 r^6 + 80 r^4 + 54 r^2 + 45) r^2}{9 (16 r^4 + 40 r^2 + 9)^2} w_{11} w_{21} \\
 C_7 &= -\frac{4 E (2 r^2 + 5) (80 r^6 + 200 r^4 + 45 r^2 - 72) r^2}{9 (16 r^4 + 40 r^2 + 9)^2} w_{11} w_{21}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Para verificar que la función de Airy calculada es correcta, se retoma la Ec. (2.14) y se comprueba la equivalencia entre las solicitaciones y/o tensiones y carga externa en los bordes de la placa:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_x|_{x=0,a} &\longleftrightarrow N_x \Rightarrow \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(0, y)}{\partial y^2} dy = \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(a, y)}{\partial y^2} dy = N_x \\
 \mathcal{N}_y|_{y=0,b} &\longleftrightarrow N_y \Rightarrow \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} dx = \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, b)}{\partial x^2} dx = N_y \\
 \mathcal{N}_{xy}|_{x=0,a} &\longleftrightarrow N_{xy} \Rightarrow \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(0, y)}{\partial x \partial y} dy = \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(a, y)}{\partial x \partial y} dy = 0 \\
 \mathcal{N}_{xy}|_{y=0,b} &\longleftrightarrow N_{xy} \Rightarrow \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x \partial y} dx = \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, b)}{\partial x \partial y} dx = 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Obtenida la expresión de Φ , ésta se introduce en la Ec. (2.15) para determinar las incógnitas w_{11} , w_{21} . Se llega a una ecuación no simplificable que requiere del uso de métodos aproximados para el cálculo de w_{mn} . Dado que las funciones de prueba de la Ec. (3.36) son conocidas, se utiliza el método de Galerkin, cuyo desarrollo análogo para la Ec. (2.2) se encuentra en [12]:

$$\begin{aligned}
 m = 1, \quad n = 1 \quad &\Rightarrow \\
 \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{t}{D} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy dx &= 0 \\
 m = 2, \quad n = 1 \quad &\Rightarrow \\
 \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{t}{D} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy dx &= 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$ es el operador gradiente en dos dimensiones. Planteando una ecuación para $m = n = 1$ y otra para $m = 2, n = 1$ y resolviendo el sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 w_{11} &= 2t \sqrt{\frac{K (\mathcal{P}_x + r^2 \mathcal{P}_y) r^2 - (1 + r^2)^2}{3(1 - \nu^2)(1 + r^4)}} \\
 w_{21} &= 2t \sqrt{\frac{K (4\mathcal{P}_x + r^2 \mathcal{P}_y) r^2 - (4 + r^2)^2}{3(1 - \nu^2)(16 + r^4)}}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde K se define al comienzo del Capítulo 3 y su valor depende del caso de estudio de la Figura 4.1; $\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y$ son los ratios de carga de postpandeo:

$$\mathcal{P}_x = \frac{N_x}{N_{cr}} \qquad \mathcal{P}_y = \frac{N_y}{N_{cr}} \tag{4.15}$$

Asimismo, el método de Galerkin (al igual que el de Ritz) obliga a trabajar con un número finito de términos, comprometiendo así el coste computacional en caso de que dicho número sea elevado.

4.2. Postpandeo en elementos finitos: algoritmo de Riks

Para resolver el problema de postpandeo en *Abaqus*[®], debe utilizarse un algoritmo de resolución no lineal. El programa permite introducir un *step* denominado *Static Riks*, basado como su nombre indica en el algoritmo no lineal de Riks, que se describe con detalle en el Manual Teórico de *Abaqus*[®] [15].

Sea el vector \mathbf{P}^N un patrón de cargas, λ un parámetro de proporcionalidad de carga LPF, de forma que en cada instante el valor de la misma es $\lambda \mathbf{P}^N$, y \mathbf{u}^N un patrón de desplazamientos. En cada instante, la solución se escala con desplazamiento inicial máximo en valor absoluto $\bar{\mathbf{u}}$ y con la norma del vector de cargas $\|\mathbf{P}\|$:

$$\begin{aligned}
 \text{Carga} &\quad \rightarrow \quad \lambda \tilde{\mathbf{P}}^N, \quad \tilde{\mathbf{P}}^N = \frac{\mathbf{P}^N}{\|\mathbf{P}\|} = \frac{\mathbf{P}^N}{(\mathbf{P}^N \cdot \mathbf{P}^N)^{1/2}} \\
 \text{Desplazamiento} &\quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^N}{\bar{\mathbf{u}}}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde el superíndice \sim denota cada subespacio (desplazamiento o carga) normalizado.

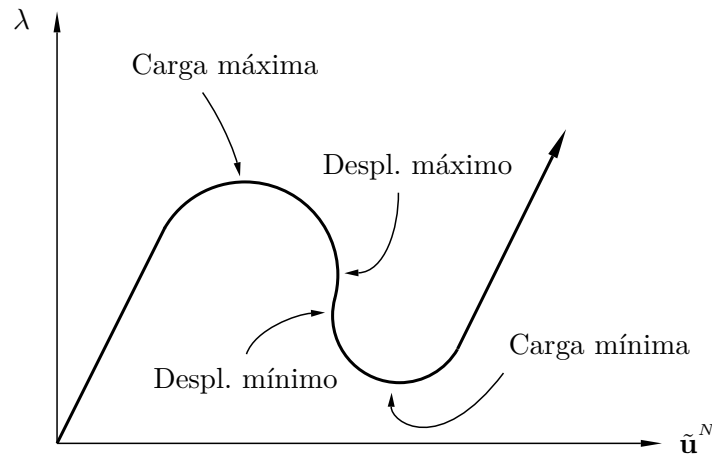


Figura 4.3: Respuesta estática inestable. Indicaciones referidas al punto de bifurcación.

De este modo, la solución sigue el camino descrito por el vector de componentes unitarias:

$$\mathbf{v}^N = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^N \\ \lambda \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

A partir de este vector, se obtiene el vector tangente a la trayectoria:

$$\mathbf{v}^N = \begin{Bmatrix} \frac{\mathbf{v}^N}{\bar{\mathbf{u}}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^N \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

Suponiendo ahora que la solución parte del estado $\mathbf{A}^0 = \{\tilde{\mathbf{u}}_0^N \ \lambda_0\}^T$, se define la matriz \mathbf{K}_0^{MN} de rigidez tangente:

$$\mathbf{K}_0^{MN} \cdot \mathbf{v}_0^M = \mathbf{P}^N \tag{4.19}$$

El salto del estado \mathbf{A}^0 a \mathbf{A}^1 se realiza a través de un incremento de arco Δl definido por:

$$\Delta\lambda_0^2 (\mathbf{v}_0^N \cdot \mathbf{v}_0^N) = \Delta l^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda_0 = \frac{\pm\Delta l}{(\tilde{\mathbf{v}}_0^N \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0^N + 1)^{1/2}} \quad (4.20)$$

donde el valor Δl inicial lo fija el usuario y el signo de $\Delta\lambda_0$ debe cumplir la siguiente relación:

$$\Delta\lambda_0 (\mathbf{v}^N \cdot \Delta\mathbf{v}_{-1}) = \Delta\lambda_0 (\mathbf{v}^N \cdot \Delta\tilde{\mathbf{u}}_{-1}^N + \Delta\lambda_{-1}) > 0 \quad (4.21)$$

De este modo, el vector que une los estados inicial \mathbf{A}^0 y final \mathbf{A}^1 de una iteración se obtiene simplemente multiplicando el vector \mathbf{v}_0^N tangente a la trayectoria por el factor $\Delta\lambda_0$ ya conocido. Así, el punto \mathbf{A}^1 viene dado por:

$$\mathbf{A}_1 = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{u}}_0^N + \Delta\lambda_0 \tilde{\mathbf{v}}_0^N \\ \lambda_0 + \Delta\lambda_0 \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

La solución se corrige forzándola a pasar por el camino de equilibrio, dado por la recta perpendicular al vector \mathbf{v}_0 que pasa a su vez por \mathbf{A}^1 , mediante el siguiente algoritmo:

- Primero se inicializa la iteración i correspondiente: $\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_0$, $\Delta\mathbf{u}_i^N = \Delta\lambda_0 \mathbf{v}_0^N$.
- Después, se obtiene el vector \mathbf{R}^N de fuerzas internas en los nodos y a partir de éste, la matriz de rigidez tangente:

$$\mathbf{R}^N = \int_{\Omega} \boldsymbol{\beta}^N \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad \mathbf{K}^{MN} = \frac{\partial \mathbf{R}^N}{\partial \mathbf{u}^M} \quad (4.23)$$

siendo $\boldsymbol{\beta}$ un vector de funciones de forma y $\boldsymbol{\sigma}$ el vector tensión.

- Se comprueba el equilibrio a través del residuo: $\boldsymbol{\Delta}_i^N = (\lambda_0 + \Delta\lambda_i) \mathbf{P}^N - \mathbf{R}^N$. Si el valor resultante es pequeño, la iteración ha convergido.
- A continuación, se resuelve el siguiente sistema:

$$\mathbf{K}^{MN} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}_i^M \\ \mathbf{c}_i^M \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}^N \\ \boldsymbol{\Delta}_i^N \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

donde \mathbf{c}_i^M es el vector desplazamiento que aparece como consecuencia del error $\boldsymbol{\Delta}_i^N$ asociado a cada iteración.

- Escalando ahora el vector \mathbf{v}_i^N para obtener $\tilde{\mathbf{v}}_i^N$ y sumándole $\{\mathbf{c}_i^N / \bar{u} \ \rho_i\}^T = \{\tilde{\mathbf{c}}_i^N \ \rho_i\}^T$, donde $\rho_i = \Delta \mathbf{u}_i^N \cdot \mathbf{P}^N / \|\mathbf{P}\|^2$ es la proyección del residuo $\Delta \mathbf{u}_i^N$ escalado a $\tilde{\mathbf{P}}^N$, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{c}_i^N + \mu \tilde{\mathbf{v}}_i^N \\ \mu \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{v}^N = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{\mathbf{c}_i^N \cdot \mathbf{v}_0^N}{\mathbf{v}_i^N \cdot \mathbf{v}_0^N + 1} \quad (4.25)$$

y la solución viene dada por el estado \mathbf{A}^i :

$$\mathbf{A}^i = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^N + \Delta \mathbf{u}_i^N + \mathbf{c}_i^N + \mu \mathbf{v}_i^N \\ \lambda_0 + \Delta \lambda_i + \mu \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

- Por último, se actualizan las variables y se regresa al primer ítem para la siguiente iteración:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{i+1}^N &= \Delta \mathbf{u}_i^N + \mathbf{c}_i^N + \mu \mathbf{v}_i^N \\ \Delta \lambda_{i+1} &= \Delta \lambda_i + \mu \\ i &= i + 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Un esquema del algoritmo anterior se detalla en la Figura 4.4.

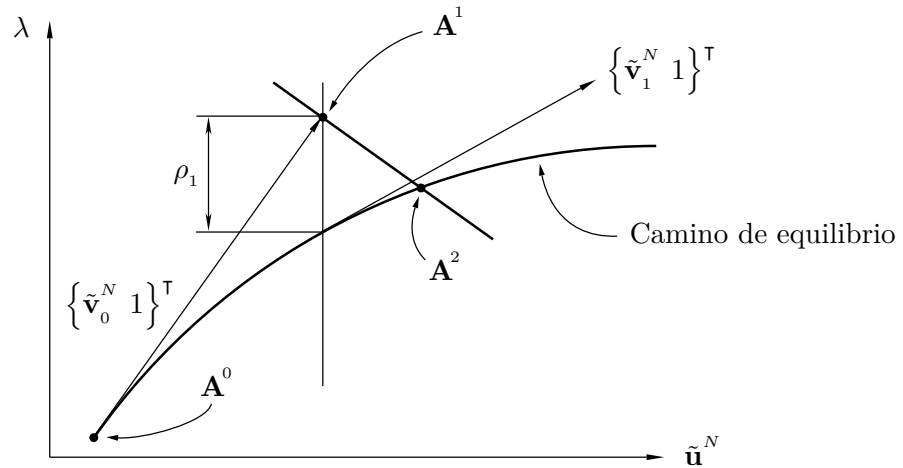


Figura 4.4: Algoritmo de Riks modificado.

Obviamente, no es posible ejecutar el postpandeo sin antes haber calculado el inicio: carga crítica, que en postpandeo debe ser el valor de la *shell edge load* (definida en el Capítulo 3), y modos de pandeo. Además, el algoritmo de Riks implementado en *Abaqus*[®] necesita de un patrón de imperfecciones iniciales referido a los desplazamientos normales al plano medio de la

placa para reproducir el postpandeo. Se introduce el siguiente patrón \mathbf{w}^* basado en los cuatro primeros modos de pandeo:

$$\mathbf{w}^* = 0.50 \frac{h}{10} \mathbf{w}_1 + 0.25 \frac{h}{10} \mathbf{w}_2 + 0.125 \frac{h}{10} \mathbf{w}_3 + 0.125 \frac{h}{10} \mathbf{w}_4 \quad (4.28)$$

Existe la posibilidad de introducir otros patrones como los propuestos en [16]. No obstante, tras realizar varias ejecuciones con el caso de la Figura 4.1 se llega a la conclusión de que es más apropiado emplear el de la Ec. (4.28).

El resto de parámetros del método a introducir en *Abaqus*[®] están relacionados con el incremento de longitud de arco y se dan en la Tabla 4.1, con un máximo de 100 incrementos.

Inicial	Mínimo	Máximo	Long. estimada
0.1	10^{-15}	1	1

Tabla 4.1: Parámetros de longitud de arco introducidos en *Abaqus*[®].

Durante el desarrollo de este capítulo, se realiza un control por carga, es decir, se introduce el valor de N_{cr} en la *shell edge load* y se estudian los resultados tomando el LPF como variable independiente.

4.3. Placa con bordes descargados inmóviles

Se estudia ahora el problema de la Figura 4.1 izquierda. En la Figura 4.5 puede visualizarse de forma más esquemática.

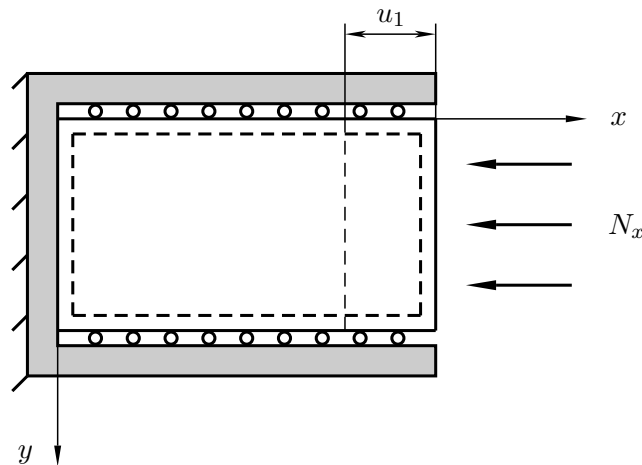


Figura 4.5: Placa a compresión con bordes descargados restringidos.

Como puede verse, se restringe el desplazamiento u en la dirección de aplicación de la carga en el borde $x = 0$, así como los movimientos v de los bordes laterales. Por tanto, las CC sobre u, v se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 & u(a, y) &= u_1 \\ v(x, 0) &= 0 & v(x, b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

En cuanto al desplazamiento w , la solución de prueba utilizada cumple automáticamente las CC en los bordes: deformada impedida y giro libre.

4.3.1. Limitaciones

Antes que nada, es necesario estudiar los límites de aplicación de la aproximación realizada en la Ec. (4.2). Es importante percatarse de que la restricción de los bordes $y = cte$ implica una carga N_y adicional que aparece como consecuencia de la combinación del efecto Poisson y de las reacciones en dichos bordes, de modo que la placa está sometida a una compresión biaxial. El factor de pandeo K se da en la Ec. (3.11) para $\beta = \nu$, donde m y n representan el número de semiondas de pandeo en las direcciones x e y respectivamente.

El mínimo de la Ec. (3.11) izquierda se da siempre para $n = 1$. Por otra parte, es necesario analizar el rango donde el número de semiondas del primer pandeo corresponde a los términos de la Ec. (4.2), es decir, una y dos semiondas respectivamente. Para ello, se intersectan las curvas dadas por la Ec. (3.11) con $m = 1, m = 2$ para encontrar el salto del primer modo al segundo y con $m = 2, m = 3$ para determinar el valor de r máximo que permite la mencionada aproximación:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{1}{r^2} + \nu} = \frac{\left(\frac{4}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{4}{r^2} + \nu} &\Rightarrow r_{1,2} = \pm 2.08 & r_{3,4} = \pm 1.36 i \\ \frac{\left(\frac{4}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{4}{r^2} + 1\nu} = \frac{\left(\frac{9}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{9}{r^2} + \nu} &\Rightarrow r_{1,2} = \pm 3.51 & r_{3,4} = \pm 2.42 i \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde se ha usado $\nu = 0.25$. De la primera igualdad, se obtiene que la transición de una a dos semiondas en el primer pandeo se da para $r = 2.08$, asunto a tener en cuenta a la hora de interpretar el postpandeo. Además, el paso de dos a tres semiondas se da con $r = 3.51$, valor límite en los cálculos analíticos de este problema.

4.3.2. Reacción lateral y movimientos en el plano

Se introduce el problema de postpandeo determinando la reacción N_y que aparece como consecuencia de inmovilizar los bordes laterales, como en la Figura 4.5. Para ello, se integra la Ec. (2.9) segunda y se combina con la segunda fila de la Ec. (4.29):

$$\int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = v(x, b) - v(x, 0) \quad \begin{cases} = 0 \\ = \int_0^b \left[\varepsilon_y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{cases} \quad (4.31)$$

La deformación ε_y se calcula considerando las Ecs. (2.14) primera y segunda, (2.16) y (4.14). De la Ec. (4.31), es posible despejar el valor de N_y :

$$N_y = \nu N_x - \frac{\pi^2 E t (w_{11}^2 + w_{21}^2)}{8 b^2} \quad (4.32)$$

o lo que es lo mismo, dividiendo por la carga crítica N_{cr} :

$$\mathcal{P}_y = \nu \mathcal{P}_x - \frac{3(1 - \nu^2)}{2 K} \frac{w_{11}^2 + w_{21}^2}{t^2} \quad (4.33)$$

donde K se obtiene de la Ec. (3.11) para $n = 1$ y $m = 1$ en el primer modo de pandeo. Las Ecs. (4.33) y (4.14) constituyen un sistema de tres ecuaciones con incógnitas \mathcal{P}_y , w_{11} y w_{21} . Los resultados de estas incógnitas son algo engorrosos como para mostrarlos explícitamente. Sin embargo, conviene tener en cuenta que si $N_x < N_{cr}(m = 1)$, w_{11} toma valores imaginarios, mientras que si $N_x < N_{cr}(m = 2)$, es w_{21} quien lo hace. El primer caso puede visualizarse forzando $w_{21} = 0$, es decir, suponiendo que la placa padea con una semionda:

$$w_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{P}_y = \nu \mathcal{P}_x - \frac{3(1 - \nu^2)}{2 K} \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^2 \\ w_{11} = 2 t (1 + r^2) \sqrt{\frac{\mathcal{P}_x - 1}{3(1 - \nu^2)(1 + 3r^4)}} \end{cases} \quad (4.34)$$

Resulta evidente que si $\mathcal{P}_x < 1$, el modelo analítico no predice desplazamiento normal al plano de la placa, ya que la carga es menor que la crítica. Si además la placa es cuadrada $r = 1$:

$$w_{11} = 2 t \sqrt{\frac{\mathcal{P}_x - 1}{3(1 - \nu^2)}} \quad (4.35)$$

El próximo paso es determinar los movimientos u , v del plano medio de la placa, completando así el cálculo de desplazamientos en las tres direcciones de los ejes espaciales. Para ello, se utiliza la Ec. (2.9) primera y segunda combinada con las CC de la Ec. (4.29):

$$\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(x, y) - u(0, y) = \int_0^x \left[\varepsilon_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$$\int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy = v(x, y) - v(x, 0) = \int_0^y \left[\varepsilon_y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$
(4.36)

De forma similar al desarrollo de la Ec. (4.32), las expresiones de $u(x, y)$, $v(x, y)$ se dan en la Ec. (4.37) para la solución de prueba con un solo término $w_{21} = 0$:

$$u(x, y) = -\frac{N_x - \nu N_y}{E t} x + \frac{\nu \pi a w_{11}^2}{16 b^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) - \frac{\pi^2 w_{11}^2}{8 a^2} \left\{ x \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \left[2x + \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right] \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right\}$$

$$v(x, y) = -\frac{N_y - \nu N_x}{E t} y + \frac{\nu \pi b w_{11}^2}{16 a^2} \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{\pi^2 w_{11}^2}{8 b^2} \left\{ y \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \left[2y + \frac{b}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right] \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right\}$$
(4.37)

En ella, puede distinguirse un término “homogéneo” que no depende de w_{11} , el cual está presente tanto antes del pandeo como después.

4.3.3. Contraste de resultados

Los resultados se muestran para placa cuadrada $r = 1$ con los datos de la Tabla 3.1. Una vez ejecutado el caso en *Abaqus*[®], se representa el LPF frente a la longitud de arco.

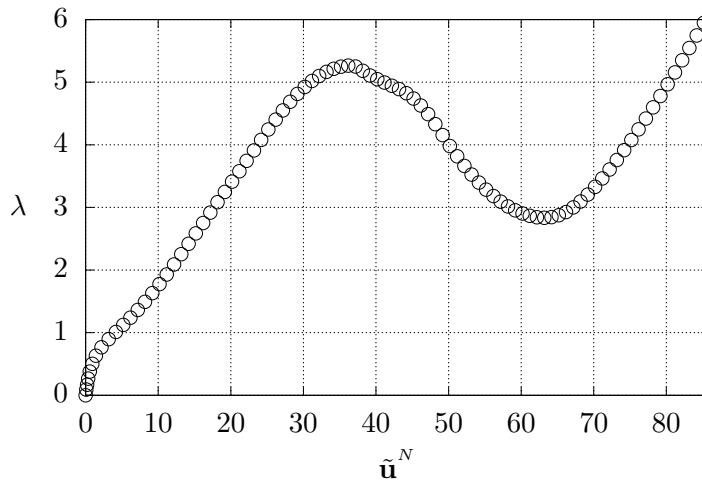


Figura 4.6: Evolución del LPF de carga en *Abaqus*[®].

La respuesta de la Figura 4.6 es aproximadamente lineal hasta el inicio de pandeo $\lambda = 1$. A partir de ese valor, la trayectoria es no lineal y similar a la conceptual de la Figura 4.3. En un punto, la respuesta pasa de ser creciente a decreciente; este punto representa el fin del primer modo de pandeo, pues el programa interpreta que debe regresar al comienzo del primer modo para así cambiar la trayectoria de equilibrio conforme al segundo. Por tanto, el primer y segundo modo de pandeo se manifiestan en los tramos aproximados $\tilde{\mathbf{u}}^N \in [1 - 35]$ y $\tilde{\mathbf{u}}^N \in [63 - 85]$ respectivamente.

Deformada y movimientos en el plano

El primer análisis de resultados se realiza a partir de la deformada. Como se ha visto en el Capítulo 2, las ecuaciones de Von Karman representan deformaciones máximas del orden del espesor de la placa. Para corroborar este hecho y así comparar con el MEF, se representa en la Figura 4.7 la deformada en el centro de la placa $w(a/2, b/2)$ adimensionalizada con el espesor t frente al ratio de postpandeo \mathcal{P}_x .

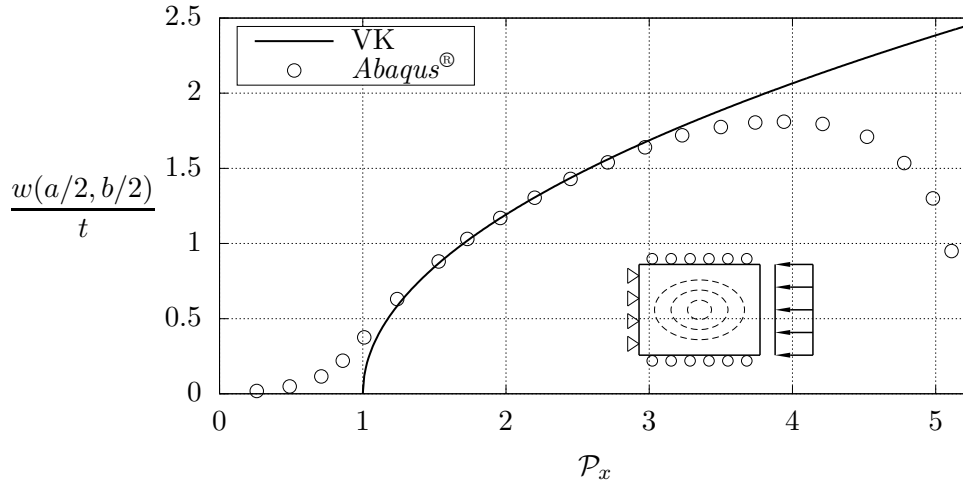


Figura 4.7: Deformada en el centro de la placa vs. ratio de postpandeo; modo # 1.

Por debajo de $\mathcal{P}_x = 1$, el MEF predice desplazamiento no nulo, debido a que se ha introducido un patrón \mathbf{w}^* de imperfecciones (véase la Ec. (4.28)), basado en los primeros modos de pandeo. Por otra parte, la predicción de w/t por parte de las ecuaciones de Von Karman es bastante buena hasta llegar a $\mathcal{P}_x \cong 3$, valor en el que comienza a predominar el segundo modo de pandeo. Cuando este último se establece completamente en la placa, la deformada en el centro de la placa es nula, ya que dicho punto corresponde a un nodo en el patrón montaña-valle típico de los modos de pandeo por compresión (véase la Figura 4.2). Ésto se aprecia en el descenso de w/t predicho por Abaqus[®] a partir de $\mathcal{P}_x \cong 4$.

Continuando con la deformada, se representa ésta a lo largo de una línea $y = cte$ en distintos tramos de la placa con $\mathcal{P}_x = 2$.

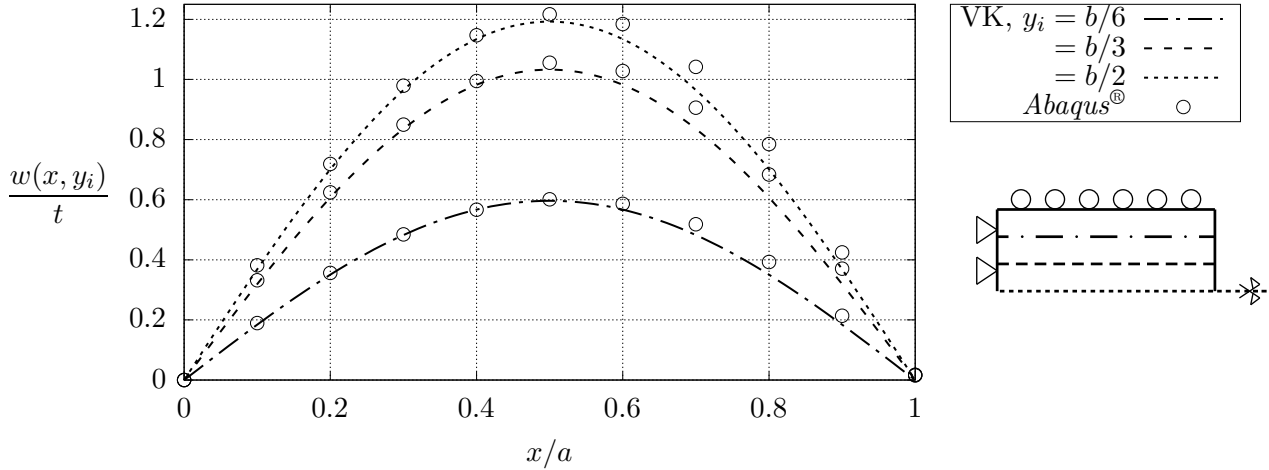


Figura 4.8: Representación de la deformada a lo largo de distintas líneas $y = cte$ con $\mathcal{P}_x = 2$; sólo primer modo para Von Karman.

El contraste entre resultados analíticos y *Abaqus*[®] de la Figura 4.8 resulta satisfactorio, ya que el primer modo de pandeo es simétrico y por tanto menos influenciado por el patrón inicial de imperfecciones (véase la Ec. (4.28)).

Aprovechando la extracción de dos modos de pandeo en las ecuaciones de Von Karman, se contrasta la deformada máxima del segundo. Para ello, hay que situarse en el centro de una de las dos semiondas que reproduce dicho modo (véase la Figura 4.2), por ejemplo en $x = a/4$, $y = b/2$ (esta última es una línea de simetría como se ha visto en la Figura 4.8). Los resultados se comparan con el MEF en la Figura 4.9.

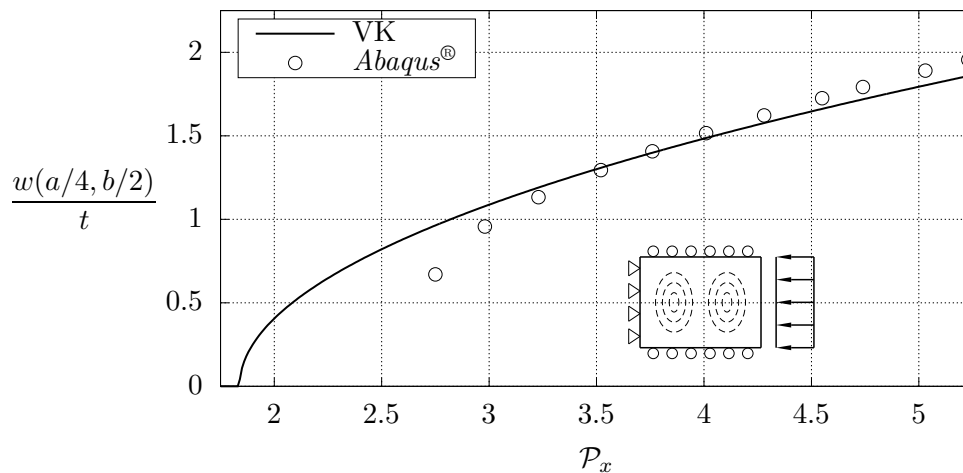


Figura 4.9: Deformada en el punto $(x, y) = (a/4, b/2)$ vs. ratio de postpandeo; modo # 2.

Como se aprecia en dicha figura y también se deduce de la Figura 4.6, el segundo modo sólo se manifiesta a partir de $\mathcal{P}_x \cong 2.75$. A partir de ese valor, puede decirse que el contraste de resultados entre *Abaqus*[®] y las ecuaciones de Von Karman es satisfactorio, especialmente en el rango aproximado $\mathcal{P}_x \in [3.25 - 4.5]$.

La deformada en toda la placa se muestra en la Figura 4.10 con los resultados de *Abaqus*[®]. Nótese que no se predice un segundo modo de pandeo completamente antisimétrico, ya que los valores máximo y mínimo de la Figura 4.10 para $\mathcal{P}_x = 3$, $\mathcal{P}_x = 4$ no son iguales y de signo contrario. Esto es consecuencia del patrón Ec. (4.28), en el que al ponderar el primer y segundo modo para una deformada inicial de valor residual, una de las semiondas del segundo es más prominente que la otra.

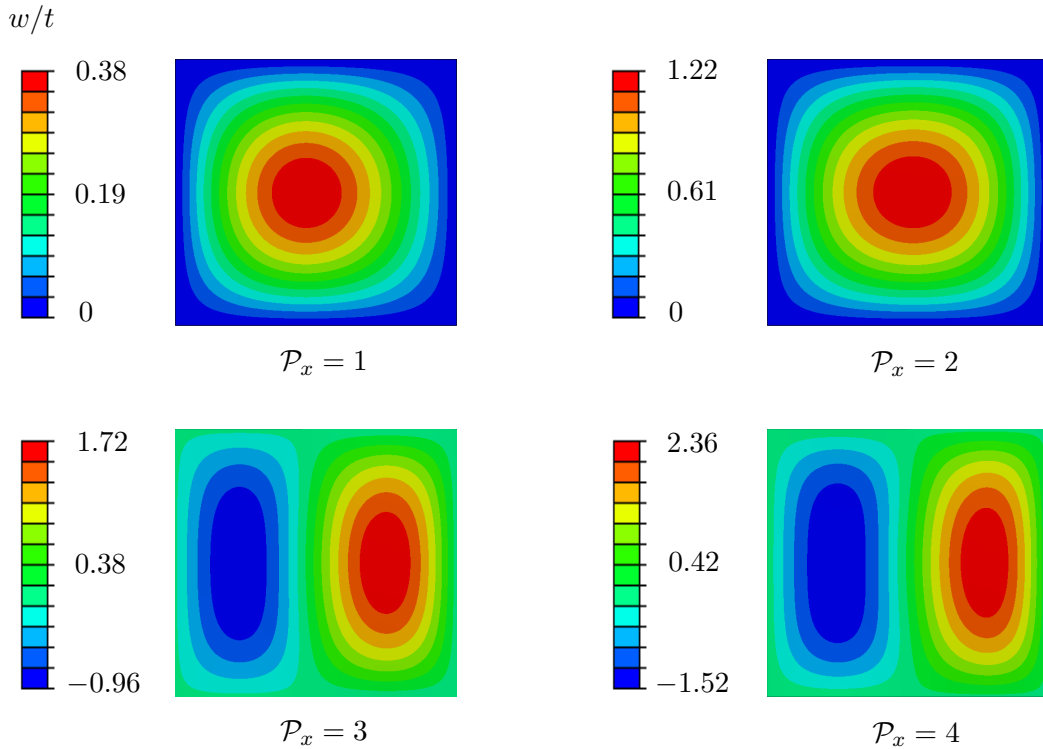


Figura 4.10: Deformada U3 en *Abaqus*[®] para distintos ratios de postpandeo.

Los movimientos u, v del plano medio de la placa, calculados en la Ec. (4.37), se muestran para un ratio de carga $\mathcal{P}_x = 2$ con el objetivo principal de verificar el cumplimiento de las CC laterales, Ec. (4.29). Además, el orden de magnitud de estos desplazamientos es bastante menor al de la deformada, de modo que son poco importantes en comparación con ésta. La comparación entre *Mathematica*[®] y *Abaqus*[®] también resulta satisfactoria en esta representación, especialmente en cuanto a la forma de la distribución más que en cuanto a valores máximos o mínimos.

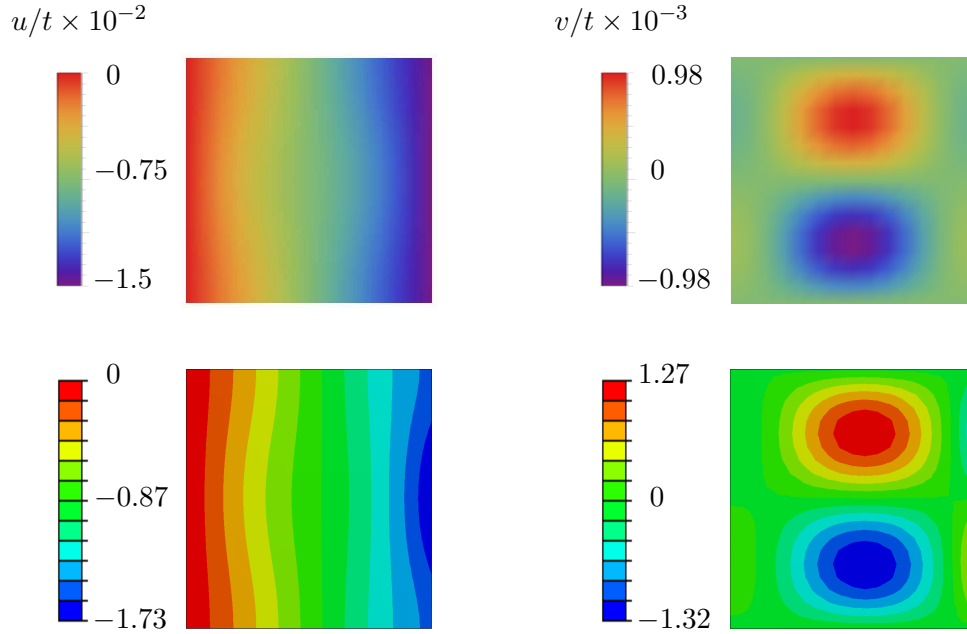


Figura 4.11: Movimientos u , v del plano medio de la placa para $\mathcal{P}_x = 2$. Arriba: resultados analíticos, *Mathematica*[®]. Abajo: resultados numéricos, *Abaqus*[®].

Distribución de tensiones

Las tensiones se obtienen analíticamente a partir de la Ec. (2.14), ya que la función de Airy ha sido calculada. Si sólo se considera el término w_{11} de la solución de prueba, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{N_x}{t} - \frac{E w_{11}^2}{32} \frac{1}{r^2} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \\ \sigma_y &= -\frac{N_y}{t} - \frac{E w_{11}^2}{32} r^2 \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\end{aligned}\tag{4.38}$$

Resulta interesante estudiar el sentido físico de la Ec. (4.38):

- La solución homogénea de la función de Airy predice una tensión equivalente a la carga aplicada en el borde correspondiente: $\sigma_{ij} = N_{ij}/t$.
- Por el contrario, la solución particular predice una tensión variable a lo largo de la coordenada perpendicular a la carga aplicada.
- Debido a que se ha eliminado la contribución del término w_{21} de la Ec. (4.2), la función de Airy no predice variación de tensión a lo largo de la coordenada paralela a la carga.
- En caso de usar la Ec. (4.2) completa, las tensiones σ_x , σ_y sí predicen variaciones a lo largo de x , y respectivamente. Ello permite representar un transitorio entre las soluciones homogénea y particular, ya que la segunda sólo adquiere importancia lejos de los bordes que tienen carga directamente aplicada.

Queda claro que la distribución de tensión a los bordes laterales se refleja en la solución particular, gracias a la función trigonométrica contenida en la Ec. (4.38) que a su vez se deriva de la función de Airy. Esta función se representa en la Figura 4.12.

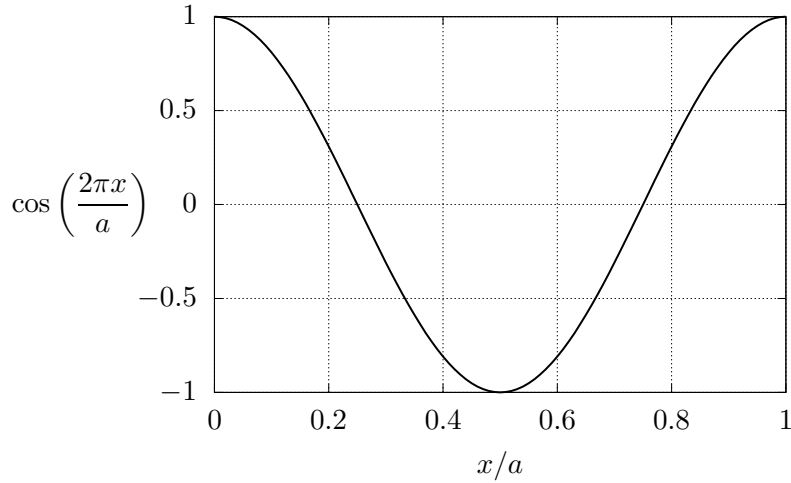


Figura 4.12: Función coseno encargada de modelar la redistribución de tensiones en postpandeo. Análoga en la dirección del eje y .

La redistribución de tensión normal queda entonces de forma similar a la Figura 4.13.

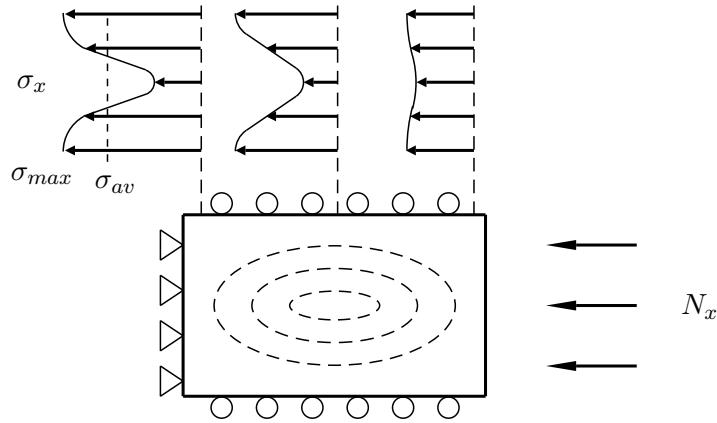


Figura 4.13: Redistribución de tensión σ_x en varias secciones de la placa; régimen de postpandeo.

Los resultados se muestran adimensionalizados con la tensión crítica $\sigma_{cr} = -N_{cr}/t$ para una interpretación más intuitiva:

$$\varsigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{cr}} \tag{4.39}$$

En la Figura 4.14, se representa la tensión normal ζ_x en el plano medio de la placa. Se utiliza una ponderación de los dos primeros modos de pandeo similar al patrón de la Ec. (4.28) introducido en *Abaqus*[®]: $w_{21} = w_{11}/2$ para $\mathcal{P}_x = 2$ y $w_{11} = w_{21}/2$ para $\mathcal{P}_x = 3$. De este modo se asume que los modos 1 y 2 no están completamente establecidos como en la Ec. (4.3), lo que permite lograr menores discrepancias entre los resultados analíticos y el MEF.

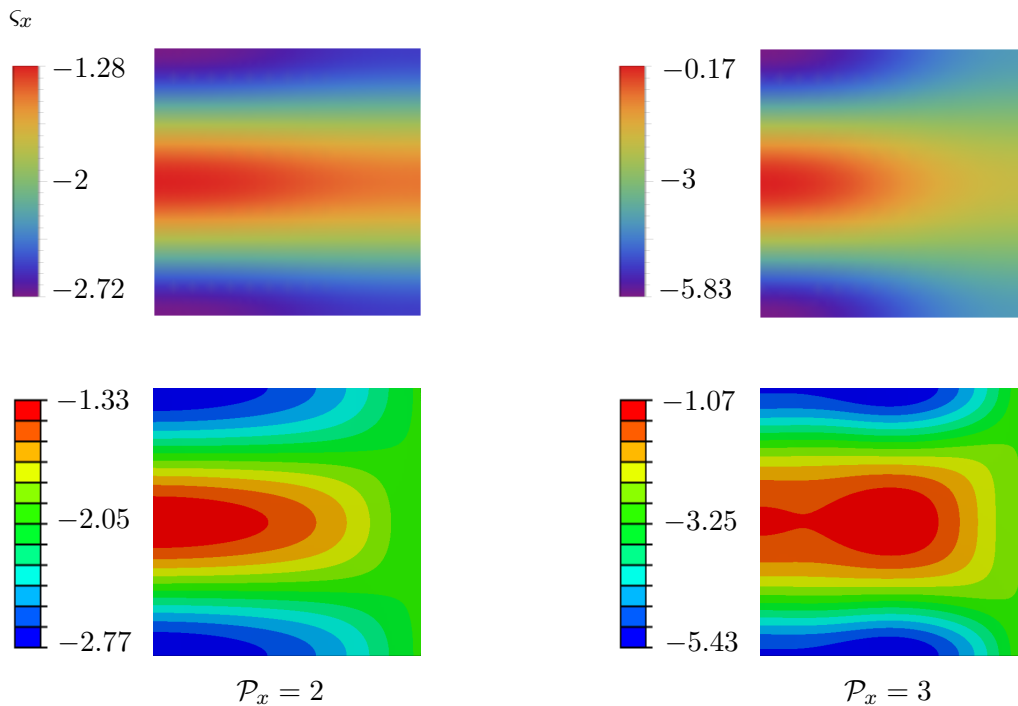


Figura 4.14: Evolución de la tensión ζ_x en el plano medio de la placa. Fila superior: *Mathematica*[®]. Fila inferior: *Abaqus*[®].

Respecto a la comparación entre resultados analíticos y numéricos, el porcentaje de error es mayor cuando $\mathcal{P}_x = 3$ que $\mathcal{P}_x = 2$. Además, la predicción de resultados es más precisa cerca de los bordes laterales, en cuyo caso el error nunca supera el 7.5%, aproximadamente. Por otro lado, queda contrastada la redistribución de la tensión normal hacia los bordes de la placa, aspecto que se refleja claramente tanto en los resultados analíticos como numéricos (en el primer caso, gracias al uso de la Ec. (4.2) completa). También se aprecia con claridad la diferencia entre las soluciones en el borde $x = a$ y lejos de éste, donde tiene lugar la redistribución anteriormente descrita.

Para observar mejor la redistribución de tensión normal, se representa ésta a lo largo del borde $x = 0$ en las Figuras 4.15. Los resultados analíticos se muestran aplicando la misma ponderación para $\mathcal{P}_x = 2$ y $\mathcal{P}_x = 3$ que en la Figura 4.14 y asumiendo que los modos 1 y 2 están completamente establecidos en cuando $\mathcal{P}_x = 1$ y $\mathcal{P}_x = 4$ respectivamente.

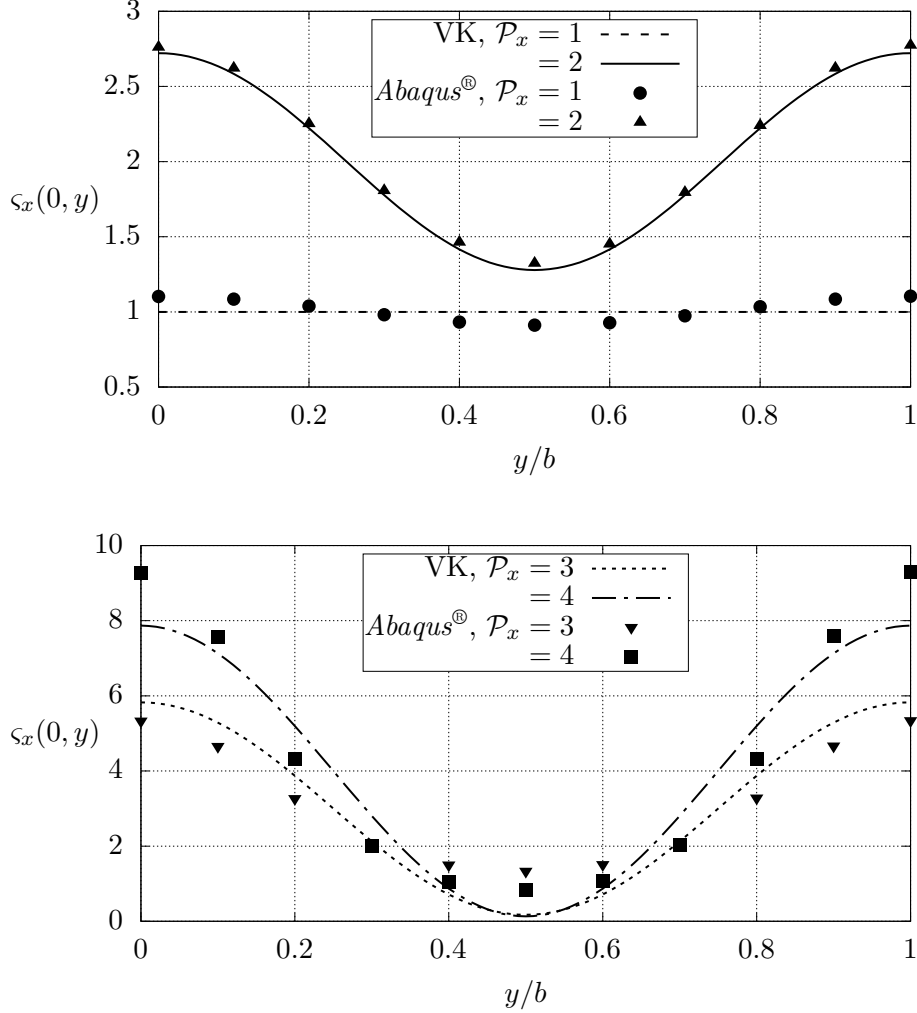


Figura 4.15: Distribución de tensión normal ς_x a lo largo del borde $x = 0$. Arriba: primer modo de pandeo. Abajo: segundo modo.

Se observa con claridad que la tensión máxima en valor absoluto se distribuye a los bordes laterales. En el centro de la placa, la tensión llega incluso a ser menor que la crítica para ratios de postpandeo elevados. La discrepancia entre resultados es mayor a la hora de representar el segundo modo de pandeo, aspecto que se ha visualizado también en la Figura 4.14.

La tensión normal σ_y es en general bastante menor que σ_x , aunque no despreciable. En lugar de mostrar sus valores, resulta preferible extraer la tensión equivalente de Von Mises, ya que incluye las tres componentes del tensor tensión en una placa: σ_x , σ_y , τ_{xy} . La expresión de la tensión de Von Mises en dos dimensiones adimensionalizada con la carga crítica es [3]:

$$\varsigma_{vm} = \frac{\sigma_{vm}}{\sigma_{cr}} = \sqrt{\varsigma_x^2 + \varsigma_y^2 - \varsigma_x \varsigma_y + 3 \varsigma_{xy}^2} \quad (4.40)$$

Dado que ya se han realizado bastantes contrastes entre resultados analíticos y el MEF, se representa la tensión ς_{vm} obtenida en *Abaqus*[®].

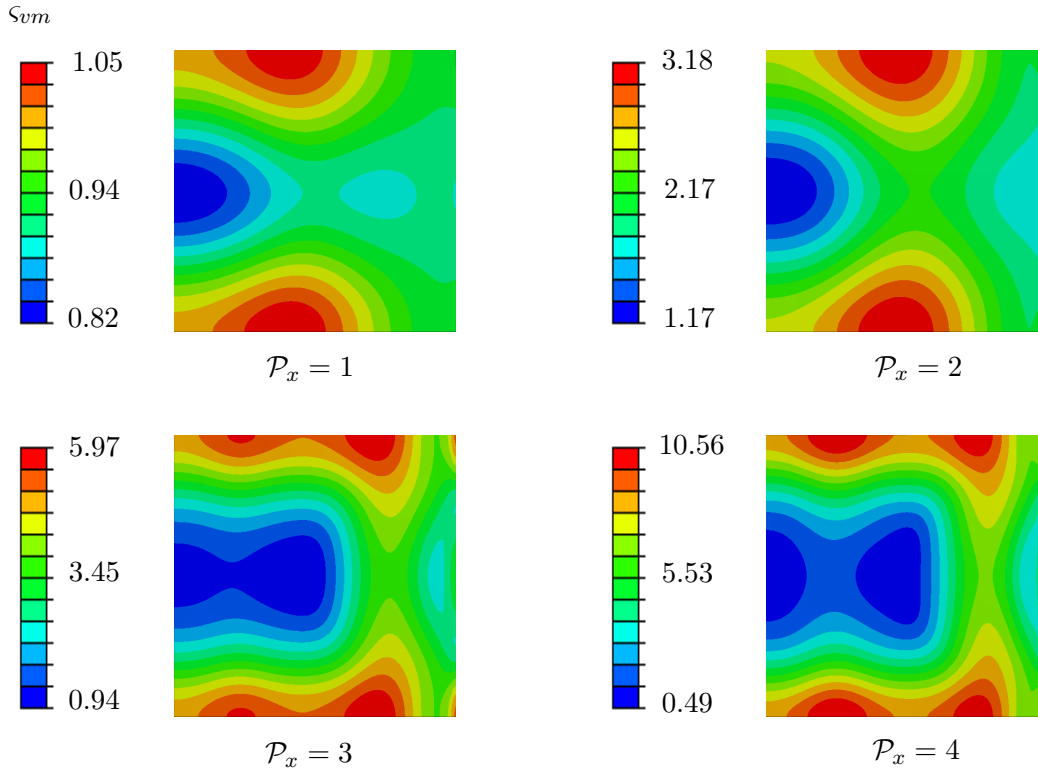


Figura 4.16: Tensión de Von Mises ς_{vm} en el plano medio de la placa.

Resulta llamativo el comportamiento altamente no lineal de la tensión: el valor máximo es unas 10 veces mayor cuando $\mathcal{P}_x = 4$ que para $\mathcal{P}_x = 1$, mientras que la tensión mínima es mayor cuando $\mathcal{P}_x = 2$ y más pequeña cuando $\mathcal{P}_x = 4$. Además, la tensión en inicio de pandeo $\mathcal{P}_x = 1$ es bastante homogénea e igual a la tensión media; las pequeñas diferencias son debidas una vez más al patrón de imperfecciones de la Ec. (4.28). Por otra parte, queda clara la importancia de un buen diseño de las CC de los bordes laterales de la placa, lo que da pie al estudio de placas con bordes elásticos o de paneles completos.

La tensión tangencial τ_{xy} no es nula, pero resulta despreciable en comparación con las tensiones normales. Si se utiliza un término en la solución de prueba se obtiene $\tau_{xy} = 0$, mientras que con dos términos se predice una distribución muy pequeña.

4.3.4. Comparación con el documento DES 8726

La referencia [10] contiene un documento de la *Cranfield University* en el que se recogen aspectos conceptuales importantes del postpandeo de placas a compresión, así como ciertas correlaciones que pueden ser de interés para contrastar resultados.

Estudio de las tensiones

Primero, se definen en la Ec. (4.41) dos parámetros relacionados con la tensión normal σ_x : la tensión máxima σ_{max} y la tensión promedio σ_{av} (véase la Figura 4.13).

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \sigma_x(0,0) = \sigma_x(0,b) \\ \sigma_{av} &= \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \sigma_x(x,y) dx dy\end{aligned}\tag{4.41}$$

Recuperando la Ec. (4.38) y aplicándola a la Ec. (4.41) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &\cong -\frac{N_x}{t} - \frac{\pi^2 E w_{11}^2}{8 b^2 r^2} \\ \sigma_{av} &= -\frac{N_x}{t}\end{aligned}\tag{4.42}$$

En la Figura 4.12, es fácil ver que el término de σ_x debido a la solución $\Phi_p(x,y)$ integra a cero, de modo que la tensión media es igual a la que permanece en equilibrio con la carga N_x .

Adimensionalizando los parámetros de la Ec. (4.42) con la tensión crítica, se llega a:

$$\begin{aligned}\varsigma_{max} &\cong \mathcal{P}_x + \frac{3(1-\nu^2)}{2K r^2} \left(\frac{w_{11}}{t}\right)^2 \\ \varsigma_{av} &\cong \mathcal{P}_x\end{aligned}\tag{4.43}$$

donde K se obtiene de la Ec. (3.11) para $m = n = 1$. Recuérdese que las expresiones anteriores están calculadas considerando sólo el primer término de la Ec. (4.2), lo que permite una profundización en el sentido físico de las expresiones analíticas.

Se define ahora el parámetro γ que relaciona las tensiones promedio y máxima:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\sigma_{av} - \sigma_{cr}}{\sigma_{max} - \sigma_{cr}}\right) = \arctan\left(\frac{\varsigma_{av} - 1}{\varsigma_{max} - 1}\right)\tag{4.44}$$

Lógicamente, en postpandeo $\sigma_{max} > \sigma_{av}$, pero antes del pandeo la tensión es uniforme en toda la placa:

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{P}_x \neq 1 &\Rightarrow \gamma = 1 \\ \mathcal{P}_x > 1 &\Rightarrow \gamma < 1\end{aligned}\right\}\tag{4.45}$$

Asumiendo régimen de postpandeo e introduciendo la Ec. (4.43) y posteriormente la Ec. (4.34), se tiene, para el problema de la Figura 4.5:

$$\gamma = \arctan \left\{ \left[1 + \frac{3(1-\nu^2)}{2Kr^2(\mathcal{P}_x-1)} \left(\frac{w_{11}}{t} \right)^2 \right]^{-1} \right\} = \left\{ \arctan \left[1 + \frac{(1+r^2)^2}{Kr^2(1+3r^4)} \right]^{-1} \right\} \quad (4.46)$$

Si K (véase la Ec. (3.11)) está referida al primer pandeo con una semionda ($\mathcal{P}_x < 2.75$, véase la Figura 4.9), es decir, conforme al término w_{11} , la Ec. (4.46) conduce a:

$$\gamma = \arctan \left\{ \left[1 + \frac{2(1+\nu r^2)}{1+3r^4} \right]^{-1} \right\} \quad (4.47)$$

Por su parte, el documento [10] establece que γ admite la siguiente relación con r :

$$\gamma = \arctan \left\{ \frac{(1+3r^4)(1+r^4)}{(3+r^4)(1+3r^4) - 2r^2[2r^2 - \nu(1+r^4)]} \right\} \quad (4.48)$$

Esta expresión es válida para $\mathcal{P}_x < 2$, tal y como indica [10].

La Figura 4.17 exhibe una comparativa entre el valor de γ deducido en la Ec. (4.47) y la Ec. (4.48), proporcionada por [10]. Puede comprobarse que ambas son completamente equivalentes y que a mayor r , la pérdida de rigidez compresiva en régimen de postpandeo es menor.

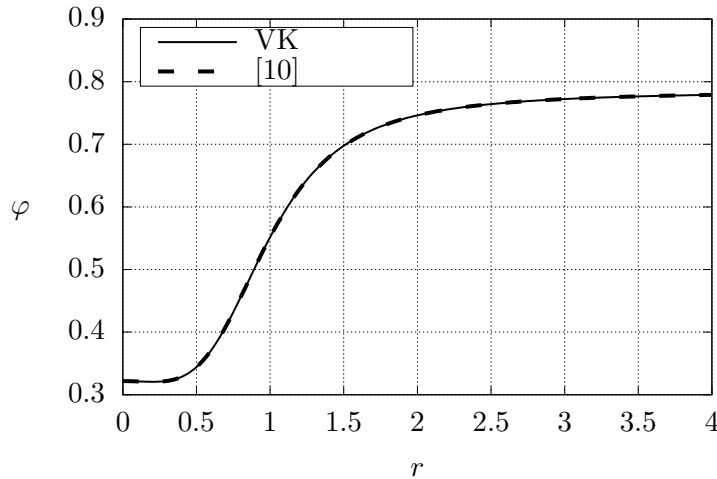


Figura 4.17: Parámetro de relación de tensiones vs. relación de lados, $\nu = 0.25$.

Particularizando para $r = 1$ y comparando con *Abaqus*[®], se dibuja ς_{av} vs. ς_{max} en la Figura 4.18 y se expresa en la Ec. (4.49). Por su parte, el valor de γ en régimen de postpandeo, dado

tanto por la Ec. (4.47) como la Ec. (4.48), es $\gamma = 0.552$.

$$\gamma = \frac{\partial \varsigma_{av}}{\partial \varsigma_{max}} \quad \varsigma_{av} = \begin{cases} \varsigma_{max} & , \quad \mathcal{P}_x \leq 1 \\ 1 + \gamma (\varsigma_{max} - 1) & , \quad \mathcal{P}_x > 1 \end{cases} \quad (4.49)$$

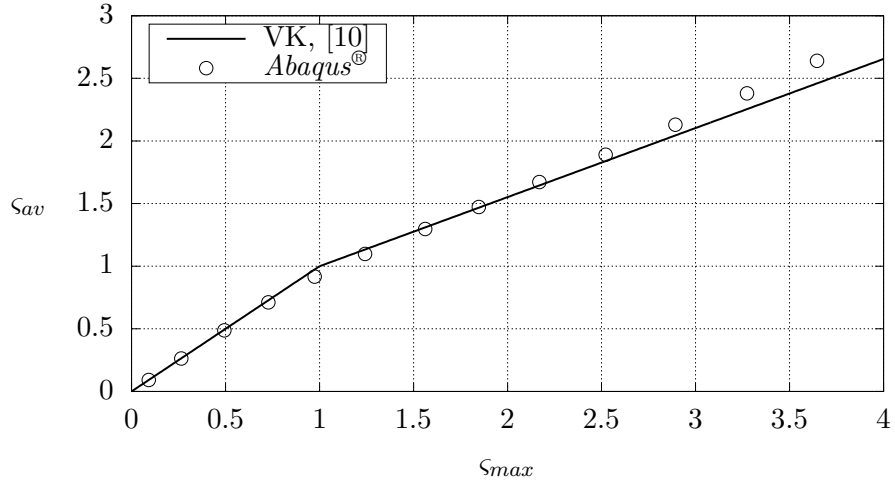


Figura 4.18: Relación entre tensiones media y máxima. Pendiente del segundo tramo definida γ .

Lógicamente, las tensiones promedio y máxima son iguales hasta el inicio de pandeo, para el que $\varsigma_{av} = \varsigma_{max} = 1$. A partir de entonces, la placa pierde rigidez siguiendo un comportamiento cuasilineal. En *Abaqus*[®], se aprecia que la pendiente γ es en realidad no lineal y además sufre un ligero aumento a medida que ς_{max} es mayor que 2.75 aproximadamente.

Pérdida de rigidez a compresión

Durante el postpandeo tiene lugar una pérdida de rigidez en la placa que se traduce en una nueva relación entre tensión y deformación. Esto significa que el módulo de Young aparente E^* decrece por el simple hecho de que la placa pandee (no por plastificación del material). Esta pérdida de rigidez se estudia a través de la tensión media ς_{av} y la deformación lineal ϵ_e máxima en el borde $x = a$ de aplicación de la carga de compresión:

$$\epsilon_e = \epsilon_x \left(a, \frac{b}{2} \right) \cong \frac{u(a, b/2)}{a} \quad (4.50)$$

La deformación ϵ_e se particulariza en $y = b/2$, ya que ésta no es totalmente constante a lo largo de $x = a$, aunque su variación es muy pequeña. La Ec. (4.50) se adimensionaliza con la deformación crítica:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{cr}} \quad \epsilon_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{E} \quad (4.51)$$

En [10], se define otro parámetro μ de rigidez adimensional bajo compresión:

$$\mu = \arctan \left(\frac{\sigma_{av} - \sigma_{cr}}{\sigma_e - \sigma_{cr}} \right) = \arctan \left(\frac{\varsigma_{av} - 1}{\varsigma_e - 1} \right) \quad (4.52)$$

siendo $\sigma_e = E \varepsilon_e$. No se deduce una expresión genérica para μ porque en ella está implícito el movimiento u de la Ec. (4.37), expresión que resulta algo engorrosa. Para el problema de la Figura 4.5, μ admite la expresión en función de r de la Ec. (4.53), dada por [10]:

$$\mu = \arctan \left\{ \frac{(1 + r^4) (1 + 3 r^4) (1 - \nu^2)}{(3 + r^4) (1 + 3 r^4) - [2 r^2 - \nu (1 + r^4)]^2} \right\} \quad (4.53)$$

Comparando el resultado que proporciona la Ec. (4.52) con el de la Ec. (4.53) para $r = 1$, el error relativo es:

$$\left. \begin{array}{l} \mu(\text{VK}) \cong 0.54 \\ \mu([10]) = 0.5 \end{array} \right\} \text{err} = 8\% \quad (4.54)$$

La relación entre tensión y deformación se asume lineal y, al igual que con la relación entre tensiones de la Ec. (4.49), se distinguen dos tramos en función de la carga aplicada (véase la Figura 4.19):

$$\mu = \frac{\partial \varsigma_{av}}{\partial \varepsilon_e} = \frac{\partial E^*}{\partial E} \quad \varsigma_{av} = \begin{cases} \varepsilon_e & , \quad \mathcal{P}_x \leq 1 \\ 1 + \mu(\varepsilon_e - 1) & , \quad \mathcal{P}_x > 1 \end{cases} \quad (4.55)$$

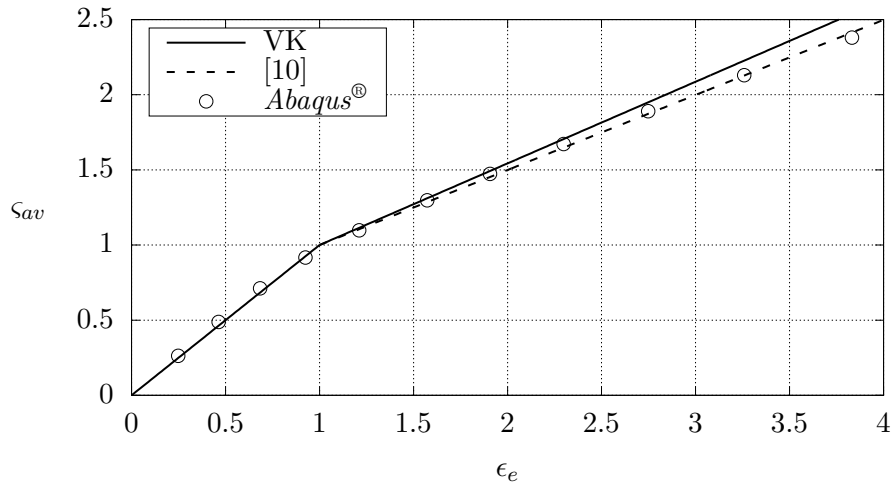


Figura 4.19: Pérdida de rigidez compresiva. Pendiente del segundo tramo definida μ .

El módulo E^* se reduce prácticamente a la mitad, lo que significa que su rigidez a compresión también disminuye a la mitad. Esto es consecuencia de la redistribución de σ_x a los bordes descargados de la placa, ya que la carga tensional en el centro disminuye como consecuencia de la redistribución de tensión. Además, el comportamiento cuasilineal de la rigidez en postpandeo lo reproduce bastante bien el MEF, con lo que puede afirmarse que el contraste de resultados es satisfactorio.

Ancho efectivo

El concepto de ancho efectivo b_{ef} se basa en la redistribución de σ_x hacia los bordes laterales, haciendo referencia a la anchura de la zona en la que se encuentra acumulada la mayor carga tensional.

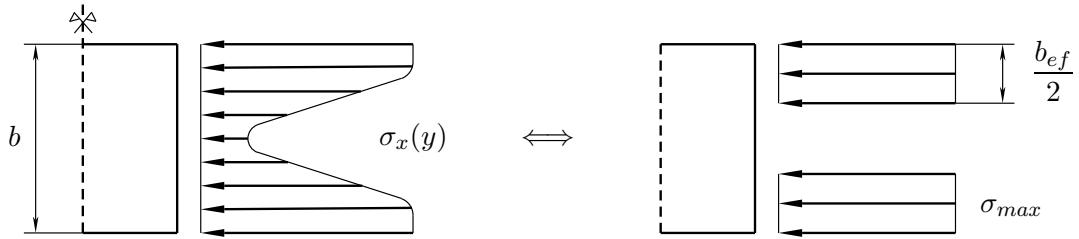


Figura 4.20: Representación esquemática de las tensiones/solicitaciones junto con modelo del ancho efectivo en borde de placa paralelo a dirección de carga externa.

El ancho efectivo se define entonces aplicando la equivalencia N_x, σ_x para ambas Figuras 4.20 izquierda y derecha, teniendo en cuenta que la carga externa es la misma:

$$N_x = \int_0^b \sigma_x dy = \sigma_{av} b = \sigma_{max} b_{ef} \quad \Rightarrow \quad \frac{b_{ef}}{b} = \frac{\sigma_{av}}{\sigma_{max}} \quad (4.56)$$

De este modo, por la Ec. (4.44) y retomando las Ecs. (4.43) primera y (4.45) se desarrolla:

$$\frac{b_{ef}}{b} = \tan \gamma + \frac{1 - \tan \gamma}{\varsigma_{max}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{P}_x \leq 1 \Rightarrow \frac{b_{ef}}{b} = 1 \\ \mathcal{P}_x > 1 \Rightarrow \frac{b_{ef}}{b} = \tan \gamma + \frac{1 - \tan \gamma}{\mathcal{P}_x + 2(\mathcal{P}_x - 1) \frac{1 + \nu r^2}{1 + 3r^4}} \end{cases} \quad (4.57)$$

Conocido γ por la Ec. (4.47), es posible representar el ancho efectivo en función de ς_{max} . Esta relación se muestra en la Figura 4.21, con los resultados analíticos y los del MEF.

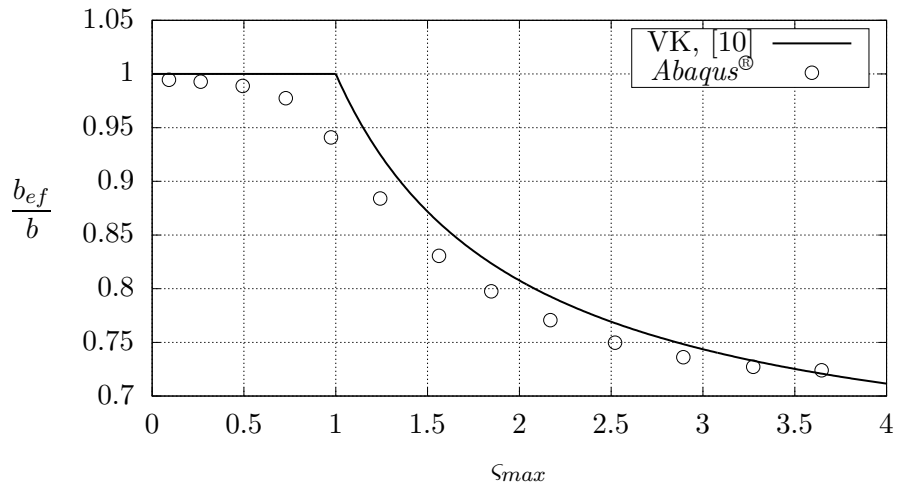


Figura 4.21: Ancho efectivo vs. tensión máxima adimensional.

Antes del inicio de pandeo, el ancho efectivo es igual al ancho original del borde cargado, ya que la tensión es homogénea. Por el contrario, la relación entre ancho efectivo y tensión máxima en régimen de postpandeo es aproximadamente hiperbólica. Lógicamente, la máxima tensión aumenta a medida que lo hace la carga N_x , de forma que a mayor carga externa el ancho efectivo es menor. Esto significa que la tensión está cada vez más concentrada en los bordes laterales, provocando que los elementos que los soportan (larguerillos, costillas ...) sufran más.

4.4. Placa con bordes descargados rectos

Esta vez, los bordes $y = cte$ tienen permitido el desplazamiento v pero están forzados a mantenerse rectos, como puede observarse en la Figura 4.22.

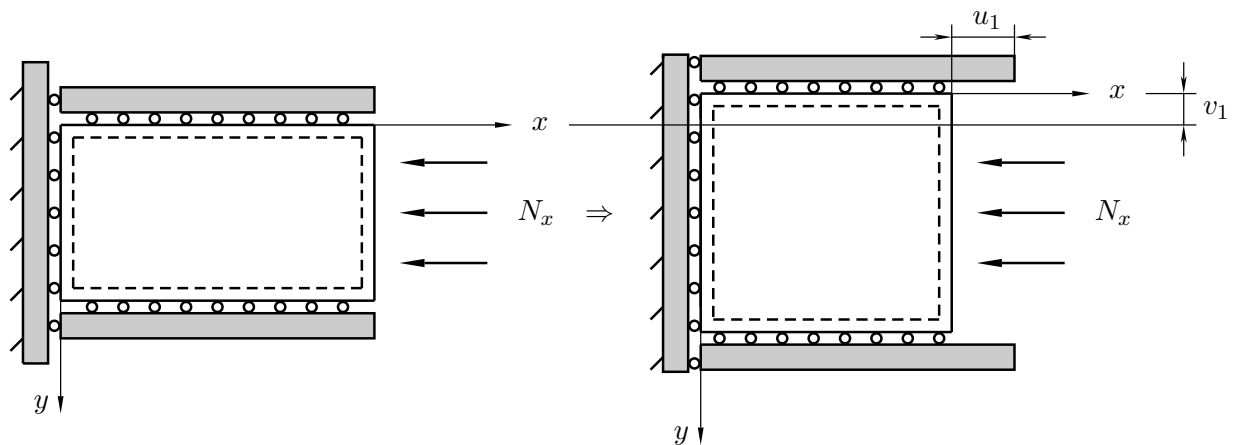


Figura 4.22: Placa a compresión con bordes laterales forzados a mantenerse rectos.

Las CC de este caso sobre los desplazamientos en el plano de la placa son:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 & u(a, y) &= u_1 \\ v(x, 0) &= -v_1 & v(x, b) &= v_1 \end{aligned} \quad (4.58)$$

donde la segunda fila indica por un lado que ha de existir simetría o antisimetría respecto a la línea $y = b/2$ y por otro que el desplazamiento v en $y = 0, b$ debe ser constante.

4.4.1. Limitaciones

El hecho de que los bordes laterales deben permanecer rectos implica que no existe restricción al desplazamiento de éstos sino a su giro en el plano $x - y$. De este modo, el valor medio de la tensión σ_y debe autoanularse en cada uno de los bordes laterales. En términos de inicio de pandeo, esto corresponde a una compresión uniaxial N_x , donde el factor de pandeo se da en [3]:

$$K = \left(\frac{m}{r} + \frac{r}{m} \right)^2 \quad (4.59)$$

Al igual que en el caso anterior, la Ec. (4.59) es válida con un solo modo $m = 1$ siempre que el pandeo ocurra con una semionda. De nuevo, la limitación de r se determina buscando las intersecciones en los cambios de modo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} + r \right)^2 = \left(\frac{2}{r} + \frac{r}{2} \right)^2 &\Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{2} & r_{3,4} = \pm i\sqrt{2} \\ \left(\frac{2}{r} + \frac{r}{2} \right)^2 = \left(\frac{3}{r} + \frac{r}{3} \right)^2 &\Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{6} & r_{3,4} = \pm i\sqrt{6} \end{aligned} \quad (4.60)$$

es decir, es posible trabajar con placas $r \leq 2.45$ si se consideran sólo dos modos.

4.4.2. Reacción lateral y movimientos en el plano

Se pasa ahora al análisis del postpandeo. Como ya se ha mencionado, la tensión promedio en cada uno de los bordes $y = cte$ debe ser nula, de donde puede obtenerse el valor de N_y usando el resultado de las Ecs. (4.5) y (4.9) (esta última con sus C_i correspondientes):

$$\sigma_{y,av} = 0 = \frac{1}{a} \int_0^a \sigma_y(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = -\frac{N_y}{t} \Rightarrow N_y = \mathcal{P}_y = 0 \quad (4.61)$$

El hecho de que la reacción N_y sea nula significa que la contribución de la tensión debida a la solución homogénea de la función de Airy es nula, pero no necesariamente la correspondiente a la solución particular.

Retomando la Ec. (4.14) e introduciendo $N_y = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} w_{11} &= 2t(1+r^2) \sqrt{\frac{\mathcal{P}_x - 1}{3(1-\nu^2)(1+r^4)}} \\ w_{21} &= 4t(4+r^2) \sqrt{\frac{\mathcal{P}_x - 1}{3(1-\nu^2)(16+r^4)}} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Resulta interesante obtener una comparativa con $r = 1$ entre la deformada de la placa con bordes laterales restringidos w_{11}^A (véase la Ec. (4.35)) y la Ec. (4.62) para bordes rectos w_{11}^B :

$$\frac{w_{11}^A}{w_{11}^B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.71 \quad (4.63)$$

A la vista de este resultado, la placa con bordes laterales restringidos presenta una deformada algo menor pero a costa de una reacción N_y adicional.

El movimiento u se calcula también a partir de la Ec. (4.36) primera. Sin embargo, para obtener v se debe imponer una CC adicional de simetría en la línea $y = b/2$, ya que el valor v_1 que aparece en la Ec. (4.58) es incógnita:

$$\left. \begin{aligned} v(x, y) &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + C_1 \\ v\left(x, \frac{b}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} v_1 = \frac{\nu b N_x}{2 E t} - \frac{\pi^2 (w_{11}^2 + w_{21}^2)}{16 b} \quad (4.64)$$

El primer término en la Ec. (4.64) permanece tanto en inicio de pandeo como en postpandeo. Para introducir la CC de simetría respecto a la línea $y = b/2$ en *Abaqus*[®], debe establecerse un control por deformación en los bordes no cargados:

$$U2 = \pm \frac{\nu b N_{cr}}{2 E t} \quad (4.65)$$

Este valor corresponde al desplazamiento v cuando tiene lugar el inicio de pandeo y su incremento está relacionado con el del LPF.

4.4.3. Contraste de resultados

Para comprobar que la ejecución del cálculo en el MEF ha sido correcta, se representa en la Figura 4.23 la evolución del LPF frente a la longitud de arco. La respuesta es algo distinta a la obtenida en la Figura 4.6, ya que el cambio del primer modo al segundo tiene lugar con mucha más facilidad, sin necesidad de disminuir tanto el LPF. Esto probablemente sea debido a que la placa está menos restringida que en el caso de los bordes descargados inmóviles.

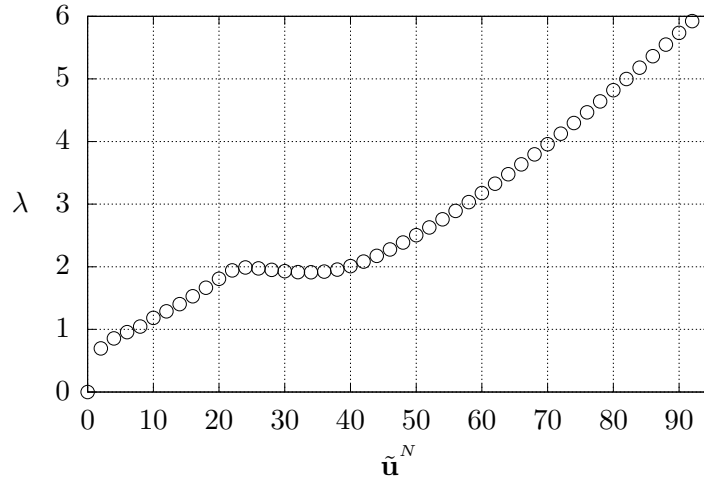


Figura 4.23: Evolución del LPF en *Abaqus*®.

Deformada y movimientos en el plano

El incremento de la deformada en función de \mathcal{P}_x se reproduce en la Figura 4.24.

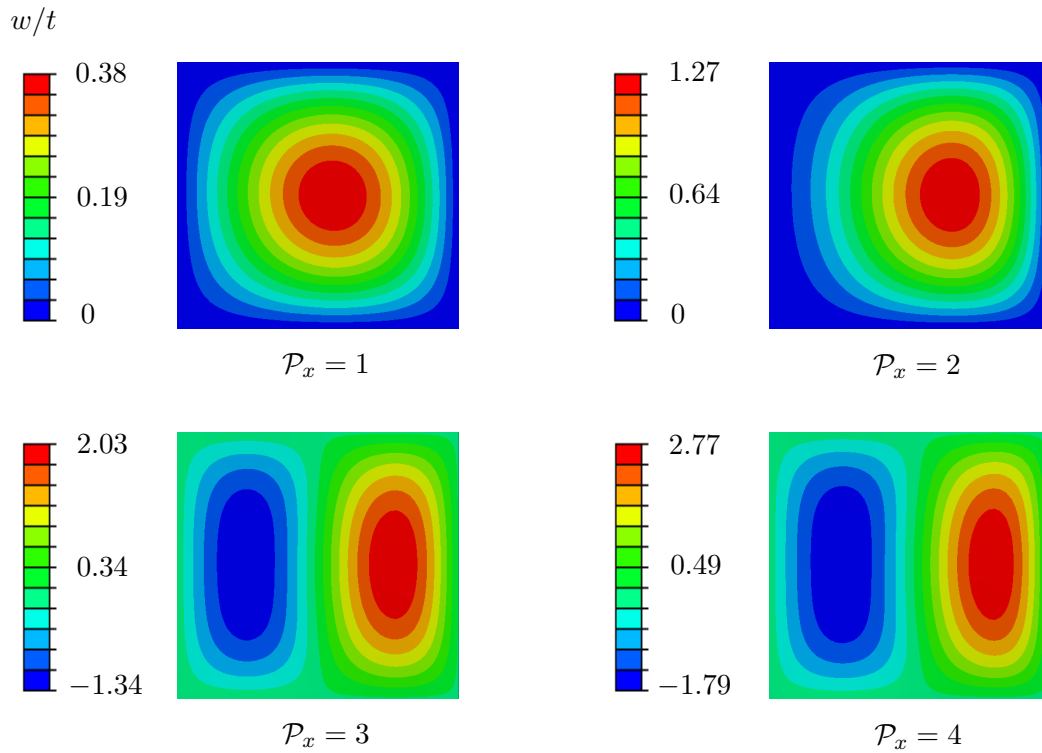


Figura 4.24: Deformada U3 en *Abaqus*® para distintos ratios de carga de postpandeo.

Puede observarse que cuando la carga externa es igual a la crítica (Figura 4.24 superior izquierda) los valores son exactamente los mismos que los de la Figura 4.10 para placa con bordes laterales inmóviles en su plano medio. Esto es consecuencia de que en inicio de pandeo no se predice movimiento fuera del plano medio, de no ser por el patrón de imperfecciones de la Ec. (4.28), que es el mismo para ambos problemas aunque cada uno con sus correspondientes modos. Por otra parte, sí se aprecia un aumento de la deformada respecto a la Figura 4.10 cuando el ratio de carga es mayor, debido a la menor restricción de los bordes no cargados de la placa.

De nuevo, con el propósito de comprobar las CC referidas a los movimientos del plano medio de la placa, éstos se representan en la Figura 4.25, correspondiente tanto a los cálculos analíticos como a *Abaqus*[®]. Puede comprobarse que, manteniendo el orden de magnitud, los valores máximos de u , v son algo mayores a los del anterior problema. Esto es lógico ya que si los bordes descargados presentan menor restricción, sus correspondientes desplazamientos serán mayores.

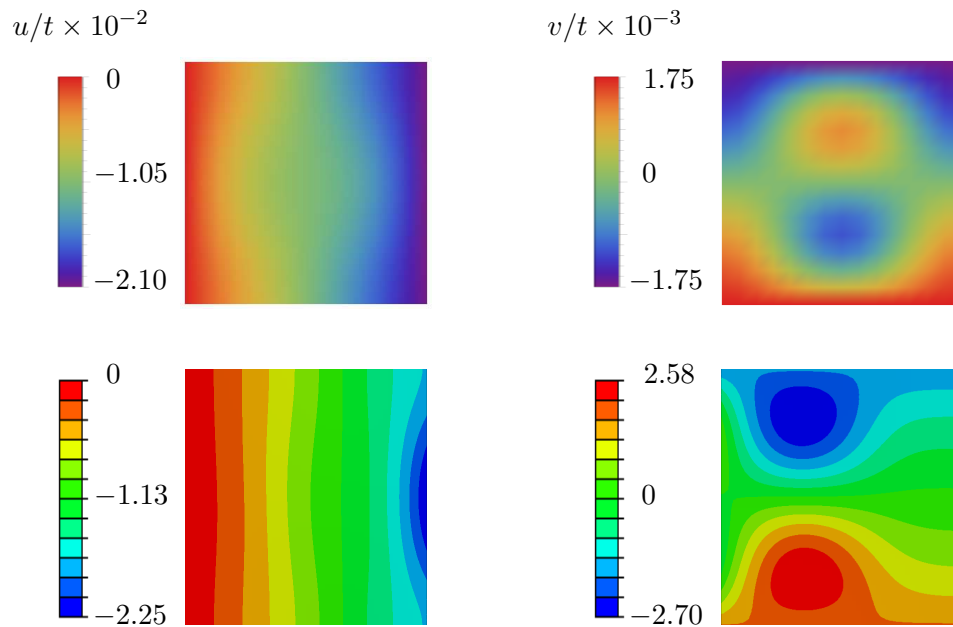


Figura 4.25: Movimientos u , v del plano medio de la placa para $\mathcal{P}_x = 2$. Arriba: resultados analíticos, *Mathematica*[®]. Abajo: resultados numéricos, *Abaqus*[®].

Distribución de tensiones

Este problema presenta una distribución de tensiones análoga a la de la Ec. (4.38) pero con $N_y = 0$ y w_{11} definido en la Ec. (4.62); excepto por el término homogéneo de σ_y , las expresiones son análogas a la Ec. (4.38). El término que marca la diferencia con el problema anterior es w_{11} , deducido en la Ec. (4.62). Puede comprobarse fácilmente que la tensión promedio en los bordes no cargados es nula, ya que la función coseno integra a cero (véase la Figura 4.12).

A continuación, en las Figuras 4.26 y 4.27 se muestra la tensión σ_x correspondiente a este problema, con la misma ponderación de los modos de pandeo que para la Figura 4.14, y la tensión de Von Mises, con el objetivo de localizar los puntos de mayor carga tensional.

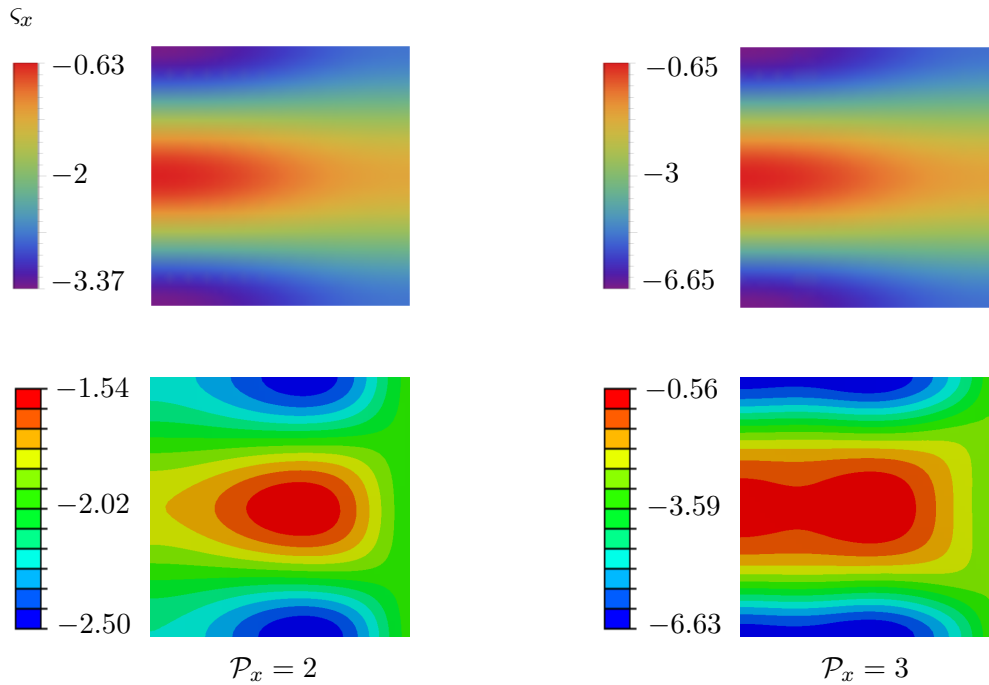


Figura 4.26: Evolución de la tensión normal σ_x en el plano medio de la placa. Fila superior: *Mathematica*[®]. Fila inferior: *Abaqus*[®].

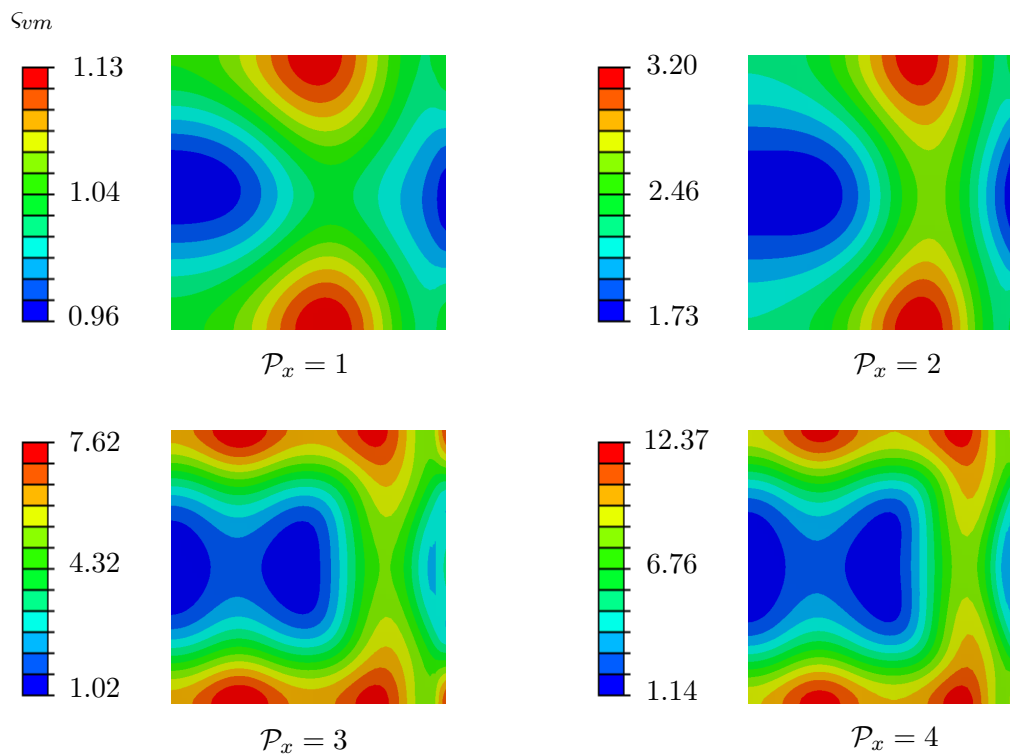


Figura 4.27: Tensión de Von Mises σ_{vm} en el plano medio de la placa extraída de *Abaqus*[®].

A grandes rasgos, se aprecia en la Figura 4.26 una redistribución de tensión normal similar a la de la Figura 4.14. No obstante, una diferencia significativa es que la predicción del segundo modo de pandeo en este caso es más precisa; σ_x máxima es algo mayor, probablemente debido a que el desplazamiento cerca de los bordes laterales, y en consecuencia las deformaciones, son mayores. Respecto a la tensión de Von Mises, puede afirmarse también que las tensiones son algo más elevadas que las obtenidas en la Figura 4.16.

4.4.4. Comparación con el documento DES 8726

Estudio de las tensiones

Para obtener las expresiones de ς_{av} y ς_{max} con un solo término se recupera la Ec. (4.43), ya que la tensión normal σ_x admite la misma expresión que para placa con bordes descargados inmóviles (véase la Ec. (4.38)), pero con distinto w_{11} dado esta vez en la Ec. (4.62). Introduciendo ambos en la Ec. (4.44) y simplificando se obtiene para régimen de postpandeo:

$$\gamma = \arctan \left(\frac{1 + r^4}{3 + r^4} \right) \quad (4.66)$$

que es exactamente la misma expresión que facilita [10]. Particularizando para $r = 1$, el parámetro de relación de tensiones en postpandeo es: $\gamma = 0.464$. En la Figura 4.28, se muestra dicha relación de tensiones comparando con el MEF.

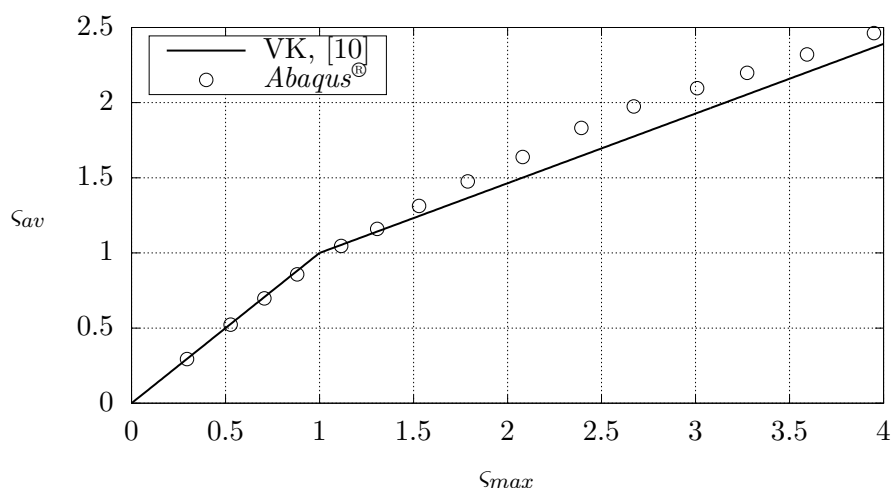


Figura 4.28: Relación entre tensiones media y máxima. Pendiente del segundo tramo definida γ .

Pese a que existe algo de discrepancia entre los valores de Von Karman y MEF, la pendiente de la curva se mantiene más o menos similar, aunque la no linealidad predicha por *Abaqus* es mayor. Esto a su vez indica que la aproximación de las ecuaciones de Von Karman a este problema es algo menos precisa que la del caso A de la Figura 4.1.

Pérdida de rigidez a compresión

En este caso, [10] propone la siguiente expresión para el parámetro de pérdida de rigidez:

$$\mu = \arctan \left(\frac{1 + r^4}{3 + r^4} \right) \quad (4.67)$$

A partir de la tensión máxima en este problema así como la Ec. (4.50) aplicada al mismo, se obtiene: $\mu = 0.464$, tanto para la Ec. (4.67) como para los resultados extraídos de las ecuaciones de Von Karman.

La relación entre tensión y deformación de la placa se muestra en la Figura 4.29.

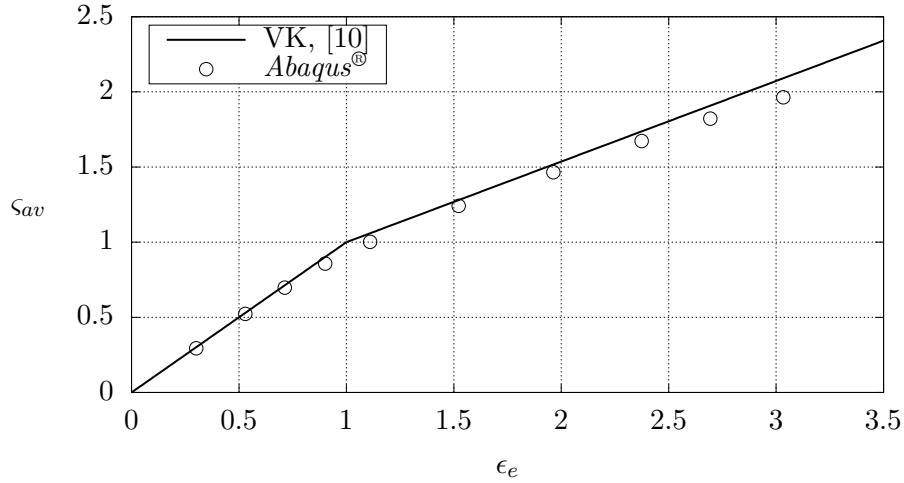


Figura 4.29: Pérdida de rigidez compresiva. Pendiente del segundo tramo definida μ .

Ancho efectivo

Para finalizar con el estudio del problema de la Figura 4.22, se calcula y representa el ancho efectivo. Recuperando la Ec. (4.57) izquierda, particularizada para $\mathcal{P}_x > 1$, introduciendo la Ec. (4.43) (correspondiente a este problema gracias a la Ec. (4.62) superior) y simplificando:

$$\frac{b_{ef}}{b} = \tan \gamma + \frac{1 - \tan \gamma}{\mathcal{P}_x + \frac{2(\mathcal{P}_x - 1)}{1 + r^4}} \quad (4.68)$$

El ancho efectivo obtenido en la Ec. (4.68) se representa, junto con el que se extrae de *Abaqus*®, en la Figura 4.30. Puede apreciarse que los resultados analíticos y de *Abaqus*® son algo más discrepantes que los de la Figura 4.21; no obstante, el máximo error se sitúa en torno al 8%, de modo que la aproximación no es del todo imprecisa.

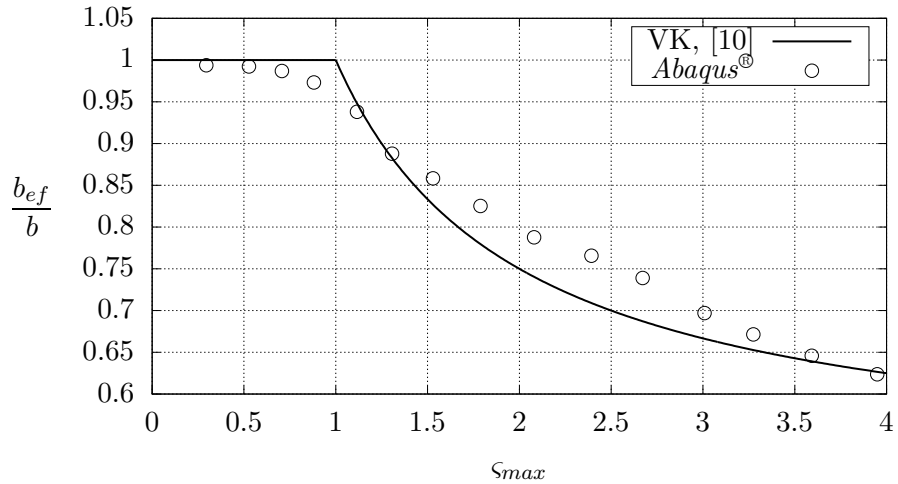


Figura 4.30: Ancho efectivo vs. tensión máxima adimensional.

La disminución del ancho efectivo con la tensión máxima es más acelerada en este caso que en el anterior. Esto es consecuencia directa de que las tensiones máximas son algo mayores y se encuentran más concentradas. El aumento σ_x puede parecer perjudicial para la estructura; sin embargo, hay que tener en cuenta que únicamente se está analizando la placa y no los elementos que la sostienen o actúan a modo CC como pueden ser los largueros de un panel. En definitiva, los largueros pueden llegar a beneficiarse del hecho de que la placa reciba más carga tensional, retrasando así modos de pandeo como el global de panel, en general no deseados por motivos explicados en el Capítulo 3.

4.5. Placa con bordes descargados no restringidos

En este caso, no existe ninguna restricción a los movimientos en el plano de los bordes no cargados, tal y como se observa en la Figura 4.31.

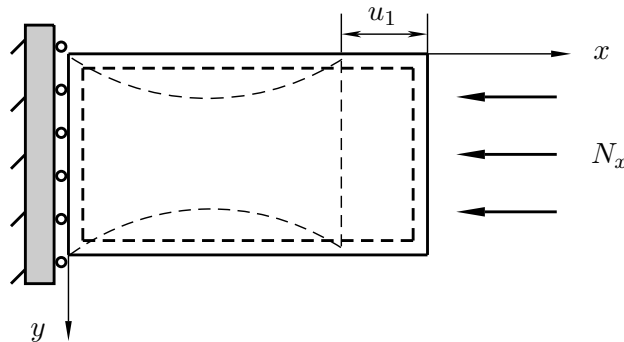


Figura 4.31: Placa a compresión con bordes laterales no restringidos.

Las CC ahora sólo pueden imponerse al desplazamiento u de los bordes $x = cte$:

$$u(0, y) = 0 \qquad u(a, y) = u_1 \qquad (4.69)$$

La solución de inicio de pandeo de este problema es idéntica a la anterior, de modo que las limitaciones en cuanto a relación de aspecto y carga son también las mismas.

Este problema no se aborda analíticamente, ya que reproducir de esta manera el postpandeo implica resolver ecuaciones e integrales que pueden requerir el uso de métodos numéricos aproximados; de este modo, es preferible usar directamente el MEF y extraer conclusiones a partir de estos resultados. No obstante, sí se explica el planteamiento teórico correspondiente:

- En la Ec. (4.69), no hay restricción alguna al desplazamiento v de los bordes no cargados, de modo que no es posible aplicar CC de Dirichlet sino de Neumann a los bordes $y = 0, b$.
- No existe restricción alguna a los desplazamientos u, v de dichos bordes; sí a w por estar articulados. Por tanto, el equilibrio en el contorno de los bordes descargados sólo se cumple si la tensión en la dirección normal a éstos es nula punto a punto: $\sigma_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$.

Es complicado abordar un caso analítico con este tipo de equilibrio, ya que implica resolver el problema con las CC en su formulación fuerte.

4.5.1. Contraste de resultados

De la misma manera que para los casos anteriores, se representa primero el LPF frente a la longitud de arco en la Figura 4.32. Puede observarse que curiosamente no tiene lugar ningún cambio de modo, ya que no existe descenso apreciable del LPF en ninguna de las iteraciones. Esto puede ser debido a la escasa restricción de los movimientos en el plano medio de la placa.

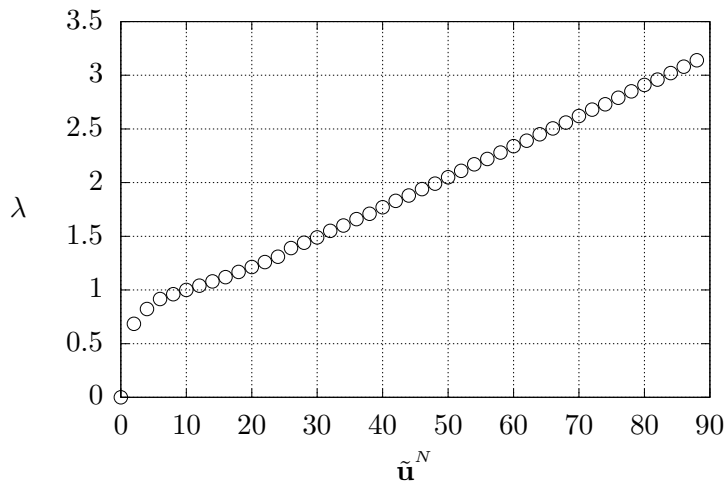


Figura 4.32: Evolución del LPF en *Abaqus*[®].

Deformada y movimientos en el plano

La deformada se muestra en la Figura 4.33, siguiendo su evolución para distintos valores de carga de pandeo \mathcal{P}_x . Como se ha deducido en la Figura 4.32, no tiene lugar una transición del primer modo al segundo, haciendo que las deformaciones desarrolladas sean mayores que las de las Figuras 4.10 y 4.24, debido a su vez a la inexistencia de restricción lateral de los bordes descargados. No obstante, el orden de magnitud de la deformada máxima sigue siendo del orden del espesor de la placa, de modo que la teoría de deformación intermedia sigue siendo apropiada incluso para mayores ratios de carga.

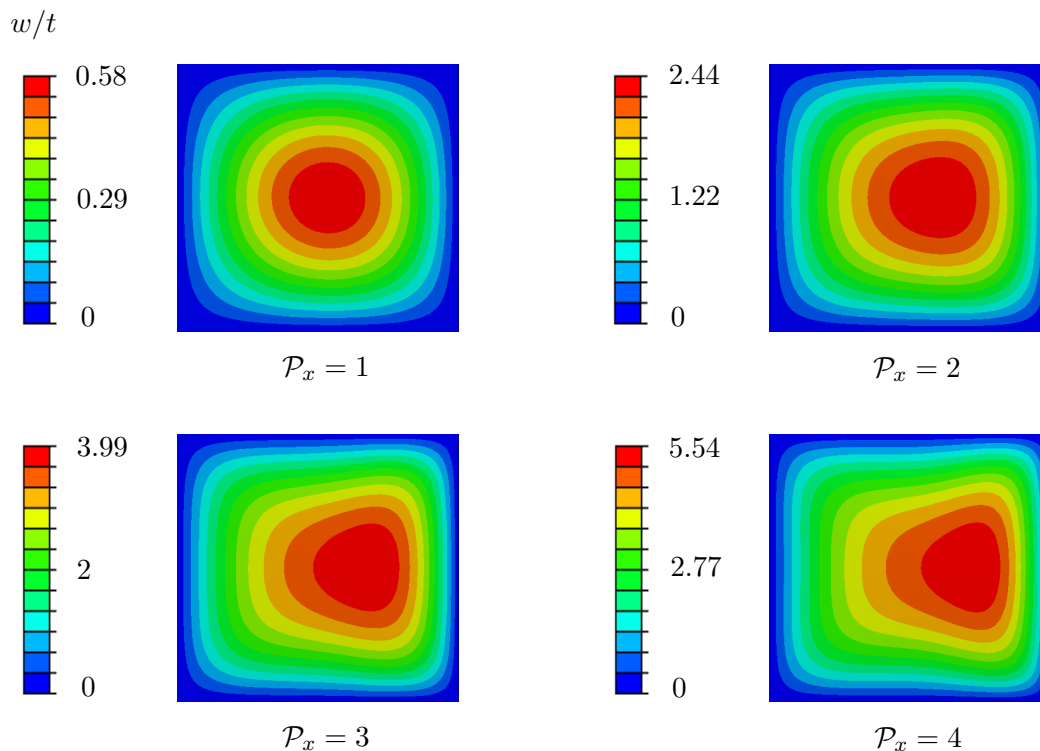


Figura 4.33: Deformada U3 en *Abaqus*[®] para distintos ratios de postpandeo.

De nuevo, se muestra en la Figura 4.34 la distribución de desplazamientos u , v del plano medio de la placa. Puede observarse el cumplimiento de las CC, destacando que el movimiento de la Figura 4.34 derecha sigue una distribución similar a la representada esquemáticamente en la Figura 4.31. Además, el orden de magnitud del desplazamiento v resulta bastante similar al de u , hecho que no ocurre en los casos anteriores (véanse las Figuras 4.11 y 4.25) y que se debe precisamente a que los bordes no cargados tienen el movimiento libre en el plano medio $z = 0$ de la placa.

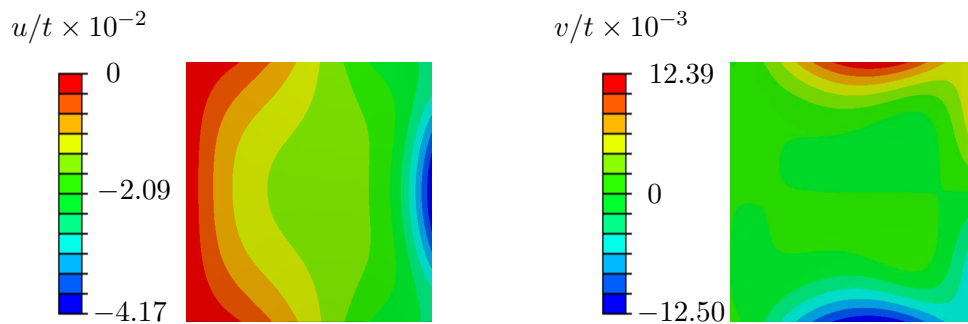


Figura 4.34: Movimientos u , v del plano medio de la placa para $\mathcal{P}_x = 2$. Arriba: resultados analíticos, *Mathematica*[®]. Abajo: resultados numéricos, *Abaqus*[®].

Distribución de tensiones

Sólo se considera interesante mostrar la tensión equivalente de Von Mises. La tensión normal σ_y es en general muy pequeña en este problema, ya que en los bordes descargados es nula por equilibrio con el contorno; de este modo σ_x es siempre predominante frente al resto y σ_{vm} es muy similar a la primera. La Figura 4.35 muestra su distribución para distintos ratios de carga de postpandeo.

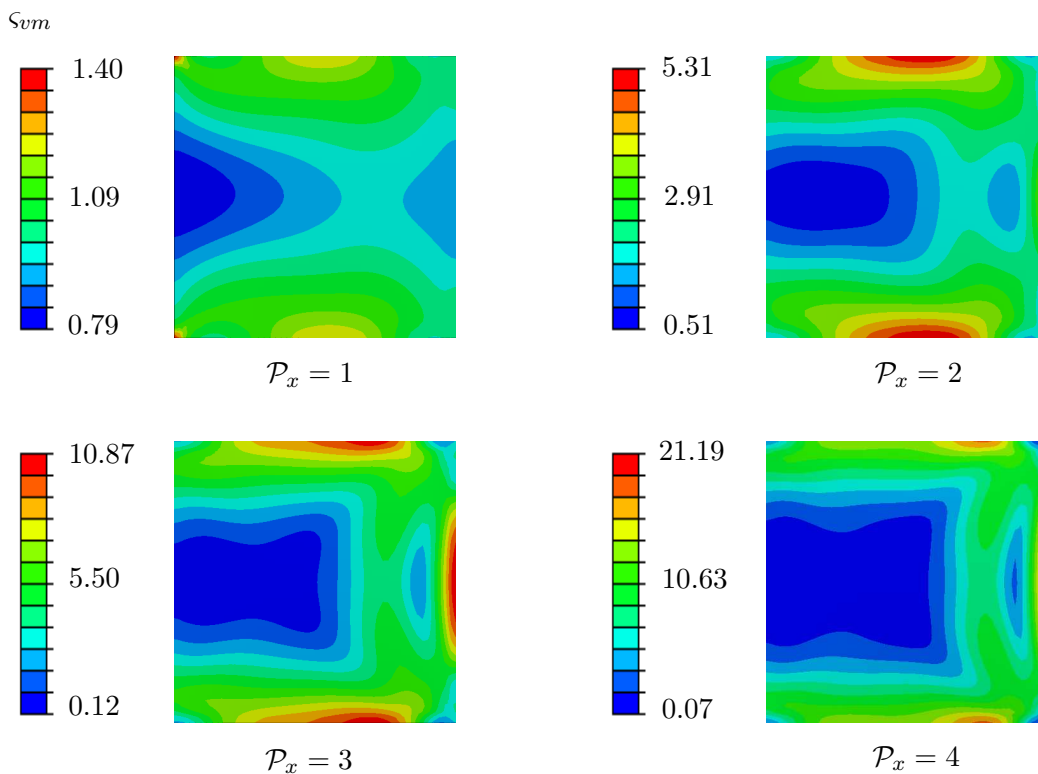


Figura 4.35: Tensión de Von Mises σ_{vm} en el plano medio de la placa extraída de *Abaqus*[®].

Puede observarse claramente que la tensión redistribuida a los bordes laterales está mucho más concentrada que en los otros dos casos (véanse las Figuras 4.16 y 4.27). Además, si la carga es elevada, existe una zona adicional de concentración de tensiones en el borde de aplicación de la carga externa. Las tensiones máximas en dichas zonas de concentración pueden llegar a ser aproximadamente el doble que en los mencionados casos anteriores.

4.5.2. Comparación con el documento DES 8726

Estudio de las tensiones

En la Figura 4.36 se compara la relación entre tensiones promedio y máxima dadas por la referencia [10] y *Abaqus*[®]. Respecto a la primera, el factor de relación de tensiones admite la Ec. (4.70). Nótese que, a diferencia de las Ecs. (4.48) y (4.66), se trata de una expresión que contiene números no enteros que parecen haber sido extraídos de correlaciones empíricas y no de resultados analíticos; esto refuerza el hecho de que este caso es complicado de abordar analíticamente y de que es preferible la resolución de las ecuaciones de Von Karman mediante métodos numéricos o directamente emplear el MEF.

$$\gamma = \arctan \left(0.25 + 0.0045 r + \frac{0.0833}{1 + 14 r^4} \right) \quad (4.70)$$

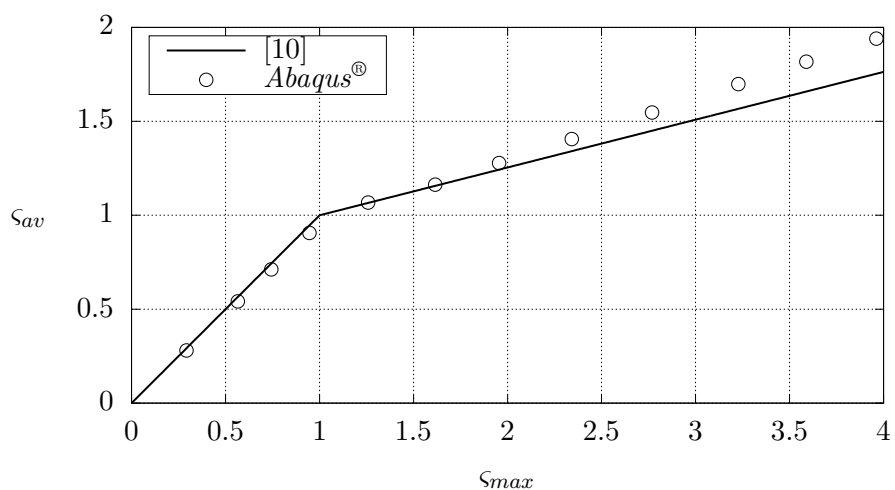


Figura 4.36: Relación entre tensiones media y máxima. Pendiente del segundo tramo definida γ .

Si $r = 1$ se obtiene: $\gamma = 0.254$. Se trata de un valor significativamente menor al obtenido en los anteriores casos, lo cual corrobora lo explicado anteriormente acerca de que la redistribución de tensiones es bastante significativa en este problema.

Pérdida de rigidez a compresión

En cuanto al análisis de la rigidez compresiva durante el pandeo, [10] propone la Ec. (4.71):

$$\mu = \arctan \left(1 - \frac{2}{3 + \frac{2.151 r^3}{4.659 + r^3}} \right) \quad (4.71)$$

De nuevo, se trata de una expresión que contiene números no enteros y que probablemente se halla extraído a través de métodos alternativos a los analíticos. Si la placa es cuadrada, el factor de pérdida de rigidez en postpandeo es: $\mu = 0.388$, algo menor que el obtenido en el resto de casos, como consecuencia de la menor restricción lateral.

Esta pérdida de rigidez, traducida en un módulo $E^* < E$, se representa a partir del modelo analítico de la Ec. (4.55) en la Figura 4.37 y comparándola con *Abaqus*[®].

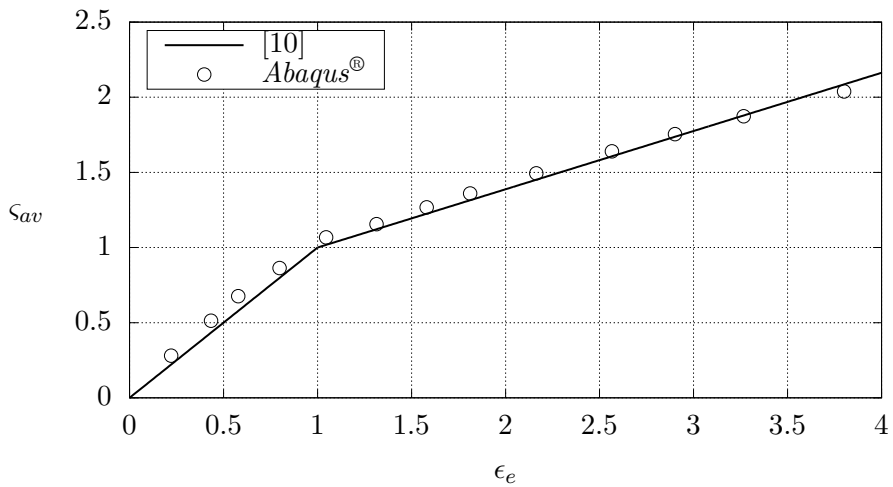


Figura 4.37: Pérdida de rigidez compresiva. Pendiente del segundo tramo definida μ .

Ancho efectivo

Finalmente, se representa en la Figura 4.38 el ancho efectivo de la placa frente a la tensión máxima. Como ya se ha mencionado, el problema de la Figura 4.31 presenta una importante concentración de tensiones, de modo que el ancho efectivo se ve reducido si se compara con los de las Figuras 4.21 y 4.30. Por otra parte, resulta llamativo que los errores máximos entre los resultados de [10] y del MEF son menores en casi todo el régimen de postpandeo que antes del inicio; no obstante, este hecho es poco preocupante, ya que es de sobra conocido que antes del pandeo $b_{ef} = b$, además de que solamente resulta útil trabajar con el concepto de ancho efectivo en postpandeo.

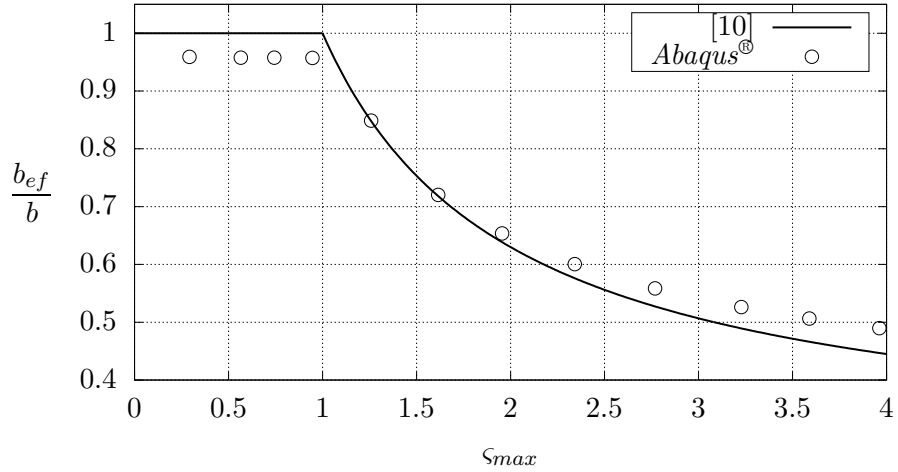


Figura 4.38: Ancho efectivo vs. tensión máxima adimensional.

4.6. Conclusiones generales

Se ha analizado el comportamiento a postpandeo por compresión uniforme de tres configuraciones distintas de placa articulada, mostradas en la Figura 4.1.

En las Figuras 4.39, 4.40 y 4.41 se comparan los parámetros estudiados en la referencia [10] una vez contrastados, todos ellos obtenidos mediante *Abaqus*[®]. Se destaca que, pese a que las diferencias entre la distribución de tensiones y el ancho efectivo sean significativas en postpandeo, los tres casos presentan una pérdida de rigidez compresiva bastante similar (véase la Figura 4.40). Por otra parte, la Figura 4.41 corrobora el hecho de que la concentración de tensión sea más importante en el caso C de la Figura 4.1 que en el resto.

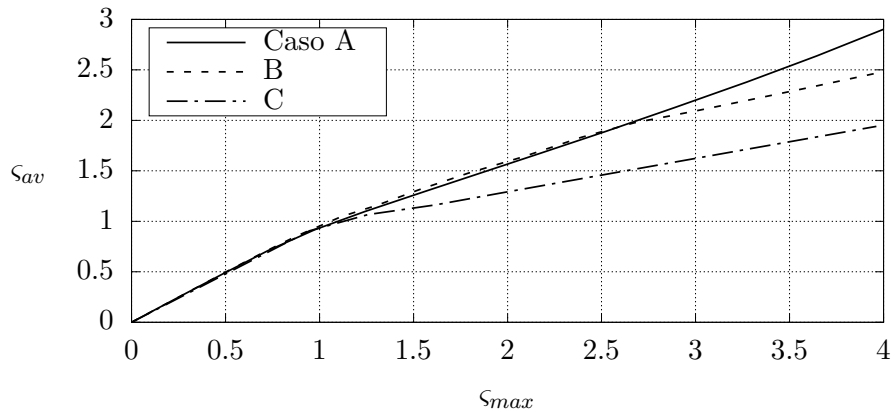


Figura 4.39: Comparación de la relación entre tensión promedio y máxima obtenida en *Abaqus*[®].

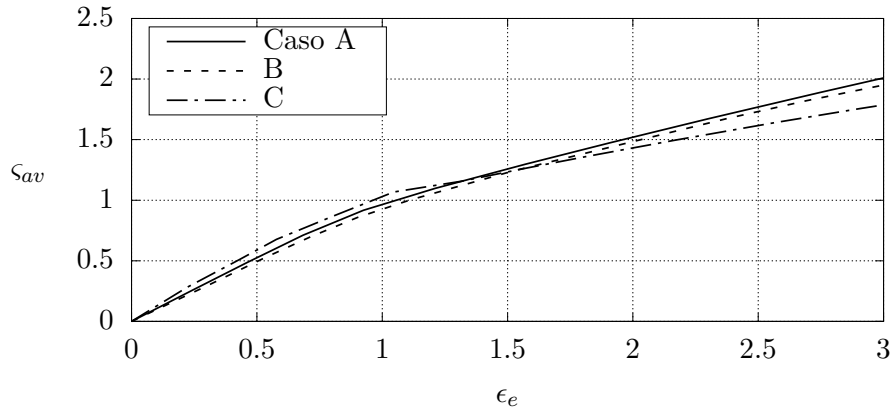


Figura 4.40: Comparación de la pérdida de rigidez a compresión obtenida en *Abaqus*[®].

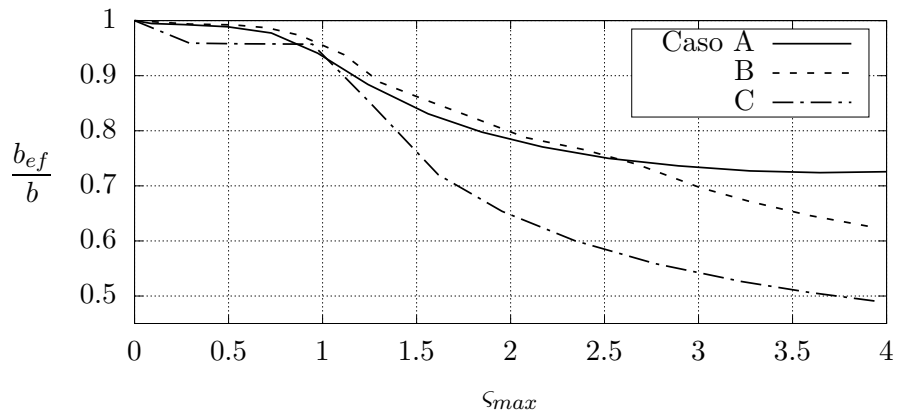


Figura 4.41: Comparación del ancho efectivo obtenido en *Abaqus*[®].

Después de todo el análisis se ha llegado a una serie de conclusiones que conviene considerar:

- Sea cual sea la restricción de los bordes descargados, el postpandeo por compresión genera una redistribución de tensión normal hacia éstos debida al pandeo del centro de la placa.
- La tensión tangencial durante el postpandeo por compresión es al menos dos órdenes de magnitud menor que las tensiones normales.
- Cuanto menor es la restricción de los bordes no cargados, mayor es la deformada máxima.
- Contrariamente a lo que pudiera parecer, a mayor libertad de movimiento de los bordes laterales de la placa, mayor es la concentración de tensiones. Esto provoca que los picos máximos de tensión equivalente tiendan a ser también más elevados.

Postpandeo de paneles

En este capítulo, se pretende reproducir el comportamiento a postpandeo del panel de la Figura 5.1. Se trata de un panel cuadrado $r = 1 \Rightarrow a = b$ en el que el larguero está situado a lo largo de la línea $y = b/2$, ya que de esta forma se prioriza el pandeo de la piel tal y como se ha visto en la Figura 3.19. Esta estructura ha sido estudiada bajo condiciones de inicio de pandeo por compresión en el Capítulo 3, a través de varios métodos; teniendo en cuenta las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos así como el contraste de resultados, se recuperan dos de ellos para el presente capítulo: el método de Ritz y el MEF.

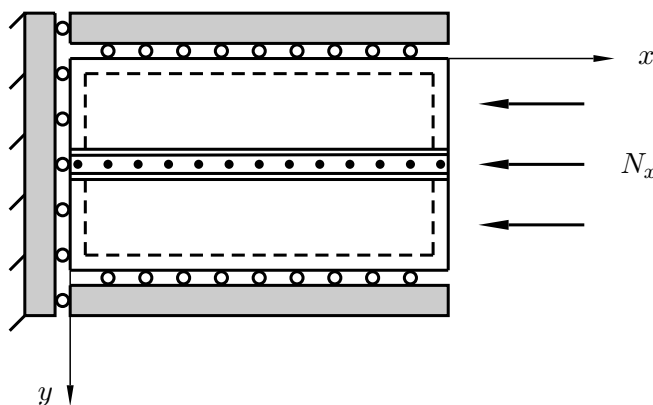


Figura 5.1: Panel articulado sometido a compresión uniforme.

Los bordes descargados del panel de la Figura 5.1 tienen libre el desplazamiento v en la dirección del eje y pero están forzados a mantenerse rectos. Por tanto, como se ha visto en el Capítulo 4, la reacción lateral es: $N_y = 0$.

5.1. Planteamiento energético: método de Ritz

Previo a cualquier análisis de postpandeo, se deben conocer las condiciones de inicio de pandeo. No obstante, tanto los modos de pandeo como las correspondientes cargas críticas de la estructura de la Figura 5.1 se han obtenido en el Capítulo 3; los cuatro primeros modos para panel cuadrado se muestran en la Figura 3.19. Para estudiar el primero de ellos, se asume una solución $w(x, y)$ de prueba con dos semiondas en las direcciones de los ejes x, y :

$$w(x, y) \cong w_{22} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \quad (5.1)$$

En la Figura 5.2 puede comprobarse que esta función de prueba reproduce el primer modo de pandeo de la Figura 3.19:

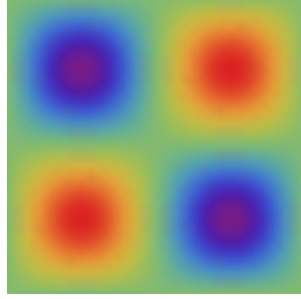


Figura 5.2: Modo # 1 de pandeo por compresión del panel.

La carga crítica adimensional o factor de pandeo se puede obtener a partir de la Ec. (5.1), siguiendo un proceso completamente análogo al que se realiza en la Sección 3.4:

$$K = 4 \left[\left(\frac{1}{r} + r \right)^2 + 2\mathcal{K}_J + \frac{8\pi^2 \mathcal{K}_\Gamma}{r^2} \right] \quad (5.2)$$

siendo $\mathcal{K}_J = \frac{GJ}{bD}$, $\mathcal{K}_\Gamma = \frac{E\Gamma_0}{b^3D}$ las rigideces adimensionales a torsión de Saint-Venant y alabeada respectivamente; para $r = 1$ se obtiene: $K \cong 16.5$. Nótese que la Ec. (5.2) no contempla la flexión del larguerillo: al asumir dos semiondas antisimétricas a lo largo de la coordenada y , éste no se ve sometido a movimiento w en la dirección del eje z y no almacena energía de flexión vertical.

Las ecuaciones de Von Karman contienen dos incógnitas: la deformada $w(x, y)$ y la función de Airy $\Phi(x, y)$; una vez propuesta una expresión para la primera, se debe calcular la segunda. Dado que se trata de un problema de compresión pura, la solución homogénea $\Phi_H(x, y)$ puede recuperarse directamente de la Ec. (4.5), aunque con $N_y = 0$. Por otra parte, la solución particular $\Phi_P(x, y)$ se calcula introduciendo la Ec. (5.1) el lado derecho de la Ec. (2.18):

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{8\pi^4}{a^2 b^2} \left[\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) \right] w_{22}^2 \quad (5.3)$$

En consecuencia, $\Phi_P(x, y)$ debe tener la siguiente forma:

$$\Phi_P(x, y) = C_1 \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) \quad (5.4)$$

Las constantes C_1, C_2 se hallan insertando la Ec. (5.4) en la Ec. (2.18) e identificando términos:

$$\frac{256\pi^4}{E} \left[\frac{C_1}{a^4} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \frac{C_2}{b^4} \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) \right] = \frac{8\pi^4}{a^2 b^2} \left[\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) \right] w_{22}^2 \Rightarrow \quad (5.5)$$

$$C_1 = \frac{E r^2 w_{22}^2}{32} \qquad C_2 = \frac{E w_{22}^2}{32 r^2}$$

Finalmente la función de Airy queda:

$$\Phi(x, y) = -\frac{N_x}{2t} y^2 + \frac{E}{32} \left[r^2 \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \frac{1}{r^2} \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) \right] w_{22}^2 \quad (5.6)$$

El planteamiento empleado para la resolución analítica del postpandeo es energético, basado concretamente en el método de Ritz. Las energías interna y externa de la placa se calculan a partir de las Ecs. (2.21) y (2.6) respectivamente.

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{2\pi^4 D (a^2 + b^2)^2}{a^3 b^3} w_{22}^2 + \frac{N_x^2 a b}{2 E t} + \frac{\pi^4 E t (a^4 + b^4)}{16 a^3 b^3} w_{22}^4 \\ V_p &= \frac{\pi^2 N_x b}{2 a} w_{22}^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por otro lado, las energías asociadas al larguerillo se calculan con las correspondientes expresiones dadas en el Capítulo 2, estableciendo $y = b/2$ en la solución de prueba:

$$\begin{aligned} U_{bs} &= 0 \\ U_{Js} &= \frac{4\pi^4 G J}{a b^2} w_{22}^2 \\ U_{\Gamma s} &= \frac{16\pi^6 E \Gamma_0}{a^3 b^2} w_{22}^2 \\ V_s &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aplicando el método de Ritz y simplificando es posible despejar el valor del coeficiente w_{22} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial w_{22}} &= \frac{\partial (U_p + U_{bs} + U_{Js} + U_{\Gamma s} - V_p - V_s)}{\partial w_{22}} = 0 \\ w_{22} &= \frac{2 b r}{\pi} \sqrt{\frac{N_{cr} (\mathcal{P}_x - 1)}{E t (1 + r^4)}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde N_{cr} se calcula introduciendo la Ec. (5.2) en la Ec. (3.1); siendo $K = 16.5$, se obtiene: $N_{cr} = 8106.24$ N/m.

5.2. Análisis por elementos finitos

El análisis del panel bajo condiciones de postpandeo sigue un preproceso similar al de la Sección 3.4, aplicando la misma geometría y material. La carga introducida debe ser igual a

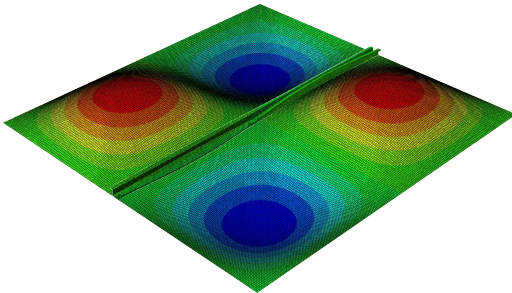
la crítica; *Abaqus*[®] proporciona $N_x = 7931.6$ N/m, de modo que el error relativo respecto al resultado analítico es entonces de un 2.15 %. En cuanto a las CC, se realizan algunos cambios:

Borde	U1	U2	U3	UR1	UR2	UR3
$x = 0$	0	-	0	-	-	-
$x = a$	-	-	0	-	-	-
$y = 0$	-	$-\frac{\nu b N_{cr}}{2 E t}$	0	-	-	0
$y = b$	-	$\frac{\nu b N_{cr}}{2 E t}$	0	-	-	0

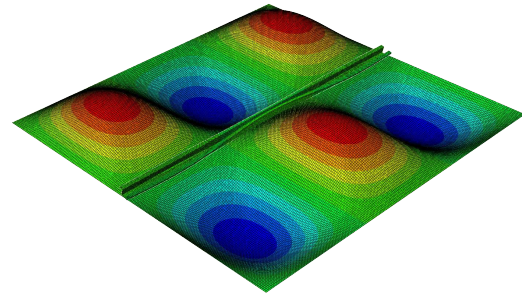
Tabla 5.1: CC del panel en *Abaqus*[®]. Valor de U2 en $y = cte$ tomado de la Ec. (4.65).

Los bordes $y = cte$ tienen restringido el giro alrededor del eje z , y su desplazamiento U2 corresponde a la Ec. (4.65) en el instante de inicio de pandeo.

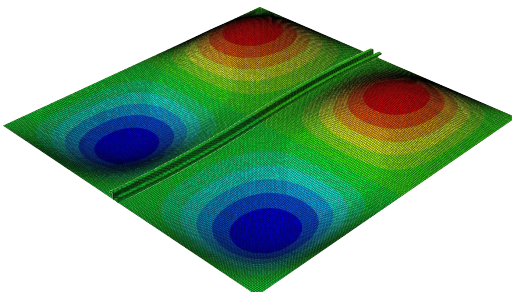
El movimiento U3 de las imperfecciones de la Ec. (5.10) se muestra en la Figura 5.3:



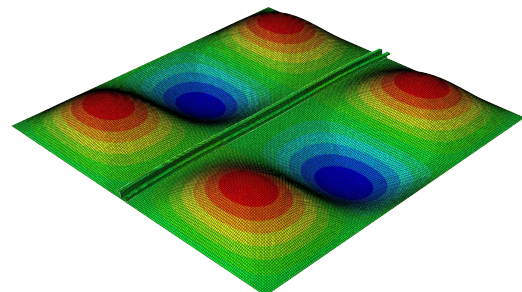
(a) Imperfección # 1, $N_x = 7931.6$ N/m.



(b) Imperfección # 2, $N_x = 9340.4$ N/m.



(c) Imperfección # 3, $N_x = 10505$ N/m.



(d) Imperfección # 4, $N_x = 10694$ N/m.

Figura 5.3: Cuatro primeros modos de pandeo del panel en *Abaqus*[®] (véase también la Figura 3.19).

Por otra parte, se estima necesario realizar un refinamiento de malla en el larguero, con el objetivo de realizar un análisis preciso. Mientras que en inicio de pandeo se han obtenido resultados similares a los analíticos con sólo cuatro elementos a lo largo del canto, en postpandeo se debe controlar que las variables converjan. Esto se lleva a cabo con un estudio de independencia de malla, mostrado en la Figura 5.4, cuya variable es la máxima σ_x en el larguero.

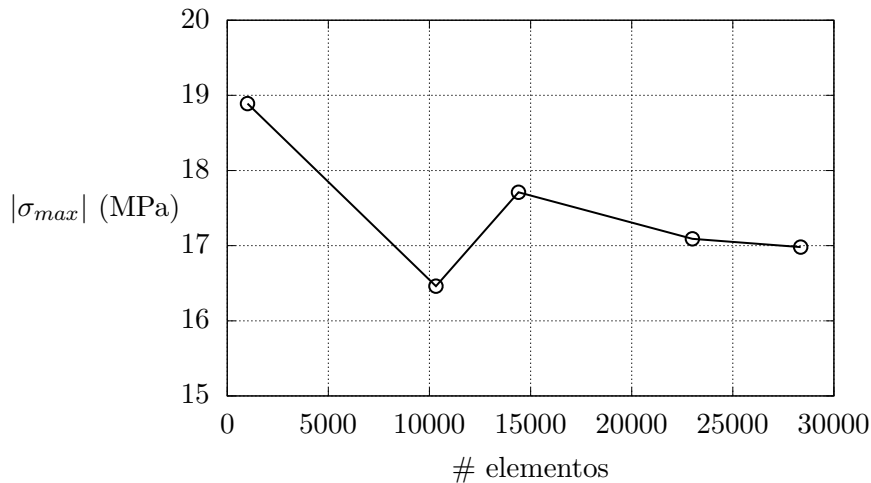


Figura 5.4: Evolución de la tensión σ_x máxima en el larguero para $\mathcal{P}_x = 1.5$ vs. número de elementos de malla en el mismo.

Se asume suficiente usar una malla con 23000 elementos en el larguero; la placa contiene 40000.

Esta vez, se introduce el patrón inicial de imperfecciones de la Ec. (5.10), propuesto en [16]:

$$\mathbf{w}^* = \frac{h}{10} \mathbf{w}_1 + 0.5 \frac{h}{10} \mathbf{w}_2 + 0.25 \frac{h}{10} \mathbf{w}_3 + 0.125 \frac{h}{10} \mathbf{w}_4 \quad (5.10)$$

Nótese que es muy similar al de la Ec. (4.28), pero permitiendo algo más de imperfección para una mejor reproducción de la torsión que provocan los patrones "montaña-valle" del pandeo antisimétrico (véanse los modos de la Figura 5.3).

Por otra parte, también se modifican los parámetros del método de Riks, esta vez con un máximo de 200 incrementos. Éstos se dan en la Tabla 5.2.

Inicial	Mínimo	Máximo	Long. estimada
0.25	10^{-10}	0.5	1

Tabla 5.2: Parámetros de longitud de arco introducidos en *Abaqus*[®] para el estudio de un panel en régimen de postpandeo, obtenidos tras aplicar un control del paso al LPF.

5.3. Resultados

5.3.1. Deformada

En primer lugar, se estudia la deformada del panel. Cabe mencionar que el resultado de la Ec. (5.9) combinado con la Ec. (5.1) proporciona una deformada completamente antisimétrica; en el MEF, la antisimetría no es exacta debido en primer lugar a las imperfecciones de la Ec. (5.10) y a la CC aplicada en el borde $u(0, y) = 0$, o en *Abaqus*[®], $U1 = 0$ en $x = 0$. La Figura 5.5 muestra la deformada del panel para distintos ratios de carga de postpandeo.

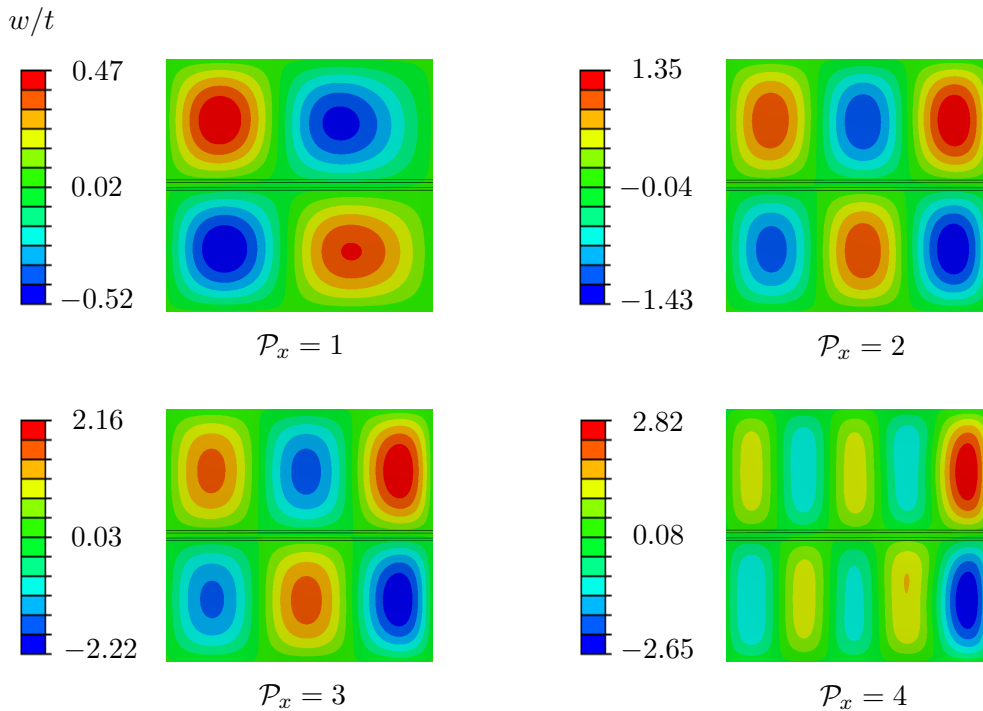
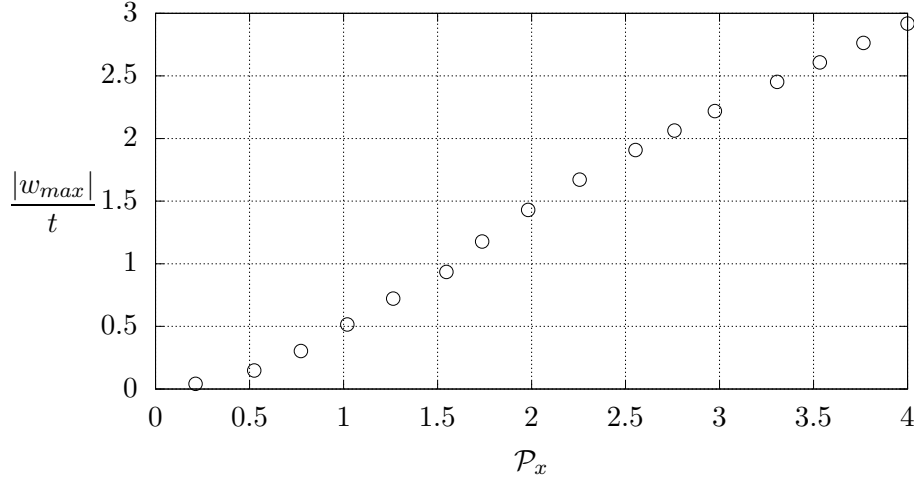


Figura 5.5: Deformada del panel en *Abaqus*[®] para cuatro distintos LPF.

En esta figura, los modos # 1 y # 2 se reproducen de forma muy similar a los de las Figuras 3.19 y 5.3; no ocurre lo mismo con el modo # 3, que aparece con $\mathcal{P}_x = 4$, ya que el número de semiondas a lo largo del eje x es bastante mayor. La deformada máxima sigue manteniendo un orden de magnitud similar al espesor de la placa, de la misma manera que en los casos estudiados en el Capítulo 4. El pandeo también sigue siendo local, es decir, sólo pandea la piel situada a los lados del larguerillo, lo cual es beneficioso y permite lograr una estructura menos pesada. Asimismo, el larguerillo se mantiene prácticamente inmóvil en el plano $z = 0$, de manera que su modelado mediante una articulación ideal no hubiese sido una mala aproximación.

En la Figura 5.6 se muestran los valores de la deformada máxima obtenidos en *Abaqus*[®], para así ofrecer una representación más visual de su orden de magnitud.


 Figura 5.6: Evolución de la deformada máxima del panel en *Abaqus*[®].

Cuando la carga es menor que la de pandeo $\mathcal{P}_x < 1$, la deformada máxima sufre un aumento aproximadamente parabólico basado en el patrón de imperfecciones introducido en la Ec. (5.10). A continuación, con $\mathcal{P}_x > 1$ la deformada máxima sigue una tendencia similar a las de los casos analizados en el Capítulo 4, aunque con valores ligeramente superiores. Observando de nuevo la Figura 5.5, cuando la carga es $\mathcal{P}_x > 2$ comienzan a acumularse dos semiondas de mayor prominencia que el resto cerca del borde cargado $x = a$, ocasionando deflexiones significativas.

5.3.2. Tensiones en la piel

Se realiza ahora un análisis de las tensiones en la piel del panel, esto es, en la placa. Éstas se pueden obtener aplicando la Ec. (2.14) a la función de Airy, Ec. (5.6):

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{N_x}{t} - \frac{E w_{22}^2}{32 r^2} \left(\frac{4\pi}{b}\right)^2 \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) \\
 \sigma_y &= -\frac{E r^2 w_{22}^2}{32} \left(\frac{4\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

De forma similar a la Figura 5.5, la tensión σ_x obtenida en *Abaqus*[®] y adimensionalizada con la tensión crítica, $\sigma_{cr} = N_{cr}/t = 3.97$ MPa, se muestra para varios \mathcal{P}_x en la Figura 5.7. Análogamente a como ocurre en los problemas estudiados en el Capítulo 4, la tensión normal se redistribuye a los bordes no cargados. Esta vez, el larguerillo actúa a modo de CC, provocando que la tensión también se redistribuya hacia éste. En consecuencia, la placa no absorbe las tensiones máximas, sino que éstas se manifiestan en el larguerillo, hecho imposible de visualizar en problemas de pandeo de placas, pues las CC laterales se asumen ideales. Esta distribución se obtiene aplicando la Ec. (2.14) a la Ec. (5.6) y se contrasta con el MEF en la Figura 5.8.

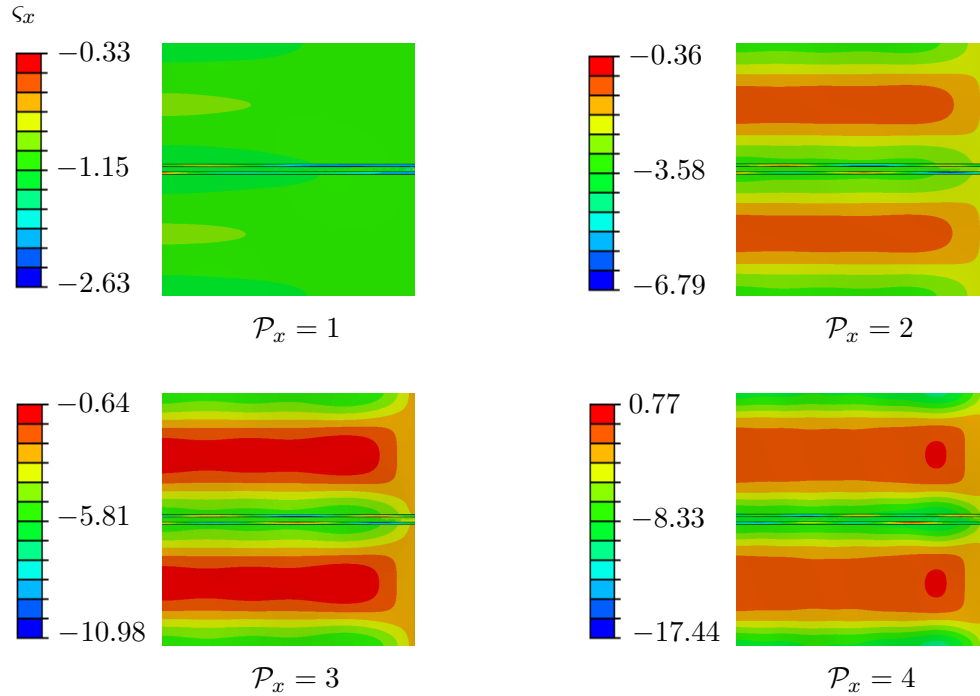


Figura 5.7: Distribución de tensión normal σ_x en el panel.

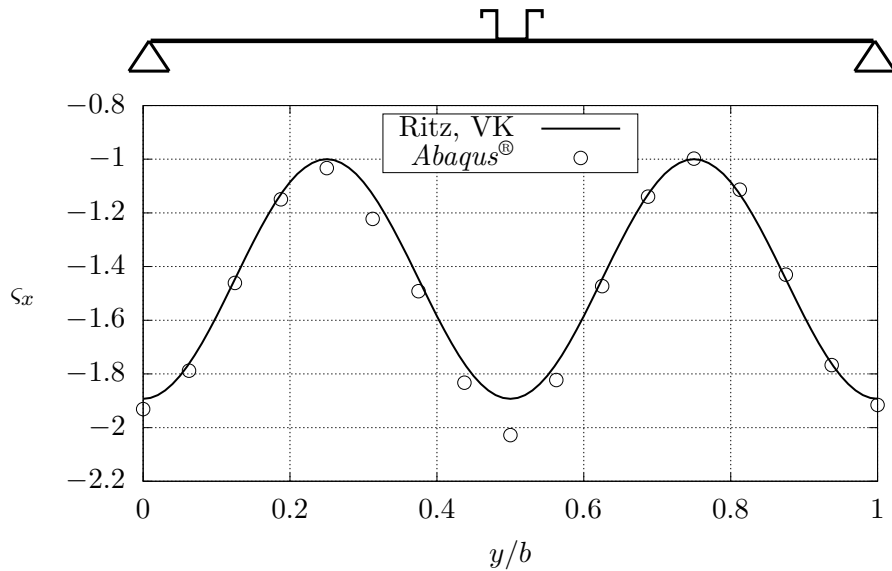


Figura 5.8: Vista lateral de la Figura 5.1 en la posición $x = 0$: redistribución de tensión normal hacia los bordes laterales y hacia el larguero con $\mathcal{P}_x = 1.5$.

De cara a un dimensionamiento geométrico del panel, resulta interesante visualizar la tensión equivalente de Von Mises ς_{vm} ; ésta se muestra en la Figura 5.9, obtenida en *Abaqus*[®].

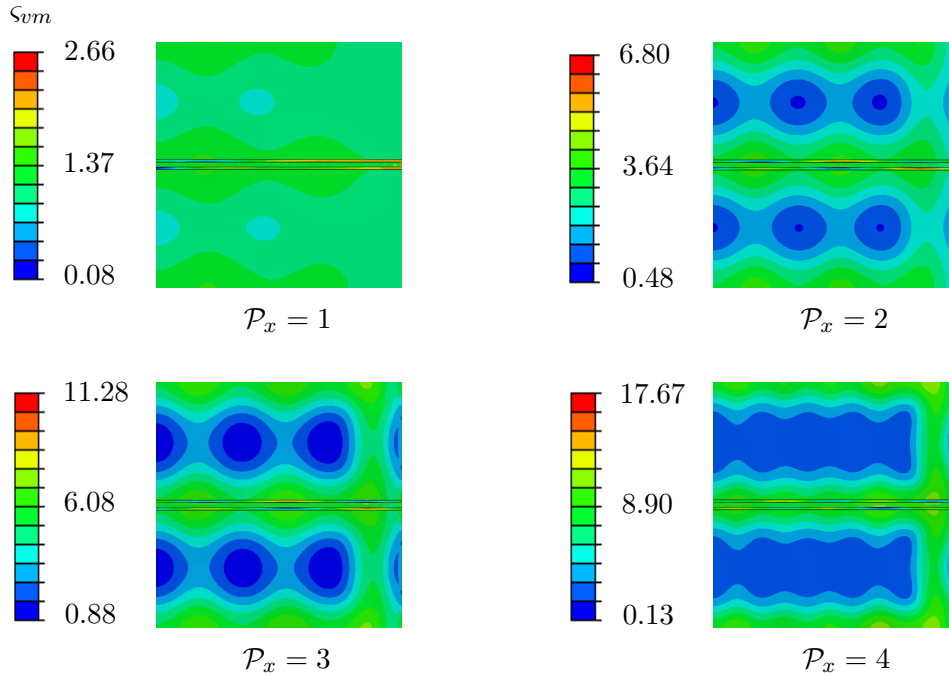


Figura 5.9: Distribución de tensión equivalente de Von Mises en el panel.

Una vez más, destaca que las tensiones máximas se trasladan al larguerillo, lo cual deja entrever que hace falta un estudio más detallado del mismo.

5.3.3. Análisis del larguerillo

Para estudiar el larguerillo con más detalle, se calcula primero la ley de giro de su sección a lo largo de la coordenada adimensional $\xi = x/a$ a partir de la Ec. (5.1):

$$\phi(\xi) = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b/2} = -\frac{2\pi}{b} w_{22} \sin(2\pi\xi) \quad (5.12)$$

Este giro es función tanto de los parámetros estructurales del larguerillo como de la placa, ya que el coeficiente w_{22} , dado en la Ec. (5.9), se obtiene considerando ambas contribuciones para la energía interna. Una hipótesis que introduce la Ec. (5.12) y que conviene no perder de vista es que toda la sección del larguerillo gira al unísono; es decir, $\phi \neq \phi(s)$, siendo s la coordenada curvilínea (véase la Figura 3.5). En *Abaqus*[®], esta hipótesis se cumple con bastante precisión en el subpanel de la sección donde se colocan los remaches (tramo 4-5 de la Figura 3.5), mientras que las alas y almas ejercen mayor resistencia al giro. Este giro se muestra en la Figura 5.10.

El hecho de conocer la ley de giro del larguerillo a lo largo del eje x permite eludir la necesidad de resolver la Ec. (2.27) de torsión mixta. No obstante, para que los resultados sean fiables, se ha de contrastar primero la Ec. (5.12) con los resultados de *Abaqus*[®]. Esta comparación se reproduce en la Figura 5.11 para dos ratios de carga distintos aunque siempre dentro del primer

modo de pando, ya que la aproximación realizada en la Ec. (5.9) no permite llegar a más carga analíticamente. Por otra parte, los resultados de *Abaqus*[®] se extraen en el punto 6 de la sección según la Figura 3.5, con el objetivo de contrastar también la validez de la hipótesis de que toda la sección gira al unísono.

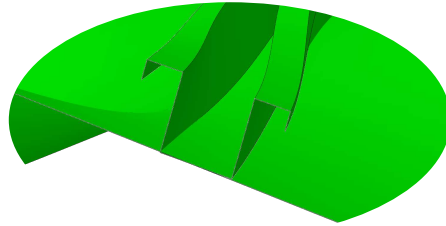


Figura 5.10: Detalle del giro del larguerillo obtenido en *Abaqus*[®].

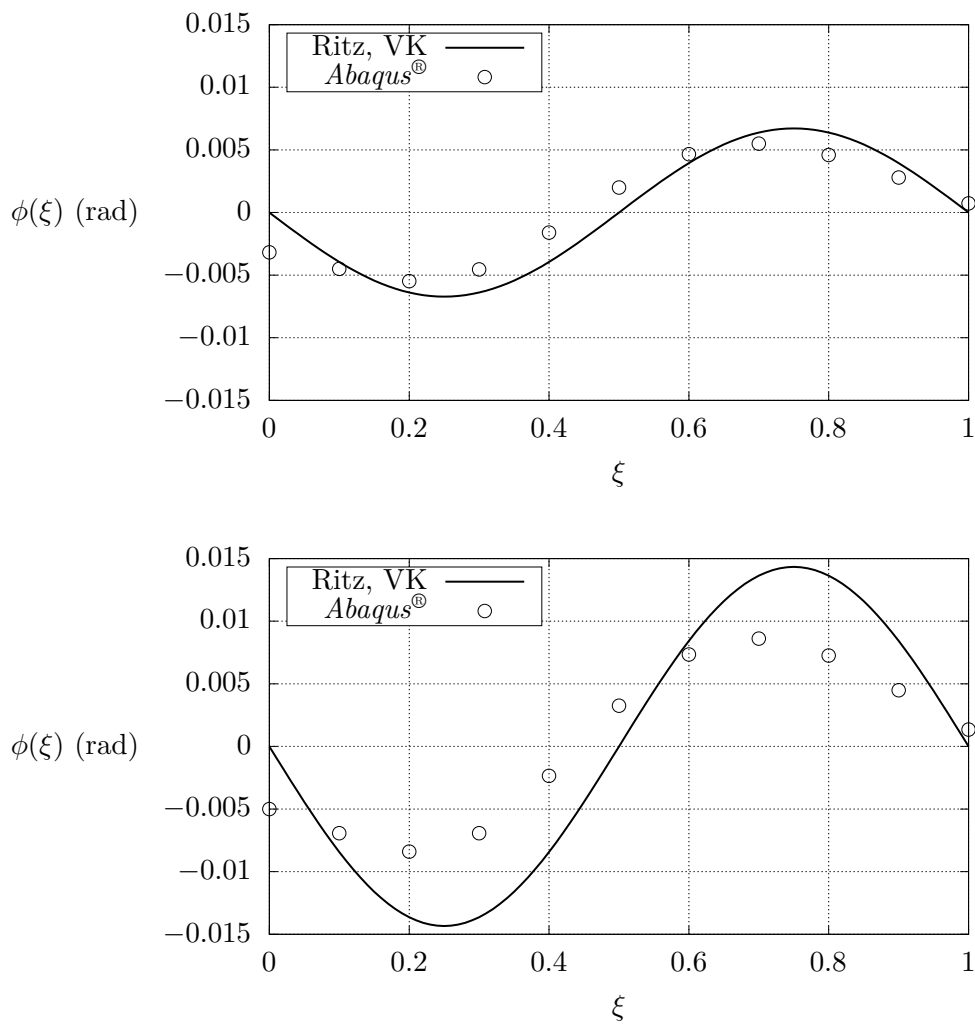


Figura 5.11: Ley de giro del larguerillo. Arriba: $\mathcal{P}_x = 1.1$. Abajo: $\mathcal{P}_x = 1.5$.

En la Figura 5.11, puede apreciarse que la aproximación es buena cuando la carga no es demasiado elevada. Si por el contrario $\mathcal{P}_x = 1.5$, la estructura está cerca de entrar en el segundo modo de pandeo (imperfección # 2 de la Figura 5.3), los errores máximos se sitúan en torno al 40 % y la aproximación deja de ser fiable.

Como ya se ha mencionado, no es necesario integrar la Ec. (2.27), ya que la ley de giro es conocida. No obstante, una vez contrastado el giro, resulta interesante recuperar esta ecuación para analizar la influencia de los torsos de Saint-Venant y de alabeo T_J , T_Γ respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} T_J(\xi) &= GJ \frac{d\phi}{dx} = \frac{GJ}{a} \frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{4\pi w_{22}}{ab} GJ \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \\ T_\Gamma(x) &= -E\Gamma_0 \frac{d^3\phi}{dx^3} = -\frac{E\Gamma_0}{a^3} \frac{d^3\phi}{d\xi^3} = -\frac{16\pi^4 w_{22}}{a^3 b} E\Gamma_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Representando conjuntamente los torsos T_J , T_Γ y la suma de ambos, esto es, el torsor total, se obtiene la Figura 5.12.

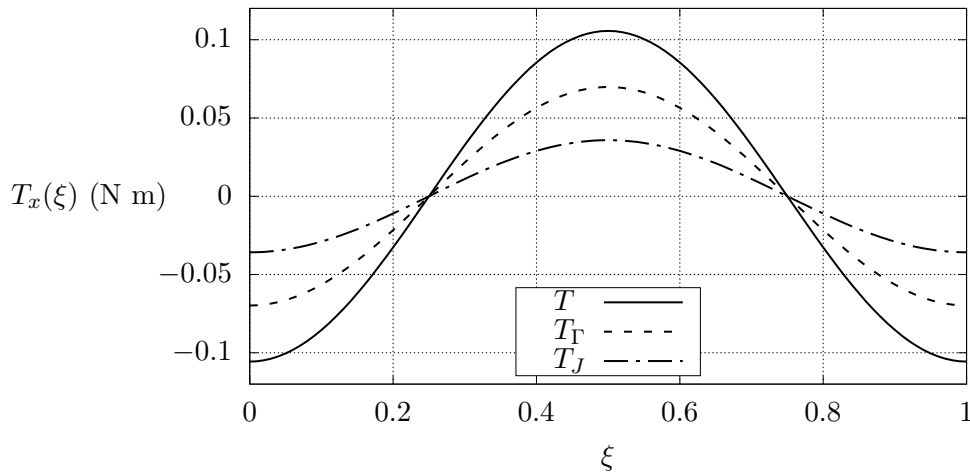


Figura 5.12: Momentos torsos a lo largo del larguero: torsor de Saint-Venant T_J , torsor de alabeo T_Γ y torsor total $T = T_J + T_\Gamma$.

De forma general, el momento torsor que aparece como consecuencia del pandeo de la piel, con semiondas antisimétricas, tiene un orden de magnitud pequeño. A pesar de ello, las tensiones debidas a torsión sí pueden llegar ser elevadas, como se estudia más adelante. Asimismo, el torsor de alabeo ejerce mayor influencia que el de Saint-Venant, aunque ambos son del mismo orden y por tanto ninguno despreciable frente al otro. Esto último se ratifica si se calcula la esbeltez torsional del larguero [14]:

$$\lambda_T = L \sqrt{\frac{GJ}{E\Gamma_0}} = 4.5 \quad (5.14)$$

donde $L = a$. Según la referencia [12], si $\lambda_T \in [2 - 5]$ ambos torsosres T_J , T_Γ tienen una importancia similar y el dominio es de torsión mixta, aspecto que se corrobora en la Figura 5.12.

Una vez estudiados y analizados el giro y los torsosres, las variables de mayor interés son las tensiones en el larguerillo. La Ec. (3.56) permite estimar ambas σ_x , τ_{xs} debidas a la torsión originada a su vez por el pandeo de la piel; además, a σ_x se le añade el término “homogéneo” de compresión:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, s) &= -\frac{N_x}{t} - \frac{8\pi^3 E w_{22}}{a^2 b} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \omega(s) \\ \tau_{xs}(x, s) &= -\frac{4\pi^2 G t_s w_{22}}{a b} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{16\pi^4 E w_{22}}{a^3 b} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \int_C \omega(s) ds\end{aligned}\tag{5.15}$$

donde la función de alabeo $\omega(s)$ se ha calculado en la Ec. (3.30). Téngase en cuenta que la Ec. (5.15) sólo permite reproducir las tensiones que tienen lugar en el primer modo de pandeo, debido a la aproximación realizada en la Ec. (5.1).

La tensión normal σ_x en el larguerillo obtenida en *Abaqus*[®] se representa en la Figura 5.13.

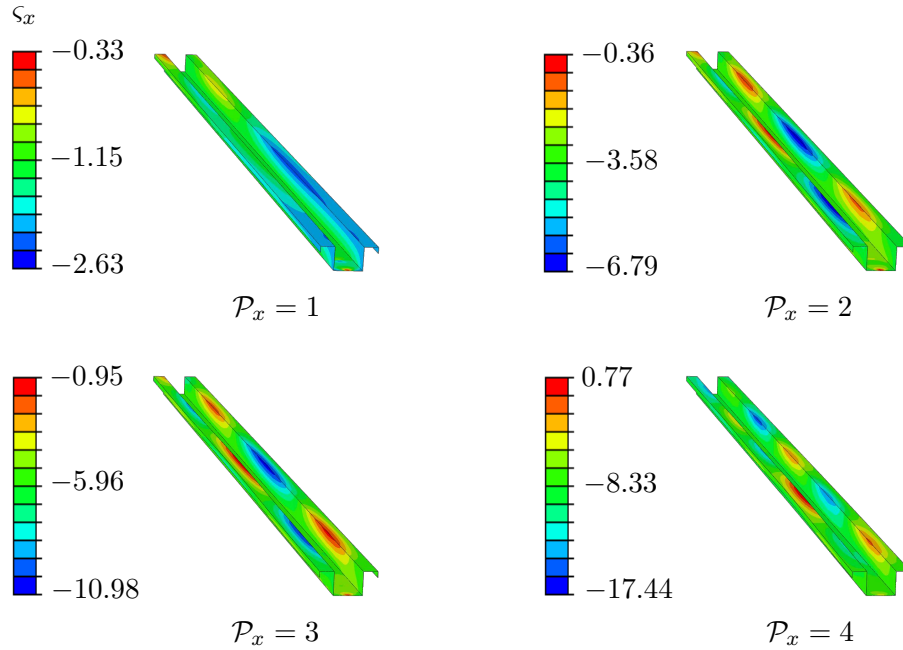


Figura 5.13: Distribución de tensión normal σ_x en el larguerillo.

Mientras que las tensiones máximas en la placa apenas alcanzan un orden de magnitud por encima de σ_{cr} (véase la Figura 5.7), en el larguerillo pueden llegar a doblarse; la tensión más elevada es de unos 70 MPa, de modo que la carga aún podría aumentar antes de entrar en modos de fallo como el *crippling* o el pandeo entre remaches. Nótese también que, en las esquinas

superiores que unen las almas con las alas de la sección, se aprecia el efecto del alabeo seccional: al ser éste antisimétrico, tal y como se ha indicado en la Sección 3.3 y puede apreciarse en la Figura 3.7, una de dichas esquinas absorbe mucha más tensión que la otra, pues la tensión normal debida al alabeo adquiere la misma magnitud y signo contrario. También cabe mencionar que la tensión tangencial τ_{xs} es un orden de magnitud menor a σ_x debido al término N_x/t de la Ec. (5.15) primera, de forma que no se considera especialmente necesaria su representación.

Para contrastar la Ec. (5.15), se visualiza la tensión σ_x en *Abaqus*[®] para $\mathcal{P}_x = 1.1$ en la sección $\xi = 3/4$ (donde, según la Figura 5.13, σ_x es aproximadamente máxima) a lo largo de la coordenada curvilínea $\eta = s/h$: desde el punto 0 hasta el 8 de la Figura 3.5.

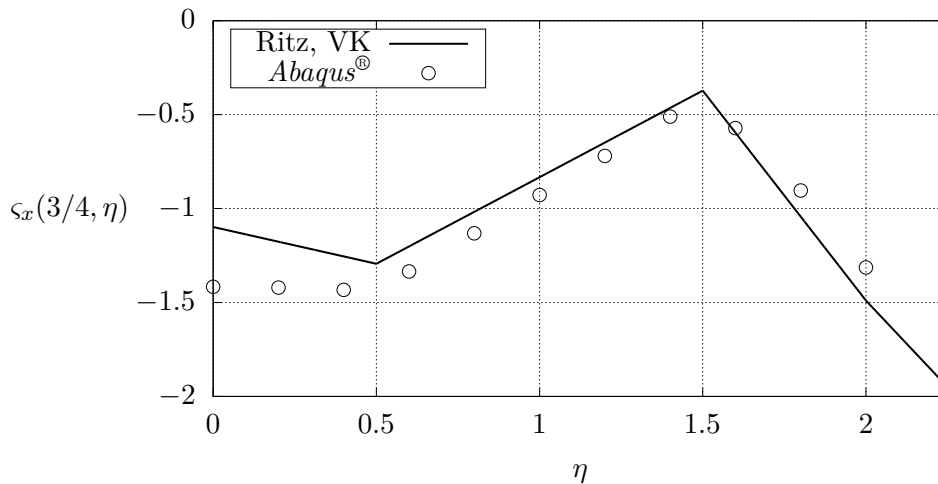


Figura 5.14: Comparación de tensión normal en la sección $\xi = 3/4$ del larguerillo para $\mathcal{P}_x = 1.1$.

En la Figura 5.14, puede apreciarse que el contraste resulta satisfactorio lejos de los extremos de η , es decir, en los tramos 5-6 y 6-7 de la sección. En puntos 0 y 8 los errores son aproximadamente un 27% y un 18% respectivamente. Los motivos de estas discrepancias son los siguientes:

- En el punto 0 se encuentran los remaches que unen el larguerillo a la placa. Ello implica en *Abaqus*[®] la prescripción de un vínculo entre ambos componentes, lo que ocasiona una concentración de tensiones cerca de la superficie de dicho vínculo. En la Figura 5.14, la tensión en $\eta = 0$ predicha por *Abaqus*[®] es mayor que la que predice el cálculo analítico, lo cual sigue la lógica del razonamiento anterior. Además, este razonamiento sirve para explicar la discrepancia entre las soluciones analítica y numérica de la Figura 5.8 cuando $y/b = 0.5$.
- Por otro lado, el extremo libre de la sección (punto 8) presenta algo menos de discrepancia. Ésta se debe a la hipótesis de giro uniforme en toda la sección del larguerillo (véase la Figura 5.10): como puede apreciarse en la Figura 5.14, a medida que η se acerca al valor final, la diferencia entre resultados analítico y numérico va creciendo.

Conclusiones, trabajos futuros y presupuesto

6.1. Conclusiones

En el presente Trabajo de Fin de Grado, se ha resuelto el inicio de pandeo y el postpandeo bajo compresión de paneles que conforman la estructura semimonocasco de una aeronave, es decir, del conjunto formado por las placas o piel de dichos paneles y los larguerillos rigidizadores. Para ello, se han combinado métodos analíticos puros y semianalíticos, haciendo uso de las herramientas *Mathematica*[®] y *Matlab*[®], con métodos numéricos, concretamente el MEF a través de *Abaqus*[®]. Algunas soluciones también se han contrastado con resultados de organizaciones de renombre como ESDU[®] o de otros centros de investigación como la *Cranfield University*.

Según lo mencionado, las principales conclusiones que se pueden extraer del trabajo realizado son las siguientes:

- La comprensión de las bases teóricas así como de los desarrollos analíticos es crucial para una interpretación apropiada de los resultados que proporciona el MEF, facilitando así la detección de errores y el contraste de resultados.
- Se ha analizado y reproducido el documento ESDU[®] 72019, que estudia el inicio de pandeo por compresión en placas con CC elásticas. Ello ha permitido un estudio preciso del pandeo de piel cuando las CC de sus bordes dejan de ser ideales, permitiendo una buena aproximación al pandeo local de los paneles que conforman las estructuras semimonocasco.
- En el cálculo de inicio de pandeo de panel, los métodos de Levy y Ritz proporcionan resultados muy similares cuando los efectos de la torsión son despreciables o poco importantes. Esto ocurre cuando el panel padea a flexión de forma global, es decir, piel y larguerillo conjuntamente. Por tanto, para estudiar y así poder priorizar el pandeo local de piel es preferible recurrir al método de Ritz o a otros análogos como el de Galerkin.
- En inicio de pandeo, prácticamente la totalidad de resultados analíticos y MEF coinciden con un error relativo muy pequeño. De esta manera, puede afirmarse que se han obtenido resultados satisfactorios.
- El montaje de larguerillos en la piel de un panel aeronáutico incrementa sustancialmente la carga crítica de pandeo. Este hecho, entre otros, justifica la predominancia de diseños aeronáuticos basados en estructuras semimonocasco de aluminio frente a las monocasco.
- Un panel aeronáutico debe diseñarse priorizando el pandeo local de la piel para obtener una estructura eficiente de cara al postpandeo y evitar así que los larguerillos pandeen a modo de columna.
- Si el diseño prioriza el pandeo local de la piel, se debe realizar un buen dimensionado de la rigidez a torsión de la sección de los larguerillos.
- Existen valores de r que maximizan o minimizan la carga crítica de inicio de pandeo. Un buen diseño requiere tener en cuenta dichos extremos, los cuales se atenúan a medida que

r aumenta, provocando que la carga crítica tienda a un valor asintótico.

- El diseño de paneles aeronáuticos considerando pandeo permite reducir considerablemente el peso de la estructura de la aeronave.
- El cálculo del postpandeo de placas con dos términos ha permitido estudiar los dos primeros modos de pandeo. Ello ha posibilitado a su vez introducir cargas más elevadas en el MEF, pudiendo contrastar dichos resultados con los analíticos.
- El contraste de resultados analíticos y numéricos en postpandeo ha sido satisfactorio en muchos casos. No obstante, a veces es complicado hacer coincidir ambas soluciones, ya que se deben tener en cuenta multitud de aspectos.
- A la hora de analizar el postpandeo, puede ocurrir que pese a estar tratando de comparar un mismo problema, haya factores que provoquen que se esté abordando en el MEF un caso ligeramente diferente al estudiado analíticamente. La mayoría de las veces, estos factores están relacionados con las imperfecciones iniciales, sin las cuales no es posible reproducir numéricamente el postpandeo, y las CC. Es importante comprender por tanto qué diferencias existen y si son o no relevantes.
- En el postpandeo de placas, se ha comprobado que una mayor restricción de los desplazamientos del plano medio en los bordes no cargados reduce tanto las deflexiones de la placa como las tensiones máximas en la misma.
- Si se tiene en cuenta el efecto de los larguerillos en el postpandeo de paneles a compresión, se deduce que éstos absorben una parte importante de las tensiones. Por tanto, pese a que en postpandeo de placas se obtenga que a mayor restricción lateral menor tensión máxima en la piel, es el larguerillo quien termina absorbiendo mayores tensiones.
- El estudio de inicio pandeo en paneles a compresión mediante el método de Ritz puede abordarse utilizando un número variable de términos en la solución de prueba. Si es elevado, los resultados abarcan mayores rangos de carga y relación de aspecto, pero el coste computacional aumenta. Si por el contrario es reducido, el coste computacional se reduce, a cambio de que las soluciones queden acotadas a cierto rango de validez.
- Según el punto anterior, el postpandeo de un problema concreto puede analizarse por el método de Ritz utilizando un solo término de la solución de prueba. Para ello, es imprescindible conocer la deformada del primer modo de pandeo, ya que la solución de prueba a utilizar depende del número de semiondas en las direcciones de los ejes x , y . Además, el estudio queda supeditado al rango de validez de dicho modo de pandeo.

6.2. Trabajos futuros

A lo largo de la realización del presente trabajo, han surgido nuevas ideas y posibles vías de investigación en las que profundizar, ya sean relacionadas con el pandeo de paneles o de distinto carácter. Las más destacadas son:

- Estudio del postpandeo de paneles aeronáuticos bajo sollicitación cortante y/o sollicitaciones combinadas.
- Estudio del postpandeo de paneles fabricados de material compuesto.
- Optimización de los parámetros geométricos de un panel aeronáutico diseñado para trabajar a pandeo: espaciado entre larguerillos y/o entre remaches, relación entre los espesores de piel y larguerillo, etc.
- Estudio del pandeo de paneles por interacción térmica.
- Estudio del efecto de los larguerillos de los paneles aeronáuticos cuando se aplican cargas dinámicas: vibraciones, impactos y fenómenos aeroelásticos.
- Análisis del pandeo no elástico de paneles aeronáuticos considerando diferentes modelos de plasticidad, así como los distintos modos de fallos asociados a los larguerillos: pandeo global de flexión, *crippling* o interacción entre ambos.
- Estudio de la influencia de la curvatura inicial en el pandeo por compresión y/o cortante de paneles aeronáuticos.
- Estudio del pandeo en estructuras formadas por láminas: cilindros, conos, elipsoides, etc.
- Desarrollo de modelos que permitan el estudio de pandeo de paneles por métodos experimentales para su comparación con el MEF.

6.3. Presupuesto

En el siguiente desglose se detalla el coste total para la realización del presente trabajo:

Cantidad	Concepto	Precio/ud.	Precio total
400	Horas totales ingeniero	40.00 €	16,000.00 €
40	Búsqueda de información		
60	Formación teórica		
30	Formación en <i>Abaqus</i> [®]		
40	Modelos analíticos en <i>Mathematica</i> [®]		
30	Modelos MEF en <i>Abaqus</i> [®]		
20	Programación en <i>Matlab</i> [®]		
40	Análisis de resultados		
60	Validaciones y depuración de errores		
80	Redacción del informe		
250	Horas totales de servidor	5.00 €	1,250.00 €
100	Resolución analítica		
150	Resolución MEF		
1/4	Licencia de <i>Abaqus</i> [®] académica	1,000.00 €	250.00 €
1/4	Licencia de <i>Mathematica</i> [®] académica	1,515.00 €	378.75 €
1/4	Licencia de <i>Matlab</i> [®] académica	500.00 €	125.00 €
	Coste total (sin IVA)		18,003.75 €
	IVA (21 %)		3,780.79 €
	Total presupuestado		21,784.54€

Tabla 6.1: Presupuesto del trabajo.

El presupuesto total del trabajo asciende a la cantidad de 21,784.54 €.

Bibliografía

- [1] S. Timoshenko & J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Company, 1985
- [2] S. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, 1989
- [3] E. Ventsel & T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*, Marcel Dekker, 2001
- [4] R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods*, John Wiley, 2004
- [5] T.H.G. Megson, *Aircraft Structures for Engineering Students (Fourth Edition)*, Elsevier, 2007
- [6] E. de la Fuente Tremps, *Introducción al análisis de las Estructuras Aeronáuticas*, Garceta, 2014
- [7] C. Kassapoglou, *Design and Analysis of Composite Structures with Applications to Aerospace Structures*, Wiley, 2010
- [8] E.J. Barbero, *Introduction to Composite Materials Design*, Taylor & Francis, 1999
- [9] ESDU 72019, *Buckling of Flat Isotropic Plates under Uniaxial and Biaxial Loading*
- [10] Cranfield University, *The Post-Buckled Behaviour of Thin Plates in Compression*, DES 8726
- [11] Cranfield University, *Stiffened Panels in Compression*, DES 8347
- [12] J.L. Pérez Aparicio & M. Lázaro, *Apuntes de Estructuras Aeroespaciales*, Editorial UPV, 2018
- [13] P. de Tarso Machado & F.A. Correia Monteiro & E. Lucena Neto & F.L. de Silva Bussamra, *Skin Buckling of Fuselajes under Compression*
- [14] T.A. Vernon & Y. Nadeau, *Thin-Walled Beam Theories and their Applications in the Torsional Strength Analysis of Ship Hulls*
- [15] DS SIMULIA, *Abaqus 6.11 Theory Manual*, 2011
- [16] DS SIMULIA, *Simuleon*
- [17] <https://techannouncer.com/global-fuselage-panels-market-2017-boeing-avic-bombardier-airbus-industrie-triumph-group/>
- [18] <http://aviationweek.com/blog/787-9-inside-and-787-production-update>
- [19] <https://www.flickr.com/photos/diverse/27273400154>
- [20] <http://www.aeronauticausa.com/technical-services/engineering-services/>

- [21] <https://warthunder.com/en/news/2885-en>
- [22] <https://www.ainonline.com/aviation-news/2011-11-12/airbus-a350xwb-delay-could-reach-12-months>
- [23] <http://fgg-web.fgg.uni-lj.si/~pmoze/esdep/master/wg08/10430.htm>
- [24] <http://www.ybw.com/forums/showthread.php?397582-is-this-wing-OK>
- [25] <https://www.quora.com/Is-radome-a-pressurised-or-unpressurised-section-of-an-aircraft-and-why>
- [26] <http://www.bmeltd.com/rods.htm>