

**UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA**

**Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática**



**TÉCNICAS DE ELIMINACIÓN DEL RIZADO  
INTERMUESTREO EN CONTROL  
MULTIFRECUENCIAL BASADO EN MODELADO  
POR BLOQUES ENTRADA-SALIDA**

**TESIS DOCTORAL**

**Presentada por:**

**D. Francisco Armando Ramos Díaz**

**Dirigida por:**

**Dr. D. Julián Salt Llobregat**



## RESUMEN

La presente tesis estudia el muestreo multifrecuencial de sistemas. En concreto se trabaja con el modelado de bloques de entradas y salidas BMIO Albertos [1], Este modelo convierte un sistema multifrecuencia en un sistema monofrecuencia a metaperiodo mediante el estiramiento de entradas y salidas formando bloques. Se estudian los diferentes controladores desarrollados para este tipo de modelado y se discuten las causas que originan el rizado intermuestreo que presentan este tipo de controladores y las posibles formas de eliminarlo.

En una primera aproximación se tiene que los controladores presentan un rizado intermuestreo debido a que las acciones de control varían a lo largo del metaperiodo con lo que aun en estado estacionario dichas acciones provocan que las salidas del sistema varíen provocando el rizado. En primera instancia se trabaja con un controlador de cancelación o deadbeat al cual se le aplican compensadores que hacen que las acciones de control sean iguales a lo largo del metaperiodo eliminando de esta forma el rizado intermuestreo. En un segundo paso estos compensadores se integran en la parte del diseño del controlador y se desarrolla una forma de calcular las matrices del controlador que incluyan dichos compensadores, es decir, que las filas correspondientes a cada entrada de las matrices utilizadas para obtener las acciones de control son iguales. Esta forma matricial permite analizar el comportamiento del controlador y facilita el desarrollo de controladores para sistemas MIMO.

Una segunda forma de encarar el problema de rizado es mediante un controlador basado en la asignación de polos, el cual trabaja con el modelo a alta frecuencia pero obtiene las matrices de control realizando los cálculos a baja frecuencia y reproduciendo dichos resultados nuevamente en alta frecuencia con lo que se logra que las acciones de control sean iguales, este método asegura la estabilidad del nuevo sistema controlado y la eliminación del rizado, pero con el inconveniente de presentar un offset en la salida. Se desarrollan dos formas de eliminar dicho offset una para sistemas SISO y otra para sistemas MIMO, basadas en la modificación de la ganancia en estado estacionario del sistema retroalimentado.

Una alternativa al controlador anterior es el cálculo de las matrices de control por medio del diseño basado en controladores óptimos, se calculan las matrices en baja frecuencia intentando minimizar o maximizar un índice de desempeño, estos resultados se aplican en alta frecuencia con lo que se obtiene nuevamente un controlador estable y sin rizado intermuestreo.

Además se estudia la incorporación de filtros que realicen una transición entre las matrices de control originales y las desarrolladas en este trabajo, con el fin de aprovechar la mejor

repuesta transitoria de las primeras y la eliminación del rizado en estado estacionario que se consigue con las segundas.

Por último se desarrolla una Herramienta CACSD (Computer Aided Control System Design) para MATLAB/SIMULINK que ayuda en el diseño, aplicación y estudio de los controladores aquí tratados

## ABSTRACT

The present thesis studies the multirate sampling systems, it works with specific model blocks of input and outputs BMIO Albertos [1], and this model turns a multirate system into a single rate system with metaperiod by means of lifting inputs and outputs forming blocks. There are studies of different controllers developed for this type of model and discussed the causes that originate the intersampling ripple that produce these controllers and the possible forms of eliminating it.

In the first approximation that the controllers have a ripple at the output of the system due to the fact that the actions of control varies along the metaperiod, even in stationary conditions, this actions provoke that the outputs of the system change along the metaperiod. At first instance the controller works with a deadbeat that applies compensators, this makes the control actions equal along for the metaperiod eliminating in this way the intersampling ripple. These compensators are integrated at the controller design stage, and developed a way to calculate the matrixes of the controller that includes these compensators, this means, that the rows related to each input of the matrixes used to obtain the control actions are equal. The matrix form allows the analysis of the controller behavior and facilitates the development of controllers for MIMO systems.

A second alternative to face the ripple problem using a controller based on the pole assignment which works with the model at high frequency but obtains the control matrixes doing the calculations at low frequency and repeating these results in high frequency, the control actions results are equal, this alternative method to work assures the stability of the new controlled system and the elimination of the ripple, but the drawback is an offset in the output. Developing two ways to eliminate this offset one for SISO systems and other for MIMO systems based on the stationary state gain modification for a feedback system.

The alternative for an Optimal Control Design for the last controller is to calculate the matrixes at low frequency, applying these results at high frequency, obtaining a stable and ripple free controller.

The incorporation of filters makes a transition between the original control matrixes and the new ones developed in this work, taking advantage of a better transitory response for the first ones and the elimination of the ripple in stationary state for the second ones.

Finally a Toolbox CACSD (Computer Aided Control System Design) for MATLAB/SIMULINK is developed that helps in the design, application and study of the controllers treated here.

## RESUM

La present tesi estudia el mostratge multifrecuencial de sistemes, en específic es treballa amb el modelatge de blocs d'entrades i eixides BMIO Albertos [1], Este model convertix un sistema multifrecuència en un sistema monofrecuència a metaperiode per mitjà de l'estirada d'entrades i eixides formant blocs. S'estudien els diferents controladors desenrotllats per a este tipus de modelatge i es discutixen les causes que originen l'arissat intermostratge que presenten este tipus de controladors i les possibles formes d'eliminar-ho.

En una primera aproximació es té que els controladors presenten un arissat intermostratge pel fet que les accions de control varien al llarg del metaperiode amb el que inclús en estat estacionari les dites accions provoquen que les eixides del sistema varien provocant l'arissat. En primera instància es treballa amb un controlador de cancel·lació o deadbeat al qual se li apliquen compensadors que fan que les accions de control siguin iguals al llarg del metaperiodo eliminant d'esta manera l'arissat intermostratge. En un segon pas estos compensadors són integrats en la part del disseny del controlador i es desenrotlla una forma de calcular les

matrius del controlador que incloguen dites compensadores, és a dir, que les files corresponents a cada entrada de les matrius utilitzades per a obtindre les accions de control són iguals. Esta forma matricial permet analitzar el comportament del controlador i facilita el desenrotllament de controladors per a sistemes MIMO.

Una segona forma d'encarar el problema d'arissat és per mitjà d'un controlador basat en l'assignació de pols, el qual treballa amb el model a alta freqüència però obté les matrius de control realitzant els càlculs a baixa freqüència i reproduint dites resultats novament en alta freqüència amb el que s'aconsegueix que les accions de control siguin iguals, este mètode assegura l'estabilitat del nou sistema controlat i l'eliminació de l'arissat, però amb l'inconvenient de presentar un òfset en l'eixida. Es desenrotllen dos A més s'estudia la incorporació de filtres que realitzen una transició entre les matrius de control originals i les desenrotllades en este treball, a fi d'aprofitar la millor reposada transitòria de les primeres i l'eliminació de l'arissat en estat estacionari que s'aconsegueix amb les segones formes d'eliminar el dit òfset una para sistemes SISO i una altra per a sistemes MIMO, basades en la modificació del guany en estat estacionari del sistema retroalimentado.

Una alternativa al controlador anterior és el càlcul de les matrius de control per mitjà del disseny basat en controladors òptims, es calculen les matrius en baixa freqüència intentant

minimitzar o maximitzar un índex d'exercici, estos resultats són aplicats en alta freqüència amb el que s'obté novament un controlador estable i sense arrissat intermostratge

Finalment es desenrotlla una Ferramenta CACSD (Computer Aided Control System Design) for MATLAB/SIMULINK que ajuda en el disseny, aplicació i estudi dels controladors ací tractats



---

## **TABLA DE CONTENIDO**

---

RESUMEN	i
ABSTRACT	iii
RESUM	v
<b>TABLA DE CONTENIDO</b>	<b>vii</b>
<b>INDICE DE FIGURAS</b>	<b>xi</b>
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo general	2
1.2.2 Objetivos específicos	2
1.3 Estructura de la Tesis	3

<b>CAPÍTULO 2 TÉCNICAS DE MODELADO</b>	<b>5</b>
2.1 Introducción	5
2.2 Aplicaciones del Control Multifrecuencia	6
2.3 Aspectos Históricos de Modelado Multifrecuencia	7
2.4 Métodos de Modelado de Sistemas Multifrecuencia	9
2.4.1 Descomposición vectorial de conexiones	9
2.4.2 Modelado de Thompson	10
2.4.3 Modelo de Araki y Yamamoto	13
2.5 Modelo BMIO	16
2.5.1 Representación Interna del modelo BMIO	17
2.5.2 Representación Externa del modelo BMIO	22
2.5.3 Propiedades del Modelo BMIO.	23
2.5.3 Controladores basados en el modelo BMIO	29
2.6 Modelo BMIO de un sistema SISO	30
2.7 Modelo BMIO de un sistema MIMO	32
2.7.1 Modelo sin considerar los retardos en las entradas	32
2.7.2 Modelo considerando los retardos en las entradas	39
2.8 Modelo BMIO de un sistema MIMO con muestreo distinto para cada señal de entrada y salida.	42
2.9 Conclusiones	47
<b>CAPÍTULO 3 CONTROL BMIO. INTRODUCCIÓN AL RIZADO INTERMUESTREO</b>	<b>49</b>
3.1 Sistemas de control multifrecuencial:	49
3.1.1 Controlador de Cancelación	50
3.1.2 Controlador con Horizonte Móvil.	53
3.1.3 Controlador de Asignación de Modelo a Seguir.	57
3.2 Análisis de la respuesta intermuestreo.	60
3.2.1 Sistema SISO con $r$ acciones de control y una sola medida de la salida.	62
3.2.2 Sistema SISO con $r$ acciones de control y $s$ medidas de la salida.	73
3.2.3 Sistema MIMO con $r$ acciones de control y $s$ medidas de la salida.	86
3.3 Conclusiones	105

<b>CAPÍTULO 4 TÉCNICAS DE ELIMINACIÓN DEL RIZADO INTERMUESTREO: ANÁLISIS Y COMPARACIÓN</b>	<b>107</b>
4.1 Aplicación de Compensadores a las acciones de control.	107
4.2 Método Matricial	114
4.3 Sistemas MIMO	116
4.4 Asignación de polos	118
4.5 Control Óptimo	122
4.6 Eliminación del offset	127
4.7 Filtro de Transición	130
4.8 Conclusiones	131
<b>CAPÍTULO 5 HERRAMIENTAS CACSD Y EJEMPLOS</b>	<b>133</b>
5.1 Sistema SISO y controlador Dual V2	137
5.2 Sistema SISO con polo inestable y controlador dual V2	140
5.3 Sistema SISO y controlador dual V2	142
5.4 Sistema MIMO y controlador dual V2	145
5.5 Sistema SISO con polo inestable y controlador dual V3	148
5.6 Sistema SISO y asignación de estructura	150
5.7 Sistema MIMO y asignación de estructura	152
5.8 Sistema MIMO con seguimiento de referencia	153
5.9 Sistema MIMO con cambio en la referencia	156
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>159</b>
6.1 Conclusiones Generales.	159
6.2 Trabajos Futuros	161
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>163</b>
<b>ANEXO 1 MANUAL DEL USUARIO</b>	<b>1</b>
Instalación de las herramientas de controladores BMIO	1
Toolbox de control BMIO	3



---

## INDICE DE FIGURAS

---

Fig. 2-1.- Descomposición vectorial de conexiones	10
Fig. 2-2.- Muestreo aplicado para el modelo de Thompson	11
Fig. 2-3.- Operador de Kranc	11
Fig. 2-4.- Modelo de Araki y Yamamoto de un Sistema MIMO MF	13
Fig. 2-5.- Comparación de Respuestas BMIO vs Continuo de un sistema SISO	32
Fig. 2-6.- Modelo BMIO con $T=1.5s$ , $T_o=9s$ , Entrada cada $T$ , Salida cada $2T$ .	38
Fig. 2-7.- Comparación de Respuestas BMIO sin retardo vs Continuo	39
Fig. 2-8.- Comparación de Respuestas BMIO con retardo vs Continuo	42
Fig. 2-9.- Comparación de Respuestas BMIO muestreo distinto para cada señal de entrada y salida vs Continuo	47
Fig. 3-1.- Respuesta discreta con un periodo de 3 s	52
Fig. 3-2.- Respuesta del sistema con Control con horizonte fijo	53

Fig. 3-3.- Respuesta del sistema con Control con horizonte móvil	56
Fig. 3-4. Comparación de las acciones de control	56
Fig. 3-5. Respuesta del sistema sin controlador	59
Fig. 3-6. Respuesta del sistema con asignación de modelo	60
Fig. 3-7 Diagrama a bloques de un controlador de cancelación	66
Fig. 5-1. Herramienta CACSD desarrollada en SIMULINK	133
Fig. 5-2. Modelo de SIMULINK con Controladores	137
Fig. 5-3. Comparación de los controladores	139
Fig. 5-4 Acciones de control	139
Fig. 5-5 Respuesta del controlador de cancelación	140
Fig. 5-6 Respuesta del controlador con compensación	141
Fig. 5-7 Comparativa de la respuesta de los 3 controladores	142
Fig. 5-8 Respuesta con controlador de cancelación	143
Fig. 5-9 Respuesta con controlador sin rizado	144
Fig. 5-10 Respuesta con controlador dual V2	144
Fig. 5-11 Respuesta del sistema MIMO ante un escalón unitario	146
Fig. 5-12 Respuesta del controlador matricial.	148
Fig. 5-13 Respuesta del controlador dual con asignación de polos	150
Fig. 5-14 Respuesta del controlador modelo a seguir	151
Fig. 5-15 Respuesta del controlador con asignación de polos	151
Fig. 5-16 Respuesta con controlador $\Gamma$	152
Fig. 5-17 Respuesta con controlador $\Gamma$ y $\Gamma_\infty$	153
Fig. 5-18. Respuesta con controlador dual V2	154
Fig. 5-19 Respuesta con controlador dual V3	155
Fig. 5-20 Respuesta con controlador dual V3 y cambio en la referencia	157

---

# CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

---

## 1.1 Motivación

Una de las posibles causas de problemas en el control digital es el muestreo de todas las señales a una misma frecuencia. Sobre todo si se trata de Sistemas Distribuidos donde se tienen sistemas de comunicación y varios procesadores ejecutando los diferentes algoritmos de control. En este tipo de sistemas es imposible tener un solo tiempo de muestreo y una sincronización de todas las variables. Se sabe que en un sistema discreto en el tiempo, si las variables pertenecen a subprocessos diferentes, la frecuencia de muestreo no tiene que ser la misma para todas ellas. Una frecuencia de muestreo rápida no siempre es lo mejor debido a los problemas numéricos y de resolución. Es posible encontrar procesos donde la obtención de la información del proceso puede ser más lenta que el cálculo de la señal de control, ya sea por el dispositivo sensor que puede tardar en entregar la información o por la misma naturaleza de la variable. En otros casos, la salida del proceso se muestrea a altas velocidades para reducir el efecto del ruido, pero la señal de control se actualiza a menor frecuencia. Esto conduce al estudio de sistemas digitales donde dos o más variables se actualizan a frecuencias distintas; éstas pueden pertenecer al mismo lazo de control o a diferentes lazos como en el caso de sistemas multivariables. El control multifrecuencial presenta ciertas

propiedades importantes a la hora de diseñar reguladores digitales que tengan en cuenta las distintas dinámicas de los elementos del sistema.

Existen diferentes modelos de muestreo multifrecuencia. Podemos mencionar el modelo de Araki y Yakamoto [15] para sistemas MIMO que se basa en el método de sustituciones progresivas, el de Thompson [87], basado en el uso de los operadores de Kranc, El Modelo de Salt [77] el cual se caracteriza por manejar un muestreo irregular, y el modelo BMIO desarrollado por P. Albertos [1], entre otros. Cabe mencionar que los modelos basados en los operadores de Kranc y los modelos basados en la técnica del lifting son equivalentes, ya que los conceptos de vectorización y reducción es muy similar al utilizado en la generación de los vectores estirados producidos por el lifting.

Se sabe además que al diseñar controladores basados en los modelos multifrecuencia, en específico cuando se trabaja con sistemas MRIC (Multirate Input Control), en los que todas las salidas del sistema se muestrean a un mismo periodo  $T_0$  y cada señal de entrada se muestrea a una frecuencia mayor, es común que la respuesta venga acompañada de un rizado intermuestreo. Esto debido a la naturaleza misma de los controladores donde un grupo de acciones de control se calculan al mismo tiempo. Se han desarrollado diferentes soluciones para tratar de eliminar dicho rizado como el trabajo presentado por Moore [65], Tangirala [84], o por Jetto [43] y [44].

En el presente trabajo se analizarán opciones para eliminar el rizado intermuestreo en controladores basados en el modelo BMIO el cual se caracteriza por presentar un modelo tanto para representación externa como interna y una forma de relacionar estas representaciones.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo general**

El objetivo de este trabajo es presentar técnicas para la eliminación del rizado intermuestreo y aplicarlas en el diseño de controladores multifrecuenciales tanto en sistemas SISO como MIMO.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- Analizar el rizado intermuestreo presente en los sistemas de control multifrecuencial en específico para los sistemas MRIC (Multirate Input Control) para determinar las causas que generan dicho rizado



- Presentar diferentes técnicas para la eliminación del rizado intermuestreo, haciendo una comparativa de las mismas.
- Desarrollar una herramienta CACSD (Computer Aided Control System Design) para el diseño y comprobación de controladores multifrecuenciales que apliquen las técnicas de eliminación del rizado intermuestreo.

### **1.3 Estructura de la Tesis**

En el capítulo 2 se estudia el modelado de sistemas multifrecuenciales; en específico el modelo de bloques de entradas y salida BMIO desarrollado por P. Albertos [1] presentando ejemplos de modelado de sistemas así como los aspectos más relevantes del dicho modelo.

En el capítulo 3 se estudian los controladores basados en el modelo BMIO y se analiza el rizado intermuestreo que suele acompañar su consideración, determinándose las causas que lo generan sentando las bases para el desarrollo de técnicas para la eliminación del mismo.

Posteriormente, en el capítulo 4 se analiza la aplicación de compensadores que modifican las acciones de control que generan los controladores analizados en el capítulo anterior, con el objeto de eliminar el rizado intermuestreo. Esto deriva en una nueva forma de calcular las matrices de los controladores que permitirán realizar un mejor análisis del controlador obtenido. Luego se presenta una técnica de eliminación del rizado desarrollado por P. Albertos en la que se maneja el diseño de los controladores en dos fases, una a baja frecuencia y otra a alta frecuencia, con lo que se obtienen nuevas matrices del controlador que generan acciones de control iguales a lo largo del metaperiodo. Adicionalmente se presenta la aplicación del Control Óptimo para el cálculo de las matrices del controlador manteniendo la eliminación del rizado intermuestreo. Finalmente, se define una técnica que permite aplicar las matrices de los controladores originales junto con las matrices de un controlador multifrecuencia que elimina el rizado en estado permanente, esto con el fin de obtener la misma respuesta transitoria del original y la respuesta en estado estacionario del modificado.

Los resultados obtenidos se presentan en el capítulo 5, así como la herramienta computacional desarrollada en MATLAB/SIMULINK, para la ayuda en el diseño y comprobación de controladores desarrollados con las técnicas presentadas en el capítulo anterior.

Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo así como las líneas de investigación que se pueden derivar.

---

## **CAPÍTULO 2 TÉCNICAS DE MODELADO**

---

### **2.1 Introducción**

En los últimos años se han desarrollado diferentes reguladores para mejorar el desempeño en diversas situaciones en las que es necesario o ventajoso muestrear variables a diferentes frecuencias. Por ejemplo, se utilizan controladores MRIC (Multi-rate Input Controller) cuando es necesario que las acciones de control sean realizadas a mayor frecuencia que la medida de la salida, debido a la lentitud de los sensores o analizadores, como puede ser el caso de procesos químicos. Por contrapartida los controladores MROC (Multi-rate Output Controller) menos frecuentes que los MRIC, presentan la ventaja de poder diseñar una ley de control con retroalimentación de la salida equivalente a la retroalimentación del estado sin la necesidad de desarrollar un observador de estados.

Se define un sistema multifrecuencia (SM) como un sistema digital en el cual dos o más variables se actualizan a frecuencias distintas, lo anterior aplicado al control, define un control multifrecuencia (CM) en el cual, dos o más variables del lazo de control se actualizan o se miden a diferentes frecuencias.

En este capítulo se da una introducción al control multifrecuencia, iniciando por una breve reseña de sus aplicaciones, seguido de un breve repaso a algunos de los modelos

multifrecuencia que se han desarrollado, para luego centrarse en el Modelo de Bloques de entrada y salidas BMIO, el cual es la base del estudio realizado en este trabajo.

## **2.2 Aplicaciones del Control Multifrecuencia**

El control digital multifrecuencia es un área significativa de investigación y aplicación de notable interés, pues su planteamiento se puede presentar en una serie de situaciones que se dan en un amplio espectro de entornos. Existen diversas aplicaciones para las que el control multifrecuencia resulta ventajoso y en algunos casos necesarios. A continuación se presentan algunas de ellas.

- Aplicaciones prácticas en las que por reducción de costes o por limitaciones tecnológicas, obligan al uso de esquemas de control donde el muestreo de las medidas de los sensores y de los cálculos de control deben realizarse a diferentes frecuencias. Así ocurre en las aplicaciones aeroespaciales ( Glasson [34], De la Sen [28]), de robótica (Lee y Xu [54], Nemani [67], Sun [82], Valera [93]), control de procesos químicos (Tham [86], Lee [53], Zhu y Ling[103]) y de una variada gama de procesos, desde la molienda de cemento (Salt [77]) al control de movimiento de vehículos subacuáticos (Astrov [10],[11]) pasando por el controlador del disco duro de un ordenador (Li [55], Jiagen [45] Shang Chen [79], Fujimoto [33]).
- Situaciones en las que se puede plantear un fallo de sensores y en las que por otra parte no se pretende una duplicación de los mismos por razones económicas (Whitbeck [100]). Es una situación que puede ser tangencial a la caracterización por datos perdidos “missing and scarced data” (Albertos [3]).
- Sistemas de control distribuido y multiprocesadores (Ritchey [74]), con circuitos de control de bus acoplado en los que debido a la distribución espacial de la planta controlada, los datos deben ser enviados por medio de un bus serie (Hovestadt [41]). También se han estudiado sistemas de control por red (networked control systems NCS) donde los retardos debidos a la red puedan ser tratados como un control MF (Sala [76], Tao [85], Walsh [99], Zahng [102]). Contribuyendo a tener en cuenta el caso de que el control se implemente en tiempo real, adecuándose los muestreos a los tiempos de respuesta de las diferentes tareas requeridas en un entorno de estas características (Albertos [3]).

- Sistemas multivariables en los que suele ser ventajoso disponer de diferentes frecuencias de muestreo en lazos distintos, para mejorar las prestaciones del sistema y reducir la carga de cálculo del computador (Patel [71], Aström [9]).

- Sistemas de control digital en los que se introduce intencionadamente una estructura de control MF, con el objetivo de mejorar el cumplimiento de las especificaciones o de las prestaciones, tales como sobreimpulso, oscilaciones ocultas, márgenes, etc. (Aracil [12], Kabamba [47], Francis y Georgiou [31], Hagiwara [40], Feliu, [30], Voulgaris [97], Graselli [38], Colaneri y Kucera [25], etc. ).

### 2.3 Aspectos Históricos de Modelado Multifrecuencia

El Control Digital Multifrecuencia tiene sus inicios en los años 50 como un método de profundizar en el estudio de los sistemas muestreados monofrecuencia originados por las aplicaciones del radar durante la segunda Guerra Mundial. La contribución inicial más relevante en este campo fue la realizada por Sklansky y Ragazzini [81] en la que definen la Descomposición Frecuencial, donde se introducen una serie de muestreadores ficticios que, operando a frecuencias múltiplos de la frecuencia original, permiten el estudio del comportamiento intermuestreo. Una aplicación de dicha técnica al estudio de estructuras de control en sistemas periódicos es presentada por Friedland [32], posteriormente surgen las contribuciones de Coffey y Williams [22] y Boykin y Frazier [18] que analizan sistemas de control multivariables y multifrecuencia.

Casi paralelamente a la descomposición en frecuencia, se desarrolla una técnica similar conocida como Descomposición Vectorial de Conexiones (Vector Switch Decomposition). Introducida por Kranc [51], el método consiste en representar al muestreador multifrecuencia como la superposición de varios muestreadores convencionales, trabajando todos ellos con el mayor de los períodos de muestreo considerados en el sistema, lo que permite analizar al sistema MF mediante el uso de las técnicas usuales de los sistemas monofrecuencia, siempre que la relación entre frecuencias sea un número entero. Jury [46] introduce la transformación en Z modificada como herramienta para el estudio del problema planteado. Posteriormente Whitbeck y Didaleusky [100] desarrollan una forma vectorial de la técnica de descomposición de conexiones (the pseudo measurements vector) y la aplican a varios problemas de control de vuelo.

Siguiendo con el modelado en representación externa surgen las contribuciones de Aracil, Jiménez y Feliu [12]; Feliu, Cerrada y Cerrada [30]), donde se plantea la consideración en el

modelo del comportamiento intermuestreo y lo aplican al diseño de reguladores bifrecuencia que eviten las oscilaciones intermuestreo indeseables.

En el dominio del tiempo el trabajo de Kalman y Bertram [48], demuestra la flexibilidad de las variables de estado para describir la evolución de los sistemas muestreados de manera no convencional y en particular de los sistemas multifrecuencia. Barry [17] rescata el uso de las variables de estado para diseñar un regulador MF y demuestra que presenta mejores prestaciones a un regulador monofrecuencia que trabaje a la misma frecuencia base. En los trabajos posteriores de Amit y Powell [6] y de Broussard y Glasson [19], Glasson [34] se desarrollan técnicas de diseño de control MF basadas en la formulación del control óptimo.

En 1986 Araki y Yamamoto [15] desarrollan un modelo basado en la propuesta de Kalman-Beltran en la que proporcionan por primera vez una relación entre los dominio frecuencial y temporal. En dicho modelo las diferentes frecuencias se asocian con pares de variables entrada-salida y mediante la modulación de impulso (MIM) establecen la conexión con la respuesta frecuencial. En un intento de generalizar este modelado, Godbout, Jordan y Apostolakis [35] plantean que los vectores sean expandidos al periodo base que es máximo común divisor de los periodos de cada par de variables, fijando como única restricción, que todos estos periodos fueran commensurables, es decir existiese un mínimo común múltiplo (m.c.m.) al que dividieran de forma entera todos los periodos de muestreo puestos en juego. Esto da por resultado que las dimensiones de las matrices sean elevadas, por lo que surgen posteriores trabajos (Apostolakis y Jordan [8], Apostolakis [7]) que se orientaron a eliminar los estados y salidas inobservables llevando a matrices de dimensiones mínimas.

En 1986 Thompson [87] desarrolla un modelo basado en la técnica de descomposición vectorial de Kranc. En base a tal técnica y la consideración de los periodos base (m.c.d.) y del modelo (m.c.m.), se genera el operador de Kranc como una realización mínima que está implementada en el programa CC.

Otra técnica de modelado es la del lifting discreto, desarrollada por Khargonekar et al. [49], en este trabajo se demuestra la correspondencia biunívoca entre un sistema lineal periódico y el sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) equivalente denominado sistema "estirado", de forma que se preservan las propiedades analíticas, algebraicas de ambos sistemas. Meyer [61] generaliza la técnica del lifting discreto al caso multivariable (MIMO).

Con un planteamiento radicalmente diferente, el modelado de Tornero (Tornero [89], Tornero y Albertos [90], [91]) supone un generador de modelos multifrecuenciales y como tal constituye una poderosa herramienta de simulación. Para ello se caracteriza al sistema MF por un conjunto de elementos físicos y una serie de eventos (muestreos y retenciones),

de modo que una secuencia de eventos dada origina una secuencia de transformaciones sobre el vector de estado que pueden ser descritas por una matriz de transición única.

Dentro del mismo grupo de investigación cabe significar el trabajo de Albertos [1], [2] que propone el modelado por bloques BMIO (Block Multirate Input Output), en el que tras enlazar las representaciones externa e interna de un sistema muestreado establece el diseño por analogía con la realimentación del estado, así como la presentación de un deadbeat aplicable a esta situación. Por otra parte, el modelado de Salt [77], similar al expuesto por Moore et al. [65] a partir de una idea original de Mita y Chida, se caracteriza por preservar el sentido físico de los parámetros del modelo, generado mediante la aplicación de la técnica de sustituciones sucesivas considerando únicamente los instantes de cambio de la señal de control en un metaperíodo.

## **2.4 Métodos de Modelado de Sistemas Multifrecuencia**

A continuación se da un breve repaso por algunos modelos de sistemas multifrecuencia tanto de representación externa como interna.

### **2.4.1 Descomposición vectorial de conexiones**

El modelado de Kranc se basa en la idea de modelar un muestreador, a través de una combinación de muestreadores más lentos puestos en paralelo. En general, se convierte un muestreador de periodo  $T_0/N$  ( $N$  es un número natural) en  $N$  muestreadores de periodo  $T_0$

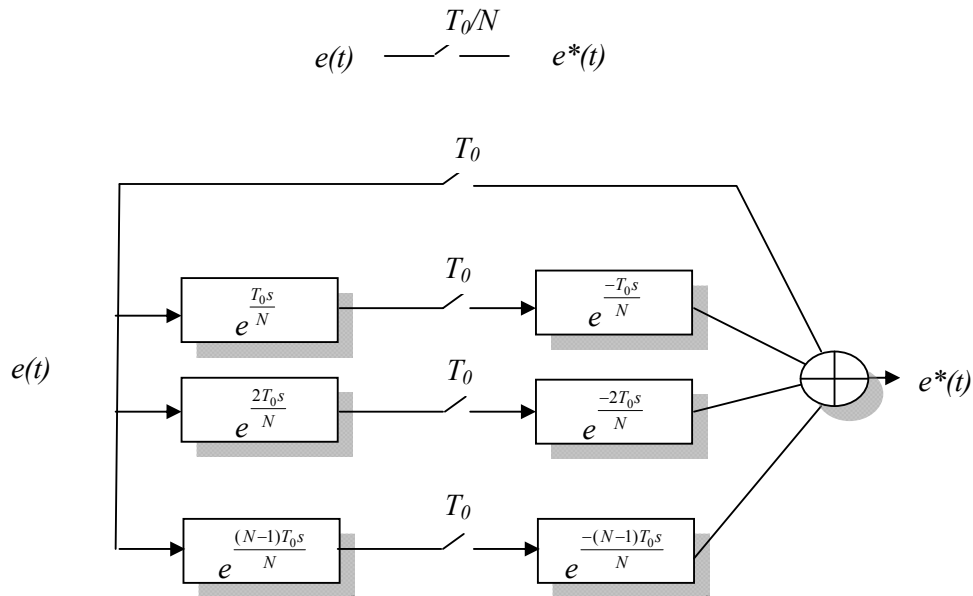


Fig. 2-1.- Descomposición vectorial de conexiones

De esta forma un sistema multifrecuencia puede ser convertido en un modelo monofrecuencia a periodo  $T_0$  aplicando este concepto a cada uno de los muestreadores utilizados en el sistema cuyos periodos de muestreos son  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , con la restricción que  $T_0$  debe ser el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los periodos de dichos muestreadores. Este tipo de modelo es de gran complejidad, ya que convierte un sistema SISO en un sistema MIMO, por lo que su uso es restringido, aunque la idea de que un sistema multifrecuencia sea modelado por un sistema monofrecuencia invariable en el tiempo a periodo global, es utilizada en los modelos posteriores.

## 2.4.2 Modelado de Thompson

En Thompson [87] se presenta un modelo donde la estructura de la descomposición de interruptores descrita anteriormente se aplica a sistemas en representación interna. Se considera el siguiente sistema multifrecuencia donde la entrada se muestrea a periodo  $T_1$  y la salida a periodo  $T_2$



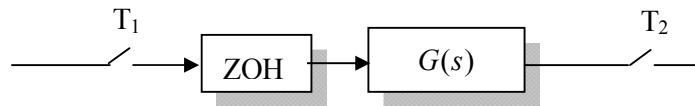


Fig. 2-2.- Muestreo aplicado para el modelo de Thompson

Para realizar la expansión de los muestreadores tanto de salida como de entrada mediante la descomposición vectorial de conexiones de Kranc, que se compacta mediante la introducción de los vectores de retardo  $E^-$  y adelanto  $E^+$

$$E^- = [1, e^{-T_1s}, e^{-2T_1s}, \dots,] \quad E^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{T_1s} \\ e^{2T_1s} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

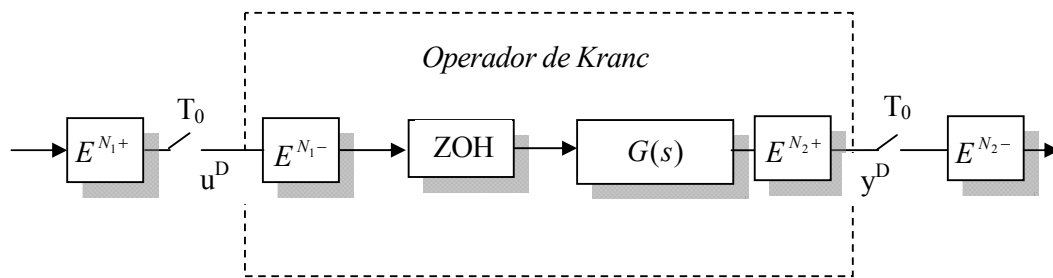


Fig. 2-3.- Operador de Kranc

Sea el sistema continuo  $G(s)$  en su representación interna

$$G(s) = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$$

El cual es discretizado a periodo  $T$  para obtener  $G(z)$  siendo  $T$  el máximo común divisor (m.c.d.) de los periodos de muestreo  $T_1$  y  $T_2$

$$G(z) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad A = e^{AT}, B = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau$$

Se define  $T_0$  es el mínimo común múltiplo de los periodos de muestreo  $T_1$  y  $T_2$ , siendo  $N_1$  y  $N_2$  dos enteros tales que:

$$N_1 = \frac{T_0}{T_1}, \quad N_2 = \frac{T_0}{T_2}$$

Y  $N$  el m.c.m. de  $N_1$  y  $N_2$ .

El modelo multifrecuencia tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} x((k+1)T_0) &= \tilde{A}x(kT_0) + \tilde{B}u^D(kT_0) \\ y^D(kT_0) &= \tilde{C}x(kT_0) + \tilde{D}u^D(kT_0) \end{aligned} \quad k = 0,1,2,3,\dots$$

Donde

$$\begin{aligned} u^D(kT_0) &= u(t)E^{N_1+} = [u(kT_0), u(kT_0 + T_1), \dots, u(kT_0 + (N_1 - 1)T_1)]^T \\ y^D(kT_0) &= y(t)E^{N_2+} = [y(kT_0), y(kT_0 + T_2), \dots, y(kT_0 + (N_1 - 1)T_2)]^T \end{aligned}$$

Donde la cuádruple  $[\tilde{A} \quad \tilde{B} \quad \tilde{C} \quad \tilde{D}]$  se define a periodo  $T_0$  como sigue:

$$G^{T_0}(z) = \left[ \begin{array}{c|ccc} A^N & A^{\frac{N(N_1-1)}{N_1}} XB & A^{\frac{N(N_1-2)}{N_1}} XB \dots & XB \\ \hline C_1 & D_{11} & \dots & D_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_2} & D_{i1} & \dots & D_{ij} \end{array} \right]$$

$$X = \sum_k^{\frac{N}{N_1}-1} A^k \quad C_i = CA^{\frac{N(i-1)}{N_2}} \quad D_{ij} = C \left[ \sum_l^{\frac{N}{N_1}-1} \Psi_{ij}(l) \right] B + \Omega_{ij}$$

$$\Psi_{ij}(l) = \begin{cases} A^m, & \text{si } m = l + \frac{(i-1)}{N_2} - \frac{(j-1)}{N_1} - \frac{N}{N_2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} D, & \text{si } 0 \leq \frac{N(i-1)}{N_2} - \frac{N(j-1)}{N_1} < \frac{N}{N_2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto significa que las  $N_1$  entradas del sistema espaciadas cada  $T_1$  segundos son convertidas en un vector de longitud  $N_1$  aplicado a la entrada en el instante  $kT_0$  lo cual se denominado proceso de Vectorización, por otra parte las  $N_2$  salidas calculadas en  $kT_0$  son convertidas una secuencia de salidas espaciadas cada  $T_2$  segundos, este proceso es llamado Reducción

### 2.4.3 Modelo de Araki y Yamamoto

Araki y Yamamoto [15] definen un modelo multifrecuencia en representación interna para sistemas MIMO. Para el desarrollo del método se asume que el sistema es estrictamente propio ( $D=0$ ), un número igual de entradas y salidas y un muestreo regular de las variables mediante retenedores de orden cero.

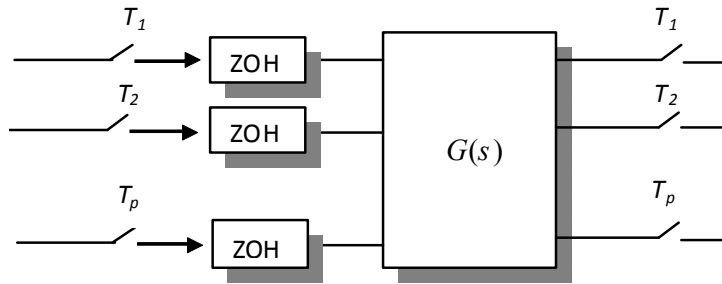


Fig. 2-4.- Modelo de Araki y Yamamoto de un Sistema MIMO MF

Se parte de un sistema MIMO definido por

$$\begin{aligned} x' &= A_c x + B_c u \\ y &= C_c x + D_c u \end{aligned}$$

Siendo un sistema controlable y observable,  $n$  es el orden del sistema y  $p$  el número de entradas y salidas. Se define  $T_0$  como el m.c.m. ( $T_1, T_2, \dots, T_p$ ) y  $T$  como el m.c.d ( $T_1, T_2, \dots, T_p$ ). Además se tiene que:

$$N = \frac{T_0}{T}, \quad T_i = \frac{T_0}{N_i}, \quad \tilde{N} = N_1 + N_2 + \dots + N_p$$

El modelo multifrecuencia queda como sigue.

$$x^D((k+1)T_0) = \tilde{A}x^D(kT_0) + \tilde{B}u^D(kT_0)$$

$$y^D(kT_0) = \tilde{C}x^D(kT_0) + \tilde{D}u^D(kT_0)$$

Donde

$$\tilde{A} = A^D \quad \tilde{B} = B^D \quad \tilde{C} = C^D[L_1A^D + L_2] \quad \tilde{D} = C^DL_1B^D$$

El vector de estado discreto expandido  $x^D$  tiene por componentes los estados de cada uno de los  $N$  intervalos en que el periodo base  $T$ , divide el periodo global  $T_0$ , por lo que su dimensión es  $N \times n$ , Por su parte el vector de salida discreta expandido  $y^D$  contiene las  $N_i$  muestras de la  $i$ -ésima salida  $i=1,2,\dots,p$  que se toman a periodo  $T_i$ , por lo que su dimensión es igual a  $\tilde{N}$ , de forma similar se expande la señal de control  $u^D$  obteniéndose las  $\tilde{N}$  muestras de la acción de control que existen en un periodo global  $T_0$  agrupadas en este vector de dimensión  $\tilde{N}$ .

$$x^D(k) = \begin{bmatrix} x_1^D(k) \\ \vdots \\ x_N^D(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[(k-1)T_0 + T] \\ x[(k-1)T_0 + 2T] \\ \vdots \\ x[(k-1)T_0 + (N-1)T] \\ x[kT_0] \end{bmatrix}$$

$$y^D(k) = \begin{bmatrix} y_1^D(k) \\ y_2^D(k) \\ \vdots \\ y_p^D(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(kT_0) \\ y_1(kT_0 + T_1) \\ \vdots \\ y_1(kT_0 + (N_1 - 1)T_1) \\ \vdots \\ y_p(kT_0) \\ y_p(kT_0 + T_p) \\ \vdots \\ y_p(kT_0 + (N_p - 1)T_p) \end{bmatrix}$$

$$u^D(k) = \begin{bmatrix} u_1^D(k) \\ u_2^D(k) \\ \vdots \\ u_p^D(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(kT_0) \\ u_1(kT_0 + T_1) \\ \vdots \\ u_1(kT_0 + (N_1 - 1)T_1) \\ \vdots \\ u_p(kT_0) \\ u_p(kT_0 + T_p) \\ \vdots \\ u_p(kT_0 + (N_p - 1)T_p) \end{bmatrix}$$

Las matrices del modelo se definen de la siguiente manera.

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_1^D \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_N^D \end{bmatrix} \quad A_l^D = e^{A_l l T}; \quad l = 1, \dots, N$$

Para las entradas se define:

$$B_c = [B_{c1} \quad B_{c2} \quad \cdots \quad B_{cp}]$$

$$B^D = [B_1^D \quad B_2^D \quad \cdots \quad B_p^D]$$

$$B_k^D = [b_{l, \mu+1}^k]$$

$$l = 1, \dots, N$$

$$\mu = 0, \dots, (N_k - 1)$$

$$l_1 = N / N_k$$

$$b_{l, \mu+1}^k = \begin{cases} 0 & l \leq \mu l_1 \\ \int_{\mu l_1 T}^{l T} e^{A_c(lT - \tau)} B_{ck} d\tau & \mu l_1 < l \leq (\mu + 1)l_1 \\ \int_{\mu l_1 T}^{(\mu+1)l_1 T} e^{A_c(lT - \tau)} B_{ck} d\tau & (\mu + 1)l_1 < l \end{cases}$$

Para las salidas se tiene que

$$C_c = [C_{c1} \quad C_{c2} \quad \dots \quad C_{cp}]^T$$

$$C^D = [C_1^D \quad C_2^D \quad \dots \quad C_p^D]^T$$

$$C_k^D = [C_{ij}^k]$$

$$C_{ij}^k = \begin{cases} C, & \text{si } j = 1 + (i-1)l_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad l_2 = N / N_k$$

Por último

$$L_1 = \text{diagonal bloque } (1,1,\dots,1,0) \text{ de dimensión } N \times N$$

$$L_2 = \text{diagonal bloque } (0,0,\dots,0,1) \text{ de dimensión } N \times N$$

Como se puede ver la realización discreta no es mínima, aunque las matrices  $[A^D, B^D, C^D, D^D]$  son regulares y con elementos simples. Por otra parte esta cuádruple genera una función de transferencia  $Q(z)$  que no permite obtener la respuesta real del sistema, debido a que los vectores expandidos no se corresponden con la serie temporal de entradas y salidas. Para obtener una función de transferencia que esté relacionada con la respuesta del sistema original, se deben combinar las componentes de la entrada y la salida expandidas para restaurar la señal original. A este método se le denomina modulación de impulso multifrecuencia (Multirate impulse modulation, MIM) y se basa en el uso de vectores de retardo o de atraso para realizar la restauración de las señales a partir de los vectores expandidos. Cabe mencionar la similitud con los operadores de Kranc del modelado de Thompson.

## 2.5 Modelo BMIO

El modelo para Sistemas de Control de Datos Muestreados (SDCS por sus siglas en inglés) multifrecuencia llamado Block Multirate Input-Output (BMIO) se formula directamente desde la función de transferencia o de una representación interna. Este doble punto de vista mejora el entendimiento de los SDCS multifrecuencia, y nos presenta relaciones útiles entre los coeficientes de la función de transferencia y la representación interna del sistema.

### 2.5.1 Representación Interna del modelo BMIO

Se considera un modelo convencional de representación interna continua:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t); \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

donde  $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p$

Se tiene que si  $B_c$  y  $C$  son matrices de rango completo, el sistema es controlable y observable. Se define  $\mu$  como el índice de controlabilidad ( $\mu_i$  el índice de controlabilidad para la  $i$ -ésima entrada) y  $\nu$  es el índice de observabilidad ( $\nu_i$  el índice de controlabilidad para la  $i$ -ésima salida).

Un sistema de control Discreto en el tiempo (DT) tiene un comportamiento en lazo abierto durante el periodo  $T$ , si durante este periodo podemos obtener más información, la señal de control  $u_k = u(kT)$  puede ser calculada más eficientemente. Si la acción de control puede ser actualizada a una frecuencia mayor  $u_k^i = u(kT + t^i)$  se obtiene una mejor respuesta del proceso continuo.

Para trabajar de una manera simplificada, se asume que aunque la frecuencia de muestreo no es la misma para todas las variables, el sistema completo es periódico a periodo  $T_0$ . En este esquema de muestreo donde en el periodo  $T_0$  existen  $s$  medidas de la salida en los instantes de tiempo  $y(kT_0 + t_i), i = 1, 2, \dots, s$ , y  $r$  actualizaciones de la entrada, en los instantes de tiempo  $u(kT_0 + t^j), j = 1, 2, \dots, r$  (La primera en  $kT_0$  es decir  $t^1 = 0$ ). Se asume que todos los periodos de muestreo son múltiplos del periodo básico  $T$  que es el m.c.d. de los periodos de muestreo de todas las señales, es decir,  $s_i = t_i / T, r^j = t^j / T$  y  $N = T_0 / T$  son enteros.

Se define el siguiente sistema discreto

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= Ax(kT) + Bu(kT); \\ \text{donde } A &= e^{A_c T} \\ y \quad B_q &= \int_0^{qT} e^{A_c \tau} d\tau \cdot B_c; B = B_1 \end{aligned} \quad (2-2)$$

Que es la discretización del sistema continuo (CT) definido en (2-1) realizada con un retenedor de orden cero a periodo básico  $T$ .

Para cada periodo  $T_0$  se definen los siguientes bloques de vectores:

$$Y_k = \begin{bmatrix} y(kT_0 + t_1) \\ y(kT_0 + t_2) \\ \vdots \\ y(kT_0 + t_s) \end{bmatrix} \quad U_k = \begin{bmatrix} u(kT_0 + t^1) \\ u(kT_0 + t^2) \\ \vdots \\ u(kT_0 + t^r) \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

La representación espacio-estado con periodo  $T_0$  es

$$x_{k+1} = x[(k+1)T_0] = A^N x_k + WU_k \quad (2-4)$$

$$Y_k = O x_k + H U_k \quad (2-5)$$

Donde

$$W = [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} \dots A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} B_{N-r_r}] \in R^{n \times mr} \quad (2-6)$$

Que se define como la matriz de controlabilidad del bloque y.

$$O = \begin{bmatrix} CA^{s_1} \\ CA^{s_2} \\ \vdots \\ CA^{s_s} \end{bmatrix} \in R^{ps \times n} \quad (2-7)$$

Que se conoce como la matriz de observabilidad del bloque y

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s1} & \dots & h_{sr} \end{bmatrix} \in R^{ps \times mr}, h_{ij} = CA^I B_J; \begin{bmatrix} r_j < s_i, I = s_i - r_{j+1}, J = r_{j+1} - r_j \\ r_j < s_i < r_{j+1}, I = 0, J = s_i - r_j \\ s_i < r_j, I = 0, J = 0 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

Que se conoce como la matriz de respuesta impulsional. Las cuales definen el modelo BMIO.

Si se trabaja con sistemas MIMO en los cuales el tiempo de actualización de las acciones de control es diferente para cada entrada, es conveniente expresar la matriz de entrada  $B_c$  como vectores columna, donde cada vector está asociado a cada entrada del sistema; en el caso que



el muestreo de las salidas se realice en tiempos diferentes, la matriz  $C$  puede ser representada por vectores fila que se corresponden a cada salida del sistema MIMO.

A continuación se ejemplifica lo anteriormente expresado con un sistema MIMO en cual se tienen  $r$  entradas y  $s$  salidas. Las muestras de las salidas y las actualizaciones de las acciones de control se realizan de acuerdo al siguiente esquema:

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_1(kT_o + t_{1,1}) \\ y_2(kT_o + t_{2,1}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,1}) \\ y_1(kT_o + t_{1,2}) \\ y_2(kT_o + t_{2,2}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,2}) \\ \vdots \\ y_1(kT_o + t_{1,f_1}) \\ y_2(kT_o + t_{2,f_2}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,f_s}) \end{bmatrix} \quad U_k = \begin{bmatrix} u_1(kT_o + t_1^1) \\ u_2(kT_o + t_2^1) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^1) \\ u_1(kT_o + t_1^2) \\ u_2(kT_o + t_2^2) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^2) \\ \vdots \\ u_1(kT_o + t_1^{g_1}) \\ u_2(kT_o + t_2^{g_2}) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^{g_r}) \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Se observa que existen  $f_1, f_2, \dots, f_s$  medidas para cada una de las  $s$  salidas y  $g_1, g_2, \dots, g_r$  actualizaciones para cada una de las  $r$  entradas. Observando el vector de salida se asume que están ordenados de forma que los tiempos se van incrementando, es decir,  $t_{1,1} \leq t_{1,2} \leq \dots \leq t_{1,f_1} \leq t_{2,1} \leq t_{2,2} \leq \dots \leq t_{2,f_2} \leq t_{s,1} \leq t_{s,2} \leq \dots \leq t_{s,f_s}$ , en el caso de que existan tiempos iguales, estos se ordenan según la salida a la que pertenecen.

Para el vector de acciones de control se presenta una situación similar, los instantes de actualización de las acciones de control están ordenados de menor a mayor, es decir,  $t_1^1 \leq t_1^2 \leq \dots \leq t_1^{g_1} \leq t_2^1 \leq t_2^2 \leq \dots \leq t_2^{g_2} \leq t_r^1 \leq t_r^2 \leq \dots \leq t_r^{g_r}$  y nuevamente si existen tiempos iguales, estos se ordenan de acuerdo a la entrada a la que corresponden.

Para obtener el modelo BMIO se obtiene  $T$  como el máximo común divisor de todos los instantes de muestreo y de todas las actualizaciones de las acciones de control

$$t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,f_1}, t_{2,1}, t_{2,2}, \dots, t_{2,f_2}, t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,f_s}, t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^{g_1}, t_2^1, t_2^2, \dots, t_2^{g_2}, t_r^1, t_r^2, \dots, t_r^{g_r} \quad \text{y} \\ N = T_0 / T$$

Para obtener el sistema discreto se define

$B_C(:, j)$  como la  $j$ -ésima columna de  $B_C$

$C(i, :)$  como la  $i$ -ésima fila de  $C$

$$\begin{aligned} y \quad A &= e^{AcT} \\ y \quad B(:, j)_q &= \int_0^{qT} e^{Ac\tau} d\tau \cdot B(:, j)_C; B(:, j) = B(:, j)_1 \end{aligned} \quad (2-10)$$

El modelo BMIO para este sistema queda definido por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x[(k+1)T_0] = A^N x_k + WU_k \\ Y_k &= O x_k + HU_k \end{aligned}$$

En base a los tiempos de actualización de las acciones de control para cada entrada, la matriz de controlabilidad del modelo BMIO definida en (2-6) queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W &= \left[ A^{N-r_1^2} B(:, 1)_{r_1^2-r_1^1}, A^{N-r_2^2} B(:, 2)_{r_2^2-r_2^1}, \dots, A^{N-r_r^2} B(:, r)_{r_r^2-r_r^1}, \dots, A^{N-r_1^{g_1}} B(:, 1)_{r_1^{g_1}-r_1^{g_1-1}}, \dots \right. \\ &\quad \left. , A^{N-r_r^{g_r}} B(:, r)_{r_r^{g_r}-r_r^{g_r-1}}, B(:, 1)_{N-r_r^{g_1}}, \dots, B(:, r)_{N-r_r^{g_r}} \right] \in R^{n^*(g_1+g_2+\dots+g_r)} \end{aligned} \quad (2-11)$$

Donde

$$\begin{aligned} r_j^l &= t_j^l / T \\ j &= 1, 2, \dots, r \\ l &= 1, 2, \dots, g_j \end{aligned}$$

De igual forma, la matriz de observabilidad definida en (2-7) queda expresada en la siguiente ecuación, tomando en cuenta que los muestreos de cada salida se realizan a distintos tiempos

$$O = \begin{bmatrix} C(1,:)A^{S_{1,1}} \\ C(2,:)A^{S_{2,1}} \\ \vdots \\ C(s,:)A^{S_{s,1}} \\ C(1,:)A^{S_{1,2}} \\ C(2,:)A^{S_{2,2}} \\ \vdots \\ C(s,:)A^{S_{s,2}} \\ \vdots \\ C(1,:)A^{S_{1,f_i}} \\ C(2,:)A^{S_{2,f_i}} \\ \vdots \\ C(s,:)A^{S_{s,f_s}} \end{bmatrix} \in R^{(f_1+f_2+\dots+f_s)*n} \quad \begin{array}{l} s_{i,k} = t_{i,k} / T \\ i = 1,2,\dots,s \\ k = 1,2,\dots,f_i \end{array} \quad (2-12)$$

Por último la matriz impulsional definida en (2-8) queda expresada de la siguiente forma

$$H = \begin{bmatrix} h_{1,1}^{1,1} & h_{1,2}^{1,1} & \cdots & h_{1,r}^{1,1} & h_{1,1}^{1,2} & h_{1,2}^{1,2} & \cdots & h_{1,r}^{1,2} & \cdots & h_{1,1}^{1,g_1} & h_{1,2}^{1,g_2} & \cdots & h_{1,r}^{1,g_r} \\ h_{2,1}^{1,1} & h_{2,2}^{1,1} & \cdots & h_{2,r}^{1,1} & h_{2,1}^{1,2} & h_{2,2}^{1,2} & \cdots & h_{2,r}^{1,2} & \cdots & h_{2,1}^{1,g_1} & h_{2,2}^{1,g_2} & \cdots & h_{2,r}^{1,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{1,1} & h_{s,2}^{1,1} & \cdots & h_{s,r}^{1,1} & h_{s,1}^{1,2} & h_{s,2}^{1,2} & \cdots & h_{s,r}^{1,2} & \cdots & h_{s,1}^{1,g_1} & h_{s,2}^{1,g_2} & \cdots & h_{s,r}^{1,g_r} \\ h_{1,1}^{2,1} & h_{1,2}^{2,1} & \cdots & h_{1,r}^{2,1} & h_{1,1}^{2,2} & h_{1,2}^{2,2} & \cdots & h_{1,r}^{2,2} & \cdots & h_{1,1}^{2,g_1} & h_{1,2}^{2,g_2} & \cdots & h_{1,r}^{2,g_r} \\ h_{2,1}^{2,1} & h_{2,2}^{2,1} & \cdots & h_{2,r}^{2,1} & h_{2,1}^{2,2} & h_{2,2}^{2,2} & \cdots & h_{2,r}^{2,2} & \cdots & h_{2,1}^{2,g_1} & h_{2,2}^{2,g_2} & \cdots & h_{2,r}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{2,1} & h_{s,2}^{2,1} & \cdots & h_{s,r}^{2,1} & h_{s,1}^{2,2} & h_{s,2}^{2,2} & \cdots & h_{s,r}^{2,2} & \cdots & h_{s,1}^{2,g_1} & h_{s,2}^{2,g_2} & \cdots & h_{s,r}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1,1}^{f_1,1} & h_{1,2}^{f_1,1} & \cdots & h_{1,r}^{f_1,1} & h_{1,1}^{f_1,2} & h_{1,2}^{f_1,2} & \cdots & h_{1,r}^{f_1,2} & \cdots & h_{1,1}^{f_1,g_1} & h_{1,2}^{f_1,g_2} & \cdots & h_{1,r}^{f_1,g_r} \\ h_{2,1}^{f_2,1} & h_{2,2}^{f_2,1} & \cdots & h_{2,r}^{f_2,1} & h_{2,1}^{f_2,2} & h_{2,2}^{f_2,2} & \cdots & h_{2,r}^{f_2,2} & \cdots & h_{2,1}^{f_2,g_1} & h_{2,2}^{f_2,g_2} & \cdots & h_{2,r}^{f_2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{f_s,1} & h_{s,2}^{f_s,1} & \cdots & h_{s,r}^{f_s,1} & h_{s,1}^{f_s,2} & h_{s,2}^{f_s,2} & \cdots & h_{s,r}^{f_s,2} & \cdots & h_{s,1}^{f_s,g_1} & h_{s,2}^{f_s,g_2} & \cdots & h_{s,r}^{f_s,g_r} \end{bmatrix}$$

$$H \in R^{(f_1+f_2+\dots+f_s)*(g_1+g_2+\dots+g_r)},$$

$$h_{i,j}^{k,l} = C(i,:)A^l B(:,j)_J; \quad \begin{bmatrix} r_j^l < s_{i,k}, I = s_{i,k} - r_j^{l+1}, J = r_j^{l+1} - r_j^l \\ r_j^l < s_{i,k} < r_j^{l+1}, I = 0, J = s_{i,k} - r_j^l \\ s_{i,k} < r_j^l, I = 0, J = 0 \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

## 2.5.2 Representación Externa del modelo BMIO

Considérese el sistema continuo y lineal, causal e invariante en el tiempo definido en (2-1), la representación externa del modelo BMIO se genera a partir de la ecuación en diferencias que describe la función de transferencia estrictamente propia, a periodo base  $T$ :

$$A(p^{-1})y(kT) = B(p^{-1})u(kT)$$

Donde  $p^{-1}$  es el operador retardo y  $A$  y  $B$  son polinomios primos entre sí tales que:

$$B(p^{-1}) = \sum_{i=1}^n b_i p^{-i}, \quad A(p^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i p^{-i}$$

La salida queda expresada de la siguiente manera

$$y(lT) = \sum_{i=1}^n b_i u[(l-i)T] - a_i y[(l-i)T]$$

Si se expanden las salidas y entradas a periodo envolvente  $T_0$  como en (2-3) y utilizando la ecuación de  $y(lT)$  para  $l=KN+1, \dots, (K+1)N$ , se tienen que:

$$Y_k = A_1 Y_k + B_1 U_k + A_2 Y_{k-1} + B_2 U_{k-1}$$

Donde  $[A_1, B_1, A_2, B_2]$  son matrices Topelitz, es decir, constantes a lo largo de sus diagonales, y están definidas por

$$A_1 = \text{Triangular inferior con primera columna } [0, -a_1, \dots, -a_n, 0, \dots, 0]^T$$

$$B_1 = \text{Triangular inferior con primera columna } [b_1, b_2, \dots, b_n, 0, \dots, 0]^T$$

$$A_2 = \text{Triangular superior con primera fila } [0, 0, \dots, -a_n, \dots, -a_1]^T$$

$$B_2 = \text{Triangular superior con primera fila } [0, 0, \dots, b_n, \dots, b_2]^T$$

La representación externa del modelo de bloque multifrecuencia entrada-salida (BMIO) queda:

$$Y_k = P Y_{k-1} + Q U_{k-1} + Q_1 U_k \quad (2-14)$$

Donde la matriz  $Q_l$  es siempre invertible, y las matrices  $P, Q, Q_l$  se definen como

$$P = (I - A_1)^{-1} A_2 \quad Q = (I - A_1)^{-1} B_2 \quad Q_1 = (I - A_1)^{-1} B_1 \quad (2-15)$$

### 2.5.3 Propiedades del Modelo BMIO.

Las propiedades del modelado BMIO se presentan a continuación. Estas propiedades son útiles para definir los esquemas de muestreo más adecuados para configurar el modelado BMIO, además, son las bases para el diseño de controladores basados en este modelo

#### Controlabilidad del modelo BMIO

Sea el sistema continuo definido por (2-1), se dice que el par  $(A_c, B_c)$  es controlable, si para cualquier estado inicial  $x(0) = x_0 \in R^n$  y cualquier estado final  $x_1 \in R^n$ , existe una entrada que transfiere el estado  $x$  de  $x_0$  a  $x_1$  en un tiempo finito, en caso contrario se dice que es no controlable. La controlabilidad está relacionada con la capacidad de poder llevar un sistema de un estado inicial a un estado final en un tiempo finito, sin importar la trayectoria o la entrada que se utilice.

Una forma de comprobar si un sistema es controlable, es calculando la matriz de controlabilidad del par  $(A_c, B_c)$  y verificar que sea de rango igual al número de estados del sistema es decir:

$$C_o = \begin{bmatrix} B_c & A_c B_c & \cdots & A_c^{n-1} B_c \end{bmatrix} \text{ Tiene rango igual a } n$$

Los conceptos y pruebas de controlabilidad para sistemas en tiempo discreto son análogos a los de tiempo continuo. Existen sin embargo dos diferencias importantes:

- Si un sistema en tiempo continuo es controlable, existe una entrada que transfiere el estado del sistema entre dos estados cualesquiera en un intervalo de tiempo finito arbitrario, no importa cuán pequeño sea este intervalo de tiempo. En el caso de tiempo discreto, este intervalo de tiempo no es arbitrario; existe un tiempo mínimo  $\mu$ , tal que toda transferencia de estados, debe necesariamente hacerse en un tiempo mayor o igual a  $\mu$ .

- Para sistemas en tiempo continuo, si se puede llevar el estado al origen desde cualquier otro estado, siempre se puede hacer lo contrario, llevar el estado desde el origen a cualquier otro estado. En sistemas discretos esto no se cumple si la matriz A es singular.

Sea el sistema discreto definido por (2-2), se dice que el par  $(A, B)$  es controlable, si para cualquier estado inicial  $x[0] = x_0 \in R^n$  y cualquier estado final  $x_1 \in R^n$ , existe una secuencia de entrada de longitud finita que transfiere el estado  $x$  de  $x_0$  a  $x_1$ . En caso contrario, se dice que es no controlable.

Al igual que para los sistemas continuos para comprobar si un sistema es controlable, se calcula la matriz de controlabilidad del par  $(A, B)$  y se verifica que sea de rango igual al número de estados del sistema es decir:

$$C_O = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad \text{Tiene rango igual a } n$$

Supóngase que el par  $(A, B)$  es controlable. En consecuencia, la matriz de controlabilidad tiene rango  $n$ . Dado que  $C_O$  tiene  $np$  columnas; surge entonces la cuestión de que si todas las columnas de  $B$  son necesarias, o bien, si todas aportan a la controlabilidad del sistema. Esta cuestión lleva al concepto de índices de controlabilidad, que en el caso de tiempo discreto tiene una interpretación física importante. Una forma eficiente y natural de seleccionar  $n$  columnas linealmente independientes (LI) de la matriz  $C_O$  se presenta a continuación:

$$\text{Si } B = [B(:,1) \quad B(:,2) \quad \cdots \quad B(:,p)]$$

Escribimos  $C_O$  en forma explícita como

$$C_O = [B(:,1) \quad \cdots \quad B(:,p) \quad AB(:,1) \quad \cdots \quad AB(:,p) \quad A^{n-1}B(:,1) \quad \cdots \quad A^{n-1}B(:,p)] \quad (2-16)$$

Si se buscan las columnas LI de  $C_O$  de izquierda a derecha, y resultara que  $A^i B(:,k)$  es una columna linealmente dependiente (LD) de las columnas situadas a su izquierda, todas las columnas asociadas a  $B(:,k)$  que siguen en  $C_O$ , es decir,  $A^{i+1}B(:,k), \dots, A^{n-1}B(:,k)$  serian LD de las columnas ya seleccionadas. Sea  $\mu_k$  el numero de columnas LI de  $C_O$  aportadas por la columna  $B(:,k)$ , es decir, las columnas  $B(:,k), AB(:,k), \dots, A^{\mu_k-1}B(:,k)$  son LI en  $C_O$  y  $A^{\mu_k+i}B(:,k)$  para  $i=0,1, \dots$  son LD. Entonces si  $C_O$  es de rango  $n$  se tiene que cumplir que

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p = n .$$

Los números  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  son los índices de controlabilidad del par  $(A,B)$  siendo el número  $\mu = \max(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$  el índice de controlabilidad del mismo par. Para sistemas en tiempo discreto, el índice de controlabilidad  $\mu$  representa el tiempo mínimo en que se puede realizar cualquier transferencia de estados en un sistema controlable. No es posible transferir cualquier estado a otro con una secuencia de control de longitud menor a  $\mu$ .

Por otra parte en Chen [21] se demuestra que si un sistema continuo como el definido en (2-1) es controlable, el sistema discreto (2-2) con periodo de muestreo  $T$  es controlable, si dados dos autovalores cualesquiera  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  de  $A_c$  tales que  $\text{Re}[\lambda_i - \lambda_j] = 0$  se satisface la siguiente condición

$$\text{Im}[\lambda_i - \lambda_j] \neq \frac{2\pi m}{T} \quad m = 1, 2, \dots$$

Esta condición sólo afecta a autovalores complejos conjugados de  $A_c$ ; si  $A_c$  sólo tiene autovalores reales, entonces el sistema discreto es siempre controlable para todo  $T > 0$  siempre que el sistema continuo lo sea. Si  $A$  tiene autovalores complejos conjugados  $\alpha \pm j\beta$ , entonces, si el período de muestreo  $T$  es tal que no sea múltiplo de  $\pi / \beta$  el sistema discreto es controlable si el continuo lo es.

Para un modelo BMIO la controlabilidad del sistema se prueba con el rango de la matriz  $W$ , la cual debido a lo expuesto anteriormente puede ser expresada con las matrices del sistema continuo.

Sea un sistema MIMO definido por (2-1), si durante el periodo global  $T_0$ , si para cada entrada  $u_i$  existen  $g_i$  actualizaciones entonces el rango de la matriz  $W$  es

$$\text{rank}[W] = \text{rank}[B_c(:,1) \ \cdots \ A_c^{g_1-1} B_c(:,1) \ \cdots \ B_c(:,m) \ \cdots \ A_c^{g_m-1} B_c(:,m)] \quad (2-17)$$

Donde

$$B_c(:,i) \text{ es la } i\text{-ésima columna de } B_c$$

Además de las condiciones de controlabilidad del sistema continuo, se deben satisfacer las siguientes condiciones para hacer que el modelo BMIO sea controlable. En un sistema MIMO definido por (2-1) cuyo modelo BMIO se obtiene a partir de (2-3) a (2-8), para que la matriz de controlabilidad sea de rango completo,  $\text{rango}[W]=n$ , es necesario que

$$r \geq \mu \quad (2-18)$$

Si se observa la forma de escribir la matriz de controlabilidad en (2-16) y comparándola con la expresión (2-17) resulta claro que una condición necesaria y suficiente para cada entrada  $u_i$  es que:

$$g_i \geq \mu_i \quad (2-19)$$

### Observabilidad del modelo BMIO

El concepto de observabilidad es dual al de controlabilidad, e investiga la posibilidad de estimar el estado del sistema a partir del conocimiento de la salida. La ecuación de estado (2-1) es observable, si para cualquier estado inicial  $x(0)$  (desconocido), existe un tiempo finito  $t_f$

tal que, si se conoce la entrada  $u$  y la salida  $y$  sobre el intervalo  $[0, t_1]$ , es posible determinar en forma única el estado inicial  $x(0)$ . En caso contrario el sistema es no observable

Al igual que con la controlabilidad se puede comprobar si un sistema es observable, mediante el cálculo la matriz de observabilidad del par  $(A_c, C)$  y verificar que sea de rango igual al número de estados del sistema es decir:

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA_c \\ \vdots \\ CA_c^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{Tiene rango igual a } n$$

Para Sistemas Discretos como el definido por (2-3), se dice que es observable, si para cualquier estado inicial  $x[0]$  (desconocido), existe número entero  $k_f > 0$ , tal que, si se conoce la entrada  $u$  y la salida  $y$  desde  $k = 0$  a  $k_f$  se puede determinar en forma única el estado inicial  $x[0]$ . En caso contrario el sistema es no observable

Al igual que para los sistemas continuos para comprobar si un sistema es observable, se calcula la matriz de observabilidad del par  $(A, C)$  y se verifica que sea de rango igual al número de estados del sistema es decir:

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{Tiene rango igual a } n$$

De forma similar, para un sistema observable, los índices de observabilidad,  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  surgen de seleccionar las filas LI en la matriz de observabilidad  $O_b$  asociadas a las filas de  $C$ . Sea  $v_k$  el número de filas LI en  $O_b$  asociadas a la fila  $C(k, \cdot)$  de  $C$ , se cumple que  $v_1 + v_2 + \dots + v_m = n$  siendo  $v = \max(v_1, v_2, \dots, v_m)$  el índice de observabilidad del par  $(A, C)$ . Este índice representa la longitud más corta de secuencias de entradas y salidas necesarias para determinar en forma unívoca el estado inicial del sistema.

Si un sistema continuo como el definido en (2-1) es observable, el sistema discreto (2-2) con periodo de muestreo  $T$  es observable si, dados dos autovalores cualesquiera  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  de  $A_c$  tales que  $\text{Re}[\lambda_i - \lambda_j] = 0$  se satisface la siguiente condición:

$$\text{Im}[\lambda_i - \lambda_j] \neq \frac{2\pi m}{T} \quad m = 1, 2, \dots$$



Esta condición sólo afecta a autovalores complejos conjugados de  $A_c$ ; si  $A_c$  sólo tiene autovalores reales, entonces el sistema discreto es siempre observable para todo  $T > 0$  siempre que el sistema continuo lo sea. si  $A$  tiene autovalores complejos conjugados  $\alpha \pm j\beta$ , entonces, si el período de muestreo  $T$  es tal que no sea múltiplo de  $\pi/\beta$ , el sistema discreto es observable si el continuo lo es.

Para un modelo BMIO la observabilidad del sistema se comprueba mediante el rango de la matriz  $O$ , la cual, al igual que la matriz de controlabilidad puede se expresada por medio de las matrices del sistema continuo.

Sea un sistema MIMO definido por (2-1), si durante el periodo global  $T_0$ , si para cada entrada  $y_i$  existen  $f_i$  medidas durante el periodo global  $T_0$  entonces el rango de la matriz  $O$  es

$$\text{rank}[O] = \text{rank} \begin{bmatrix} C(1,:) \\ \vdots \\ C(1,:)A_c^{f_1-1} \\ \vdots \\ C(p,:) \\ \vdots \\ C(p,:)A_c^{f_p-1} \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

Además de las condiciones de observabilidad del sistema continuo, se deben satisfacer las siguientes condiciones para hacer que el modelo BMIO sea observable. Sea un sistema MIMO definido por (2-1) cuyo modelo BMIO se obtiene a partir de (2-3) a (2-8). La condición para que la matriz de observabilidad sea de rango completo,  $\text{rango}[O]=n$ , es que:

$$s \geq v \quad (2-21)$$

Al igual que sucede con la controlabilidad, para que el modelo BMIO sea observable, una condición necesaria y suficiente para cada salida  $y_i$  es que:

$$f_i \geq v_i \quad (2-22)$$

En el caso de la matriz de respuesta impusional  $H$  el rango de la misma depende no solo del número de muestras sino de el orden en que se realizan las actualizaciones de las entradas y salidas; es decir, se tienen que cumplir las siguientes dos condiciones para que ésta sea de rango completo  $\text{rango}[H] = ps$

$$a) \quad mr \geq ps$$

$$\begin{aligned} & \text{Para } i = 1, \dots, s \\ b) \quad & \sum_j m^j \geq p, \forall j, t^j \leq t_i \end{aligned} \quad (2-23)$$

Donde  $m^j$  es el número de entradas actualizadas en el tiempo  $t^j$

Si no existiesen suficientes muestras para hacer que la matriz  $O$  sea de rango completo es decir  $s < \nu$  el periodo envolvente  $T_0$  debe ser alargado incluyendo más de una secuencia de muestreo.

### **Relación entre representaciones externa-interna del modelo BMIO**

Si el modelo BMIO de un sistema es observable, es decir, el rango de la matriz  $O$  es igual a  $n$  Se puede obtener un observador de estados.

A partir de (2-5):

$$x_{k-1} = O^\# Y_{k-1} + O^\# H U_{k-1}$$

Donde  $\#$  denota la pseudoinversa de una matriz

Sustituyendo en (2-4)

$$x_k = A^N x_{k-1} + W U_{k-1} = A^N O^\# Y_{k-1} + (W - A^N O^\# H) U_{k-1}$$

Se define

$$\begin{aligned} P &= A^N O^\# \\ Q &= (W - A^N O^\# H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_k &= P Y_{k-1} + Q U_{k-1} \\ Y_k &= O P Y_{k-1} + O Q U_{k-1} + H U_k \end{aligned} \quad (2-24)$$

La cual es la representación externa del modelo BMIO.

### 2.5.3 Controladores basados en el modelo BMIO

Basados en el modelo BMIO se han desarrollado controladores (Albertos [1]) que permiten, ya sea producir un comportamiento deseado en el sistema retroalimentado o que éste siga una referencia.

Si se desea que el sistema tenga un comportamiento tal como  $x_{k+1} = A_d x_k$  y si la matriz de controlabilidad  $W$  es de rango completo se puede aplicar la siguiente ley retroalimentación del estado:

$$U_k = W^\# (A_d - A^N) x_k = \Gamma x_k \quad (2-25)$$

Cabe mencionar que la expresión anterior equivale a obtener una matriz de retroalimentación mediante la asignación de polos con el par de matrices  $(A^N, W)$  y los polos de  $A_d$ .

Si la matriz de observabilidad es de rango completo entonces se puede obtener el mismo comportamiento aplicando una retroalimentación de entrada/salida con la siguiente ley de control:

$$U_k = \Gamma P Y_{k-1} + \Gamma Q U_{k-1} \quad (2-26)$$

Si lo que se desea es que la salida siga una referencia  $R$ , se puede construir un controlador de cancelación. De (2-24) se sabe que el vector de estados se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned} x_k &= P Y_{k-1} + Q U_{k-1} \\ Y_k &= O P Y_{k-1} + O Q U_{k-1} + H U_k \end{aligned}$$

Si las matrices  $W$ ,  $O$  y  $H$  son de rango completo se puede aplicar el siguiente controlador entrada/salida

$$U_k = M R_k + M_1 Y_{k-1} + M_2 U_{k-1} \quad (2-27)$$

$$M = H^\#, \quad M_1 = -H^\# O P, \quad M_2 = -H^\# O Q \quad (2-28)$$

Donde  $\#$  denota la pseudoinversa de una matriz.

El controlador por retroalimentación del estado equivalente sería

$$U_k = H^\# (R_k - O x_k) \quad (2-29)$$

## 2.6 Modelo BMIO de un sistema SISO

Para aclarar el uso de los sistemas multifrecuencia, se procede a obtener el modelo BMIO de un sistema SISO.

Consideremos el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.2)(s + 1.5)}$$

Cuya realización mínima está dada por

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.7 & -0.6 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

Se calcula la matriz de controlabilidad mediante

$$C_o = [B_c \quad A_c B_c] = \begin{bmatrix} 2 & -3.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de observabilidad

$$O_b = [C \quad C A_c]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo cual indica que el sistema es controlable y observable.

Se asume un periodo de muestreo de 0.6 s y un periodo de actualización de la señal de control de 0.4 s. Dado que el sistema es controlable y observable y que el numero de estados es 2, para asegurar la controlabilidad y observabilidad de modelo BMIO de (2-16) y (2-19) se deduce que se deben tener al menos 2 medidas de la salida y 2 actualizaciones de la acción de control, por lo que se definen los siguientes esquemas de muestreo, donde el metaperiodo  $T_\theta$  se ha duplicado.

La entrada {0 0.4 0.8}

La salida {0.6, 1.2}

Con un periodo envolvente  $T_\theta = 1.2$  s

El periodo base es  $T=0.2$

Por lo tanto  $N=6$

Tiempos de muestreo de salida		Tiempos de actualización de la acción control	
$t_1 = 0.6$	$s_1 = 3$	$t^1 = 0$	$r_1 = 0$
$t_2 = 1.2$	$s_2 = 6$	$t^2 = 0.4$	$r_2 = 2$
		$t^3 = 0.8$	$r_3 = 4$

$$A^N = \begin{bmatrix} 0.06971 & -0.2868 \\ 0.239 & 0.8822 \end{bmatrix}$$

Se procede a la obtención de la matriz de controlabilidad del bloque  $W$  por medio de (2-6)

$$W = \begin{bmatrix} A^4 B_2 & A^2 B_2 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1083 & 0.2718 & 0.5759 \\ 0.1823 & 0.146 & 0.06433 \end{bmatrix}$$

Aplicando (2-7) se obtiene la matriz de observabilidad del bloque  $O$ .

$$O = \begin{bmatrix} CA^3 \\ CA^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1848 & 0.9608 \\ 0.239 & 0.8822 \end{bmatrix}$$

Por último se calcula la matriz de repuesta impusional  $H$  por medio de (2-8).

$$H = \begin{bmatrix} CAB_2 & CB_1 & 0 \\ CA^4 B_2 & CA^2 B_2 & CB_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1127 & 0.0179 & 0 \\ 0.1823 & 0.146 & 0.06433 \end{bmatrix}$$

Una comparación de la respuesta ante un escalón unitario del modelo continuo con la respuesta del modelo BMIO se presenta en la siguiente figura.

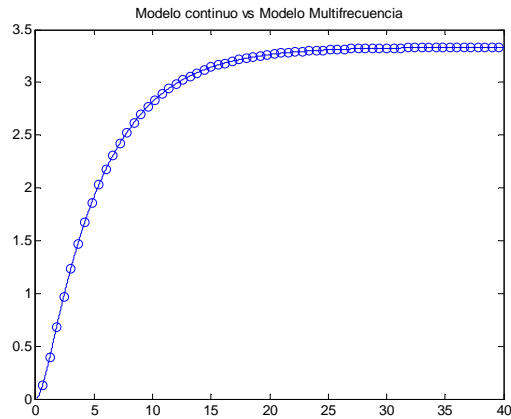


Fig. 2-5.- Comparación de Respuestas BMIO vs Continuo de un sistema SISO

## 2.7 Modelo BMIO de un sistema MIMO

Ahora se aplicará el modelado BMIO a un sistema MIMO de dos entradas y dos salidas, en el que el tiempo de actualización de las acciones de control es de 1.5 s y el tiempo de muestreo de las salidas es de 3 s.

El modelo multivariable obtenido para este proceso, es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-1.5s}}{9s+1} & \frac{-0.1e^{-3s}}{12s+1} \\ \frac{-0.7e^{-3s}}{15s+1} & \frac{0.8e^{-1.5s}}{12s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9s+1} & \frac{-0.1e^{-1.5s}}{12s+1} \\ \frac{-0.7e^{-1.5s}}{15s+1} & \frac{0.8}{12s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1.5s}u_1 \\ e^{-1.5s}u_2 \end{bmatrix}$$

### 2.7.1 Modelo sin considerar los retardos en las entradas

En primera instancia no se considerarán los retardos de las entradas al sistema, por lo que primero se trabaja con la siguiente matriz de transferencia

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9s+1} & \frac{-0.1e^{-1.5s}}{12s+1} \\ \frac{-0.7e^{-1.5s}}{15s+1} & \frac{0.8}{12s+1} \end{bmatrix}$$

Se utiliza una aproximación de Padé para eliminar el retardo existente entre la entrada 2 y la salida 1 y el existente entre la entrada 1 y la salida 2. Quedando el sistema de la siguiente manera:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9s+1} & \frac{-0.1(s-1.3333)}{(s+1.3333)(12s+1)} \\ \frac{-0.7(s-1.3333)}{(s+1.3333)(15s+1)} & \frac{0.8}{12s+1} \end{bmatrix}$$

Obteniendo la representación interna de la función de transferencia anterior se tiene

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.4 & -0.3556 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.296 & 0.1995 & -0.1207 \\ 0 & 0 & 0.2236 & -0.1476 & 0.02768 \\ 0 & 0 & 0.0009124 & 0.004866 & -0.08425 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.04531 & 0.25 \\ 0.2416 & 0 \\ -0.04531 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1439 & 0.4121 & -0.1116 \\ 0.093333 & -0.4978 & 0.008759 & 0.04672 & 0.2579 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso es comprobar que el sistema es controlable y observable, para ello se obtienen las matrices de controlabilidad y observabilidad.

Se calcula la matriz de controlabilidad mediante

$$C_o = [B_c \quad A_c B_c \quad A_c^2 B_c \quad A_c^3 B_c \quad A_c^4 B_c] =$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.7 & 0 & 0.9356 & 0 & -1.2476 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0 & -0.175 & 0 & 0.2339 \\ 0.0453 & 0.25 & -0.005 & -0.3542 & 0.0006 & 0.474 & -0.0001 \\ 0.2416 & 0 & -0.0268 & 0.0625 & 0.003 & -0.0885 & -0.0003 \\ -0.0453 & 0.25 & 0.005 & -0.0208 & -0.0006 & 0.0017 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.663 & 0 \\ 0 & 0.3119 & 0 \\ -0.6321 & 0 & 0.8428 \\ 0.1185 & 0 & -0.158 \\ -0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otra manera de calcular la matriz de controlabilidad usando MATLAB

$$C_o = \text{ctrb}(A_c, B_c)$$

Y luego calculamos el rango de esta matriz

$$\text{rank}(C_o) = 5$$

Por lo que es de rango completo y el sistema es totalmente controlable.

Los índices de controlabilidad para cada entrada se observan de la matriz de controlabilidad; Si agrupamos las 5 columnas Linealmente Independientes (LI) que se tienen en esta matriz, se observa que tres son resultado de la multiplicación de la matriz  $A_c$  y sus potencias por la primera columna de  $B_c$ , que es la que está relacionada con la primera entrada, las dos columnas restantes corresponden a la segunda columna de  $B_c$ , por ende, relacionadas a la segunda entrada, de aquí que los dos índices de controlabilidad son:

$$\mu_1 = 3$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\mu = \max(\mu_1, \mu_2) = 3$$

De (2-18) y (2-19) se deduce que se necesitan, como mínimo, tres actualizaciones de la primera entrada y dos para la segunda entrada para que el modelo BMIO del sistema sea controlable.

Para comprobar si la realización es mínima se estudia la observabilidad del sistema



$$O_b = [C \ CA \ CA^2 \ CA^3 \ CA^4]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1439 & 0.4121 & -0.1106 \\ 0.0933 & -0.4978 & 0.0088 & 0.0467 & 0.2579 \\ 0 & 0 & -0.950 & -0.0326 & 0.0033 \\ -0.2551 & -0.0332 & 0.0007 & -0.0039 & -0.0215 \\ 0 & 0 & 0.1159 & -0.0141 & 0.0103 \\ 0.3489 & 0.0907 & 0.0001 & 0.0003 & 0.0018 \\ 0 & 0 & -0.1533 & 0.0253 & -0.0152 \\ -0.4657 & -0.1240 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0.2043 & -0.0344 & 0.0205 \\ 0.6210 & 0.1635 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(O_b)=5$$

Por lo tanto como los rangos son iguales al orden del sistema ( $n=5$ ) entonces, las realizaciones son mínimas.

Un análisis similar al realizado para los índices de controlabilidad pero aplicado a la observabilidad indica que se requieren de tres muestras de la primera salida y dos muestras de la segunda para obtener información de todos los estados, es decir:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 3 \\ \nu_2 &= 2 \\ \nu &= \max(\nu_1, \nu_2) = 3 \end{aligned}$$

Se define el modelo multifrecuencia como sigue:

Tipo de Sistema: MIMO

Número de Salidas ( $p$ ): 2

Número de Entradas ( $m$ ): 2

Numero de muestras de la salida ( $s$ ): 3

Numero de muestras de la acción de control ( $r$ ): 6

Periodo Base ( $T$ ): 1.5 seg

Periodo Envolvente ( $T_o$ ): 9 seg

Nótese que el periodo envolvente fue duplicado para asegurar que el número de muestras de la salida, permita que la matriz de Observabilidad  $O_b$  sea de rango completo.

$N : 6$

$\mu : 3$

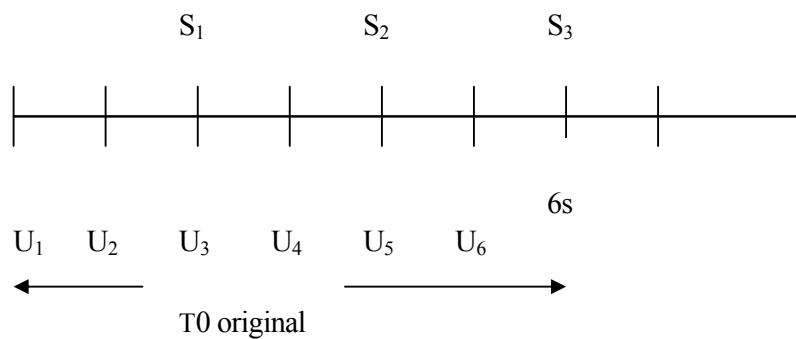
$v : 3$

Tiempos de muestreo de salida

$t_1 = 3$	$s_1 = 2$
$t_2 = 6$	$s_2 = 4$
$t_3 = 9$	$s_3 = 6$

Tiempos de actualización de acción control

$t^1 = 0$	$r_1 = 0$
$t^2 = 1.5$	$r_2 = 1$
$t^3 = 3.0$	$r_3 = 2$
$t^4 = 4.5$	$r_4 = 3$
$t^5 = 6.0$	$r_5 = 4$
$t^6 = 7.5$	$r_6 = 5$



Se definen los vectores de entrada y salida

$$Y_k = \begin{bmatrix} y(kT_0 + 3) \\ y(kT_0 + 6) \\ y(kT_0 + 9) \end{bmatrix} \quad U_k = \begin{bmatrix} u(kT_0 + 0) \\ u(kT_0 + 1.5) \\ u(kT_0 + 3.0) \\ u(kT_0 + 4.5) \\ u(kT_0 + 6.0) \\ u(kT_0 + 7.5) \end{bmatrix}$$

Estos valores ayudaran en el cálculo de las matrices del bloque  $W$ ,  $O$  y  $H$

Se procede a la obtención de la matriz de controlabilidad del bloque  $W$  por medio de (2-6)

$$W = \begin{bmatrix} A^5 B_1 & A^4 B_1 & A^3 B_1 & A^2 B_1 & AB_1 & B_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0228 & 0 & -0.0251 & 0 & -0.027 & 0 & -0.0245 \\ -0.1709 & 0 & -0.1888 & 0 & -0.2084 & 0 & -0.2283 \\ -0.0519 & -0.0063 & -0.0613 & -0.0071 & -0.0725 & -0.0079 & -0.0856 \\ 0.1384 & -0.0377 & 0.1635 & -0.0428 & 0.1932 & -0.0484 & 0.2283 \\ 0.0260 & 0.1887 & 0.0307 & 0.2138 & 0.0362 & 0.2423 & 0.0428 \\ & & & & & & & & 0 & 0.0122 & 0 & 0.3038 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & -0.2376 & 0 & -0.1537 & 0 \\ & & & & & & & & -0.0076 & -0.1011 & 0.0013 & -0.1195 & 0.0747 \\ & & & & & & & & -0.0543 & 0.2696 & -0.0578 & 0.3186 & -0.0381 \\ & & & & & & & & 0.2745 & 0.0506 & 0.3111 & 0.0597 & 0.3525 \end{bmatrix}$$

Aplicando (2-7) se obtiene la matriz de observabilidad del bloque  $O$ .

$$O = \begin{bmatrix} CA^{s_1} \\ CA^{s_2} \\ \vdots \\ CA^{s_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^2 \\ CA^4 \\ CA^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.1097 & 0.2991 & 0.0268 \\ -0.0809 & 0.2247 & 0.0124 & -0.0331 & 0.2015 \\ 0 & 0 & -0.0802 & 0.2141 & 0.0172 \\ -0.0691 & 0.1844 & 0.0097 & -0.0258 & 0.1569 \\ 0 & 0 & -0.0576 & 0.1536 & 0.0110 \\ -0.0566 & 0.1510 & 0.0075 & -0.0201 & 0.1222 \end{bmatrix}$$

Por último se calcula la matriz de repuesta impulsional  $H$  por medio de (2-8).

$$H = \begin{bmatrix} CAB_1 & CB_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CA^3 B_1 & CA^2 B_1 & CAB_1 & CB_1 & 0 & 0 \\ CA^5 B_1 & CA^4 B_1 & CA^3 B_1 & CA^2 B_1 & CAB_1 & CB_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.1299 & -0.0102 & 0.153 & -0.0018 & 0 & 0 & 0 \\ -0.058 & 0.0830 & -0.0099 & 0.0940 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0931 & -0.0102 & 0.1100 & -0.0102 & 0.130 & -0.018 & 0.1535 \\ -0.054 & 0.0646 & -0.0591 & 0.0732 & -0.058 & 0.0830 & -0.0099 \\ 0.0667 & -0.007 & 0.0788 & -0.0081 & 0.0931 & -0.009 & 0.110 \\ -0.044 & 0.0503 & -0.049 & 0.0570 & -0.054 & 0.0646 & -0.059 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.094 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.130 & -0.01 & 0.153 & -0.0018 \\ 0.073 & -0.058 & 0.083 & -0.01 & 0.094 \end{bmatrix}$$

Ahora se compara la respuesta del sistema BMIO obtenido, donde las entradas se actualizan cada 1.5 s y las salidas son muestreadas cada 3 s, a través del siguiente modelo de MATLAB/SIMULINK.

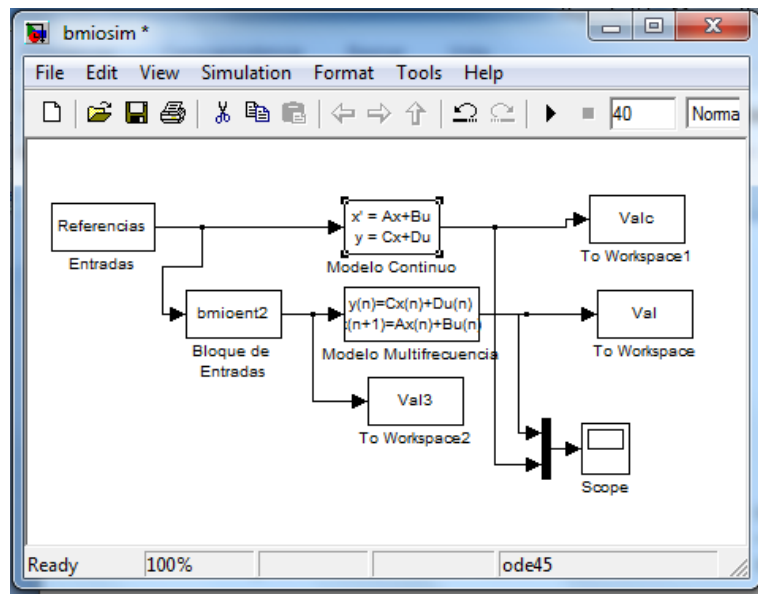


Fig. 2-6.- Modelo BMIO con T=1.5s, To=9s, Entrada cada T, Salida cada 2T.

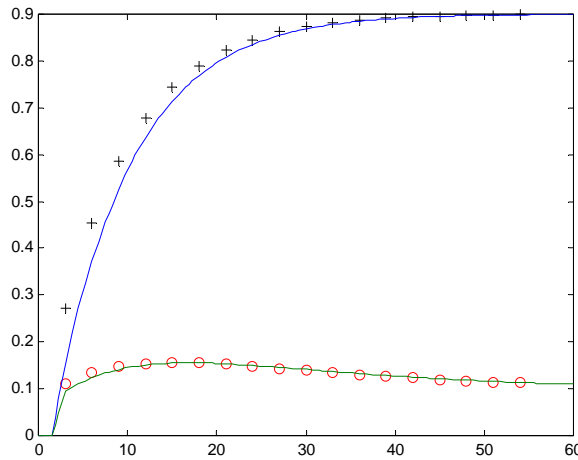


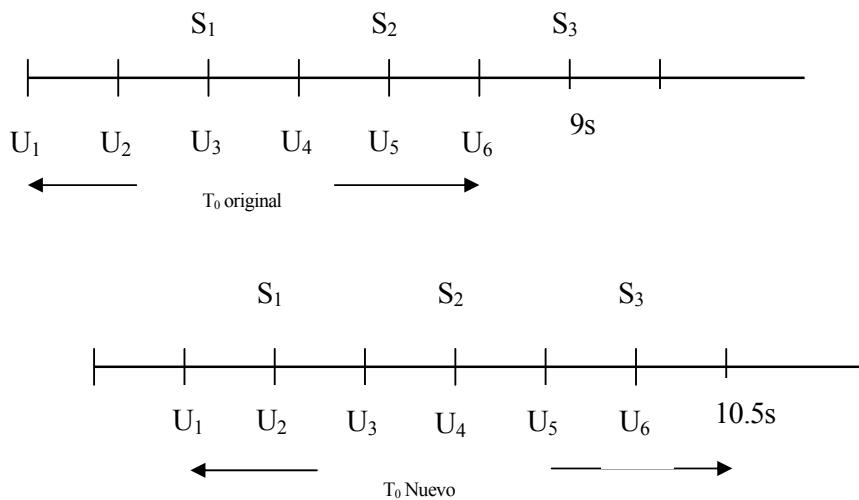
Fig. 2-7.- Comparación de Respuestas BMIO sin retardo vs Continuo

(+, o BMIO, - - Sistema continuo)

Se puede observar que la respuesta del modelo BMIO es igual que la del modelo continuo con la única diferencia del retraso en las entradas.

### 2.7.2 Modelo considerando los retardos en las entradas

El siguiente paso es incluir el retardo de las entradas en el modelo multifrecuencia. Para ello se analizará el modelo original. Un retardo en la entrada equivale a un corrimiento de las acciones de control y dado que la primera acción de control debe ser realizada al inicio de cada periodo envolvente  $T_0$ , la relación que existe entre los instantes de muestreo y los instantes de las actualizaciones de las entradas se ve modificada, esto se puede observar en la siguiente figura.



Los vectores de entradas y salidas quedan de la siguiente forma:

Tiempos de muestreo de salida		Tiempos de actualización de entrada	
$t_1 = 1.5$	$s_1 = 1$	$t^1 = 0$	$r_1 = 0$
$t_2 = 4.5$	$s_2 = 3$	$t^2 = 1.5$	$r_2 = 1$
$t_3 = 7.5$	$s_3 = 5$	$t^3 = 3.0$	$r_3 = 2$
		$t^4 = 4.5$	$r_4 = 3$
		$t^5 = 6.0$	$r_5 = 4$
		$t^6 = 7.5$	$r_6 = 5$

$$Y_k = \begin{bmatrix} y(kT_0 + 1.5) \\ y(kT_0 + 4.5) \\ y(kT_0 + 7.5) \end{bmatrix} \quad U_k = \begin{bmatrix} u(kT_0 + 0) \\ u(kT_0 + 1.5) \\ u(kT_0 + 3.0) \\ u(kT_0 + 4.5) \\ u(kT_0 + 6.0) \\ u(kT_0 + 7.5) \end{bmatrix}$$

Con estos valores se calcula nuevamente las matrices  $W$ ,  $O$  y  $H$  de la siguiente manera:

Para la matriz de controlabilidad del bloque  $W$  por medio de (2-6)

$$W = \begin{bmatrix} A^5 B_1 & A^4 B_1 & A^3 B_1 & A^2 B_1 & A B_1 & B_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0228 & 0 & -0.0251 & 0 & -0.027 & 0 & -0.0245 \\ -0.1709 & 0 & -0.1888 & 0 & -0.2084 & 0 & -0.2283 \\ -0.0519 & -0.0063 & -0.0613 & -0.0071 & -0.0725 & -0.0079 & -0.0856 \\ 0.1384 & -0.0377 & 0.1635 & -0.0428 & 0.1932 & -0.0484 & 0.2283 \\ 0.0260 & 0.1887 & 0.0307 & 0.2138 & 0.0362 & 0.2423 & 0.0428 \\ \\ 0 & 0.0122 & 0 & 0.3038 & 0 \\ 0 & -0.2376 & 0 & -0.1537 & 0 \\ -0.0076 & -0.1011 & 0.0013 & -0.1195 & 0.0747 \\ -0.0543 & 0.2696 & -0.0578 & 0.3186 & -0.0381 \\ 0.2745 & 0.0506 & 0.3111 & 0.0597 & 0.3525 \end{bmatrix}$$

Aplicando (2-7) se obtiene la matriz de observabilidad del bloque  $O$ .

$$O = \begin{bmatrix} CA^{s_1} \\ CA^{s_2} \\ \vdots \\ CA^{s_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^1 \\ CA^3 \\ CA^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.1162 & 0.3579 & 0.0344 \\ -0.0667 & 0.2454 & 0.0141 & -0.0375 & 0.2283 \\ 0 & 0 & -0.0945 & 0.2528 & 0.0215 \\ -0.0759 & 0.2037 & 0.0110 & -0.0292 & 0.1778 \\ 0 & 0 & -0.0680 & 0.1814 & 0.0138 \\ -0.0626 & 0.1668 & 0.0085 & -0.0228 & 0.1385 \end{bmatrix}$$

Por último se calcula la matriz de repuesta impulsional  $H$  por medio de (2-8)

$$H = \begin{bmatrix} CB_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CA^2 B_1 & CAB_1 & CB_1 & 0 & 0 & 0 \\ CA^4 B_1 & CA^3 B_1 & CA^2 B_1 & CAB_1 & CB_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.153 & -0.0018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0099 & 0.0940 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1100 & -0.0102 & 0.130 & -0.018 & 0.1535 & 0 & 0 \\ -0.0591 & 0.0732 & -0.058 & 0.0830 & -0.0099 & 0.094 & 0 \\ 0.0788 & -0.0081 & 0.0931 & -0.009 & 0.110 & -0.01 & 0.130 \\ -0.049 & 0.0570 & -0.054 & 0.0646 & -0.059 & 0.073 & -0.058 \\ \\ \\ \\ \\ -0.01 & 0.153 & -0.0018 & 0 & 0 \\ 0.083 & -0.01 & 0.094 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con estas nuevas matrices se compara nuevamente el sistema multifrecuencia con el continuo:

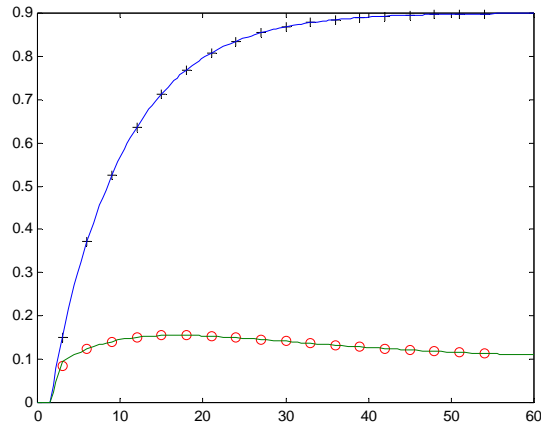


Fig. 2-8.- Comparación de Respuestas BMIO con retardo vs Continuo

(+, o BMIO, - - Sistema continuo)

Se puede ver que el retraso que antes se observaba ya no está presente, debido a que el retardo de 1.5 s que existe en las entradas queda incluido en el modelo BMIO.

## 2.8 Modelo BMIO de un sistema MIMO con muestreo distinto para cada señal de entrada y salida.

Como se ha planteado anteriormente, Al tratar con sistemas MIMO puede resultar conveniente utilizar las expresiones definidas en (2-11), (2-12) y (2-13), en las cuales se trabaja con los vectores columna de la matriz de entrada  $B_c$  del sistema continuo y con los vectores fila de la matriz de salida  $C$  del mismo sistema, esto con el fin de poder modelar un sistema multifrecuencia, en el cual, las entradas al proceso no tengan que ser actualizadas a la misma frecuencia, de igual forma las salidas no tienen que ser medidas a la misma frecuencia.

Para ejemplificar lo anterior se aplica el modelado BMIO al sistema MIMO estudiado en la sección anterior, con la diferencia, que las entradas se actualizan a frecuencias diferentes y en el caso de las salidas, estas se miden a intervalos distintos.

El sistema multivariable es el siguiente:



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9s+1} & \frac{-0.1e^{-1.5s}}{12s+1} \\ \frac{-0.7e^{-1.5s}}{15s+1} & \frac{0.8}{12s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Al igual que en el ejemplo anterior la aproximación de Padé del sistema queda de la siguiente manera:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9s+1} & \frac{-0.1(s-1.3333)}{(s+1.3333)(12s+1)} \\ \frac{-0.7(s-1.3333)}{(s+1.3333)(15s+1)} & \frac{0.8}{12s+1} \end{bmatrix}$$

Obteniendo la representación interna de la función de transferencia anterior se tiene

$$A_C = \begin{bmatrix} -1.4 & -0.3556 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.296 & 0.1995 & -0.1207 \\ 0 & 0 & 0.2236 & -0.1476 & 0.02768 \\ 0 & 0 & 0.0009124 & 0.004866 & -0.08425 \end{bmatrix}$$

$$B_C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.04531 & 0.25 \\ 0.2416 & 0 \\ -0.04531 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$C_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1439 & 0.4121 & -0.1116 \\ 0.093333 & -0.4978 & 0.008759 & 0.04672 & 0.2579 \end{bmatrix}$$

$$D_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Del análisis de la controlabilidad y la observabilidad realizado en la sección anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 3 \\ \mu_2 &= 2 \\ \mu &= \max(\mu_1, \mu_2) = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1 &= 3 \\ v_2 &= 2 \\ v &= \max(v_1, v_2) = 3\end{aligned}$$

De los resultados obtenidos anteriormente se define el modelo multifrecuencia como sigue:

Tipo de Sistema: MIMO

Número de Salidas (p): 2

Número de Entradas (m): 2

Periodo Base ( $T$ ): 0.5 seg

Periodo Envolvente ( $T_0$ ): 6 seg

Numero de muestras de la primera salida ( $f_1$ ): 3

Numero de muestras de la segunda salida ( $f_2$ ): 2

Numero de actualizaciones de la primera acción de control ( $g_1$ ): 6

Numero de actualizaciones de la segunda acción de control ( $g_2$ ): 4

N : 12

$\mu$  : 3

v : 3

Tiempos de muestreo de 1ª salida

$$t_{1,1} = 2$$

$$s_{1,1} = 4$$

$$t_{1,2} = 4$$

$$s_{1,2} = 8$$

Tiempos de actualización de 1ª acción control

$$t_1^1 = 0$$

$$r_1^1 = 0$$

$$t_1^2 = 1$$

$$r_1^2 = 2$$

$t_{1,3} = 6$	$s_{1,3} = 12$	$t_1^3 = 2$	$r_1^3 = 4$
		$t_1^4 = 3$	$r_1^4 = 6$
		$t_1^5 = 4$	$r_1^5 = 8$
		$t_1^6 = 5$	$r_1^6 = 10$
Tiempos de muestreo de 2ª salida		Tiempos de actualización de 2ª acción control	
$t_{2,1} = 3$	$s_{2,1} = 6$	$t_2^1 = 0$	$r_2^1 = 0$
$t_{2,2} = 6$	$s_{2,2} = 12$	$t_2^2 = 1.5$	$r_2^2 = 3$
		$t_2^3 = 3$	$r_2^3 = 6$
		$t_2^4 = 4.5$	$r_2^4 = 9$

Cabe recalcar que por (2-22) el número de medidas de las salidas es igual al índice de observabilidad asociado a dicha salida, esto con el fin de asegurar la observabilidad del sistema multifrecuencia.

El modelo BMIO queda de la siguiente manera:

$$A^N = \begin{bmatrix} -0.0349 & -0.1881 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1322 & 0.7056 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0158 & 0.0828 & -0.0559 \\ 0 & 0 & 0.0938 & 0.5009 & 0.0273 \\ 0 & 0 & 0.0030 & 0.0163 & 0.6035 \end{bmatrix}$$

Se procede a la obtención de la matriz de controlabilidad del bloque  $W$  por medio de (2-11)

$$W = \begin{bmatrix} A^{10}B(:,1)_2 & A^9B(:,2)_3 & A^8B(:,1)_2 & A^6B(:,2)_3 & A^6B(:,1)_2 & A^4B(:,1)_2 & A^3B(:,2)_3 \\ & A^2B(:,1)_2 & B(:,2)_3 & B(:,1)_2 & & & \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0178 & 0 & -0.0181 & 0 & -0.0155 & -0.0020 & 0 \\ 0.0683 & 0 & 0.0728 & 0 & 0.0771 & 0.0797 & 0 \\ 0.0246 & -0.01572 & 0.0275 & -0.0151 & 0.0307 & 0.0343 & 0.0026 \\ 0.1312 & 0.0483 & 0.1466 & 0.0543 & 0.1639 & 0.1831 & 0.0578 \\ -0.0246 & 0.2423 & -0.0275 & 0.2745 & -0.0307 & -0.0343 & 0.3111 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.05281 & 0 & 0.2652 \\ 0.0749 & 0 & 0.0409 \\ 0.0383 & 0.1494 & 0.0428 \\ 0.2047 & 0.0380 & 0.2287 \\ -0.0383 & 0.3525 & -0.0428 \end{bmatrix}$$

Aplicando (2-12) se obtiene la matriz de observabilidad del bloque  $O$ .

$$O = \begin{bmatrix} C(1,:)A^4 \\ C(2,:)A^6 \\ C(1,:)A^8 \\ C(1,:)A^{12} \\ C(2,:)A^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0679 & 0.3376 & -0.0949 \\ -0.0808 & -0.4495 & 0.0068 & 0.0363 & 0.2009 \\ 0 & 0 & 0.0510 & 0.2707 & -0.0778 \\ 0 & 0 & 0.0406 & 0.2165 & -0.0635 \\ -0.0690 & -0.3688 & 0.0053 & 0.0283 & 0.1564 \end{bmatrix}$$

Por último se calcula la matriz de repuesta impusional  $H$  por medio de (2-13).

$$H = \begin{bmatrix} C(1,:)A^2B(:,1)_2 & C(1,)AB(:,2)_3 & C(1,)B(:,1)_2 & C(1,)B(:,2)_1 & 0 \\ C(2,)A^4B(:,1)_2 & C(2,)A^3B(:,2)_3 & C(2,)A^2B(:,1)_2 & C(2,)B(:,2)_3 & C(2,)B(:,1)_2 \\ C(1,)A^6B(:,1)_2 & C(1,)A^5B(:,2)_3 & C(1,)A^4B(:,1)_2 & C(1,)A^2B(:,2)_3 & C(1,)A^2B(:,1)_2 \\ C(1,)A^{10}B(:,1)_2 & C(1,)A^9B(:,2)_3 & C(1,)A^8B(:,1)_2 & C(1,)A^6B(:,2)_3 & C(1,)A^6B(:,1)_2 \\ C(2,)A^{10}B(:,1)_2 & C(2,)A^9B(:,2)_3 & C(2,)A^8B(:,1)_2 & C(2,)A^6B(:,2)_3 & C(2,)A^6B(:,1)_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C(1,)B(:,1)_2 & C(1,)B(:,2)_2 & 0 & 0 & 0 \\ C(1,)A^4B(:,1)_2 & C(1,)A^3B(:,2)_3 & C(1,)A^2B(:,1)_2 & C(1,)B(:,2)_3 & C(1,)B(:,1)_2 \\ C(2,)A^4B(:,1)_2 & C(2,)A^3B(:,2)_3 & C(2,)A^2B(:,1)_2 & C(2,)B(:,2)_3 & C(2,)B(:,1)_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0941 & -0.0068 & 0.1052 & 0.0018 & 0 \\ -0.0399 & 0.0829 & -0.0323 & 0.094 & 0.0043 \\ 0.0753 & -0.0104 & 0.0842 & -0.0092 & 0.0941 \\ 0.0603 & -0.0091 & 0.0674 & -0.0101 & 0.0753 \\ -0.0356 & 0.0646 & -0.0379 & 0.0732 & -0.0398 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1052 & -0.0007 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0842 & -0.0101 & 0.0941 & -0.0017 & 0.1052 \\ -0.0399 & 0.08296 & -0.0323 & 0.0940 & 0.0043 \end{bmatrix}$$

Ahora se compara la respuesta del sistema BMIO obtenido con la respuesta del sistema continuo.

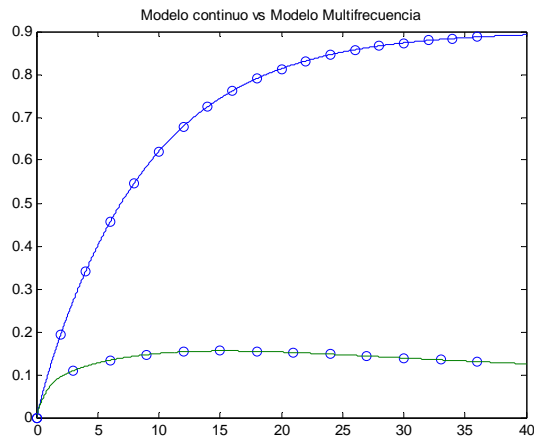


Fig. 2-9.- Comparación de Respuestas BMIO muestreo distinto para cada señal de entrada y salida vs Continuo

## 2.9 Conclusiones

Se ha visto la importancia del estudio de los sistemas Multifrecuencia, ya que como se ha estudiado, en ocasiones no solo es ventajoso sino necesario abordar los problemas de control bajo este esquema. Se han estudiado tanto los modelos basados en la representación externa (funciones de transferencia) como los de representación interna (ecuaciones de estado), de los cuales surgen diferentes propuestas para el modelado.

Se ha realizado una introducción del modelo BMIO que sirve de base para el desarrollo de la presente tesis, abordando la representación externa y la representación interna del modelo y la relación que guardan entre sí. Se ha estudiado otras características del modelado como son la controlabilidad y observabilidad del mismo.

Se ha hecho una introducción a los controladores basados en este modelado que son considerados a lo largo del trabajo como los “originales” ya que presentan, como se verá más adelante, una mejor respuesta transitoria que los propuestos en esta tesis para la eliminación del rizado. Por último se ha visto la aplicación del modelo tanto para sistemas SISO como MIMO, en estos últimos, se ha abordado tanto el muestreo regular como la posibilidad de que las distintas señales de entrada y salida presenten esquemas de muestreo periódicos pero diferentes entre sí.

---

## **CAPÍTULO 3 CONTROL BMIO. INTRODUCCIÓN AL RIZADO INTERMUESTREO**

---

### **3.1 Sistemas de control multifrecuencial:**

Antes de estudiar las causas que originan el rizado intermuestreo es preciso analizar el comportamiento de los controladores “originales” derivados del control BMIO Albertos [1], [2]. El análisis comienza por los controladores de cancelación o deadbeat estudiando su implementación y realizando un ejemplo de su aplicación. A continuación se trabaja con una modificación de este controlador, que consiste en que el cálculo de las acciones de control no se realiza exclusivamente cada metaperiodo, sino que se van calculando cada vez que es necesaria una actualización. Este tipo de controlador es conocido como controlador de horizonte móvil. Finalmente se trabaja con un controlador de retroalimentación del estado que asigna un comportamiento al sistema; en caso de que no se tenga acceso a los estados del sistema, estos pueden ser determinados fácilmente mediante las acciones de control y las salidas del sistema del metaperiodo anterior, como se expresa en (2-24).

### 3.1.1 Controlador de Cancelación

Si lo que se desea es que la salida siga una referencia  $R$ , se puede construir un controlador de cancelación. De (2-24) se sabe que el vector de estados se obtiene a partir de

$$\begin{aligned}x_k &= PY_{k-1} + QU_{k-1} \\ Y_k &= PY_{k-1} + OQU_{k-1} + HU_k\end{aligned}\quad (3-1)$$

Si las matrices  $W$ ,  $O$  y  $H$  son de rango completo, se puede aplicar el siguiente controlador entrada/salida

$$U_k = MR_k + M_1Y_{k-1} + M_2U_{k-1}\quad (3-2)$$

$$M = H^\#, \quad M_1 = -H^\#OP, \quad M_2 = -H^\#OQ\quad (3-3)$$

Donde  $\#$  denota la pseudoinversa de una matriz.

El controlador por retroalimentación del estado equivalente sería

$$U_k = H^\#(R_k - Ox_k)\quad (3-4)$$

Como ejemplo de implementación, se utiliza el siguiente sistema, en el cual, el esquema de muestreo es cada 3 s y las actualizaciones de las acciones de control se realizan cada 1.5 s. Para asegurar la observabilidad del modelo se define el periodo global de 9 s.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9s+1} & \frac{-0.1e^{-1.5s}}{12s+1} \\ \frac{-0.7e^{-1.5s}}{15s+1} & \frac{0.8}{12s+1} \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las matrices  $W$ ,  $O$  y  $H$  y a partir de (3-2) y (3-3) se obtiene un controlador con retroalimentación de la salida que hace que el sistema siga una referencia.



$$M = \begin{bmatrix} 2.9069 & -2.255 & 0.2065 & 0.9700 & 0.0385 & 0.0758 \\ 0.9051 & 4.6518 & 0.1330 & 0.2097 & 0.0200 & 0.0564 \\ 4.1300 & 2.2803 & -0.1660 & -0.8034 & -0.0312 & -0.0605 \\ 1.4303 & 5.3821 & -0.0075 & 0.3287 & 0.0028 & -0.0094 \\ -2.4833 & 1.1700 & 2.9269 & -2.1943 & 0.2172 & 1.0250 \\ 0.4562 & -3.2499 & 0.8805 & 4.5008 & 0.1275 & 0.2368 \\ -2.4375 & -0.8835 & 4.1122 & 2.2384 & -0.1751 & -0.8482 \\ 0.3511 & -3.7626 & 1.3919 & 5.2042 & -0.0103 & 0.3083 \\ 0.2131 & -0.0413 & -2.3490 & 1.2103 & 2.8320 & -1.4808 \\ -0.6113 & -0.1863 & 0.4841 & -3.2484 & 0.9124 & 4.6602 \\ -0.1926 & -0.1905 & -2.5509 & -0.9271 & 4.1935 & 1.6468 \\ -0.7097 & -0.2247 & 0.3888 & -3.7652 & 1.3097 & 5.4220 \end{bmatrix}$$

$$M_I = \begin{bmatrix} 0.0202 & -1.0911 & -0.7197 & -0.0073 & 0.3848 & 0.6953 \\ 0.0176 & -0.9332 & -1.5945 & -0.0244 & 1.3861 & -2.9518 \\ -0.0020 & 0.1111 & 0.0456 & -0.0010 & 0.0560 & -0.1165 \\ -0.0024 & 0.1425 & -0.4944 & -0.0210 & 1.1811 & -1.7228 \\ 0.0015 & -0.0827 & 0.1241 & 0.0071 & -0.3944 & 0.5065 \\ -0.0046 & 0.2614 & -0.4507 & -0.0245 & 1.3698 & -1.7629 \\ -0.0140 & 0.7948 & -1.8063 & -0.0590 & 3.3654 & -8.0026 \\ -0.0147 & 0.8403 & -2.1662 & -0.0688 & 3.9259 & -9.3140 \\ -0.0056 & 0.3301 & -1.2755 & -0.0561 & 3.1425 & -4.2406 \\ -0.0067 & 0.3916 & -1.4960 & -0.0659 & 3.6894 & -4.9851 \\ -0.0086 & 0.4869 & -0.8089 & -0.0445 & 2.4871 & -3.1990 \\ -0.0102 & 0.5722 & -0.9517 & -0.0523 & 2.9251 & -3.7625 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0008 & 0.0006 & -0.0203 & 0.0115 & -0.2290 & 0.0571 & -0.3032 & 0.0712 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0063 & -0.0014 & -0.0789 & 0.0078 & -0.2500 & 0.1604 & -0.1312 & 0.1966 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 & -0.0002 & -0.0038 & -0.0014 & 0.0160 & 0.0042 & 0.0244 & 0.0047 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0086 & -0.0024 & -0.0719 & -0.0040 & -0.0538 & 0.1217 & 0.0366 & 0.1431 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0030 & 0.0009 & 0.0242 & 0.0018 & 0.0124 & -0.0400 & -0.0148 & -0.0466 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0104 & -0.0029 & -0.0840 & -0.0058 & -0.0476 & 0.1394 & 0.0467 & 0.1624 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0255 & -0.0073 & -0.2029 & -0.0157 & -0.0591 & 0.3415 & 0.3744 & 0.4044 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0295 & -0.0084 & -0.2363 & -0.0173 & -0.0845 & 0.3997 & 0.4173 & 0.4738 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0229 & -0.0064 & -0.1914 & -0.0102 & -0.1546 & 0.3242 & 0.0665 & 0.3797 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0269 & -0.0075 & -0.2247 & -0.0120 & -0.1808 & 0.3805 & 0.0793 & 0.4457 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0189 & -0.0053 & -0.1526 & -0.0107 & -0.0842 & 0.2529 & 0.0871 & 0.2946 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0222 & -0.0063 & -0.1794 & -0.0125 & -0.0991 & 0.2975 & 0.1023 & 0.3465 \end{bmatrix}$$

Los resultados de la simulación se muestran a continuación:

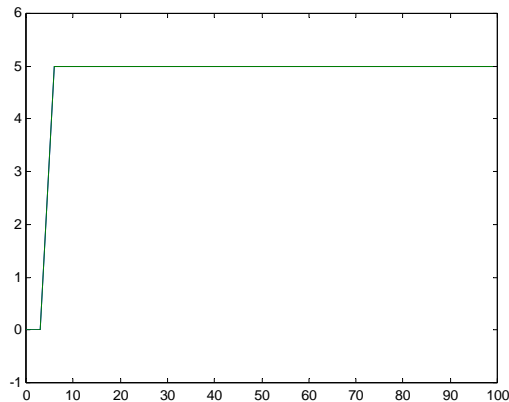


Fig. 3-1.- Respuesta discreta con un periodo de 3 s

Se puede observar que la respuesta tomada cada 3 s ante un escalón de magnitud cinco en cada entrada, es la deseada y se logra en un tiempo de 9 s, es decir el tiempo del metaperiodo. Pero como es de esperarse en un controlador de cancelación se tiene oscilaciones ocultas que es lo que se observa en la siguiente figura:

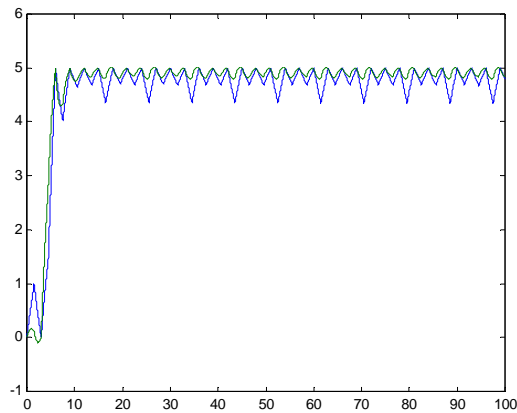


Fig. 3-2.- Respuesta del sistema con Control con horizonte fijo

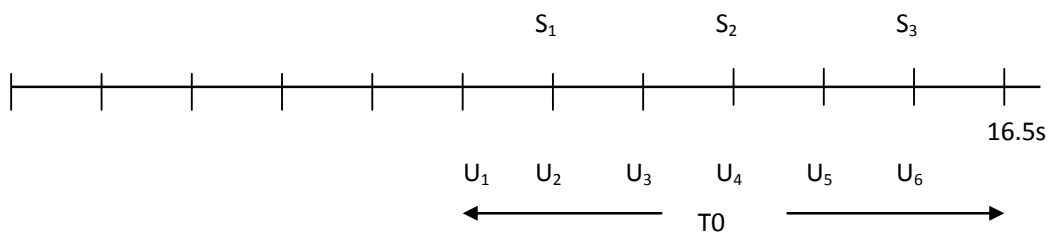
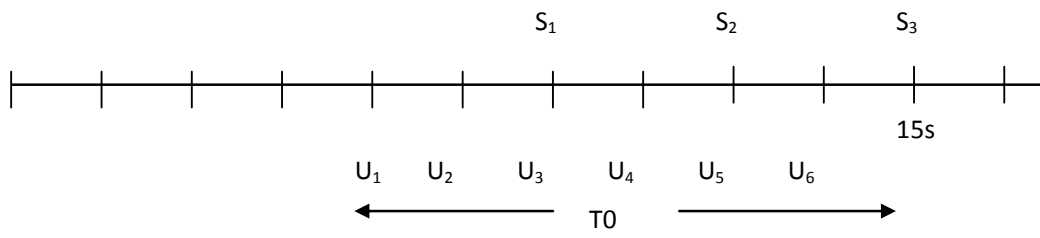
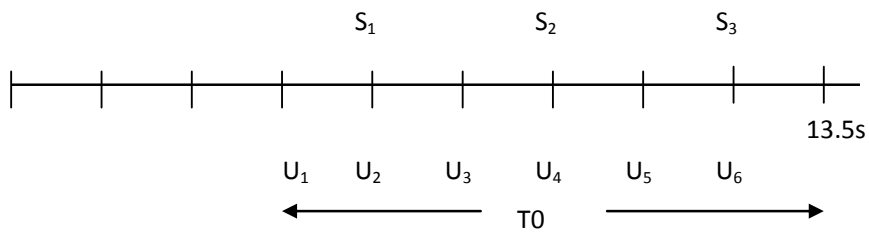
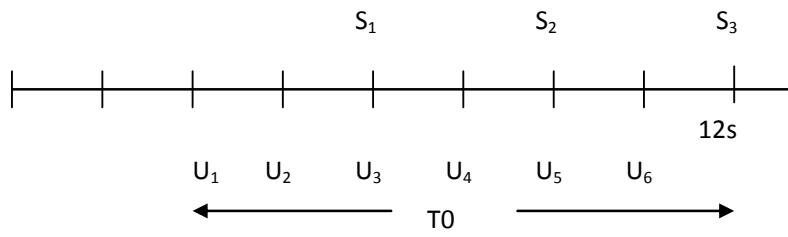
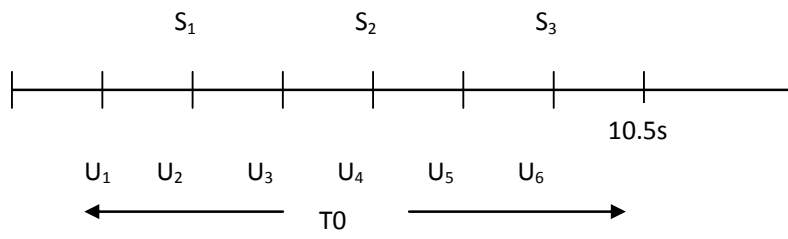
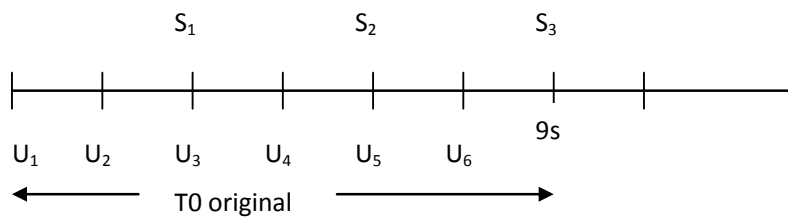
Obsérvese que la respuesta de la salida del sistema continuo no es constante sino que presenta un rizado intermuestreo. Esto es debido a la naturaleza del controlador que en realidad solo calcula todas las acciones de control cada periodo envolvente  $T_0$ , es decir cada 9 s.

### 3.1.2 Controlador con Horizonte Móvil.

Una alternativa es el uso del controlador de horizonte móvil. Este diseño se basa en la idea de ir calculando las acciones de control cada vez que se tienen que aplicar. Esto se logra mediante el cálculo de diferentes matrices de retroalimentación para cada tiempo en que se debe aplicar una acción de control.

Continuando con el sistema empleado en la sección anterior, se observa que se tienen 6 acciones de control durante el periodo envolvente  $T_0$  por lo que se espera calcular seis conjuntos de matrices, basándose en el cambio que puede ocurrir a la hora de aplicar las acciones de control.

El primer conjunto de matrices es el mismo que se calculó en la sección anterior. El segundo es cuando se tiene la segunda acción de control y esto supone que el periodo envolvente del modelo multifrecuencia comienza un instante  $T$  después. Para la tercera acción de control se corre nuevamente un periodo  $T$  al periodo envolvente  $T_0$  del modelo multifrecuencia. Lo mismo se hace para la cuarta, quinta y sexta acción de control. Esto se puede apreciar en la siguiente figura.



Obsérvese que solo dos conjuntos de matrices son necesarios para hacer el control, esto debido a que el periodo envolvente  $T_0$  fue alargado para que se tuvieran muestras y acciones de control suficientes. Las matrices calculadas para la primera acción de control se aplican para la tercera y la quinta, mientras que las calculadas para la segunda acción se aplica en la cuarta y sexta acción de control. Los cálculos se muestran a continuación.

Para la primera acción de control:

$$W = [A^5 B_1 \quad A^4 B_1 \quad A^3 B_1 \quad A^2 B_1 \quad AB_1 \quad B_1]$$

$$O = \begin{bmatrix} CA^{s_1} \\ CA^{s_2} \\ \vdots \\ CA^{s_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^2 \\ CA^4 \\ CA^6 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} CAB_1 & CB_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CA^3 B_1 & CA^2 B_1 & CAB_1 & CB_1 & 0 & 0 \\ CA^5 B_1 & CA^4 B_1 & CA^3 B_1 & CA^2 B_1 & CAB_1 & CB_1 \end{bmatrix}$$

Para la segunda acción de control:

$$W = [A^5 B_1 \quad A^4 B_1 \quad A^3 B_1 \quad A^2 B_1 \quad AB_1 \quad B_1]$$

$$O = \begin{bmatrix} CA^{s_1} \\ CA^{s_2} \\ \vdots \\ CA^{s_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^1 \\ CA^3 \\ CA^5 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} CB_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CA^2 B_1 & CAB_1 & CB_1 & 0 & 0 & 0 \\ CA^4 B_1 & CA^3 B_1 & CA^2 B_1 & CAB_1 & CB_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se calculan las matrices de retroalimentación y se obtienen los siguientes resultados.

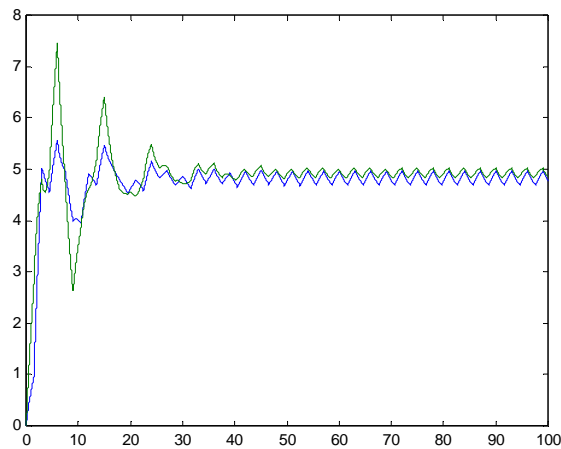
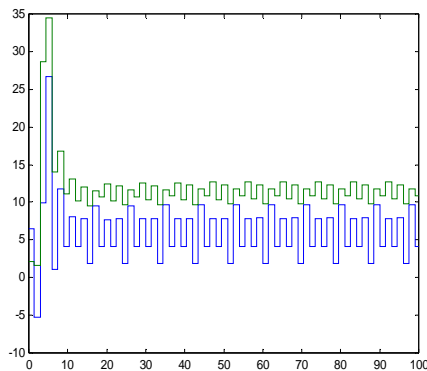
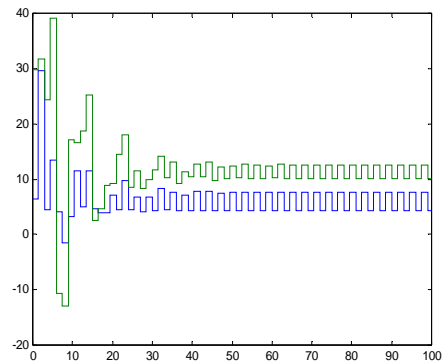


Fig. 3-3.- Respuesta del sistema con Control con horizonte móvil

Se puede observar que a pesar de que las oscilaciones de las salidas son menores, éstas no fueron eliminadas y que el sistema al inicio es menos amortiguada que en la primera opción de control. La razón de que las oscilaciones disminuyeran se puede deducir al observar las acciones de control. Se hace una comparación de las acciones de control sin el horizonte móvil y las acciones con el horizonte móvil en la siguiente figura.



a) Acciones de control de controlador deadbeat.



b) Acciones de control con controlador de horizonte móvil

Fig. 3-4. Comparación de las acciones de control

Se puede ver claramente que las oscilaciones de la salida se deben a que las acciones de control también presentan oscilaciones y que en el caso del controlador con horizonte móvil son menores.

### 3.1.3 Controlador de Asignación de Modelo a Seguir.

Un tercer controlador basado en el modelo BMIO, permite asignar un comportamiento al sistema en lazo cerrado. Dicho controlador se basa en la retroalimentación del estado definida por (2-25). En el caso de que el sistema sea observable, se puede obtener el mismo resultado realizando una retroalimentación de la salida por medio de (2-26). A continuación se plantea un ejemplo de la aplicación de dicho controlador:

Considérese el sistema inestable

$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.2)(s + 1.5)}$$

Una realización mínima está dada por

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

Se calcula la matriz de controlabilidad mediante

$$C_o = [B_c \quad A_c B_c] = \begin{bmatrix} 2 & -2.6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de observabilidad

$$O_b = [C \quad C A_c]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de ambas matrices es igual a 2, lo cual indica que el sistema es controlable y observable.

Se asume un periodo de muestreo de 1.5 s y un periodo de actualización de la señal de control de 1 s. Para asegurar la controlabilidad y observabilidad de modelo BMIO, de (2-18) y (2-21) se deduce que se deben tener al menos 2 medidas de la salida y 2 actualizaciones de la acción de control, por lo que se definen los siguientes esquemas de muestreo, donde el metaperiodo  $T_\theta$  se ha duplicado.

La entrada {0 1 2}

La salida {1.5, 3}

Con un periodo envolvente  $T_0 = 3$  s

El periodo base es  $T = 0.5$

Por lo tanto  $N = 6$

Tiempos de muestreo de salida

$$t_1 = 1.5$$

$$s_1 = 3$$

$$t_2 = 3$$

$$s_2 = 6$$

Tiempos de actualización de la acción control

$$t^1 = 0$$

$$r_1 = 0$$

$$t^2 = 1$$

$$r_2 = 2$$

$$t^3 = 2$$

$$r_3 = 4$$

$$A^N = \begin{bmatrix} 0.2242 & 0.6392 \\ 0.5326 & 1.6090 \end{bmatrix}$$

Se procede a la obtención de la matriz de controlabilidad del bloque  $W$  por medio de (2-6)

$$W = \begin{bmatrix} A^4 B_2 & A^2 B_2 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4341 & 0.5221 & 1.174 \\ 0.9563 & 0.7274 & 0.3465 \end{bmatrix}$$

Aplicando (2-7) se obtiene la matriz de observabilidad del bloque  $O$ .

$$O = \begin{bmatrix} CA^3 \\ CA^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.366 & 1.203 \\ 0.5326 & 1.609 \end{bmatrix}$$

Por último se calcula la matriz de respuesta impusional  $H$  por medio de (2-8). Nuevamente se pueden apreciar los corrimientos del vector  $U_k$ .

$$H = \begin{bmatrix} CAB_2 & CB_1 & 0 \\ CA^4 B_2 & CA^2 B_2 & CB_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5758 & 0.1024 & 0 \\ 0.9563 & 0.7274 & 0.3465 \end{bmatrix}$$



Se desea asignar un comportamiento al sistema retroalimentado definido por los polos  $[0.5, 0.505]$ . Se obtiene la matriz de retroalimentación  $\Gamma$  definida por (2-25)

$$\Gamma = W^\#(A_d - A^N) = \begin{bmatrix} -0.5507 & -0.7440 \\ -0.2754 & -0.5220 \\ 0.5609 & -0.0372 \end{bmatrix}$$

Se analiza la evolución del sistema con condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 5/6$ . En la primera figura se observa la evolución del sistema sin control en bucle abierto, donde es evidente que la respuesta del sistema es inestable como era de esperarse, ya que  $G(s)$  cuenta con un polo en semiplano derecho del plano ( $s=0.2$ ). La segunda figura muestra la respuesta del sistema al asignarle un comportamiento mediante el controlador, el cual proporciona estabilidad al sistema. Es de esperarse que la respuesta del sistema presente rizado, ya que se tiene tres actualizaciones de las acciones de control en el periodo envolvente  $T_\theta$ .

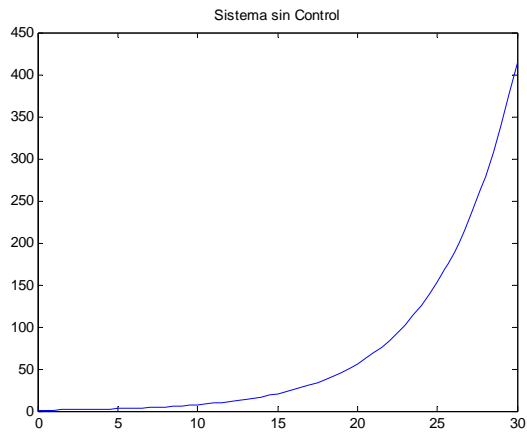


Fig. 3-5. Respuesta del sistema sin controlador

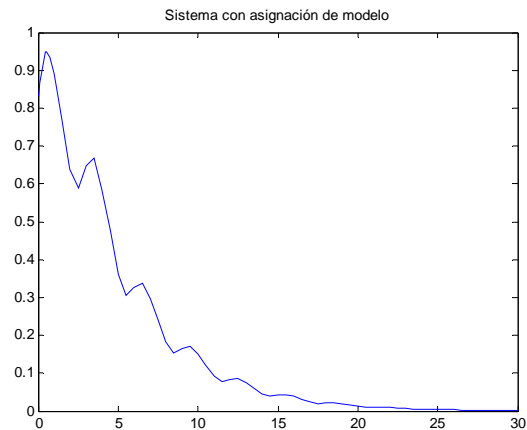


Fig. 3-6. Respuesta del sistema con asignación de modelo

### 3.2 Análisis de la respuesta intermuestreo.

Un fenómeno no deseado que se presenta en los controladores MRIC (MultiRate Input Controller) o similares es el rizado que se tiene a la salida continua entre muestra y muestra. El diseño de los controladores tratados en las secciones anteriores asegura que la salida es la deseada, solo en los instantes de muestreo. Existen trabajos que analizan el problema del rizado como Araki [13],[14] y Tangirala [83]. En dichos trabajos, por una parte se explica que el rizado se debe a la falta de restricciones en las acciones de control que ocasionan cambios bruscos de cada entrada provocando este efecto no deseado, tanto en la respuesta transitoria como en la estacionaria. Cabe mencionar que esta falta de restricción puede ocasionar esfuerzos de control muy grandes, que hacen que el rizado empeore. Una forma de evitar este efecto, que es válida tanto para sistemas monofrecuencia como multifrecuencia, es ubicar los polos del sistema no muy distantes de los polos originales.

En el trabajo de Tangirala [83] se analiza matemáticamente la existencia del rizado como consecuencia de la diferencia de las ganancias en estado estacionario de la matriz de funciones de transferencia multifrecuencia de la planta, es decir, que las actualizaciones de las acciones de control se estabilizan a valores diferentes a lo largo del metaperiodo, dando como solución la incorporación de un integrador de muestreo rápido a la entrada de la planta. Esto es válido para un sistema SISO, lo cual mejora la respuesta en estado estacionario.

En las secciones siguientes se demuestra que las causas del rizado intermuestreo se deben a que las acciones de control generadas por los reguladores basados en el modelado BMIO presentan valores diferentes a lo largo del periodo envolvente  $T_\theta$ , lo cual concuerda con los

resultados de los trabajos mencionados. A su vez se plantea la propuesta de igualar dichas acciones de control modificando las matrices de control, haciendo que sean iguales fila a fila y se demuestra su efectividad para eliminar el rizado, sin tener que recurrir a la consideración de integradores.

De (3-2) se sabe que las acciones de control derivadas de un controlador de cancelación están formadas por tres componentes, la primera es el resultado de la multiplicación de la matriz  $M$  por el vector de referencias, esto significa que cada actualización de las acciones de control, es el resultado de la multiplicación del vector fila correspondiente por el vector de referencias. La segunda componente de cada actualización es el resultado de la multiplicación del vector fila correspondiente de la matriz  $M_I$  por el vector de salidas del periodo envolvente anterior. Cabe mencionar que en caso de tener una sola medida de la salida, tanto la referencia como la salida anterior se reducen a un escalar, mientras que la matriz  $M$  y  $M_I$  son un vector columna. Por último se tiene una tercera componente debida a la multiplicación de la matriz  $M_2$  con las acciones de control del periodo envolvente anterior, al igual que en los casos anteriores cada actualización es el resultado de la multiplicación del vector fila correspondiente de la matriz  $M_2$  por el vector de las acciones de control anteriores. Lo anterior queda expresado a continuación:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_r(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{(11)} & M_{(12)} & \cdots & M_{(1s)} \\ M_{(21)} & M_{(22)} & \cdots & M_{(2s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{(r1)} & M_{(r2)} & \cdots & M_{(rs)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{d(1)}(k) \\ y_{d(2)}(k) \\ \vdots \\ y_{d(s)}(k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{1(11)} & M_{1(12)} & \cdots & M_{1(1s)} \\ M_{1(21)} & M_{1(22)} & \cdots & M_{1(2s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1(r1)} & M_{1(r2)} & \cdots & M_{1(rs)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{(1)}(k) \\ y_{(2)}(k) \\ \vdots \\ y_{(s)}(k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{2(11)} & M_{2(12)} & \cdots & M_{2(1r)} \\ M_{2(21)} & M_{2(22)} & \cdots & M_{2(2r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2(r1)} & M_{2(r2)} & \cdots & M_{2(rr)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \\ \vdots \\ u_r(k-1) \end{bmatrix} \tag{3-5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(k) &= um_{(1)} + um_{1(1)} + um_{2(1)} \\
u_2(k) &= um_{(2)} + um_{1(2)} + um_{2(2)} \\
&\vdots \\
u_r(k) &= um_{(r)} + um_{1(r)} + um_{2(r)}
\end{aligned} \tag{3-6}$$

Donde

$$\begin{aligned}
um_{(i)} &= \sum_{j=1}^s M_{(ij)} y_{d(j)}(k) & i=1, \dots, r \\
um_{1(i)} &= \sum_{j=1}^s M_{1(ij)} y_{(j)}(k-1) & i=1, \dots, r \\
um_{2(i)} &= \sum_{j=1}^r M_{2(ij)} u_j(k-1) & i=1, \dots, r
\end{aligned} \tag{3-7}$$

Se ha planteado que las acciones de control deben ser iguales a lo largo del metaperiodo, por lo que de lo anterior se deduce que las componentes que las forman deben ser iguales, esta igualdad se logra haciendo que las filas de cada matriz sean iguales, por lo que generaran la misma componente al ser multiplicadas por el vector de referencias, el de salidas anteriores y el de acciones de control anteriores respectivamente.

Lo anterior se aplica en las secciones siguientes, empezando por un sistema SISO en el cual el control multifrecuencia es bajo un esquema MRIC. Seguidamente se hace el análisis para un sistema SISO, en el cual, tanto las medidas de las salidas como las actualizaciones de control se realizan en un número mayor a la unidad, esto con el fin de asegurar que el modelo multifrecuencia sea observable y controlable como se ha visto en el capítulo 2. Por último se extiende el análisis a los sistemas MIMO. Con esto se establecen las bases para el diseño de controladores que no presenten el rizado entre muestras, lo cual, se desarrolla en el siguiente capítulo.

### 3.2.1 Sistema SISO con r acciones de control y una sola medida de la salida.

Se analiza el comportamiento del controlador descrito en (3-1) asumiendo el caso multifrecuencia en el que se tienen  $r$  acciones de control y solo una medida de la salida de un sistema SISO. Como primer paso se establece el modelo BMIO específico para este sistema, para luego establecer la relación del modelo en representación interna con la representación en forma de función de transferencia, tanto para la medida intermuestreo como para la medida normal, dada la facilidad que tiene este tipo de modelado para pasar de una

representación a otra. Seguidamente se obtiene la función de transferencia en monofrecuencia para ambas medidas con el fin de analizar su comportamiento en estado estacionario. El siguiente paso consiste en analizar el comportamiento del sistema controlado por medio de las matrices  $M$ ,  $M_I$  y  $M_2$ , obteniéndose la expresión que define la salida intermuestreo y la salida normal, viéndose, que para que la medida intermuestreo coincida con la medida original de la salida, se debe hacer que las componentes de cada una de las matriz  $M$  y  $M_I$  sean iguales, y las filas de la matriz  $M_2$  sean iguales, en otras palabras que las acciones de control sean iguales a lo largo del metaperiodo  $T_0$ .

Los instantes de las acciones de control y muestreo son

$$Y_k = [y(KT_0 + t_1)] \quad U_k = \begin{bmatrix} u(kT_0 + t^1) \\ u(kT_0 + t^2) \\ \vdots \\ u(kT_0 + t^r) \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

Supongamos  $t_1 = T_0$

Se define la medida intermuestreo como

$$Y_{k,m} = [y(KT_0 + t_m)] \quad 0 \leq t_m < T_0 \quad (3-9)$$

Se define  $T$  como el máximo común divisor de  $t_m, t^1, t^2, \dots, t^r$  y  $t_1$

Se tiene el siguiente modelo BMIO

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x[(k+1)T_0] = A^N x_k + WU_k \\ Y_k &= O x_k + H U_k \end{aligned}$$

Donde de (2-6) (2-7) y (2-8) se tiene

$$W = [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} \dots A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} \quad B_{N-r_r}] \in R^{n^*N} \quad (3-10)$$

$$r_1 = t^1 / T, r_2 = t^2 / T, \dots, r_r = t^r / T \quad N = T_0 / T \quad (3-11)$$

$$O = [CA^N] \in R^{1^*n} \quad (3-12)$$

$$H = [CA^{N-r_2} B_{r_2-r_1} \quad \dots \quad CA^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} \quad CB_{N-r_r}] \in R^{1^*N} \quad (3-13)$$

Este nuevo sistema se puede expresar con matrices de funciones de transferencias como

$$Y(z) = G_1(z)U_1 + G_2(z)U_2 + \dots + G_r(z)U_r \quad (3-14)$$

Donde

$$G_i(z) = CA^N (zI - A^N)^{-1} A^{N-r_{i+1}} B_{r_{i+1}-r_i} + CA^{N-r_i} B_{r_i-r_{i-1}} \quad (3-15)$$

Los comportamientos entre los puntos de muestreo son analizados mediante el uso de la transformada  $z$  modificada. Esta es la transformada  $z$  ordinaria, simplemente retrasada  $\Delta T$  ( $m+\Delta=I$ ) segundos, este valor es una fracción del periodo de muestreo, ya que  $0 < m < 1$ . Esto queda expresado de la siguiente manera:

$$F(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - T + mT)z^{-k} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + mT)z^{-k}$$

En el caso del sistema multifrecuencia el retraso que se quiere analizar es una fracción del periodo envolvente  $T_0$  y dada la definición (3-9) se tiene que las medidas intermuestreo se expresan como:

$$Y(z, \frac{m}{N}) = G_1(z, \frac{m}{N})U_1 + G_2(z, \frac{m}{N})U_2 + \dots + G_r(z, \frac{m}{N})U_r \quad (3-16)$$

Donde

$$G_i(z, \frac{m}{N}) = CA^m (zI - A^N)^{-1} A^{N-r_{i+1}} B_{r_{i+1}-r_i} + h_{i,m} \quad (3-17)$$

$$h_{i,m} = CA^I B_J; \begin{bmatrix} m < r_i, I = 0, J = 0 \\ r_i < m < r_{i+1}, I = 0, J = m - r_i \\ m > r_i, I = m - r_{i+1}, J = r_{i+1} - r_i \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

$$m = \frac{t_m}{T} \quad \text{y} \quad 0 \leq \frac{m}{N} \leq 1$$

De lo anterior se deduce que

$$\lim_{m \rightarrow N} G_i(z, \frac{m}{N}) = G_i(z) \quad (3-19)$$

Ahora se establece las relaciones de la representación interna y externa del sistema monofrecuencia tanto para la medida normal como para la medida intermuestreo.

$$G(z) = CA^N (zI - A^N)^{-1} B_N + CB_N \quad (3-20)$$

$$G(z, \frac{m}{N}) = CA^m (zI - A^m)^{-1} B_m + CB_m \quad (3-21)$$

De (3-20) y (3-21) se puede observar que

$$\lim_{m \rightarrow N} G(z, \frac{m}{N}) = G(z) \quad (3-22)$$

Por otra parte se tiene que si  $G(s)$  no tiene polos en el origen entonces todos los valores propios de  $A_C$  son diferentes de cero, lo cual implica que  $A_C$  es invertible por lo que

$$B_N = \int_0^{NT} e^{A_C t} dt B_C = (A^N - I) A_C^{-1} B_C$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} G(z) &= CA^N (I - A^N)^{-1} (A^N - I) A_C^{-1} B_C + C(A^N - I) A_C^{-1} B_C \\ \lim_{z \rightarrow 1} G(z) &= -CA^N A_C^{-1} B_C + (CA^N - C) A_C^{-1} B_C \\ \lim_{z \rightarrow 1} G(z) &= -CA_C^{-1} B_C \end{aligned}$$

Además

$$B_m = \int_0^{mT} e^{A_C t} dt B_C = (A^m - I) A_C^{-1} B_C$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} G(z, \frac{m}{N}) &= CA^m (I - A^m)^{-1} (A^m - I) A_C^{-1} B_C + C(A^m - I) A_C^{-1} B_C \\ \lim_{z \rightarrow 1} G(z, \frac{m}{N}) &= -CA^m A_C^{-1} B_C + (CA^m - C) A_C^{-1} B_C \\ \lim_{z \rightarrow 1} G(z, \frac{m}{N}) &= -CA_C^{-1} B_C \end{aligned}$$

De lo que se puede ver que las funciones de transferencia en estado estacionario son iguales

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z, \frac{m}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (3-23)$$

De esta forma los resultados obtenidos por Moore (*et al*) [65] son aplicables al modelado BMIO. El siguiente paso es analizar el controlador de cancelación aplicado a este sistema multifrecuencia, por lo que de (3-2) se construye el siguiente diagrama de bloques:

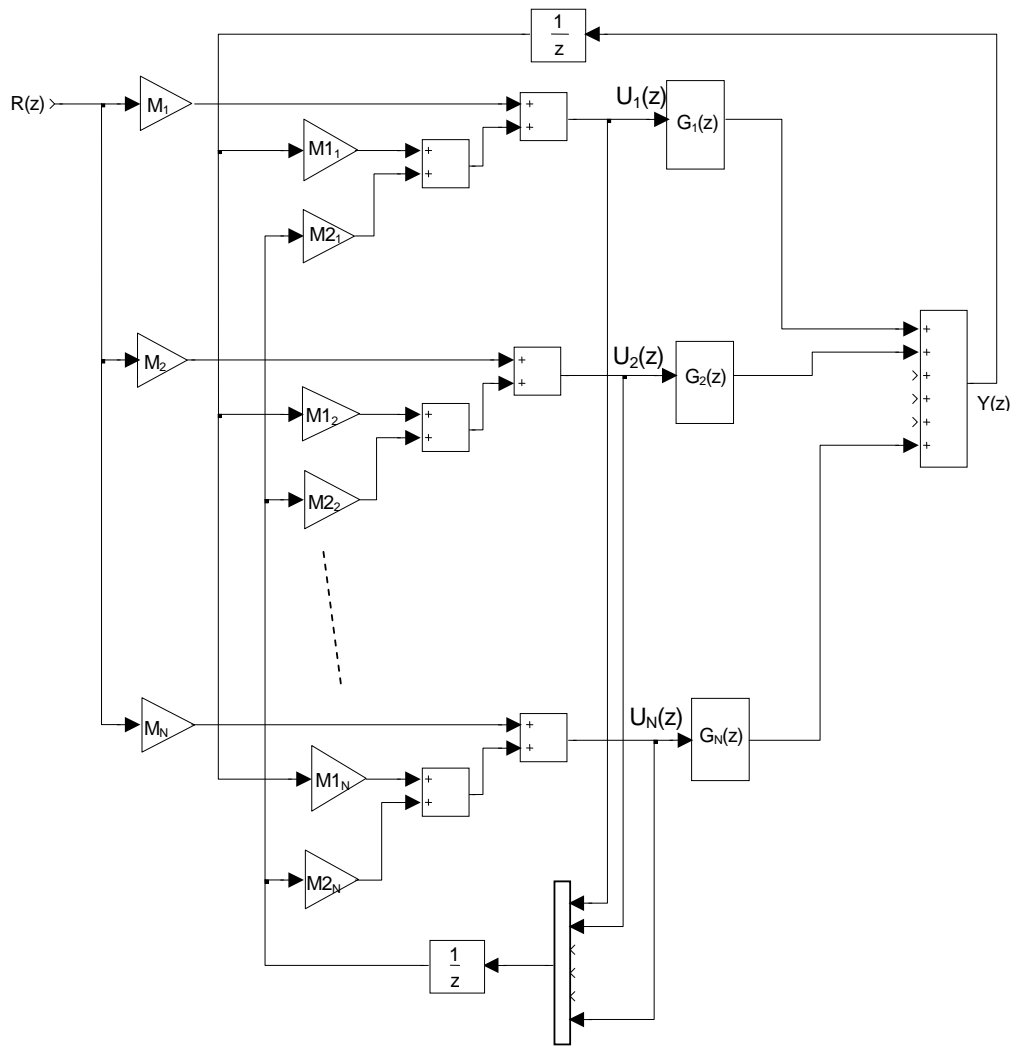


Fig. 3-7 Diagrama a bloques de un controlador de cancelación

donde

$M_{(i)}$  es la  $i$ -ésima componente de  $M$

$M_{1(i)}$  es la  $i$ -ésima componente de  $M_1$

$M_{2(i)}$  es la  $i$ -ésima fila de  $M_2$



Se definen los vectores  $\vec{G}(z), \vec{U}(z)$

$$\vec{G}(z) = [G_1(z), G_2(z), \dots, G_r(z)]$$

$$\vec{U}(z) = \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \vdots \\ U_r(z) \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

Del diagrama anterior se puede ver que la salida está dada por

$$Y(z) = \vec{G}(z) \cdot \vec{U}(z)$$

$$Y(z) = G_1(z)U_1(z) + G_2(z)U_2(z) + \dots + G_r(z)U_r(z) \quad (3-25)$$

Se obtiene la expresión que define las acciones de control del controlador de cancelación aplicado al sistema multifrecuencia.

$$\vec{U}(z) = MR(z) + M_1 \frac{Y(z)}{z} + M_2 \frac{\vec{U}(z)}{z} \quad (3-26)$$

$$\vec{U}(z) = [zI - M_2]^{-1} \left[ MR(z) + M_1 \frac{Y(z)}{z} \right] \quad (3-27)$$

Sustituyendo  $\vec{U}(z)$  en (3-25) queda

$$Y(z) = \vec{G}(z) [zI - M_2]^{-1} \left[ MR(z) + M_1 \frac{Y(z)}{z} \right]$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z\vec{G}(z)[zI - M_2]^{-1}M}{z - \vec{G}(z)[zI - M_2]^{-1}M_1} \quad (3-28)$$

De igual manera se obtienen las expresiones para la medida intermuestreo de la salida:

$$Y(z, \frac{m}{N}) = \vec{G}(z, \frac{m}{N}) \cdot \vec{U}(z)$$

$$Y(z, \frac{m}{N}) = G_1(z, \frac{m}{N})U_1(z) + G_2(z, \frac{m}{N})U_2(z) + \dots + G_r(z, \frac{m}{N})U_r(z) \quad (3-29)$$

Sustituyendo  $\vec{U}(z)$  de (3-27) en (3-29) queda

$$Y(z, \frac{m}{N}) = \bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} \left[ MR(z) + M_1 \frac{Y(z)}{z} \right]$$

Sustituyendo  $Y(z)$  de (3-28) en la anterior expresión, se tiene

$$Y(z, m) = \bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} MR(z) + \bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} \frac{M_1}{z} \frac{z\bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M}{z - \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M_1} R(z)$$

$$\frac{Y(z, m)}{R(z)} = \frac{z\bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} M}{z - \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M_1} + \varphi(z, \frac{m}{N})$$

Donde

$$\begin{aligned} \varphi(z, m) = & \frac{-\bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} M \cdot \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M_1}{z - \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M_1} \\ & + \frac{\bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} M_1 \cdot \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M}{z - \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M_1} \end{aligned}$$

Donde claramente se observa que la respuesta del sistema en los instantes de muestreo es diferente a la respuesta que se tiene en instantes intermuestrs, lo cual provoca el rizado a la salida del sistema.

Ahora bien, si se define

$$[zI - M_2]^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1r} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r1} & m_{r2} & \cdots & m_{rr} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} M &= \sum_{i=1}^r G_i(z, \frac{m}{N}) \sum_{j=1}^r m_{ij} M_{(j)} \\ \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M_1 &= \sum_{k=1}^r G_k(z) \sum_{l=1}^r m_{kl} M_{1(l)} \\ \bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} M \cdot \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M_1 &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r G_i(z, \frac{m}{N}) G_k(z) \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r m_{ij} M_{(j)} m_{kl} M_{1(l)} \\ \bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} M_1 &= \sum_{i=1}^r G_i(z, \frac{m}{N}) \sum_{j=1}^r m_{ij} M_{1(j)} \\ \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M &= \sum_{k=1}^r G_k(z) \sum_{l=1}^r m_{kl} M_{(l)} \\ \bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1} M_1 \cdot \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1} M &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r G_i(z, \frac{m}{N}) G_k(z) \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r m_{ij} M_{1(j)} m_{kl} M_{(l)}\end{aligned}$$

Quedando

$$\varphi(z, \frac{m}{N}) = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r G_i(z, \frac{m}{N}) G_k(z) \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r m_{ij} m_{kl} (M_{1(j)} M_{(l)} - M_{1(l)} M_{(j)})}{\sum_{k=1}^r G_k(z) \sum_{l=1}^r m_{kl} M_{1(l)}}$$

Si hacemos que las componentes de  $M$  y  $M_l$  sean iguales y que las filas de la matriz  $M_2$  sean iguales, es decir:

$$\begin{aligned}M_{(1)} &= M_{(2)} = \dots = M_{(r)} = M_{(C)} \\ M_{1(1)} &= M_{1(2)} = \dots = M_{1(r)} = M_{1(C)} \\ M_{2(1)} &= M_{2(2)} = \dots = M_{2(r)} = M_{2(C)}\end{aligned} \tag{3-30}$$

Donde

$M_{(i)}$  es la  $i$ -ésima componente de  $M$

$M_{1(i)}$  es la  $i$ -ésima componente de  $M_l$

$M_{2(i)}$  es la  $i$ -ésima fila de  $M_2$

$$\varphi(z, \frac{m}{N}) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N G_i(z, \frac{m}{N}) G_k(z) \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N m_{ij} m_{kl} (M_{1(C)} M_{(C)} - M_{1(C)} M_{(C)})}{\sum_{k=1}^N G_k(z) \sum_{l=1}^N m_{kl} M_{1(C)}}$$

Se observa que el termino  $\varphi(z, \frac{m}{N})$  se hace igual a cero y que

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z\bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1}M}{z - \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1}M_1}$$

$$\frac{Y(z, \frac{m}{N})}{R(z)} = \frac{z\bar{G}(z, \frac{m}{N})[zI - M_2]^{-1}M}{z - \bar{G}(z)[zI - M_2]^{-1}M_1}$$

De las expresiones anteriores se observa que para obtener  $Y(z)$  y  $Y(z, m / N)$  se multiplica a los vectores de funciones de transferencia  $\bar{G}(z)$  y  $\bar{G}(z, m / N)$  definidos en (3-24) y (3-29) por el mismo término, Para demostrar la equivalencia de estas dos expresiones se plantea nuevamente el sistema controlado, pero ahora, asumiendo que las acciones de control son iguales en todo el periodo envolvente  $T_0$

$$\bar{U}(z) = MR(z) + M_1 \frac{Y(z)}{z} + M_2 \frac{\bar{U}(z)}{z}$$

Como se ha definido antes las componentes de  $M$  y  $M_1$  son iguales y en el caso de  $M_2$ , esta matriz tiene sus filas iguales, por lo que analizando una sola acción de control se tiene que

$$U_1(z) = M_{(c)}R(z) + M_{1(c)} \frac{Y(z)}{z} + M_{2(c)} \frac{\bar{U}(z)}{z} \quad (3-31)$$

Claramente se puede ver que al ser las componentes iguales y en el caso de  $M_2$  sus filas iguales, se asegura que todas las acciones de control son iguales, es decir

$$U_1(z) = U_2(z) = \dots = U_r(z)$$

$$U_1(z) = M_{(c)}R(z) + M_{1(c)} \frac{Y(z)}{z} + \sum M_{2(c)} \frac{U_1(z)}{z}$$

Donde

$$\sum M_{2(c)} = M_{2(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1(z) = \frac{zM_{(c)}R(z) + M_{1(c)}Y(z)}{z - \sum M_{2(c)}}$$

Ampliando este resultado a cada actualización de la acción de control se tiene que

$$\bar{U}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{zM_{(c)}R(z) + M_{1(c)}Y(z)}{z - \sum M_{2(c)}} \quad (3-32)$$

Sustituyendo (3-32) en (3-25)

$$Y(z) = \bar{G}(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{zM_{(c)}R(z) + M_{1(c)}Y(z)}{z - \sum M_{2(c)}}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z \sum \bar{G}(z)M_{(c)}}{z - \sum M_{2(c)} - \sum \bar{G}(z)M_{1(c)}} \quad (3-33)$$

Para la medida intermuestreo aplicando (3-32) en (3-29) se tiene que:

$$Y(z, \frac{m}{N}) = \bar{G}(z, \frac{m}{N}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{zM_{(c)}R(z) + M_{1(c)}Y(z)}{z - \sum M_{2(c)}} \quad (3-34)$$

Sustituyendo  $Y(z)$  de (3-33) en (3-34) se tiene

$$Y(z, \frac{m}{N}) = \frac{z \sum \bar{G}(z, \frac{m}{N})M_{(c)}R(z)}{z - \sum M_{2(c)}} + \frac{\sum \bar{G}(z, \frac{m}{N})M_{1(c)}z \sum \bar{G}(z)M_{(c)}R(z)}{(z - \sum M_{2(c)})(z - \sum M_{2(c)} - \sum \bar{G}(z)M_{1(c)})}$$

$$Y(z, \frac{m}{N}) = \frac{z \sum \bar{G}(z, \frac{m}{N})M_{(c)}R(z)}{(z - \sum M_{2(c)} - \sum \bar{G}(z)M_{1(c)})} \quad (3-35)$$

Por otra parte al hacer las acciones de control iguales, de (3-14) se ve que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \vec{G}(z) \cdot \vec{U}(z) = G_1(z)U_1(z) + G_2(z)U_2(z) + \dots + G_r(z)U_r(z) \\ U_1(z) &= U_2(z) = \dots = U_r(z) = U(z) \\ Y(z) &= (G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_r(z))U(z) \end{aligned}$$

Además aplicando (3-15) en la expresión anterior, se observa que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r G_i(z) &= CA^N (zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r} \right] \\ &+ \left[ CA^{N-r_2} B_{r_1-r_r} + \dots + CA^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + CB_{N-r_r} \right] \\ Y(z) &= CA^N (zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r} \right] U(z) \\ &+ \left[ CA^{N-r_2} B_{r_1-r_r} + \dots + CA^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + CB_{N-r_r} \right] U(z) \\ Y(z) &= CA^N (zI - A^N)^{-1} WU(z) + HU(z) \end{aligned}$$

Que es el modelo BMIO del sistema asumiendo una sola actualización de la acción de control, por lo tanto la expresión anterior equivale a decir que:

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

Por lo que se puede asegurar que la suma de las funciones de transferencia definidas a partir del modelo multifrecuencia es equivalente a la función de transferencia del sistema monofrecuencia

$$\sum \vec{G}(z) = G(z) \quad (3-36)$$

Un análisis similar para la medida intermuestreo resulta

$$\begin{aligned} Y(z, \frac{m}{N}) &= \vec{G}(z, \frac{m}{N}) \cdot \vec{U}(z) = G_1(z, \frac{m}{N})U_1(z) + G_2(z, \frac{m}{N})U_2(z) + \dots + G_r(z, \frac{m}{N})U_r(z) \\ Y(z, \frac{m}{N}) &= (G_1(z, \frac{m}{N}) + G_2(z, \frac{m}{N}) + \dots + G_r(z, \frac{m}{N}))U(z) \end{aligned}$$

Aplicando (3-17) en la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r G_i(z, \frac{m}{N}) &= CA^m (zI - A^N)^{-1} [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}] \\ &+ [CA^{N-r_2} B_{r_1-r_r} + \dots + CA^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + CB_{N-r_r}] \\ Y(z, \frac{m}{N}) &= CA^m (zI - A^N)^{-1} [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}] U(z) \\ &+ [CA^{N-r_2} B_{r_1-r_r} + \dots + CA^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + CB_{N-r_r}] U(z) \end{aligned}$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola actualización de la acción de control pero con la medida de la salida en un instante intermuestreo, de lo que se deduce que la suma de las funciones de transferencia derivadas del modelo multifrecuencia definidas para la medida intermuestreo es equivalente a la función de transferencia monofrecuencia para la medida intermuestreo.

$$\begin{aligned} Y(z, \frac{m}{N}) &= G(z, \frac{m}{N}) U(z) \\ \sum \bar{G}(z, \frac{m}{N}) &= G(z, \frac{m}{N}) \end{aligned} \quad (3-37)$$

Por lo tanto de (3-23), (3-36) y (3-37) se deduce que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum \bar{G}(z, \frac{m}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum \bar{G}(z)$$

De (3-33) y (3-35) podemos decir que el comportamiento en estado estacionario de la medida intermuestreo es igual a la medida regular del sistema.

$$\lim_{z \rightarrow 1} Y(z, \frac{m}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} Y(z) \quad (3-38)$$

Con lo cual queda eliminado el rizado intermuestreo.

### 3.2.2 Sistema SISO con $r$ acciones de control y $s$ medidas de la salida.

Se extiende el análisis de la respuesta intermuestreo a un sistema multifrecuencia en el que se tienen  $r$  acciones de control y  $s$  medidas de la salida de un sistema SISO, siendo la primera acción de control al inicio del periodo envolvente  $T_0$  y la última medida de la salida al final del mismo. En primera instancia se definen las condiciones para que las medidas de la salida

sean todas iguales a lo largo del metaperiodo en estado estacionario, para luego analizar las medidas intermuestreo.

Los instantes de las acciones de control y muestreo son

$$Y_k = \begin{bmatrix} y(KT_0 + t_1) \\ y(KT_0 + t_2) \\ \vdots \\ y(KT_0 + t_s) \end{bmatrix} \quad U_k = \begin{bmatrix} u(kT_0 + t^1) \\ u(kT_0 + t^2) \\ \vdots \\ u(kT_0 + t^r) \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

Se define la medida intermuestreo de la  $i$ -ésima medida de la salida como

$$Y_{k,m_i} = [y(KT_0 + t_{m_i})] \quad t_{i-1} \leq t_{m_i} < t_i \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (3-40)$$

Se define  $T$  como el máximo común divisor de  $t_1, t_2, \dots, t_s, t_{m_1}, t^1, t^2, \dots, t^r$  y  $N = T/T_0$

Se tiene el siguiente modelo BMIO para un sistema multifrecuencia con  $r$  actualizaciones de la acción de control con  $s$  medidas de la salida.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x[(k+1)T_0] = A^N x_k + WU_k \\ Y_k &= O x_k + H U_k \end{aligned}$$

Donde de (2-6) (2-7) y (2-8) tenemos

$$W = [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} \dots A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} \quad B_{N-r_r}] \in R^{n*N} \quad (3-41)$$

$$r_1 = t^1 / T, r_2 = t^2 / T, \dots, r_r = t^r / T$$

$$O = \begin{bmatrix} CA^{S_1} \\ CA^{S_2} \\ \vdots \\ CA^{S_s} \end{bmatrix} \in R^{s*n} \quad (3-42)$$

$$s_1 = t_1 / T, s_2 = t_2 / T, \dots, s_s = t_s / T$$



$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s1} & \cdots & h_{sr} \end{bmatrix} \in R^{ps*mr}, h_{ij} = CA^i B_j; \begin{bmatrix} r_j < s_i, I = s_i - r_{j+1}, J = r_{j+1} - r_j \\ r_j < s_i < r_{j+1}, I = 0, J = s_i - r_j \\ s_i < r_j, I = 0, J = 0 \end{bmatrix} \quad (3-43)$$

Para cada medida de la salida, este sistema se puede expresar con matrices de funciones de transferencias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Y_i(z) &= G_{i,1}(z)U_1 + G_{i,2}(z)U_2 + \dots + G_{i,r}(z)U_r \quad i = 1, 2, \dots, s \\ Y_i(z) &= \bar{G}_i(z)\bar{U}(z) \\ \bar{G}_i(z) &= [G_{i,1}(z) \quad G_{i,2}(z) \quad \cdots \quad G_{i,r}(z)] \end{aligned} \quad (3-44)$$

Se establece la relación que guarda la representación interna del modelo BMIO con la funciones de transferencia que relacionan cada actualización de la acción de control con cada muestra de la salida.

$$G_{i,j}(z) = CA^{s_i} (zI - A^N)^{-1} A^{N-r_{j+1}} B_{r_{j+1}-r_j} + h_{i,j} \quad (3-45)$$

$$i = 1, 2, \dots, s \quad j = 1, 2, \dots, r$$

A continuación se trata de describir el comportamiento del sistema como si este tuviese una sola medida de la salida, esto con el fin de compararlo con el comportamiento del sistema para cada medida de la salida. Obsérvese que el modelo BMIO del sistema teniendo una sola medida de la salida está definido por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x[(k+1)T_0] = A^N x_k + WU_k \\ Y_k &= O x_k + HU_k \end{aligned}$$

Donde

$$W = [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} \dots A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} \quad B_{N-r_r}] \in R^{n*N} \quad (3-46)$$

$$r_1 = t^1/T, r_2 = t^2/T, \dots, r_r = t^r/T \quad N = T_0/T$$

$$O = [CA^N] \in R^{1*n} \quad (3-47)$$

$$H = [CA^{N-r_2} B_{r_2-r_1} \quad \cdots \quad CA^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} \quad CB_{N-r_r}] \in R^{1*N} \quad (3-48)$$

Por otra parte para una medida de la salida del sistema realizada al final del metaperiodo  $T_0$  se tiene que

$$Y_N(z) = G_{N,1}(z)U_1 + G_{N,2}(z)U_2 + \dots + G_{N,r}(z)U_r$$

Si se asume que las acciones de control son iguales

$$U_1(z) = U_2(z) = \dots = U_r(z) = U(z)$$

$$Y_N(z) = (G_{N,1}(z) + G_{N,2}(z) + \dots + G_{N,r}(z))U(z)$$

Aplicando (3-45) en la expresión anterior, se tiene que

$$\sum_{i=1}^r G_{N,i}(z) = CA^N(zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r} \right]$$

$$+ \left[ CA^{N-r_2} B_{r_1-r_r} + \dots + CA^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + CB_{N-r_r} \right]$$

$$Y_N(z) = CA^N(zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r} \right] U(z)$$

$$+ \left[ CA^{N-r_2} B_{r_1-r_r} + \dots + CA^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + CB_{N-r_r} \right] U(z)$$

$$Y_N(z) = CA^N(zI - A^N)^{-1} WU(z) + HU(z) \quad (3-49)$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola medida de la salida, por lo tanto, se deduce que la suma de las funciones de transferencia del sistema multifrecuencia de la última medida, cuando se mantiene la misma acción de control a lo largo del periodo envolvente, es equivalente a la función de transferencia del sistema cuando se tiene una sola medida de la salida, la cual, se ha observado en (3-36) que es equivalente a la función de transferencia del sistema monofrecuencia, es decir:

$$Y_N(z) = G(z)U(z)$$

$$\sum \vec{G}_N(z) = G(z) \quad (3-50)$$

Nótese que el sistema discreto monofrecuencia a periodo  $T_0$  está dado por

$$G(z) = CA^N(zI - A^N)^{-1} B_N + CB_N \quad (3-51)$$

Y para las medidas de la salida realizadas bajo el esquema (3-39) durante el metaperiodo.

$$G(z, \frac{s_i}{N}) = CA^{s_i} (zI - A^{s_i})^{-1} B_{s_i} + CB_{s_i} \quad (3-52)$$

De (3-51) y (3-52) se puede observar que

$$\lim_{s_i \rightarrow N} G(z, \frac{s_i}{N}) = G(z) \quad (3-53)$$

Obsérvese que haciendo las acciones de control iguales, para cada medida de la salida, se tiene que

$$\begin{aligned} U_1(z) &= U_2(z) = \dots = U_r(z) = U(z) \\ Y_i(z) &= (G_{i,1}(z) + G_{i,2}(z) + \dots + G_{i,r}(z))U(z) \end{aligned}$$

Sustituyendo (3-45) en la anterior expresión

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r G_{i,j}(z) &= CA^{s_i} (zI - A^N)^{-1} [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}] \\ &+ [h_{i,1} + h_{i,2} + \dots + h_{i,r}] \\ Y_i(z) &= CA^{s_i} (zI - A^N)^{-1} [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}] U(z) \\ &+ [h_{i,1} + h_{i,2} + \dots + h_{i,r}] U(z) \\ Y_i(z) &= CA^{s_i} (zI - A^N)^{-1} W_i U(z) + H_i U(z) \end{aligned} \quad (3-54)$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola medida de la salida en el instante  $t_{s_i}$  manteniendo la misma acción de control en el periodo envolvente, de lo que se deduce que la suma de las funciones de transferencia para cada medida de la salida del sistema multifrecuencia, es equivalente a la función de transferencia de la misma medida de la salida pero del sistema monofrecuencia, es decir:

$$\begin{aligned} Y_i(z) &= G(z, \frac{s_i}{N}) U(z) \\ \sum \tilde{G}_i(z) &= G(z, \frac{s_i}{N}) \end{aligned} \quad (3-55)$$

Por otra parte se tiene que si  $G(s)$  no tiene polos en el origen entonces todos los valores propios de  $A_c$  son diferentes de cero, lo cual implica que  $A_c$  es invertible por lo que

$$B_N = \int_0^{NT} e^{A_C t} dt B_C = (A^N - I) A_C^{-1} B_C$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z) = CA^N (I - A^N)^{-1} (A^N - I) A_C^{-1} B_C + C(A^N - I) A_C^{-1} B_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z) = -CA^N A_C^{-1} B_C + (CA^N - C) A_C^{-1} B_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z) = -CA_C^{-1} B_C$$

Además

$$B_{s_i} = \int_0^{s_i T} e^{A_C t} dt B_C = (A^{s_i} - I) A_C^{-1} B_C$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z, \frac{s_i}{N}) = CA^{s_i} (I - A^{s_i})^{-1} (A^{s_i} - I) A_C^{-1} B_C + C(A^{s_i} - I) A_C^{-1} B_C = -CA^{s_i} A_C^{-1} B_C + (CA^{s_i} - C) A_C^{-1} B_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z, \frac{s_i}{N}) = -CA_C^{-1} B_C$$

De lo que se obtiene

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z, \frac{s_i}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (3-56)$$

Por otra parte hacer las acciones de control iguales equivale a hacer las filas de las matrices de control iguales, es decir:

$$\begin{aligned} M_{(1)} &= M_{(2)} = \dots = M_{(r)} = M_{(C)} \\ M_{1(1)} &= M_{1(2)} = \dots = M_{1(r)} = M_{1(C)} \\ M_{2(1)} &= M_{2(2)} = \dots = M_{2(r)} = M_{2(C)} \end{aligned} \quad (3-57)$$

Donde

$M_{(i)}$  es la  $i$  - esima fila de  $M$

$M_{1(i)}$  es la  $i$  - esima fila de  $M_1$

$M_{2(i)}$  es la  $i$  - esima fila de  $M_2$

Además se definen los vectores

$$\vec{U}(z) = \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \vdots \\ U_r(z) \end{bmatrix} \quad \vec{Y}(z) = \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \vdots \\ Y_s(z) \end{bmatrix} \quad \vec{R}(z) = \begin{bmatrix} R_1(z) \\ R_2(z) \\ \vdots \\ R_s(z) \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

De (3-2) se tiene que

$$\vec{U}(z) = M\vec{R}(z) + M_1 \frac{\vec{Y}(z)}{z} + M_2 \frac{\vec{U}(z)}{z}$$

$$U_1(z) = M_{(c)}\vec{R}(z) + M_{1(c)} \frac{\vec{Y}(z)}{z} + M_{2(c)} \frac{\vec{U}(z)}{z}$$

Esto asegura que todas las acciones de control sean iguales es decir

$$U_1(z) = U_2(z) = \dots = U_r(z)$$

$$U_1(z) = M_{(c)}\vec{R}(z) + M_{1(c)} \frac{\vec{Y}(z)}{z} + \sum M_{2(c)} \frac{U_1(z)}{z}$$

Donde

$$\sum M_{2(c)} = M_{2(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1(z) = \frac{zM_{(c)}\bar{R}(z) + M_{1(c)}\bar{Y}(z)}{z - \sum M_{2(c)}}$$

$$\bar{U}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{zM_{(c)}\bar{R}(z) + M_{1(c)}\bar{Y}(z)}{z - \sum M_{2(c)}} \quad (3-59)$$

$$Y_i(z) = \bar{G}_i(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{zM_{(c)}\bar{R}(z) + M_{1(c)}\bar{Y}(z)}{z - \sum M_{2(c)}} = \sum \bar{G}_i(z) \frac{zM_{(c)}\bar{R}(z) + M_{1(c)}\bar{Y}(z)}{z - \sum M_{2(c)}}$$

De (3-55) se obtiene

$$Y_i(z) = G(z, \frac{s_i}{N}) \frac{zM_{(c)}\bar{R}(z) + M_{1(c)}\bar{Y}(z)}{z - \sum M_{2(c)}} \quad (3-60)$$

En el caso de una medida al final del metaperiodo de (3-50) se tiene que

$$Y_N(z) = G(z) \frac{zM_{(c)}\bar{R}(z) + M_{1(c)}\bar{Y}(z)}{z - \sum M_{2(c)}} \quad (3-61)$$

De (3-56) se puede afirmar que al hacer las filas de las matrices de control  $M$ ,  $M_1$  y  $M_2$  iguales, las medidas de las salidas en estado estacionario son iguales, a lo largo del periodo envolvente  $T_0$ , es decir:

$$\lim_{z \rightarrow 1} Y_i(z) = \lim_{z \rightarrow 1} Y_N(z) = \lim_{z \rightarrow 1} Y(z) \quad (3-62)$$

Hasta el momento solo se ha visto que hacer las acciones de control iguales a lo largo del periodo envolvente asegura que las medidas de la salida en estado estacionario son iguales, pero no se ha estudiado el comportamiento intermuestreo. A continuación se analizan las medidas realizadas entre dos muestras, para lo que se define la matriz de funciones de transferencia  $\bar{G}(z)$

$$\bar{G}(z) = \begin{bmatrix} \bar{G}_1(z) \\ \bar{G}_2(z) \\ \vdots \\ \bar{G}_s(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1,1}(z), & G_{1,2}(z), & \cdots, & G_{1,r}(z) \\ G_{2,1}(z), & G_{2,2}(z), & \cdots, & G_{2,r}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s,1}(z), & G_{s,2}(z), & \cdots, & G_{s,r}(z) \end{bmatrix} \quad (3-63)$$

$$\bar{Y}(z) = \bar{G}(z) \cdot \bar{U}(z) \quad (3-64)$$

Asumiendo que las filas de las matrices de control son iguales como se definen en (3-57) y de (3-2) se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{U}(z) &= M\bar{R}(z) + M_1 \frac{\bar{Y}(z)}{z} + M_2 \frac{\bar{U}(z)}{z} \\ U_1(z) &= M_{(c)}\bar{R}(z) + M_{1(c)} \frac{\bar{Y}(z)}{z} + M_{2(c)} \frac{\bar{U}(z)}{z} \end{aligned}$$

Asumiendo que la referencia es constante durante el metaperiodo  $T_\theta$ , junto a que en estado estacionario las medidas de la salida son iguales como se muestra (3-62), la expresi3n de las acciones de control queda definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U_1(z) &= U_2(z) = \dots = U_r(z) \\ Y_1(z) &= Y_2(z) = \dots = Y_s(z) = Y(z) \\ R_1(z) &= R_2(z) = \dots = R_s(z) = R(z) \end{aligned}$$

$$U_1(z) = \sum M_{(c)}R(z) + \sum M_{1(c)} \frac{Y(z)}{z} + \sum M_{2(c)} \frac{U_1(z)}{z}$$

Donde

$$\sum M_{(c)} = M_{(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \sum M_{1(c)} = M_{1(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \sum M_{2(c)} = M_{2(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1(z) = \frac{z \sum M_{(c)}R(z) + \sum M_{1(c)}Y(z)}{z - \sum M_{2(c)}}$$

$$\vec{U}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z \sum M_{(c)} R(z) + \sum M_{1(c)} Y(z)}{z - \sum M_{2(c)}} \quad (3-65)$$

$$Y_i(z) = \vec{G}_i(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z \sum M_{(c)} R(z) + \sum M_{1(c)} Y_i(z)}{z - \sum M_{2(c)}} = \sum \vec{G}_i(z) \frac{z \sum M_{(c)} R(z) + \sum M_{1(c)} Y_i(z)}{z - \sum M_{2(c)}}$$

$$Y_i(z) = \frac{z \sum \vec{G}_i(z) \sum M_{1(c)} R(z)}{z - \sum M_{2(c)} - \sum \vec{G}_i(z) \sum M_{1(c)}} \quad (3-66)$$

Obsérvese que haciendo las acciones de control iguales, para cada medida de la salida, se tiene que

$$U_1(z) = U_2(z) = \dots = U_r(z) = U(z)$$

$$Y_i(z) = (G_{i,1}(z) + G_{i,2}(z) + \dots + G_{i,r}(z))U(z)$$

Sustituyendo (3-45) en la anterior expresión

$$\sum_{j=1}^r G_{i,j}(z) = CA^{s_i} (zI - A^N)^{-1} [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}]$$

$$+ [h_{i,1} + h_{i,2} + \dots + h_{i,r}]$$

$$Y(z) = CA^{s_i} (zI - A^N)^{-1} [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}] U(z)$$

$$+ [h_{i,1} + h_{i,2} + \dots + h_{i,r}] U(z)$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola medida de la salida en el instante  $t_{s_i}$  al mantener la acción de control igual en el periodo envolvente, de lo que se deduce que la suma de las funciones de transferencia del sistema para una medida de la salida del sistema multifrecuencia, equivale a la función de transferencia para esa misma medida pero del sistema monofrecuencia, es decir:

$$Y_i(z) = G_i(z)U(z)$$

$$\sum \vec{G}_i(z) = G_i(z) \quad (3-67)$$



De igual manera las salidas tomadas en los instantes intermuestreo quedan como

$$\bar{Y}(z, \frac{m}{N}) = \begin{bmatrix} Y_1(z, \frac{m_1}{N}) \\ Y_2(z, \frac{m_2}{N}) \\ \vdots \\ Y_s(z, \frac{m_s}{N}) \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

$$\bar{G}(z, \frac{m}{N}) = \begin{bmatrix} \bar{G}_1(z, \frac{m_1}{N}) \\ \bar{G}_2(z, \frac{m_2}{N}) \\ \vdots \\ \bar{G}_s(z, \frac{m_s}{N}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1,1}(z, \frac{m_1}{N}), & G_{1,2}(z, \frac{m_1}{N}), & \dots, & G_{1,r}(z, \frac{m_1}{N}) \\ G_{2,1}(z, \frac{m_2}{N}), & G_{2,2}(z, \frac{m_2}{N}), & \dots, & G_{2,r}(z, \frac{m_2}{N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s,1}(z, \frac{m_s}{N}), & G_{s,2}(z, \frac{m_s}{N}), & \dots, & G_{s,r}(z, \frac{m_s}{N}) \end{bmatrix}$$

$$Y_i(z, \frac{m_i}{N}) = G_{i,1}(z, \frac{m_i}{N})U_1 + G_{i,2}(z, \frac{m_i}{N})U_2 + \dots + G_{i,r}(z, \frac{m_i}{N})U_r \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (3-69)$$

Y

$$G_{i,j}(z, \frac{m_i}{N}) = CA^{m_i} (zI - A^N)^{-1} A^{N-r_{j+1}} B_{r_{j+1}-r_j} + h_{m_i,j} \quad (3-70)$$

$$h_{m_i,j} = CA^I B_{J; \begin{cases} m_i < r_j, I = 0, J = 0 \\ r_j < m_i < r_{j+1}, I = 0, J = m_i - r_j \\ m_i > r_j, I = m_i - r_{j+1}, J = r_{j+1} - r_j \end{cases}}$$

$$m_i = \frac{t_{m_i}}{T} \quad \text{y} \quad 0 \leq \frac{m_i}{N} \leq 1$$

Al igual que se realizó para las medidas de la salida, se procede a encontrar la relación entre las funciones de transferencia del sistema multifrecuencia con la función de transferencia del sistema monofrecuencia. Obsérvese que haciendo las acciones de control iguales, para cada medida intermuestreo de la salida, se tiene que

$$U_1(z) = U_2(z) = \dots = U_r(z) = U(z)$$

$$Y_i(z, \frac{m_i}{N}) = (G_{i,1}(z, \frac{m_i}{N}) + G_{i,2}(z, \frac{m_i}{N}) + \dots + G_{i,r}(z, \frac{m_i}{N}))U(z)$$

Sustituyendo (3-70) en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r G_{i,j} \left( z, \frac{m_i}{N} \right) &= CA^{m_i} (zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r} \right] \\ &+ \left[ h_{m_i,1} + h_{m_i,2} + \dots + h_{m_i,r} \right] \\ Y \left( z, \frac{m_i}{N} \right) &= CA^{m_i} (zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r} \right] U(z) \\ &+ \left[ h_{m_i,1} + h_{m_i,2} + \dots + h_{m_i,r} \right] U(z) \end{aligned}$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola medida de la salida en el instante  $t_{m_i}$ . Nuevamente se observa que la suma de las funciones de transferencia del sistema para una medida intermuestreo de la salida del sistema multifrecuencia, equivale a la función de transferencia para esa misma medida pero del sistema monofrecuencia, es decir:

$$\begin{aligned} Y_i \left( z, \frac{m_i}{N} \right) &= G_i \left( z, \frac{m_i}{N} \right) U(z) \\ \sum \tilde{G}_i \left( z, \frac{m_i}{N} \right) &= G_i \left( z, \frac{m_i}{N} \right) \end{aligned} \quad (3-71)$$

Se debe recordar que el sistema discreto monofrecuencia a periodo  $T_0$  está dado por

$$G_i(z) = CA^{s_i} (zI - A^{s_i})^{-1} B_{s_i} + CB_{s_i} \quad (3-72)$$

Y para la medida intermuestreo asociada a la  $i$ -ésima medida.

$$G_i \left( z, \frac{m_i}{N} \right) = CA^{m_i} (zI - A^{m_i})^{-1} B_{m_i} + CB_{m_i} \quad (3-73)$$

De (3-72) y (3-73) se puede observar que

$$\lim_{m_i \rightarrow s_i} G_i \left( z, \frac{m_i}{N} \right) = G_i(z) \quad (3-74)$$

Asumiendo que  $G(s)$  no tiene polos en el origen entonces todos los valores propios de  $A_C$  son diferentes de cero, lo cual implica que  $A_C$  es invertible por lo que

$$B_{s_i} = \int_0^{s_i T} e^{A_c t} dt B_C = (A^{s_i} - I) A_C^{-1} B_C$$

por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_i(z) = C A^{s_i} (I - A^{s_i})^{-1} (A^{s_i} - I) A_C^{-1} B_C + C (A^{s_i} - I) A_C^{-1} B_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_i(z) = -C A^{s_i} A_C^{-1} B_C + (C A^{s_i} - C) A_C^{-1} B_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_i(z) = -C A_C^{-1} B_C$$

Además

$$B_{m_i} = \int_0^{m_i T} e^{A_c t} dt B_C = (A^{m_i} - I) A_C^{-1} B_C$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_i(z, \frac{m_i}{N}) = C A^{m_i} (I - A^{m_i})^{-1} (A^{m_i} - I) A_C^{-1} B_C + C (A^{m_i} - I) A_C^{-1} B_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_i(z, \frac{m_i}{N}) = -C A^{m_i} A_C^{-1} B_C + (C A^{m_i} - C) A_C^{-1} B_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_i(z, \frac{m_i}{N}) = -C A_C^{-1} B_C$$

De lo anterior se deduce que el comportamiento en estado estacionario de la función de transferencia del sistema monofrecuencia para la medida realizada en el instante  $t_{m_i}$ , es igual a la función de transferencia del sistema monofrecuencia de la medida intermuestreo asociada a esa medida  $i$ .

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_i(z, \frac{m_i}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} G_i(z) \quad (3-75)$$

De (3-69) se tiene que

$$\bar{Y}(z, \frac{m}{N}) = \bar{G}(z, \frac{m}{N}) \cdot \bar{U}(z)$$

Sustituyendo  $\bar{U}(z)$  de (3-65) queda que, para la medida intermuestreo asociada a la  $i$ -ésima medida de la salida se tiene:

$$Y_i(z, \frac{m_i}{N}) = \sum \bar{G}_i(z, \frac{m_i}{N}) \frac{z \sum M_{(c)} R(z) + \sum M_{1(c)} Y_i(z)}{z - \sum M_{2(c)}}$$

Sustituyendo  $Y_i(z)$  de (3-66) se obtiene

$$Y_i(z, \frac{m_i}{N}) = \sum \bar{G}_i(z, \frac{m_i}{N}) \frac{zM_{(c)}R(z)}{z - \sum M_{2(c)}} + \frac{zM_{1(c)} \sum \bar{G}_i(z) \sum M_{1(c)}R(z)}{(z - \sum M_{2(c)})(z - \sum M_{2(c)} - \sum \bar{G}_i(z) \sum M_{1(c)})}$$

$$Y_i(z, \frac{m_i}{N}) = \frac{z \sum \bar{G}_i(z, \frac{m_i}{N}) \sum M_{1(c)}R(z)}{z - \sum M_{2(c)} - \sum \bar{G}_i(z) \sum M_{1(c)}}$$

Comparando (3-66) con la expresión anterior y de (3-67) (3-71) y (3-75) podemos decir que

$$\lim_{z \rightarrow 1} Y_i(z, \frac{m_i}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} Y_i(z) \quad (3-76)$$

Con el resultado anterior aunado al obtenido en (3-62), se puede concluir que haciendo que las filas de las matrices de control sean iguales se elimina el rizado intermuestreo.

### 3.2.3 Sistema MIMO con $r$ acciones de control y $s$ medidas de la salida.

Ahora se analiza un sistema MIMO en cual se tienen  $r$  entradas y  $s$  salidas, éste sistema se define mediante la siguiente matriz de funciones de transferencia

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s1}(s) & G_{s2}(s) & \cdots & G_{sr}(s) \end{bmatrix} \quad (3-77)$$

Las muestras de las salidas y las actualizaciones de las acciones de control siguen el siguiente esquema:

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_1(kT_o + t_{1,1}) \\ y_2(kT_o + t_{2,1}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,1}) \\ y_1(kT_o + t_{1,2}) \\ y_2(kT_o + t_{2,2}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,2}) \\ \vdots \\ y_1(kT_o + t_{1,f_1}) \\ y_2(kT_o + t_{2,f_2}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,f_s}) \end{bmatrix} \quad U_k = \begin{bmatrix} u_1(kT_o + t_1^1) \\ u_2(kT_o + t_2^1) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^1) \\ u_1(kT_o + t_1^2) \\ u_2(kT_o + t_2^2) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^2) \\ \vdots \\ u_1(kT_o + t_1^{g_1}) \\ u_2(kT_o + t_2^{g_2}) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^{g_r}) \end{bmatrix} \quad (3-78)$$

Se tienen  $f_1, f_2, \dots, f_s$  medidas para cada una de las  $s$  salidas y  $g_1, g_2, \dots, g_r$  actualizaciones para cada una de las  $r$  entradas. Se define  $T$  como el máximo común divisor de  $t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,f_1}, t_{2,1}, t_{2,2}, \dots, t_{2,f_2}, t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,f_s}, t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^{g_1}, t_2^1, t_2^2, \dots, t_2^{g_2}, t_r^1, t_r^2, \dots, t_r^{g_r}$  y  $N = T / T_0$

El modelo BMIO para este sistema queda definido por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x[(k+1)T_0] = A^N x_k + WU_k \\ Y_k &= O x_k + HU_k \end{aligned}$$

Donde de (2-11) (2-12) y (2-13) tenemos

$$W \begin{bmatrix} A^{N-r_1^2} B(:,1)_{r_1^2-r_1^1}, A^{N-r_2^2} B(:,2)_{r_2^2-r_2^1}, \dots, A^{N-r_r^2} B(:,r)_{r_r^2-r_r^1}, \dots, A^{N-r_1^{g_1}} B(:,1)_{r_1^{g_1}-r_1^{g_1-1}}, \dots, \\ A^{N-r_r^{g_r}} B(:,r)_{r_r^{g_r}-r_r^{g_r-1}}, B(:,1)_{N-r_1^{g_1}}, \dots, B(:,r)_{N-r_r^{g_r}} \end{bmatrix} \in R^{n^*(g_1+g_2+\dots+g_r)} \quad (3-79)$$

Donde

$$\begin{aligned} r_j^l &= t_j^l / T \\ j &= 1, 2, \dots, r \\ l &= 1, 2, \dots, g_j \end{aligned}$$

$$O = \begin{bmatrix} C(1,:)A^{S_{1,1}} \\ C(2,:)A^{S_{2,1}} \\ \vdots \\ C(s,:)A^{S_{s,1}} \\ C(1,:)A^{S_{1,2}} \\ C(2,:)A^{S_{2,2}} \\ \vdots \\ C(s,:)A^{S_{s,2}} \\ \vdots \\ C(1,:)A^{S_{1,f_1}} \\ C(2,:)A^{S_{2,f_2}} \\ \vdots \\ C(s,:)A^{S_{s,f_s}} \end{bmatrix} \in R^{(f_1+f_2+\dots+f_s)*n} \quad (3-80)$$

$$\begin{aligned} s_{i,k} &= t_{i,k} / T \\ i &= 1, 2, \dots, s \\ k &= 1, 2, \dots, f_i \end{aligned}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{1,1}^{1,1} & h_{1,2}^{1,1} & \dots & h_{1,r}^{1,1} & h_{1,1}^{1,2} & h_{1,2}^{1,2} & \dots & h_{1,r}^{1,2} & \dots & h_{1,1}^{1,g_1} & h_{1,2}^{1,g_2} & \dots & h_{1,r}^{1,g_r} \\ h_{2,1}^{1,1} & h_{2,2}^{1,1} & \dots & h_{2,r}^{1,1} & h_{2,1}^{1,2} & h_{2,2}^{1,2} & \dots & h_{2,r}^{1,2} & \dots & h_{2,1}^{1,g_1} & h_{2,2}^{1,g_2} & \dots & h_{2,r}^{1,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{1,1} & h_{s,2}^{1,1} & \dots & h_{s,r}^{1,1} & h_{s,1}^{1,2} & h_{s,2}^{1,2} & \dots & h_{s,r}^{1,2} & \dots & h_{s,1}^{1,g_1} & h_{s,2}^{1,g_2} & \dots & h_{s,r}^{1,g_r} \\ h_{1,1}^{2,1} & h_{1,2}^{2,1} & \dots & h_{1,r}^{2,1} & h_{1,1}^{2,2} & h_{1,2}^{2,2} & \dots & h_{1,r}^{2,2} & \dots & h_{1,1}^{2,g_1} & h_{1,2}^{2,g_2} & \dots & h_{1,r}^{2,g_r} \\ h_{2,1}^{2,1} & h_{2,2}^{2,1} & \dots & h_{2,r}^{2,1} & h_{2,1}^{2,2} & h_{2,2}^{2,2} & \dots & h_{2,r}^{2,2} & \dots & h_{2,1}^{2,g_1} & h_{2,2}^{2,g_2} & \dots & h_{2,r}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{2,1} & h_{s,2}^{2,1} & \dots & h_{s,r}^{2,1} & h_{s,1}^{2,2} & h_{s,2}^{2,2} & \dots & h_{s,r}^{2,2} & \dots & h_{s,1}^{2,g_1} & h_{s,2}^{2,g_2} & \dots & h_{s,r}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1,1}^{f_1,1} & h_{1,2}^{f_1,1} & \dots & h_{1,r}^{f_1,1} & h_{1,1}^{f_1,2} & h_{1,2}^{f_1,2} & \dots & h_{1,r}^{f_1,2} & \dots & h_{1,1}^{f_1,g_1} & h_{1,2}^{f_1,g_2} & \dots & h_{1,r}^{f_1,g_r} \\ h_{2,1}^{f_2,1} & h_{2,2}^{f_2,1} & \dots & h_{2,r}^{f_2,1} & h_{2,1}^{f_2,2} & h_{2,2}^{f_2,2} & \dots & h_{2,r}^{f_2,2} & \dots & h_{2,1}^{f_2,g_1} & h_{2,2}^{f_2,g_2} & \dots & h_{2,r}^{f_2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{f_s,1} & h_{s,2}^{f_s,1} & \dots & h_{s,r}^{f_s,1} & h_{s,1}^{f_s,2} & h_{s,2}^{f_s,2} & \dots & h_{s,r}^{f_s,2} & \dots & h_{s,1}^{f_s,g_1} & h_{s,2}^{f_s,g_2} & \dots & h_{s,r}^{f_s,g_r} \end{bmatrix} \quad (3-81)$$

$$H \in R^{(f_1+f_2+\dots+f_s) \times (g_1+g_2+\dots+g_r)},$$

$$h_{i,j}^{k,l} = C(i,:)A^l B(:,j)_J; \begin{cases} r_j^l < s_{i,k}, I = s_{i,k} - r_j^{l+1}, J = r_j^{l+1} - r_j^l \\ r_j^l < s_{i,k} < r_j^{l+1}, I = 0, J = s_{i,k} - r_j^l \\ s_{i,k} < r_j^l, I = 0, J = 0 \end{cases}$$

Este sistema se puede expresar con matrices de funciones de transferencias. Nótese que cada componente de esta matriz es otra matriz de funciones, que relaciona las medidas de una misma salida con las acciones de control de una sola entrada, por esta razón es necesario reordenar los vectores tanto de muestreo de las salidas como las acciones de control.

$$\vec{Y}(z) = \vec{G}(z)\vec{U}(z)$$

$$\vec{G}(z) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11}(z) & \bar{G}_{12}(z) & \cdots & \bar{G}_{1r}(z) \\ \bar{G}_{21}(z) & \bar{G}_{22}(z) & \cdots & \bar{G}_{2r}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{G}_{s1}(z) & \bar{G}_{s2}(z) & \cdots & \bar{G}_{sr}(z) \end{bmatrix} \quad (3-82)$$

Los vectores reordenados quedan de la siguiente forma:

$$\vec{Y}(z) = \begin{bmatrix} Y_{1,1}(z) \\ Y_{1,2}(z) \\ \vdots \\ Y_{1,f_1}(z) \\ Y_{2,1}(z) \\ Y_{2,2}(z) \\ \vdots \\ Y_{2,f_2}(z) \\ \vdots \\ Y_{s,1}(z) \\ Y_{s,2}(z) \\ \vdots \\ Y_{s,f_s}(z) \end{bmatrix} \quad \vec{U}(z) = \begin{bmatrix} U_1^1(z) \\ U_1^2(z) \\ \vdots \\ U_1^{g_1}(z) \\ U_2^1(z) \\ U_2^2(z) \\ \vdots \\ U_2^{g_2}(z) \\ \vdots \\ U_r^1(z) \\ U_r^2(z) \\ \vdots \\ U_r^{g_r}(z) \end{bmatrix} \quad (3-83)$$

Donde cada componente de la matriz de funciones de transferencia se define como

$$\bar{G}_{i,j}(z) = \begin{bmatrix} G_{i,j}^{1,1}(z) & G_{i,j}^{1,2}(z) & \cdots & G_{i,j}^{1,g_j}(z) \\ G_{i,j}^{2,1}(z) & G_{i,j}^{2,2}(z) & \cdots & G_{i,j}^{2,g_j}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{i,j}^{f_i,1}(z) & G_{i,j}^{f_i,2}(z) & \cdots & G_{i,j}^{f_i,g_j}(z) \end{bmatrix}$$

$Y_{i,k}(z)$  corresponde a  $y(KT_0 + t_{i,k})$  (3-84)

$U_j^l(z)$  corresponde a  $u(KT_0 + t_j^l)$

Donde

$$G_{i,j}^{k,l}(z) = C(i,:)A^{s_{i,k}}(zI - A^N)^{-1}A^{N-r_j^{l+1}}B(:,j)_{r_j^{l+1}-r_j^l} + h_{i,j}^{k,l}$$

$i = 1, 2, \dots, s \quad j = 1, 2, \dots, r$  (3-85)

$k = 1, 2, \dots, f_i \quad l = 1, 2, \dots, g_j$

El análisis que se realiza a continuación es similar al realizado en la sección anterior, donde para cada función de transferencia  $\bar{G}_{i,j}(z)$  se estudia el comportamiento de las medidas de la salida  $i$  respecto a la actualizaciones de la acción de control asociada a la entrada  $j$ , primero se establecerán las condiciones para que las medidas de dicha salida en estado estacionario sean iguales, para luego estudiar las medidas intermuestreo de la misma salida.

Obsérvese que el modelo BMIO para cada función de transferencia  $\bar{G}_{i,j}(z)$  del sistema teniendo una sola medida de la salida en  $KT_0$  está definido por:

$$x_{k+1} = x[(k+1)T_0] = A^N x_k + W_{i,j} U_{k(j)}$$

$$Y_{k(i)} = O_{i,j} x_k + H_{i,j} U_{k(j)}$$

Donde

$$W_{i,j} = \begin{bmatrix} A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} \cdots A^{N-r_j^{g_j}} B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} & B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \end{bmatrix} \in R^{n^*g_j} \quad (3-86)$$

$$O_{i,j} = [C(i,:)A^N] \in R^{1*n} \quad (3-87)$$

$$H_{i,j} = \begin{bmatrix} C(i,:)A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} \cdots C(i,:)A^{N-r_j^{g_j}} B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} & B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \end{bmatrix} \in R^{1*g_j} \quad (3-88)$$

Por otra parte para una medida de la salida realizada al final del metaperiodo  $T_0$  de cada función de transferencia  $\bar{G}_{i,j}(z)$  del sistema se tiene que



$$Y_{i,N}(z) = \sum_{j=1}^r G_{i,j}^{N,1}(z)U_j^1 + G_{i,j}^{N,2}(z)U_j^2 + \dots + G_{i,j}^{N,g_j}(z)U_j^{g_j} \quad (3-89)$$

Si se asume que las acciones de control son iguales para cada entrada a lo largo del metaperiodo

$$U_j^1(z) = U_j^2(z) = \dots = U_j^{g_j}(z) = U_j(z)$$

$$Y_{i,N}(z) = \sum_{j=1}^r (G_{i,j}^{N,1}(z) + G_{i,j}^{N,2}(z) + \dots + G_{i,j}^{N,g_j}(z))U_j \quad (3-90)$$

Sustituyendo (3-83) en la anterior expresión

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{N,l}(z) = \\ & C(i,:)A^N(zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} + \dots + A^{N-r_j^{g_j}} B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} + B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] \\ & + \left[ C(i,:)A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} + \dots + C(i,:)A^{N-r_j^{g_j}} B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} + CB(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] \\ & Y_{i,N}(z) = \\ & \sum_{j=1}^r C(i,:)A^N(zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} + \dots + A^{N-r_j^{g_j}} B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} + B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] U_j(z) \\ & + \left[ C(i,:)A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} + \dots + C(i,:)A^{N-r_j^{g_j}} B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} + CB(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] U_j(z) \\ & Y_{i,N}(z) = \sum_{j=1}^r C(i,:)A^N(zI - A^N)^{-1} W_{i,j} U_j(z) + H_{i,j} U_j(z) \end{aligned}$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola medida de la salida  $i$ , por lo tanto se deduce que es la suma de la funciones de transferencia del sistema multifrecuencia de la última medida, cuando se mantiene la misma acción de control a lo largo del periodo envolvente, es equivalente a la función de transferencia del sistema cuando se tiene una solo medida de la salida, la cual, a su vez es equivalente a la función de transferencia del sistema monofrecuencia, es decir:

$$\begin{aligned}
Y_i(z) &= \bar{\bar{G}}_i(z) \bar{\bar{U}}(z) \\
\bar{\bar{G}}_i(z) &= [G_{i,1}(z) \quad G_{i,2}(z) \quad \cdots \quad G_{i,r}(z)] \\
\bar{\bar{U}}(z) &= [U_1(z) \quad U_2(z) \quad \cdots \quad U_r(z)]^T \\
\sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{N,l}(z) &= G_{i,j}(z) \quad j = 1, 2, \dots, r
\end{aligned} \tag{3-91}$$

Nótese que el sistema discreto monofrecuencia a periodo  $T_0$  está dado por

$$G_{i,j}(z) = C(i, :) A^N (zI - A^N)^{-1} B(:, j)_N + C(i, :) B(:, j)_N \tag{3-92}$$

Y para las medidas realizadas durante el metaperiodo.

$$G_{i,j}(z, \frac{S_{i,k}}{N}) = C(i, :) A^{S_{i,k}} (zI - A^{S_{i,k}})^{-1} B(:, j)_{S_{i,k}} + C(i, :) B(:, j)_{S_{i,k}} \tag{3-93}$$

De (3-92) y (3-93) se puede observar que

$$\lim_{S_{i,k} \rightarrow N} G_{i,j}(z, \frac{S_{i,k}}{N}) = G_{i,j}(z) \tag{3-94}$$

Nuevamente haciendo que las acciones de control sean iguales para cada entrada a lo largo del metaperiodo

$$U_j^1(z) = U_j^2(z) = \dots = U_j^{g_j}(z) = U_j(z)$$

Para la  $k$ -ésima medida de la  $i$ -ésima entrada se tiene que:

$$Y_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^r (G_{i,j}^{k,1}(z) + G_{i,j}^{k,2}(z) + \dots + G_{i,j}^{k,g_j}(z)) U_j$$

Sustituyendo (3-85) en la anterior expresión

$$\sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{k,l}(z) = C(i,:)A^{s_{i,k}}(zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} + \dots + A^{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} B(:,j)_{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} + B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] + [h_{i,j}^{k,1} + h_{i,j}^{k,2} + \dots + h_{i,j}^{k,g_j}]$$

$$Y_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^r C(i,:)A^{s_{i,k}}(zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} + \dots + A^{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} B(:,j)_{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} + B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] U_j(z) + [h_{i,j}^{k,1} + h_{i,j}^{k,2} + \dots + h_{i,j}^{k,g_j}] U_j(z)$$

$$Y_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^r C(i,:)A^{s_{i,k}}(zI - A^N)^{-1} W_{i,j} U_j(z) + H_{i,j} U_j(z)$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola medida de la salida en el instante  $t_{i,k}$  cuando la misma acción de control para cada entrada  $j$  es aplicada en el periodo envolvente, de lo que se deduce que la suma de las funciones de transferencia para cada medida de la salida  $i$  del sistema multifrecuencia, es equivalente a la función de transferencia de la misma medida de la salida pero del sistema monofrecuencia desplazada, es decir:

$$Y_{i,k}(z) = \bar{\bar{G}}_i(z, \frac{s_{i,k}}{N}) \bar{\bar{U}}(z)$$

$$\bar{\bar{G}}_i(z, \frac{s_{i,k}}{N}) = \begin{bmatrix} G_{i,1}(z, \frac{s_{i,k}}{N}) & G_{i,2}(z, \frac{s_{i,k}}{N}) & \dots & G_{i,r}(z, \frac{s_{i,k}}{N}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{U}}(z) = [U_1(z) \quad U_2(z) \quad \dots \quad U_r(z)]^T$$

Por lo tanto se puede afirmar que

$$\sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{k,l}(z) = G_{i,j}(z, \frac{s_{i,k}}{N}) \quad (3-95)$$

Por otra parte se tiene que si  $G_{i,j}(s)$  no tiene polos en el origen entonces todos los valores propios de  $A_C$  son diferentes de cero, lo cual implica que  $A_C$  es invertible por lo que

$$B(:,j)_N = \int_0^{NT} e^{A_C t} dt B(:,j)_C = (A^N - I) A_C^{-1} B(:,j)_C$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}(z) = C(i,:)A^N(I - A^N)^{-1}(A^N - I)A_C^{-1}B(:,j)_C + C(i,:(A^N - I)A_C^{-1}B(:,j)_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}(z) = -C(i,:)A^N A_C^{-1}B(:,j)_C + (C(i,:)A^N - C(i,:(A^N - I)A_C^{-1}B(:,j)_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}(z) = -C(i,:(A^N - I)A_C^{-1}B(:,j)_C$$

Además

$$B(:,j)_{S_{i,k}} = \int_0^{S_{i,k}T} e^{A_C t} dt B(:,j)_C = (A^{S_{i,k}} - I)A_C^{-1}B(:,j)_C$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}(z, \frac{S_{i,k}}{N}) = C(i,:)A^{S_{i,k}}(I - A^{S_{i,k}})^{-1}(A^{S_{i,k}} - I)A_C^{-1}B(:,j)_C + C(i,:(A^{S_{i,k}} - I)A_C^{-1}B(:,j)_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}(z, \frac{S_{i,k}}{N}) = -C(i,:)A^{S_{i,k}} A_C^{-1}B(:,j)_C + (C(i,:)A^{S_{i,k}} - C(i,:(A^{S_{i,k}} - I)A_C^{-1}B(:,j)_C$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}(z, \frac{S_{i,k}}{N}) = -C(i,:(A^{S_{i,k}} - I)A_C^{-1}B(:,j)_C$$

De lo que se obtiene

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}(z, \frac{S_{i,k}}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}(z) \quad (3-96)$$

Ahora bien, para un sistema MIMO las matrices de control pueden descomponerse en submatrices asociadas a cada función de transferencia definida por (3-82), En el caso de la matriz  $M$  que relaciona las referencias con las acciones de control se tiene que:

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1}^{1,1} & M_{1,2}^{1,1} & \cdots & M_{1,s}^{1,1} & M_{1,1}^{1,2} & M_{1,2}^{1,2} & \cdots & M_{1,s}^{1,2} & \cdots & M_{1,1}^{1,f_1} & M_{1,2}^{1,f_2} & \cdots & M_{1,s}^{1,f_s} \\ M_{2,1}^{1,1} & M_{2,2}^{1,1} & \cdots & M_{2,s}^{1,1} & M_{2,1}^{1,2} & M_{2,2}^{1,2} & \cdots & M_{2,s}^{1,2} & \cdots & M_{2,1}^{1,f_1} & M_{2,2}^{1,f_2} & \cdots & M_{2,s}^{1,f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r,1}^{1,1} & M_{r,2}^{1,1} & \cdots & M_{r,s}^{1,1} & M_{r,1}^{1,2} & M_{r,2}^{1,2} & \cdots & M_{r,s}^{1,2} & \cdots & M_{r,1}^{1,f_1} & M_{r,2}^{1,f_2} & \cdots & M_{r,s}^{1,f_s} \\ M_{1,1}^{2,1} & M_{1,2}^{2,1} & \cdots & M_{1,s}^{2,1} & M_{1,1}^{2,2} & M_{1,2}^{2,2} & \cdots & M_{1,s}^{2,2} & \cdots & M_{1,1}^{2,f_1} & M_{1,2}^{2,f_2} & \cdots & M_{1,s}^{2,f_s} \\ M_{2,1}^{2,1} & M_{2,2}^{2,1} & \cdots & M_{2,s}^{2,1} & M_{2,1}^{2,2} & M_{2,2}^{2,2} & \cdots & M_{2,s}^{2,2} & \cdots & M_{2,1}^{2,f_1} & M_{2,2}^{2,f_2} & \cdots & M_{2,s}^{2,f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r,1}^{2,1} & M_{r,2}^{2,1} & \cdots & M_{r,s}^{2,1} & M_{r,1}^{2,2} & M_{r,2}^{2,2} & \cdots & M_{r,s}^{2,2} & \cdots & M_{r,1}^{2,f_1} & M_{r,2}^{2,f_2} & \cdots & M_{r,s}^{2,f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1,1}^{g_1,1} & M_{1,2}^{g_1,1} & \cdots & M_{1,s}^{f_1,1} & M_{1,1}^{g_1,2} & M_{1,2}^{g_1,2} & \cdots & M_{1,s}^{g_1,2} & \cdots & M_{1,1}^{g_1,f_1} & M_{1,2}^{g_1,f_2} & \cdots & M_{1,s}^{g_1,f_s} \\ M_{2,1}^{g_2,1} & M_{2,2}^{g_2,1} & \cdots & M_{2,s}^{f_2,1} & M_{2,1}^{g_2,2} & M_{2,2}^{g_2,2} & \cdots & M_{2,s}^{g_2,2} & \cdots & M_{2,1}^{g_2,f_1} & M_{2,2}^{g_2,f_2} & \cdots & M_{2,s}^{g_2,f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r,1}^{g_r,1} & M_{r,2}^{g_r,1} & \cdots & M_{r,s}^{f_s,1} & M_{r,1}^{g_r,2} & M_{r,2}^{g_r,2} & \cdots & M_{r,s}^{g_r,2} & \cdots & M_{r,1}^{g_r,f_1} & M_{r,2}^{g_r,f_2} & \cdots & M_{r,s}^{g_r,f_s} \end{bmatrix}$$

Quedando las matrices que relacionan las medidas de la  $j$ -ésima referencia con las acciones de control de la  $i$ -ésima entrada:

$$M_{(i,j)} = \begin{bmatrix} M_{i,j}^{1,1} & M_{i,j}^{1,2} & \cdots & M_{i,j}^{1,g_j} \\ M_{i,j}^{2,1} & M_{i,j}^{2,2} & \cdots & M_{i,j}^{2,g_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i,j}^{f_i,1} & M_{i,j}^{f_i,2} & \cdots & M_{i,j}^{f_i,g_j} \end{bmatrix} \quad (3-97)$$

En el caso de la matriz  $M_I$ , la cual, relaciona las medidas anteriores de las salidas con las acciones de control:

$$M_I = \begin{bmatrix} M_{1(1,1)}^{1,1} & M_{1(1,2)}^{1,1} & \cdots & M_{1(1,s)}^{1,1} & M_{1(1,1)}^{1,2} & M_{1(1,2)}^{1,2} & \cdots & M_{1(1,s)}^{1,2} & \cdots & M_{1(1,1)}^{1,f_1} & M_{1(1,2)}^{1,f_2} & \cdots & M_{1(1,s)}^{1,f_s} \\ M_{1(2,1)}^{1,1} & M_{1(2,2)}^{1,1} & \cdots & M_{1(2,s)}^{1,1} & M_{1(2,1)}^{1,2} & M_{1(2,2)}^{1,2} & \cdots & M_{1(2,s)}^{1,2} & \cdots & M_{1(2,1)}^{1,f_1} & M_{1(2,2)}^{1,f_2} & \cdots & M_{1(2,s)}^{1,f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1(r,1)}^{1,1} & M_{1(r,2)}^{1,1} & \cdots & M_{1(r,s)}^{1,1} & M_{1(r,1)}^{1,2} & M_{1(r,2)}^{1,2} & \cdots & M_{1(r,s)}^{1,2} & \cdots & M_{1(r,1)}^{1,f_1} & M_{1(r,2)}^{1,f_2} & \cdots & M_{1(r,s)}^{1,f_s} \\ M_{1(1,1)}^{2,1} & M_{1(1,2)}^{2,1} & \cdots & M_{1(1,s)}^{2,1} & M_{1(1,1)}^{2,2} & M_{1(1,2)}^{2,2} & \cdots & M_{1(1,s)}^{2,2} & \cdots & M_{1(1,1)}^{2,f_1} & M_{1(1,2)}^{2,f_2} & \cdots & M_{1(1,s)}^{2,f_s} \\ M_{1(2,1)}^{2,1} & M_{1(2,2)}^{2,1} & \cdots & M_{1(2,s)}^{2,1} & M_{1(2,1)}^{2,2} & M_{1(2,2)}^{2,2} & \cdots & M_{1(2,s)}^{2,2} & \cdots & M_{1(2,1)}^{2,f_1} & M_{1(2,2)}^{2,f_2} & \cdots & M_{1(2,s)}^{2,f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1(r,1)}^{2,1} & M_{1(r,2)}^{2,1} & \cdots & M_{1(r,s)}^{2,1} & M_{1(r,1)}^{2,2} & M_{1(r,2)}^{2,2} & \cdots & M_{1(r,s)}^{2,2} & \cdots & M_{1(r,1)}^{2,f_1} & M_{1(r,2)}^{2,f_2} & \cdots & M_{1(r,s)}^{2,f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1(1,1)}^{g_1,1} & M_{1(1,2)}^{g_1,1} & \cdots & M_{1(1,s)}^{g_1,1} & M_{1(1,1)}^{g_1,2} & M_{1(1,2)}^{g_1,2} & \cdots & M_{1(1,s)}^{g_1,2} & \cdots & M_{1(1,1)}^{g_1,f_1} & M_{1(1,2)}^{g_1,f_2} & \cdots & M_{1(1,s)}^{g_1,f_s} \\ M_{1(2,1)}^{g_2,1} & M_{1(2,2)}^{g_2,1} & \cdots & M_{1(2,s)}^{g_2,1} & M_{1(2,1)}^{g_2,2} & M_{1(2,2)}^{g_2,2} & \cdots & M_{1(2,s)}^{g_2,2} & \cdots & M_{1(2,1)}^{g_2,f_1} & M_{1(2,2)}^{g_2,f_2} & \cdots & M_{1(2,s)}^{g_2,f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1(r,1)}^{g_r,1} & M_{1(r,2)}^{g_r,1} & \cdots & M_{1(r,s)}^{g_r,1} & M_{1(r,1)}^{g_r,2} & M_{1(r,2)}^{g_r,2} & \cdots & M_{1(r,s)}^{g_r,2} & \cdots & M_{1(r,1)}^{g_r,f_1} & M_{1(r,2)}^{g_r,f_2} & \cdots & M_{1(r,s)}^{g_r,f_s} \end{bmatrix}$$

Las matrices resultantes relacionan las medidas anteriores de la  $j$ -ésima salida con las acciones de control de la  $i$ -ésima entrada

$$M_{1(i,j)} = \begin{bmatrix} M_{1(i,j)}^{1,1} & M_{1(i,j)}^{1,2} & \cdots & M_{1(i,j)}^{1,g_j} \\ M_{1(i,j)}^{2,1} & M_{1(i,j)}^{2,2} & \cdots & M_{1(i,j)}^{2,g_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1(i,j)}^{f_i,1} & M_{1(i,j)}^{f_i,2} & \cdots & M_{1(i,j)}^{f_i,g_j} \end{bmatrix} \quad (3-98)$$

En el caso de la matriz  $M_2$  esta relaciona las acciones de control pasadas con las actuales:

$$M_2 = \begin{bmatrix} M_{2(1,1)}^{1,1} & M_{2(1,2)}^{1,1} & \cdots & M_{2(1,r)}^{1,1} & M_{2(1,1)}^{1,2} & M_{2(1,2)}^{1,2} & \cdots & M_{2(1,r)}^{1,2} & \cdots & M_{2(1,1)}^{1,g_1} & M_{2(1,2)}^{1,g_2} & \cdots & M_{2(1,r)}^{1,g_r} \\ M_{2(2,1)}^{1,1} & M_{2(2,2)}^{1,1} & \cdots & M_{2(2,r)}^{1,1} & M_{2(2,1)}^{1,2} & M_{2(2,2)}^{1,2} & \cdots & M_{2(2,r)}^{1,2} & \cdots & M_{2(2,1)}^{1,g_1} & M_{2(2,2)}^{1,g_2} & \cdots & M_{2(2,r)}^{1,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2(r,1)}^{1,1} & M_{2(r,2)}^{1,1} & \cdots & M_{2(r,r)}^{1,1} & M_{2(r,1)}^{1,2} & M_{2(r,2)}^{1,2} & \cdots & M_{2(r,r)}^{1,2} & \cdots & M_{2(r,1)}^{1,g_1} & M_{2(r,2)}^{1,g_2} & \cdots & M_{2(r,r)}^{1,g_r} \\ M_{2(1,1)}^{2,1} & M_{2(1,2)}^{2,1} & \cdots & M_{2(1,r)}^{2,1} & M_{2(1,1)}^{2,2} & M_{2(1,2)}^{2,2} & \cdots & M_{2(1,r)}^{2,2} & \cdots & M_{2(1,1)}^{2,g_1} & M_{2(1,2)}^{2,g_2} & \cdots & M_{2(1,r)}^{2,g_r} \\ M_{2(2,1)}^{2,1} & M_{2(2,2)}^{2,1} & \cdots & M_{2(2,r)}^{2,1} & M_{2(2,1)}^{2,2} & M_{2(2,2)}^{2,2} & \cdots & M_{2(2,r)}^{2,2} & \cdots & M_{2(2,1)}^{2,g_1} & M_{2(2,2)}^{2,g_2} & \cdots & M_{2(2,r)}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2(r,1)}^{2,1} & M_{2(r,2)}^{2,1} & \cdots & M_{2(r,r)}^{2,1} & M_{2(r,1)}^{2,2} & M_{2(r,2)}^{2,2} & \cdots & M_{2(r,r)}^{2,2} & \cdots & M_{2(r,1)}^{2,g_1} & M_{2(r,2)}^{2,g_2} & \cdots & M_{2(r,r)}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2(1,1)}^{g_1,1} & M_{2(1,2)}^{g_1,1} & \cdots & M_{2(1,r)}^{g_1,1} & M_{2(1,1)}^{g_1,2} & M_{2(1,2)}^{g_1,2} & \cdots & M_{2(1,r)}^{g_1,2} & \cdots & M_{2(1,1)}^{g_1,g_1} & M_{2(1,2)}^{g_1,g_2} & \cdots & M_{2(1,r)}^{g_1,g_r} \\ M_{2(2,1)}^{g_2,1} & M_{2(2,2)}^{g_2,1} & \cdots & M_{2(2,r)}^{g_2,1} & M_{2(2,1)}^{g_2,2} & M_{2(2,2)}^{g_2,2} & \cdots & M_{2(2,r)}^{g_2,2} & \cdots & M_{2(2,1)}^{g_2,g_1} & M_{2(2,2)}^{g_2,g_2} & \cdots & M_{2(2,r)}^{g_2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2(r,1)}^{g_r,1} & M_{2(r,2)}^{g_r,1} & \cdots & M_{2(r,r)}^{g_r,1} & M_{2(r,1)}^{g_r,2} & M_{2(r,2)}^{g_r,2} & \cdots & M_{2(r,r)}^{g_r,2} & \cdots & M_{2(r,1)}^{g_r,g_1} & M_{2(r,2)}^{g_r,g_2} & \cdots & M_{2(r,r)}^{g_r,g_r} \end{bmatrix}$$

Por lo que las matrices resultantes son las correspondientes a las acciones de control anteriores de la  $j$ -ésima entrada con las acciones de control actuales de la  $i$ -ésima entrada.

$$M_{2(i,j)} = \begin{bmatrix} M_{2(i,j)}^{1,1} & M_{1(i,j)}^{1,2} & \cdots & M_{2(i,j)}^{1,g_j} \\ M_{2(i,j)}^{2,1} & M_{1(i,j)}^{2,1} & \cdots & M_{2(i,j)}^{2,g_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2(i,j)}^{g_i,1} & M_{1(i,j)}^{g_i,2} & \cdots & M_{2(i,j)}^{g_i,g_j} \end{bmatrix} \quad (3-99)$$

Por otra parte hacer las acciones de control iguales equivale a hacer iguales las filas de las matrices de control extraídas, es decir:

$$\begin{aligned} M_{(i,j)}^{(1)} &= M_{(i,j)}^{(2)} = \cdots = M_{(i,j)}^{(g_i)} = M_{(i,j)}^{(c)} \\ M_{1(i,j)}^{(1)} &= M_{1(i,j)}^{(2)} = \cdots = M_{1(i,j)}^{(g_i)} = M_{1(i,j)}^{(c)} \\ M_{2(i,j)}^{(1)} &= M_{2(i,j)}^{(2)} = \cdots = M_{2(i,j)}^{(g_i)} = M_{2(i,j)}^{(c)} \end{aligned} \quad (3-100)$$

Donde

$$\begin{aligned} M_{(i,j)}^{(k)} &\text{ es la } k\text{-ésima fila de } M_{(i,j)} \\ M_{1(i,j)}^{(k)} &\text{ es la } k\text{-ésima fila de } M_{1(i,j)} \\ M_{2(i,j)}^{(k)} &\text{ es la } k\text{-ésima fila de } M_{2(i,j)} \end{aligned}$$

Si para cada entrada y cada salida se define los siguientes vectores

$$\vec{Y}_i(z) = \begin{bmatrix} Y_{i,1}(z) \\ Y_{i,2}(z) \\ \vdots \\ Y_{i,f_i}(z) \end{bmatrix} \quad \vec{R}_i(z) = \begin{bmatrix} R_{i,1}(z) \\ R_{i,2}(z) \\ \vdots \\ R_{i,f_i}(z) \end{bmatrix} \quad \vec{U}_j(z) = \begin{bmatrix} U_j^1(z) \\ U_j^2(z) \\ \vdots \\ U_j^{g_j}(z) \end{bmatrix}$$

Un análisis similar al realizado en la sección anterior se hace para cada una de las funciones de transferencia definidas en (3-82)

$$\vec{Y}_i(z) = \sum_{j=1}^r \bar{G}_{i,j}(z) \vec{U}_j(z)$$

$$i = 1, 2, \dots, s$$

$$\vec{U}_j(z) = \sum_{i=1}^s \left[ M_{(i,j)} \vec{R}_i(z) + M_{1(i,j)} \frac{\vec{Y}_i(z)}{z} + M_{2(i,j)} \frac{\vec{U}_j(z)}{z} \right]$$

$$U_j^1(z) = \sum_{i=1}^s \left[ M_{(i,j)}^{(c)} \vec{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \frac{\vec{Y}_i(z)}{z} + M_{2(i,j)}^{(c)} \frac{\vec{U}_j(z)}{z} \right]$$

Esto asegura que todas las acciones de control sean iguales para una misma entrada, es decir

$$U_j^1(z) = U_j^2(z) = \dots = U_j^{g_j}(z)$$

$$U_j^1(z) = \sum_{i=1}^s \left[ M_{(i,j)}^{(c)} \vec{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \frac{\vec{Y}_i(z)}{z} + \sum M_{2(i,j)}^{(c)} \frac{U_j^1(z)}{z} \right]$$

Donde

$$\sum M_{2(i,j)}^{(c)} = M_{2(i,j)}^{(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_j^1(z) = \frac{\sum_{i=1}^s \left[ z M_{(i,j)}^{(c)} \vec{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \vec{Y}_i(z) \right]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$

$$\vec{U}_j(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^s [zM_{(i,j)}^{(c)} \bar{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \bar{Y}_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}} \quad (3-101)$$

$$\bar{Y}_i(z) = \sum_{j=1}^r \bar{G}_{i,j}(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^s [zM_{(i,j)}^{(c)} \bar{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \bar{Y}_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$

Analizando cada componente del vector  $\bar{Y}_i(z)$

$$Y_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{k,l} \frac{\sum_{i=1}^s [zM_{(i,j)}^{(c)} \bar{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \bar{Y}_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$

Sustituyendo (3-95) en la expresión anterior

$$Y_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^r G_{i,j}(z, \frac{S_{i,k}}{N}) \frac{\sum_{i=1}^s [zM_{(i,j)}^{(c)} \bar{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \bar{Y}_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}} \quad (3-102)$$

En el caso de una medida de la  $i$ -ésima salida sea realizada al final del metaperiodo  $T_0$

$$Y_{i,N}(z) = \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{N,l} \frac{\sum_{i=1}^s [zM_{(i,j)}^{(c)} \bar{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \bar{Y}_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$

Sustituyendo (3-91) en la expresión anterior se tiene que

$$Y_{i,N}(z) = \sum_{j=1}^r G_{i,j}(z) \frac{\sum_{i=1}^s [zM_{(i,j)}^{(c)} \bar{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \bar{Y}_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$



De (3-96) se puede afirmar que al hacer las filas de las matrices derivadas de las matrices de control  $M_{(i,j)}$ ,  $M_{1(i,j)}$  y  $M_{2(i,j)}$  iguales, las medidas de la salida  $i$  en estado estacionario son iguales, a lo largo del periodo envolvente  $T_\theta$ , es decir:

$$\lim_{z \rightarrow 1} Y_{i,k}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} Y_{i,N}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} Y_i(z) \quad (3-103)$$

A continuación se analizan las medidas intermuestreo, nuevamente se trabaja con cada una de las funciones de transferencias que relacionan cada entrada con cada salida para lo que se define la matriz de funciones de transferencia  $\bar{G}_{i,j}(z)$

$$\bar{G}_{i,j}(z) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{i,j}^1(z) \\ \bar{G}_{i,j}^2(z) \\ \vdots \\ \bar{G}_{i,j}^{f_i}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i,j}^{1,1}(z), & G_{i,j}^{1,2}(z), & \dots, & G_{i,j}^{1,g_j}(z) \\ G_{i,j}^{2,1}(z), & G_{i,j}^{2,2}(z), & \dots, & G_{i,j}^{2,g_j}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{i,j}^{f_i,1}(z), & G_{i,j}^{f_i,2}(z), & \dots, & G_{i,j}^{f_i,g_j}(z) \end{bmatrix} \quad (3-104)$$

$$\bar{Y}_i(z) = \sum_{j=1}^r \bar{G}_{i,j}(z) \cdot \bar{U}_j(z) \quad (3-105)$$

$$\bar{Y}_i(z) = \begin{bmatrix} Y_{i,1}(z) \\ Y_{i,2}(z) \\ \vdots \\ Y_{i,f_i}(z) \end{bmatrix} \quad \bar{R}_i(z) = \begin{bmatrix} R_{i,1}(z) \\ R_{i,2}(z) \\ \vdots \\ R_{i,f_i}(z) \end{bmatrix} \quad \bar{U}_j(z) = \begin{bmatrix} U_j^1(z) \\ U_j^2(z) \\ \vdots \\ U_j^{g_j}(z) \end{bmatrix} \quad (3-106)$$

Donde

$$G_{i,j}^{k,l}(z) = C(i,:)A^{s_i,k}(zI - A^N)^{-1}A^{N-r_j^{l+1}}B(:,j)_{r_j^{l+1}-r_j^l} + h_{i,j}^{k,l} \quad (3-107)$$

$$i = 1,2,\dots,s \quad j = 1,2,\dots,r$$

$$k = 1,2,\dots,f_i \quad l = 1,2,\dots,g_j$$

Asumiendo que las filas de las matrices de control son iguales como se definen en (3-100) y de (3-2) se tiene que:

$$\bar{U}_j(z) = \sum_{i=1}^s \left[ M_{(i,j)} \bar{R}_i(z) + M_{1(i,j)} \frac{\bar{Y}_i(z)}{z} + M_{2(i,j)} \frac{\bar{U}_j(z)}{z} \right]$$

$$U_j^1(z) = \sum_{i=1}^s \left[ M_{(i,j)}^{(c)} \bar{R}_i(z) + M_{1(i,j)}^{(c)} \frac{\bar{Y}_i(z)}{z} + M_{2(i,j)}^{(c)} \frac{\bar{U}_j(z)}{z} \right]$$

Esto asegura que todas las acciones de control sean iguales para una misma entrada. Además se asume que la referencia es constante durante el metaperiodo  $T_0$ . Ahora bien de (3-103) se observa que en estado estacionario las medidas de cada salida son iguales, por lo que la expresión de las acciones de control queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U_j^1(z) &= U_j^2(z) = \dots = U_j^{s_j}(z) \\ Y_{i,1}(z) &= Y_{i,2}(z) = \dots = Y_{i,f_i}(z) = Y_i(z) \\ R_{i,1}(z) &= R_{i,2}(z) = \dots = R_{i,f_i}(z) = R_i(z) \end{aligned}$$

$$U_j^1(z) = \sum_{i=1}^s \left[ \sum M_{(i,j)}^{(c)} R_i(z) + \sum M_{1(i,j)}^{(c)} \frac{Y_i(z)}{z} + \sum M_{2(i,j)}^{(c)} \frac{U_j^1(z)}{z} \right]$$

Donde

$$\sum M_{(i,j)}^{(c)} = M_{(i,j)}^{(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \sum M_{1(i,j)}^{(c)} = M_{1(i,j)}^{(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \sum M_{2(i,j)}^{(c)} = M_{2(i,j)}^{(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_j^1(z) = \frac{\sum_{i=1}^s [z \sum M_{(i,j)}^{(c)} R_i(z) + \sum M_{1(i,j)}^{(c)} Y_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$

$$\vec{U}_j(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^s [z \sum M_{(i,j)}^{(c)} R_i(z) + \sum M_{1(i,j)}^{(c)} Y_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}} \quad (3-108)$$

Sustituyendo  $\vec{U}_j(z)$  en (3-105) se obtiene

$$\vec{Y}_i(z) = \sum_{j=1}^r \vec{G}_{i,j}(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^s [z \sum M_{(i,j)}^{(c)} R_i(z) + \sum M_{1(i,j)}^{(c)} Y_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$

$$Y_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^r \sum \bar{G}_{i,j}^k(z) \frac{\sum_{i=1}^s [z \sum M_{(i,j)}^{(c)} R_i(z) + \sum M_{1(i,j)}^{(c)} Y_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}} \quad (3-109)$$

Nuevamente haciendo que las acciones de control sean iguales para cada entrada a lo largo del metaperiodo

$$U_j^1(z) = U_j^2(z) = \dots = U_j^{g_j}(z) = U_j(z)$$

Para la  $k$ -ésima medida de la  $i$ -ésima entrada se tiene que:

$$Y_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^r (G_{i,j}^{k,1}(z) + G_{i,j}^{k,2}(z) + \dots + G_{i,j}^{k,g_j}(z)) U_j$$

Sustituyendo (3-107) en la anterior expresión

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{k,l}(z) = \\ & C(i,:) A^{s_{i,k}} (zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} + \dots + A^{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} B(:,j)_{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} + B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] \\ & \quad + \left[ h_{i,j}^{k,1} + h_{i,j}^{k,2} + \dots + h_{i,j}^{k,g_j} \right] \\ & Y_{i,k}(z) = \\ & \sum_{j=1}^r C(i,:) A^{s_{i,k}} (zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j^1} + \dots + A^{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} B(:,j)_{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} + B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] U_j(z) \\ & \quad + \left[ h_{i,j}^{k,1} + h_{i,j}^{k,2} + \dots + h_{i,j}^{k,g_j} \right] U_j(z) \\ & Y_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^r C(i,:) A^{s_{i,k}} (zI - A^N)^{-1} W_{i,j} U_j(z) + H_{i,j} U_j(z) \end{aligned}$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola medida de la salida en el instante  $t_{i,k}$  al mantener la acción de control igual en el periodo envolvente, de lo que se deduce que la suma de las funciones de transferencia que relacionan la  $j$ -ésima acción de control con la  $k$ -ésima medida de la  $i$ -ésima salida del sistema multifrecuencia, equivale a la función de transferencia para esa misma medida pero del sistema monofrecuencia, es decir:

$$\begin{aligned}
Y_{i,k}(z) &= \bar{G}_i^k(z) \bar{U}(z) \\
\bar{G}_i^k(z) &= [G_{i,1}^k(z) \quad G_{i,2}^k(z) \quad \cdots \quad G_{i,r}^k(z)] \\
\bar{U}(z) &= [U_1(z) \quad U_2(z) \quad \cdots \quad U_r(z)]^T \\
\sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{k,l}(z) &= \sum \bar{G}_{i,j}^k(z) = G_{i,j}^k(z) \tag{3-110}
\end{aligned}$$

Se define la medida intermuestreo asociada a la  $k$ -ésima medida de la  $i$ -ésima salida como

$$\begin{aligned}
Y_{i,m_k} &= \lfloor y_i(KT_0 + t_{i,m_k}) \rfloor & t_{i,k-1} \leq t_{i,m_k} < t_{i,k} & \quad k = 1, 2, \dots, f_i \\
m_{i,k} &= \frac{t_{i,m_k}}{T} & 0 \leq \frac{m_{i,k}}{N} \leq 1 &
\end{aligned}$$

$$\bar{Y}_i(z, \frac{m_i}{N}) = \begin{bmatrix} Y_{i,1}(z, \frac{m_{i,1}}{N}) \\ Y_{i,2}(z, \frac{m_{i,2}}{N}) \\ \vdots \\ Y_{i,f_i}(z, \frac{m_{i,f_i}}{N}) \end{bmatrix} \quad \bar{U}_j(z) = \begin{bmatrix} U_j^1(z) \\ U_j^2(z) \\ \vdots \\ U_j^{g_j}(z) \end{bmatrix} \tag{3-111}$$

$$\bar{G}_{i,j}(z, m_i) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{i,j}^1(z, \frac{m_{i,1}}{N}) \\ \bar{G}_{i,j}^2(z, \frac{m_{i,2}}{N}) \\ \vdots \\ \bar{G}_{i,j}^{f_i}(z, \frac{m_{i,f_i}}{N}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i,j}^{1,1}(z, \frac{m_{i,1}}{N}), & G_{i,j}^{1,2}(z, \frac{m_{i,1}}{N}), & \cdots & , G_{i,j}^{1,g_j}(z, \frac{m_{i,1}}{N}) \\ G_{i,j}^{2,1}(z, \frac{m_{i,2}}{N}), & G_{i,j}^{2,2}(z, \frac{m_{i,2}}{N}), & \cdots & , G_{i,j}^{2,g_j}(z, \frac{m_{i,2}}{N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{i,j}^{f_i,1}(z, \frac{m_{i,f_i}}{N}), & G_{i,j}^{f_i,2}(z, \frac{m_{i,f_i}}{N}), & \cdots & , G_{i,j}^{f_i,g_j}(z, \frac{m_{i,f_i}}{N}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_i(z, m_i) = \sum_{j=1}^r \bar{G}_{i,j}(z, m_i) \cdot \bar{U}_j(z) \tag{3-112}$$

Cabe mencionar que  $m_i$  en las expresiones anteriores no es un valor numérico, sino que se utiliza para indicar que el vector de medidas  $\bar{Y}_i$  de la  $i$ -ésima salida y la matriz  $\bar{G}_{i,j}$  que relaciona las acciones de control de la  $j$ -ésima entrada con la  $i$ -ésima salida están desplazados; en realidad, el  $k$ -ésimo componente de dicho vector está desplazado un tiempo  $m_{i,k} / N$ . Además

$$G_{i,j}^{k,l} \left( z, \frac{m_{i,k}}{N} \right) = C(i,:) A^{m_{i,k}} (zI - A^N)^{-1} A^{N-r_j^{l+1}} B(:,j)_{r_j^{l+1}-r_j^l} + h_{i,j}^{m_{i,k},l} \quad (3-113)$$

Haciendo que las acciones de control sean iguales para cada entrada a lo largo del metaperiodo

$$U_j^1(z) = U_j^2(z) = \dots = U_j^{g_j}(z) = U_j(z)$$

Para la medida intermuestreo asociada a la  $k$ -ésima medida de la  $i$ -ésima entrada se tiene que:

$$Y_{i,k} \left( z, \frac{m_{i,k}}{N} \right) = \sum_{j=1}^r \left( G_{i,j}^{k,1} \left( z, \frac{m_{i,k}}{N} \right) + G_{i,j}^{k,2} \left( z, \frac{m_{i,k}}{N} \right) + \dots + G_{i,j}^{k,g_j} \left( z, \frac{m_{i,k}}{N} \right) \right) U_j$$

Sustituyendo (3-113) en la anterior expresión

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{k,l} \left( z, \frac{m_{i,k}}{N} \right) = \\ & C(i,:) A^{m_{i,k}} (zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j} + \dots + A^{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} B(:,j)_{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} + B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] \\ & \quad + \left[ h_{i,j}^{m_{i,k},1} + h_{i,j}^{m_{i,k},2} + \dots + h_{i,j}^{m_{i,k},g_j} \right] \\ & Y_{i,k} \left( z, \frac{m_{i,k}}{N} \right) = \\ & \sum_{j=1}^r C(i,:) A^{m_{i,k}} (zI - A^N)^{-1} \left[ A^{N-r_j^2} B(:,j)_{r_j^2-r_j} + \dots + A^{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} B(:,j)_{r_j^{g_j}-r_j^{g_j-1}} + B(:,j)_{N-r_j^{g_j}} \right] U_j(z) \\ & \quad + \left[ h_{i,j}^{m_{i,k},1} + h_{i,j}^{m_{i,k},2} + \dots + h_{i,j}^{m_{i,k},g_j} \right] U_j(z) \\ & Y_{i,k} \left( z, \frac{m_{i,k}}{N} \right) = \sum_{j=1}^r C(i,:) A^{m_{i,k}} (zI - A^N)^{-1} W_{i,j} U_j(z) + H_{m_{i,k},j} U_j(z) \end{aligned}$$

Que es el modelo BMIO del sistema con una sola medida de la salida en el instante  $t_{i,m_k}$ . Nuevamente se observa que la suma de las funciones de transferencia que relacionan la  $j$ ésima acción de control, con la medida intermuestreo asociada a la  $k$ -ésima medida de la  $i$ -ésima salida del sistema multifrecuencia, equivale a la función de transferencia para esa misma medida pero del sistema monofrecuencia, es decir:

$$\begin{aligned}
Y_{i,k}(z, \frac{m_{i,k}}{N}) &= \bar{\bar{G}}_i^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) \bar{\bar{U}}(z) \\
\bar{\bar{G}}_i^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) &= \begin{bmatrix} G_{i,1}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) & G_{i,2}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) & \cdots & G_{i,r}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) \end{bmatrix} \\
\bar{\bar{U}}(z) &= [U_1(z) \quad U_2(z) \quad \cdots \quad U_r(z)]^T \\
\sum_{l=1}^{g_j} G_{i,j}^{k,l}(z) &= \sum \bar{G}_{i,j}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) = G_{i,j}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) \quad (3-114)
\end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que si  $G_{i,j}(s)$  no tiene polos en el origen entonces todos los valores propios de  $A_C$  son diferentes de cero, lo cual implica que  $A_C$  es invertible por lo que

$$B(:, j)_{s_{i,k}} = \int_0^{s_{i,k}T} e^{A_C t} dt B(:, j)_C = (A^{s_{i,k}} - I) A_C^{-1} B(:, j)_C$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}^k(z) &= C(i, :) A^{s_{i,k}} (I - A^{s_{i,k}})^{-1} (A^{s_{i,k}} - I) A_C^{-1} B(:, j)_C + C(i, :) (A^{s_{i,k}} - I) A_C^{-1} B(:, j)_C \\
&= -C(i, :) A^{s_{i,k}} A_C^{-1} B(:, j)_C + (C(i, :) A^{s_{i,k}} - C(i, :)) A_C^{-1} B(:, j)_C \\
\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}^k(z) &= -C(i, :) A_C^{-1} B(:, j)_C
\end{aligned}$$

Además

$$B(:, j)_{m_{i,k}} = \int_0^{m_{i,k}T} e^{A_C t} dt B(:, j)_C = (A^{m_{i,k}} - I) A_C^{-1} B(:, j)_C$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) &= C(i, :) A^{m_{i,k}} (I - A^{m_{i,k}})^{-1} (A^{m_{i,k}} - I) A_C^{-1} B(:, j)_C + C(i, :) (A^{m_{i,k}} - I) A_C^{-1} B(:, j)_C \\
&= -C(i, :) A^{m_{i,k}} A_C^{-1} B(:, j)_C + (C(i, :) A^{m_{i,k}} - C(i, :)) A_C^{-1} B(:, j)_C \\
\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) &= -C(i, :) A_C^{-1} B(:, j)_C
\end{aligned}$$

De lo que se obtiene

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} G_{i,j}^k(z) \quad (3-115)$$

Ahora se sustituye (3-108) en (3-112) y se obtiene

$$\bar{Y}_i(z, m_i) = \sum_{j=1}^r \bar{G}_{i,j}(z, m_i) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^s [z \sum M_{(i,j)}^{(c)} R_i(z) + \sum M_{1(i,j)}^{(c)} Y_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$

$$Y_{i,k}(z, \frac{m_{i,k}}{N}) = \sum_{j=1}^r \sum \bar{G}_{i,j}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) \frac{\sum_{i=1}^s [z \sum M_{(i,j)}^{(c)} R_i(z) + \sum M_{1(i,j)}^{(c)} Y_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}}$$

De (3-114) se tiene

$$Y_{i,k}(z, \frac{m_{i,k}}{N}) = \sum_{j=1}^r G_{i,j}^k(z, \frac{m_{i,k}}{N}) \frac{\sum_{i=1}^s [z \sum M_{(i,j)}^{(c)} R_i(z) + \sum M_{1(i,j)}^{(c)} Y_i(z)]}{z - \sum_{i=1}^s \sum M_{2(i,j)}^{(c)}} \quad (3-116)$$

Comparando (3-109) con (3-116) y de (3-115) se tiene

$$\lim_{z \rightarrow 1} Y_{i,k}(z, \frac{m_{i,k}}{N}) = \lim_{z \rightarrow 1} Y_{i,k}(z)$$

Con lo cual se puede concluir que haciendo que las filas de las matrices de control, definidas por (3-97), (3-98) y (3-99) sean iguales, se elimina el rizado intermuestreo.

### 3.3 Conclusiones

El estudio de los controladores “originales” basados en el modelado BMIO pone de manifiesto la presencia del rizado intermuestreo que presentan dichos controladores. El análisis del comportamiento de los mismos permite deducir las causas de dicho rizado.

Para esto se han analizado diferentes escenarios en cuanto a tipos de sistemas (SISO o MIMO) y esquemas de muestreo, dando por resultado, la necesidad de hacer las acciones de control iguales a lo largo del periodo envolvente para poder eliminar el rizado intermuestreo.

Este análisis sirve de base para diseñar nuevos controladores que junto con los controladores “originales” permitan deducir la mejor estrategia de control, como se verá más adelante.



---

## CAPÍTULO 4 TÉCNICAS DE ELIMINACIÓN DEL RIZADO INTERMUESTREO: ANÁLISIS Y COMPARACIÓN

---

### 4.1 Aplicación de Compensadores a las acciones de control.

Del análisis realizado en el capítulo anterior es claro que las ganancias fila por fila de las matrices  $M$ ,  $M_1$  y  $M_2$  deben ser iguales, es decir, para un vector de referencias la multiplicación de este vector por la matriz  $M$  debe producir un vector con elementos iguales. El resultado debe ser similar para la multiplicación de la matriz  $M_1$  por un vector de salidas anteriores y para la multiplicación de la matriz  $M_2$  por un vector de acciones de control anteriores. Esto daría como resultado que las acciones de control calculadas serían iguales para un mismo periodo envolvente  $T_\theta$ .

De (3-2) se observa que cada acción de control está formada por tres componentes, la primera originada por la multiplicación de la matriz  $M$  por el vector de referencias, la segunda que es el resultado de la multiplicación de la matriz  $M_1$  por el vector de salidas anteriores y la última correspondiente a la multiplicación de la matriz  $M_2$  por el vector de acciones de control anteriores. Consideremos el caso en el que se tienen  $N$  acciones de control y se toma una muestra de la salida. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
U_k = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_N(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{(1)} \\ M_{(2)} \\ \vdots \\ M_{(N)} \end{bmatrix} y_d(k) + \begin{bmatrix} M_{1(1)} \\ M_{1(2)} \\ \vdots \\ M_{1(N)} \end{bmatrix} y(k-1) \\
&+ \begin{bmatrix} M_{2(11)} & M_{2(12)} & \cdots & M_{2(1N)} \\ M_{2(21)} & M_{2(22)} & \cdots & M_{2(2N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2(N1)} & M_{2(N2)} & \cdots & M_{2(NN)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \\ \vdots \\ u_N(k-1) \end{bmatrix} \quad (4-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(k) &= um_{(1)} + um_{1(1)} + um_{2(1)} \\
u_2(k) &= um_{(2)} + um_{1(2)} + um_{2(2)} \\
&\vdots \\
u_N(k) &= um_{(N)} + um_{1(N)} + um_{2(N)} \quad (4-2)
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
um_{(1)} &= M_{(1)} * y_d, \\
um_{(2)} &= M_{(2)} * y_d, \\
&\vdots \\
um_{(N)} &= M_{(N)} * y_d, \\
um_{1(1)} &= M_{1(1)} y(k-1), \\
um_{1(2)} &= M_{1(2)} y(k-1), \\
&\vdots \\
um_{1(N)} &= M_{1(N)} y(k-1), \quad (4-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
um_{2(1)} &= M_{2(11)} u_1(k-1) + M_{2(12)} u_2(k-1) + \cdots + M_{2(1N)} u_N(k-1) \\
um_{2(2)} &= M_{2(21)} u_1(k-1) + M_{2(22)} u_2(k-1) + \cdots + M_{2(2N)} u_N(k-1) \\
&\vdots \\
um_{2(N)} &= M_{2(N1)} u_1(k-1) + M_{2(N2)} u_2(k-1) + \cdots + M_{2(NN)} u_N(k-1)
\end{aligned}$$

En el capítulo anterior se establecen las condiciones para eliminar el rizado intermuestreo a la salida lo cual equivale a que las componentes de las acciones de control sean iguales, es decir:

$$\begin{aligned}
 um_1 &= um_2 = \dots = um_N \\
 um_{1(1)} &= um_{1(2)} = \dots = um_{1(N)} \\
 um_{2(1)} &= um_{2(2)} = \dots = um_{2(N)}
 \end{aligned} \tag{4-4}$$

Por lo que se propone utilizar un compensador para cada una de las componentes de las acciones de control.

Se define para cada matriz (componente de acción de control) una ganancia a la cual se deba converger, sean  $K$ ,  $K_1$  y  $K_2$  para las matrices  $M$ ,  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente.

Se puede encontrar una serie de constantes  $C_{(i)}$ ,  $C_{1(i)}$ , y  $C_{2(i)}$  tales que

$$\begin{aligned}
 M_{(1)} &= K + C_{(1)} & M_{1(1)} &= K_1 + C_{1(1)} & M_{2(1)} &= K_2 + C_{2(1)} \\
 M_{(2)} &= K + C_{(2)} & M_{1(2)} &= K_1 + C_{1(2)} & M_{2(2)} &= K_2 + C_{2(2)} \\
 &\vdots & &\vdots & &\vdots \\
 M_{(N)} &= K + C_{(N)} & M_{1(N)} &= K_1 + C_{1(N)} & M_{2(N)} &= K_2 + C_{2(N)}
 \end{aligned}$$

donde

$$M_{2(i)} = M_{2(i1)} + M_{2(i2)} + \dots + M_{2(iN)} \quad i = 1, \dots, N \tag{4-5}$$

Entonces se puede aplicar un compensador a las componentes de control de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 num_{(i)} &= \frac{K}{K + C_{(i)}} um_{(i)} \\
 num_{1(i)} &= \frac{K_1}{K_1 + C_{1(i)}} um_{1(i)} \\
 num_{2(i)} &= \frac{K_2}{K_2 + C_{2(i)}} um_{2(i)}
 \end{aligned} \tag{4-6}$$

Con lo que se logra que las componentes de las acciones de control sean iguales, lo cual es equivalente a que las filas de las matrices sean iguales.

Hasta el momento solo se ha planteado que las ganancias del controlador converjan a los valores  $K$ ,  $K_1$  y  $K_2$  para eliminar el rizado intermuestreo, el siguiente paso es calcular los valores de estas ganancias, para lo cual se debe hacer un repaso del funcionamiento del controlador de cancelación utilizado.

De (2-5) y (3-2) se tiene que la salida del sistema modelado en multifrecuencia está dada por

$$y_k = Ox_k + H(M \cdot y_{d(k)} + M_1 \cdot y_{k-1} + M_2 \cdot U_{k-1})$$

Sustituyendo (3-3) en la anterior ecuación se tiene que

$$y_k = Ox_k + H(H^\# \cdot y_{d(k)} - H^\#OP \cdot y_{k-1} - H^\#OQ \cdot U_{k-1})$$

Simplificando se obtiene:

$$y_k = Ox_k + I \cdot y_{d(k)} - IO(P \cdot y_{k-1} + QU_{k-1})$$

De (3-1) se tiene que

$$y_k = Ox_k + y_{d(k)} - Ox_k = y_{d(k)}$$

Como se puede ver las matrices  $M$ ,  $M_1$  y  $M_2$  contienen la pseudoinversa de  $H$  que al ser multiplicada por  $H$  produce la matriz identidad, generando el resultado deseado. Es evidente que al modificar la ganancia de las matrices del controlador no se va a obtener la matriz identidad y por lo tanto no se realizara la cancelación.

Se considera un sistema SISO donde se tienen  $r$  acciones de control y una muestra de la salida. Observando a detalle lo que ocurre en la multiplicación de las matrices se tiene que la pseudoinversa de la matriz  $H$  es

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_r]$$

$$H^\# = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r} \\ \frac{h_2}{h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r} \\ \vdots \\ \frac{h_r}{h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r} \end{bmatrix}$$

Si se define

$$\begin{aligned} K &= (M_{(1)} + M_{(2)} + \dots + M_{(r)}) / L \\ K_1 &= (M_{1(1)} + M_{1(2)} + \dots + M_{1(r)}) / L \\ K_2 &= (M_{2(1)} + M_{2(2)} + \dots + M_{2(r)}) / L \end{aligned} \quad (4-7)$$

$$OP = [p], \quad OQ = [q_1, q_2, \dots, q_r]$$

Aplicando los compensadores definidos en (4-6), sería equivalente a que las matrices del controlador sean calculadas de la siguiente manera:

$$M_{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_r}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \\ \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_r}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \\ \vdots \\ \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_r}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \end{bmatrix}, \quad M_{1\infty} = \begin{bmatrix} \frac{p(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \\ \frac{p(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \\ \vdots \\ \frac{p(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \end{bmatrix}$$

$$M_{2\infty} = \begin{bmatrix} \frac{q_1(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} & \frac{q_2(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} & \dots & \frac{q_N(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \\ \frac{q_1(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} & \frac{q_2(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} & \dots & \frac{q_N(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_1(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} & \frac{q_2(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} & \dots & \frac{q_N(h_1 + h_2 + \dots + h_r)}{L(h^2_1 + h^2_2 + \dots + h^2_r)} \end{bmatrix}$$

Como se menciona anteriormente, al multiplicar por la matriz  $H$  no daría como resultado la matriz identidad y por lo tanto no se realizara la cancelación, quedando de la siguiente forma:

$$y_k = Ox_k + \frac{(1 + \Delta h)}{L} [y_{d(k)} - py_{k-1} - (q_1u_{1(k-1)} + q_2u_{2(k-1)} + \dots + q_Nu_{r(k-1)})]$$

$$y_k = Ox_k + \frac{(1 + \Delta h)}{L} [y_{d(k)} - OPy_{k-1} - OQU_{k-1}]$$

donde

$$\Delta h = \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (H^T H)_{i,j} - \text{Traza}(H^T H) \right] (HH^T)^{-1} \quad (4-8)$$

Por lo que al hacer

$$L = 1 + \Delta h \quad (4-9)$$

Y aplicando los compensadores definidos por (4-6) y (4-7) se logra que la salida siga la trayectoria de  $y_d$

Estos resultados pueden generalizarse para los sistemas multifrecuencia en los que se tengan  $r$  acciones de control y  $s$  muestreos de la salida. Esto con el fin de trabajar con modelos BMIO que requieran de más muestras para que puedan ser observables (La condición de controlabilidad es alcanzada tomando el valor adecuado de  $r$ ). En este caso se tiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_r(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{(11)} & M_{(12)} & \cdots & M_{(1s)} \\ M_{(21)} & M_{(22)} & \cdots & M_{(2s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{(r1)} & M_{(r2)} & \cdots & M_{(rs)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{d(1)}(k) \\ y_{d(2)}(k) \\ \vdots \\ y_{d(s)}(k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{1(11)} & M_{1(12)} & \cdots & M_{1(1s)} \\ M_{1(21)} & M_{1(22)} & \cdots & M_{1(2s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1(r1)} & M_{1(r2)} & \cdots & M_{1(rs)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{(1)}(k) \\ y_{(2)}(k) \\ \vdots \\ y_{(s)}(k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{2(11)} & M_{2(12)} & \cdots & M_{2(1r)} \\ M_{2(21)} & M_{2(22)} & \cdots & M_{2(2r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2(r1)} & M_{2(r2)} & \cdots & M_{2(rr)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \\ \vdots \\ u_r(k-1) \end{bmatrix} \quad (4-10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1(k) &= um_{(1)} + um_{1(1)} + um_{2(1)} \\
 u_2(k) &= um_{(2)} + um_{1(2)} + um_{2(2)} \\
 &\vdots \\
 u_r(k) &= um_{(r)} + um_{1(r)} + um_{2(r)} \quad (4-11)
 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 um_{(i)} &= \sum_{j=1}^s M_{(ij)} y_{d(j)}(k) \quad i = 1, \dots, r \\
 um_{1(i)} &= \sum_{j=1}^s M_{1(ij)} y_{(j)}(k-1) \quad i = 1, \dots, r \\
 um_{2(i)} &= \sum_{j=1}^r M_{2(ij)} u_j(k-1) \quad i = 1, \dots, r \quad (4-12)
 \end{aligned}$$

Nuevamente se define para cada matriz (componente de acción de control) una ganancia a la cual se deba converger como  $K$ ,  $K_1$  y  $K_2$  para las matrices  $M$ ,  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente.

Podemos encontrar una serie de constantes  $C_{(i)}$ ,  $C_{1(i)}$ , y  $C_{2(i)}$  tales que

$$\begin{array}{lll} M_{(1)} = K + C_{(1)} & M_{1(1)} = K_1 + C_{1(1)} & M_{2(1)} = K_2 + C_{2(1)} \\ M_{(2)} = K + C_{(2)} & M_{1(2)} = K_1 + C_{1(2)} & M_{2(2)} = K_2 + C_{2(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{(r)} = K + C_{(r)} & M_{1(r)} = K_1 + C_{1(r)} & M_{2(r)} = K_2 + C_{2(r)} \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{ll} M_{(i)} = M_{(i1)} + M_{(i2)} + \cdots + M_{(is)} & i = 1, \dots, r \\ M_{1(i)} = M_{1(i1)} + M_{1(i2)} + \cdots + M_{1(is)} & i = 1, \dots, r \\ M_{2(i)} = M_{2(i1)} + M_{2(i2)} + \cdots + M_{2(ir)} & i = 1, \dots, r \end{array}$$

Entonces se puede aplicar un compensador a las componentes de control de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} num_{(i)} &= \frac{K}{K + C_{(i)}} um_{(i)} \\ num_{1(i)} &= \frac{K_1}{K_1 + C_{1(i)}} um_{1(i)} \\ num_{2(i)} &= \frac{K_2}{K_2 + C_{2(i)}} um_{2(i)} \end{aligned} \tag{4-13}$$

Donde  $num_{(i)}$ ,  $num_{1(i)}$  y  $num_{2(i)}$  son las componentes de las acciones de control a aplicar al sistema.

Un análisis de las matrices similar al anterior dará como resultado que el cálculo de las ganancias  $K$ ,  $K_1$  y  $K_2$  quede de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K &= (M_{(1)} + M_{(2)} + \cdots + M_{(r)}) / L \\ K_1 &= (M_{1(1)} + M_{1(2)} + \cdots + M_{1(r)}) / L \\ K_2 &= (M_{2(1)} + M_{2(2)} + \cdots + M_{2(r)}) / L \end{aligned} \tag{4-14}$$

$$L = \text{Traza}(I + R) = s + \sum \text{diag}(R) \quad (4-15)$$

$$R = S(HH^T)^{-1}$$

$$S_{i,j} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (H_i^T H_j)_{k,l} - \text{Traza}(H_i^T H_j)$$

donde

$$i, j = 1, \dots, s$$

$H_i$  es la  $i$ -ésima fila de  $H$

$H_j$  es la  $j$ -ésima fila de  $H$

## 4.2 Método Matricial

El uso de los compensadores para igualar las acciones de control vuelve más complejo el modelo en bucle cerrado al aumentar las variables, máxime cuando se trata de sistemas MIMO. La intención del siguiente método es integrar el efecto de los compensadores en las matrices del controlador, con el fin de realizar la eliminación del rizado, con la ventaja de contar con un modelo del sistema retroalimentado más simple para su análisis.

Se desarrolla el método para un sistema multifrecuencia SISO con  $r$  actualizaciones de la acción de control y  $s$  medidas de la salida. De las ecuaciones (2-5) y (3-2) se puede replantear el cálculo de las matrices para eliminar el rizado intermuestreo en estado estacionario  $M_\infty$ ,  $M_{1\infty}$  y  $M_{2\infty}$ . Originalmente se utiliza la pseudoinversa de  $H$  para el cálculo estas matrices.

$$H^\# = H^T (H \cdot H^T)^{-1}$$

$H^\#$  es la pseudo inversa de  $H$

Si en lugar de la  $H^T$  se utiliza la siguiente matriz

$$\tilde{H} = [h_i], h_i = \left( \frac{1}{L} \sum_{k=1}^r (H_i)_k \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^{r \times 1} \quad i = 1, \dots, s \quad (4-16)$$

Se puede ver que las columnas de esta matriz tienen los mismos elementos, con esto se logra que las filas de las matrices de control sean iguales



$$M_{\infty} = H^*, M_{1\infty} = -H^*OP, M_{2\infty} = -H^*OQ \quad (4-17)$$

Donde

$$H^* = \tilde{H}(HH^T)^{-1} \quad (4-18)$$

Con esto se tendría

$$\begin{aligned} U(k) &= MY_d(k) + M_{1\infty} \cdot Y(k-1) + M_{2\infty} \cdot U(k-1) \\ &= \tilde{H}(HH^T)^{-1}Y_d(k) - \tilde{H}(HH^T)^{-1}Y(k-1) - \tilde{H}(HH^T)^{-1}U(k-1) \end{aligned}$$

Quedando

$$\begin{aligned} Y(k) &= OPY(k-1) + OQU(k-1) + H\tilde{H}(HH^T)^{-1}Y_d(k) + \\ &H\tilde{H}(HH^T)^{-1}OPY(k-1) + H\tilde{H}(HH^T)^{-1}OQU(k-1) \end{aligned}$$

Es evidente que  $H\tilde{H}(HH^T)^{-1}$  ya no es la matriz identidad con lo cual se debe calcular el valor correcto de  $L$

Analizando  $H\tilde{H}$  se observa que

$$H\tilde{H} = \frac{1}{L}(HH^T + S)$$

Donde

$$S(i, j) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (H(i,:) ^T H(j,:)(k, l) - \text{Traza}(H(i,:) ^T H(j,:)))$$

$$i, j = 1, \dots, s$$

$H(i, :)$  es la  $i$ -ésima fila de  $H$

Con lo cual

$$HH^* = \frac{1}{L}(HH^T + S)(HH^T)^{-1} = \frac{1}{L}(I + S(HH^T)^{-1}) = \frac{1}{L}(I + R)$$

Quedando

$$Y(k) = OPY(k-1) + OQU(k-1) + \frac{(I+R)}{L}Y_d(k) - \frac{(I+R)}{L}OPY(k-1) - \frac{(I+R)}{L}OQU(k-1)$$

Si se hace  $L = \text{Traza}(I + R)$  los valores  $Y(k)$  convergen a los valores de  $Y_d(k)$ . Esta forma de calcular la matrices  $M$ ,  $M_1$  y  $M_2$  asegura la igualdad de las filas en cada matriz lo cual como se ha visto anteriormente elimina el rizado intermuestreo de la salida.

### 4.3 Sistemas MIMO

En el caso MIMO se deben obtener acciones de control iguales para cada entrada relacionada con cada salida, es decir para un sistema con  $r$  entradas y  $s$  salidas definidas por la siguiente matriz de funciones:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s1}(s) & G_{s2}(s) & \cdots & G_{sr}(s) \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

Al igual que en el sistema SISO lo que se pretende es hacer que las ganancias utilizadas para el cálculo de las acciones de control sean iguales, pero solo para una determinada salida respecto a una determinada entrada, una solución sería aplicar compensadores que vayan igualando las acciones de control, pero es más simple aplicar el método matricial con la ventaja que las Matrices  $M$ ,  $M_1$  y  $M_2$  ya tienen dicha compensación.

Como se vio en el capítulo anterior en los sistemas MIMO, las acciones de control solo deben ser iguales durante el periodo envolvente  $T_0$ , si pertenecen a la misma entrada. En detalle, en un sistema MIMO, las acciones de control son resultado de todas las referencias, de todas las medidas anteriores y de todas las acciones de control anteriores. Cada referencia contribuye en el cálculo de una componente de la acción de control, estas componentes deben ser iguales para todas las actualizaciones de la acción pero no tiene por qué ser igual a las componentes generadas por otra referencia. Lo mismo sucede con las medidas de la salida anterior y con las acciones de control anteriores.

En (3-96), (3-97) y (3-98) queda reflejado lo anteriormente expuesto ya que se trata de obtener submatrices de las matrices de control; si se trata de la matriz  $M$ , las matrices resultantes relacionan las muestras de una sola referencia con las actualizaciones de una sola acción de control, en el caso de la matriz  $M_1$  las matrices obtenidas relacionan las medidas del periodo global anterior de una sola salida con las actualizaciones de una sola acción de control, por último para  $M_2$  las matrices generadas relacionan una sola acción de control anterior con una sola acción de control.

Es en estas matrices resultantes donde se aplica el concepto de igualdad de filas para lograr que las acciones de control sean iguales como se puede observar en (3-99)

Se debe recordar que el método consiste en utilizar una matriz  $H^*$  en lugar de utilizar la pseudoinversa de la matriz  $H$

Supóngase un sistema con  $r$  entradas siendo  $g_1, g_2, \dots, g_r$  las actualizaciones de acciones de control para cada entrada y con  $s$  salidas siendo  $f_1, f_2, \dots, f_s$  los muestreos para cada salida. Cabe recordar que cada componente de la matriz impulsional  $H$  relaciona cada actualización de las acciones de control de las  $r$  entradas con cada muestreo de las  $s$  salidas es decir

$$\begin{bmatrix} y_1(kT_o + t_{1,1}) \\ y_2(kT_o + t_{2,1}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,1}) \\ y_1(kT_o + t_{1,2}) \\ y_2(kT_o + t_{2,2}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,2}) \\ \vdots \\ y_1(kT_o + t_{1,f_1}) \\ y_2(kT_o + t_{2,f_2}) \\ \vdots \\ y_s(kT_o + t_{s,f_s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,1}^{1,1} & h_{1,2}^{1,1} & \dots & h_{1,r}^{1,1} & h_{1,1}^{1,2} & h_{1,2}^{1,2} & \dots & h_{1,r}^{1,2} & \dots & h_{1,1}^{1,g_1} & h_{1,2}^{1,g_2} & \dots & h_{1,r}^{1,g_r} \\ h_{2,1}^{2,1} & h_{2,2}^{2,1} & \dots & h_{2,r}^{2,1} & h_{2,1}^{2,2} & h_{2,2}^{2,2} & \dots & h_{2,r}^{2,2} & \dots & h_{2,1}^{2,g_1} & h_{2,2}^{2,g_2} & \dots & h_{2,r}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{s,1} & h_{s,2}^{s,1} & \dots & h_{s,r}^{s,1} & h_{s,1}^{s,2} & h_{s,2}^{s,2} & \dots & h_{s,r}^{s,2} & \dots & h_{s,1}^{s,g_1} & h_{s,2}^{s,g_2} & \dots & h_{s,r}^{s,g_r} \\ h_{1,1}^{2,1} & h_{1,2}^{2,1} & \dots & h_{1,r}^{2,1} & h_{1,1}^{2,2} & h_{1,2}^{2,2} & \dots & h_{1,r}^{2,2} & \dots & h_{1,1}^{2,g_1} & h_{1,2}^{2,g_2} & \dots & h_{1,r}^{2,g_r} \\ h_{2,1}^{2,1} & h_{2,2}^{2,1} & \dots & h_{2,r}^{2,1} & h_{2,1}^{2,2} & h_{2,2}^{2,2} & \dots & h_{2,r}^{2,2} & \dots & h_{2,1}^{2,g_1} & h_{2,2}^{2,g_2} & \dots & h_{2,r}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{2,1} & h_{s,2}^{2,1} & \dots & h_{s,r}^{2,1} & h_{s,1}^{2,2} & h_{s,2}^{2,2} & \dots & h_{s,r}^{2,2} & \dots & h_{s,1}^{2,g_1} & h_{s,2}^{2,g_2} & \dots & h_{s,r}^{2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1,1}^{f_1,1} & h_{1,2}^{f_1,1} & \dots & h_{1,r}^{f_1,1} & h_{1,1}^{f_1,2} & h_{1,2}^{f_1,2} & \dots & h_{1,r}^{f_1,2} & \dots & h_{1,1}^{f_1,g_1} & h_{1,2}^{f_1,g_2} & \dots & h_{1,r}^{f_1,g_r} \\ h_{2,1}^{f_2,1} & h_{2,2}^{f_2,1} & \dots & h_{2,r}^{f_2,1} & h_{2,1}^{f_2,2} & h_{2,2}^{f_2,2} & \dots & h_{2,r}^{f_2,2} & \dots & h_{2,1}^{f_2,g_1} & h_{2,2}^{f_2,g_2} & \dots & h_{2,r}^{f_2,g_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{s,1}^{f_s,1} & h_{s,2}^{f_s,1} & \dots & h_{s,r}^{f_s,1} & h_{s,1}^{f_s,2} & h_{s,2}^{f_s,2} & \dots & h_{s,r}^{f_s,2} & \dots & h_{s,1}^{f_s,g_1} & h_{s,2}^{f_s,g_2} & \dots & h_{s,r}^{f_s,g_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(kT_o + t_1^1) \\ u_2(kT_o + t_2^1) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^1) \\ u_1(kT_o + t_1^2) \\ u_2(kT_o + t_2^2) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^2) \\ \vdots \\ u_1(kT_o + t_1^{g_1}) \\ u_2(kT_o + t_2^{g_2}) \\ \vdots \\ u_r(kT_o + t_r^{g_r}) \end{bmatrix}$$

Donde  $h_{i,j}^{k,l}$  es la componente de la matriz impulsional que relaciona la  $k$ -ésima muestra de la  $i$ -ésima salida con la  $l$ -ésima actualización de la acción de control de la  $j$ -ésima entrada. Para realizar el cálculo de las matrices de control se descompondrá la matriz impulsional  $H$  en  $k \times l$  matrices es decir

$$H_{i,j} = \begin{bmatrix} h_{i,j}^{1,1} & h_{i,j}^{1,2} & h_{i,j}^{1,g_j} \\ h_{i,j}^{2,1} & h_{i,j}^{2,2} & h_{i,j}^{2,g_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{i,j}^{f_i,1} & h_{i,j}^{f_i,2} & h_{i,j}^{f_i,g_j} \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

Para cada una de estas matrices  $H_{i,j}$  obtenidas se calcula lo siguiente

$$H_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, s \quad j = 1, 2, \dots, r$$

$$H_{i,j}^* = \tilde{H}_{i,j} (H_{i,j} * H_{i,j}^T)^{-1}$$

$$\tilde{H}_{i,j} = [h_k], h_k = \left( \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{g_j} (H_{i,j}(k,l)) \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^{g_j \times 1} \quad k = 1, \dots, f_i$$

$$L = f_i + \sum \text{diag}(R)$$

$$R = S(H_{i,j} * H_{i,j}^T)^{-1}$$

$$S(k,l) = \sum_{n=1}^{g_i} \sum_{m=1}^{g_i} [H_{i,j}(k,:) ^T H_{i,j}(l,:)](n,m) - \sum \text{diag}(H_{i,j}(k,:) ^T H_{i,j}(l,:))$$

$$k, l = 1, \dots, f_i$$

$H_{i,j}(k,:)$  es la k - esima fila de  $H_{i,j}$

Una vez obtenidas todas las matrices  $H_{i,j}^*$  se procede a integrar todas estas matrices en una matriz  $H^*$  por medio del procedimiento inverso al utilizado en (4-20) para la obtención de las matrices  $H_{k,l}$ . Ésta matriz será utilizada para el cálculo de las matrices de control

$$\begin{aligned} M_\infty &= H^* , \\ M_{1\infty} &= -H^* OP, \\ M_{2\infty} &= -H^* OQ \end{aligned} \quad (4-21)$$

## 4.4 Asignación de polos

De la sección anterior se puede observar que lo importante para lograr eliminar el rizado intermuestreo es que las acciones de control sean iguales a lo largo del metaperiodo  $T_0$ . Otra forma de lograrlo es mediante un controlador de retroalimentación del estado, que logre que el sistema se comporte de acuerdo a un modelo deseado como el descrito por (2-22).

$$\Gamma = W^\# (A_d - A^N) = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_r \end{bmatrix} \quad \text{Donde } r \text{ es el número de acciones de control} \quad (4-22)$$

Pero dada la naturaleza de  $W$ , las componentes de  $\Gamma_i$  son diferentes, con lo que la salida presenta un rizado intermuestreo.

Se propone una nueva matriz de retroalimentación en la que las acciones de control sean iguales es decir

$$\Gamma_{\infty} = \begin{bmatrix} \Gamma_{1\infty} \\ \Gamma_{2\infty} \\ \vdots \\ \Gamma_{r\infty} \end{bmatrix} \quad \Gamma_{1\infty} = \Gamma_{2\infty} = \dots = \Gamma_{r\infty} \quad (4-23)$$

Donde  $\Gamma_{i\infty}$  corresponden a las matrices de retroalimentación de cada una de las acciones de control en el modelo BMIO.

La representación espacio-estado con periodo  $T_0$  es

$$x_{k+1} = x[(k+1)T_0] = A^N x_k + WU_k \quad (4-24)$$

Donde

$$W = [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} \dots A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} \quad B_{N-r_r}] \in R^{n \times mr} \quad (4-25)$$

$$U_k = \begin{bmatrix} u(kT_0 + t^1) \\ u(kT_0 + t^2) \\ \vdots \\ u(kT_0 + t^r) \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

Haciendo las acciones de control iguales

$$u(kT_0 + t^1) = u(kT_0 + t^2) = \dots = u(kT_0 + t^r) = u(kT_0)$$

Equivale a tener un sistema monofrecuencia a periodo  $T_0$  igual a

$$x[(k+1)T_0] = A^N x[kT_0] + \bar{W}u(kT_0) \quad (4-27)$$

$$\bar{W} = [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}]$$

Se obtiene la forma canónica del sistema anterior mediante la transformación del estado dada por:

$$\bar{x} = Px \quad (4-28)$$

Donde

$$P^{-1} = [\bar{W}, A\bar{W}, A^2\bar{W}, \dots, A^{n-1}\bar{W}] \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

Y  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$  los autovalores de (4-27). Las nuevas matrices del sistema serian

$$\bar{A} = PAP^{-1} \quad \text{y} \quad \bar{W} = P\bar{W}$$

La matriz de controlabilidad del nuevo sistema transformado es:

$$\bar{C}_o = [\bar{W}, \bar{A}\bar{W}, \bar{A}^2\bar{W}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{W}] = P[\bar{W}, A\bar{W}, A^2\bar{W}, \dots, A^{n-1}\bar{W}] = PC_o$$

$$P^{-1} = C_o\bar{C}_o^{-1}$$

Se propone una retroalimentación del estado definida por

$$U_k = R_k - Kx_k = R_k - KP^{-1}\bar{x}_k = R_k - \bar{K}\bar{x}_k$$

Donde

$$\bar{K} = KP^{-1}$$

Se definen los autovalores deseados para formar el polinomio característico que tendrá el sistema realimentado:

$$\Delta_k(s) = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_n$$

Y se elige

$$\bar{K} = [\bar{\alpha}_n - \alpha_n, \dots, \bar{\alpha}_2 - \alpha_2, \bar{\alpha}_1 - \alpha_1] \quad (4-30)$$

Con lo que el sistema transformado en lazo cerrado queda

$$\bar{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{\alpha}_n & -\bar{\alpha}_{n-1} & -\bar{\alpha}_{n-2} & \cdots & -\bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \bar{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Así, el sistema retroalimentado tiene los autovalores deseados. Luego la matriz de realimentación en las coordenadas originales es

$$K = \bar{K}P = \bar{K}\bar{C}_o C_o^{-1} \quad (4-31)$$

Donde

$$C_o = [\bar{W}, A\bar{W}, A^2\bar{W}, \dots, A^{n-1}\bar{W}]$$

$$\bar{C}_o = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Esta matriz de ganancia calculada para el sistema monofrecuencia a periodo  $T_0$  es la que se utiliza para obtener la matriz de realimentación del estado para el sistema multifrecuencia mediante la asignación

$$\Gamma_{1\infty} = \Gamma_{2\infty} = \dots = \Gamma_{r\infty} = K \quad (4-32)$$

Se puede obtener una matriz de retroalimentación del estado  $\Gamma_\infty$  definida en (4-23) que haga que el sistema tenga un comportamiento deseado.

Este controlador a diferencia del descrito en (2-22), elimina el rizado dado que las acciones de control son las mismas a lo largo del periodo envolvente  $T_0$ , asegurando un comportamiento deseado del sistema multifrecuencia.

Por otra parte si lo que se pretende es que el sistema siga una referencia, se puede combinar el controlador descrito anteriormente con uno de cancelación. Se sabe de (3-2) que un controlador de cancelación es equivalente a un sistema que tenga el siguiente comportamiento

$$U_k = H^\#(Y_{d,k} - O x_k)$$

$$x_{k+1} = (A^N - WH^\#O)x_k + H^\#Y_{d,k}$$

Se desea que el comportamiento del nuevo controlador sea igual al de cancelación simplemente con las acciones de control iguales. El comportamiento del sistema está definido por los autovalores.

$$[\bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_{n-1}, \dots, \bar{\alpha}_1] = \text{eig}(A^N - WH^\#O) \quad (4-33)$$

Los cuales pueden ser utilizados como primera aproximación junto con (4-30), (4-31) y (4-32) para definir la matriz de retroalimentación del estado  $\Gamma_\infty$  expresada en (4-23). En términos de las matrices de un controlador de cancelación descrito por (4-1), quedaría de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Gamma &= -H^\#O \\ \Gamma_\infty &= -H_\infty^\#O \\ M_\infty &= H_\infty^\# = \Gamma_\infty O^\# \\ M_{1\infty} &= -M_\infty OP \\ M_{2\infty} &= -M_\infty OQ \end{aligned} \quad (4-34)$$

## 4.5 Control Óptimo

El método de diseño de asignación de polos, vista en la sección anterior es una buena herramienta en el control de sistemas en variable de estados. Sin embargo, no siempre se conoce qué polos son los más adecuados; o puede ser que la asignación de los polos de un controlador de cancelación no sea la mejor opción.

Se introducirá un método alternativo, en el que la matriz de retroalimentación del estado se calcula de tal forma que minimice un criterio de optimización dado. El criterio particular que se utiliza es un funcional cuadrático del estado y la entrada de control,

$$J = (x(t), u(t)) = \int_t^T [x^T(\tau)Qx(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau)]d\tau$$



Donde  $Q$  y  $R$  son matrices constantes (aunque no necesariamente) semi-definida y definida positivas respectivamente.

El control que se obtiene de minimizar este criterio es lineal. Como el criterio se basa en funcionales cuadráticos, el método se conoce como lineal-cuadrático (LQ: linear-quadratic), del que se obtiene el regulador lineal cuadrático (LQR).

Criterios similares de optimización se siguen para el diseño de observadores, sólo que el funcional depende del error de estimación, y se basa en una caracterización estadística de los ruidos que afectan al sistema. Este estimador óptimo lineal-cuadrático se conoce como el filtro de Kalman. Cuando se combinan la ganancia de realimentación de estados LQ con el filtro de Kalman, obtenemos lo que se conoce como un controlador lineal-cuadrático-gaussiano (LQG). (gaussiano corresponde a la caracterización estadística del ruido empleada.)

El estado de un sistema discreto describe una trayectoria haciendo transiciones discretas de un estado a otro bajo el efecto de una entrada también aplicada en tiempo discreto. Cuando se asocia un criterio de optimización al sistema, cada transición de estado tiene asociado un costo o penalidad. Por ejemplo, pueden penalizarse las transiciones de estado que se alejan demasiado del estado final deseado, o las acciones de control de valores demasiado elevados. A medida que el sistema evoluciona de estado en estado, los costos se suman hasta acumular un costo total asociado a la trayectoria.

Consideremos el sistema en tiempo discreto definido por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad x \in R^n \quad u \in R^p \quad (4-35)$$

Se debe encontrar la secuencia de control  $u_k$  que lleve al sistema de la condición inicial  $x_i = x_0$  al estado final  $x_N = x_f$ , minimizando el funcional cuadrático

$$J_{i,N} = \frac{1}{2} x_N^T S x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \quad (4-36)$$

El funcional (4-36) puede interpretarse como el costo total de la transición de  $x_i$  a  $x_N$  y, en particular, el término  $x_N^T S x_N$  penaliza el error en alcanzar el estado final deseado. Las matrices de peso  $S$ ,  $Q$  y  $R$  pueden seleccionarse para penalizar ciertos estados/entradas más que otros. Las matrices  $S$  y  $Q$  deben ser semi-definidas positivas, y la matriz  $R$  definida positiva.

Para encontrar el control a aplicar al sistema de forma que se minimice (4-36), se parte del paso  $N-1$  de la trayectoria óptima. Así, el costo de la transición de  $N-1$  a  $N$  es

$$J_{N-1,N} = \frac{1}{2} (x_N^T S x_N + x_{N-1}^T Q x_{N-1} + u_{N-1}^T R u_{N-1}) \quad (4.37)$$

Usando (4-35), se sustituye  $x_N$  como una función de  $u_{N-1}$ , lo que da

$$J_{N-1,N} = \frac{1}{2} (Ax_{N-1} + Bu_{N-1})^T S (Ax_{N-1} + Bu_{N-1}) + x_{N-1}^T Q x_{N-1} + u_{N-1}^T R u_{N-1}$$

Como  $J$  es cuadrático en  $u$  se minimiza diferenciando e igualando a cero

$$0 = \frac{\partial^T J_{N-1,N}}{\partial u_{N-1}} = B^T S (Ax_{N-1} + Bu_{N-1}) + Ru_{N-1} = (R + B^T S B) u_{N-1} + B^T S A x_{N-1} \quad (4.38)$$

Quedando la última acción de control como

$$u_{N-1}^* = -(R + B^T S B)^{-1} B^T S A x_{N-1} \quad (4.39)$$

Que resulta ser mínimo ya que la segunda derivada es positiva. De (4-39) se observa que se trata de un control lineal por retroalimentación del estado.

$$u_{N-1}^* = -K_{N-1} x_{N-1}, \quad K_{N-1} = (R + B^T S B)^{-1} B^T S A$$

El valor del costo mínimo obtenido con  $u_{N-1}$  es

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^* &= \frac{1}{2} ((Ax_{N-1} - BK_{N-1}x_{N-1})^T S (Ax_{N-1} - BK_{N-1}x_{N-1}) + \\ &\quad x_{N-1}^T Q x_{N-1} + x_{N-1}^T K_{N-1}^T R K_{N-1} x_{N-1}) \\ &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T ((A - BK_{N-1})^T S (A - BK_{N-1}) + Q + K_{N-1}^T R K_{N-1}) x_{N-1} \\ &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T S_{N-1} x_{N-1} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} S_{N-1} &= (A - BK_{N-1})^T S (A - BK_{N-1}) + Q + K_{N-1}^T R K_{N-1} \\ S_N &= S \\ K_N &= (R + B^T S_N B)^{-1} B^T S_N A \end{aligned}$$

Si se retrocede un paso más en la trayectoria situándose en el paso  $N-2$  Se tiene que el coste para ir de el punto  $N-2$  a  $N$  esta dado por

$$J_{N-2,N} = J_{N-2,N-1} + J_{N-1,N}$$

Por lo que la estrategia óptima sería

$$J_{N-2,N}^* = J_{N-2,N-1} + J_{N-1,N}^*$$

Con lo cual solo es necesario calcular la estrategia óptima que va del punto  $N-2$  a  $N-1$ . Haciendo un análisis similar al realizado anteriormente se obtiene que:

$$\begin{aligned} u_{N-2}^* &= -K_{N-2} x_{N-2} \\ K_{N-2} &= (R + B^T S_{N-1} B)^{-1} B^T S_{N-1} A \end{aligned}$$

Retrocediendo en los pasos  $N-2, N-3, \dots, k$ , se generan las siguientes expresiones recursivas para el control óptimo

$$u_k^* = -K_k x_k \quad (4-40)$$

$$K_k = (R + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} A \quad (4-41)$$

$$S_k = (A - BK_k)^T S_{k+1} (A - BK_k) + Q + K_k^T R K_k \quad (4-42)$$

Nótese que la ecuación en diferencias (4-42) de  $S_k$  se resuelve hacia atrás, comenzando en  $S_N=S$ . y el costo óptimo de  $k$  a  $N$  es

$$J_{k,N}^* = \frac{1}{2} x_k^T S_k x_k$$

Se ha visto que cuando el proceso de control es finito, la matriz de ganancia de retroalimentación del estado  $K(k)$  es una matriz que va variando con el tiempo. Si el proceso continua sin limitaciones, es decir  $N=\infty$ , la solución de control óptimo se convierte en una solución de estado estacionario, y la matriz de ganancia variante en el tiempo se convierte en una matriz de ganancia constante  $K$  conocida como matriz de ganancia de estado estacionario.

Si se hace que  $S_k = S \quad \forall k$  de (4-41) y (4-42) se tiene por resultado

$$S = A^T S A - A^T S B (R + B^T S B)^{-1} B^T S A + Q \quad (4-43)$$

$$K = (R + B^T S B)^{-1} B^T S A \quad (4-44)$$

La ecuación (4-43) se conoce como la ecuación algebraica discreta de Riccati. Para el sistema BMIO, la representación espacio-estado con periodo  $T_0$  es

$$x_{k+1} = x[(k+1)T_0] = A^N x_k + WU_k$$

Donde

$$W = [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} \dots A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} \ B_{N-r_r}] \in R^{n \times mr}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} u(kT_0 + t^1) \\ u(kT_0 + t^2) \\ \vdots \\ u(kT_0 + t^r) \end{bmatrix}$$

Si se parte del hecho de que para eliminar el rizado intermuestreo se debe hacer las acciones de control iguales

$$u(kT_0 + t^1) = u(kT_0 + t^2) = \dots = u(kT_0 + t^r) = u(kT_0)$$

Se puede decir que equivale a tener un sistema monofrecuencia a periodo  $T_0$  igual a

$$x[(k+1)T_0] = A^N x[kT_0] + [A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}] u(kT_0) \quad (4-45)$$

Por lo que se propone que el cálculo de la matriz de de control óptimo  $K$  mediante el uso del par  $[A, \bar{W}]$  donde:

$$\bar{W} = A^{N-r_2} B_{r_2-r_1} + \dots + A^{N-r_r} B_{r_r-r_{r-1}} + B_{N-r_r}$$

Por lo que resolviendo la siguiente ecuación de Riccati

$$S = A^T S A - A^T S \bar{W} (R + \bar{W}^T S \bar{W})^{-1} \bar{W}^T S A + Q \quad (4-46)$$

$$K = (R + \bar{W}^T S \bar{W})^{-1} \bar{W}^T S A$$

Al igual que en el controlador antes descrito, esta matriz de ganancia obtenida para el sistema monofrecuencia es aplicada al sistema multifrecuencia de la siguiente manera:

$$\Gamma_{1\infty} = \Gamma_{2\infty} = \dots = \Gamma_{r\infty} = K \quad (4-47)$$

Una vez obtenida las matrices de retroalimentación  $\Gamma_{i\infty}$  que minimice el índice anterior se procede a conformar la matriz de retroalimentación del sistema multifrecuencia

$$\Gamma_{\infty} = \begin{bmatrix} \Gamma_{1\infty} \\ \Gamma_{2\infty} \\ \vdots \\ \Gamma_{r\infty} \end{bmatrix} \quad (4-48)$$

Se puede obtener una matriz de retroalimentación del estado  $\Gamma_{\infty}$  que sustituye a la definida en (2-25) para hacer que el sistema tenga un comportamiento deseado.

Este controlador a diferencia del descrito en (2-25), elimina el rizado debido a que las acciones de control son las mismas a lo largo del periodo envolvente  $T_{\theta}$ .

Nuevamente, si lo que se desea es que el sistema siga una referencia, se puede combinar el controlador óptimo con uno de cancelación. Se sabe de (3-2) que un controlador de cancelación es equivalente a un sistema que tenga el siguiente comportamiento

$$U_k = H^{\#}(Y_{d,k} - O x_k)$$

$$U_k = H^{\#}Y_{d,k} - H^{\#}O x_k = H^{\#}Y_{d,k} - \Gamma x_k$$

De la expresión anterior se sustituye  $\Gamma$  por la matriz  $\Gamma_{\infty}$  calculada a partir de (4-48) y se vuelven a calcular las matrices del controlador de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -H^{\#}O \\ \Gamma_{\infty} &= -H_{\infty}^{\#}O \\ M_{\infty} &= H_{\infty}^{\#} = \Gamma_{\infty}O^{\#} \\ M_{1\infty} &= -M_{\infty}OP \\ M_{2\infty} &= -M_{\infty}OQ \end{aligned} \quad (4-49)$$

## 4.6 Eliminación del offset

Las matrices de control definidas en (4-34) o (4-49) para eliminar el rizado en un controlador que sigue una referencia son:

$$\begin{aligned}
M_\infty &= H_\infty^\# \\
M_{1\infty} &= -M_\infty OP \\
M_{2\infty} &= -M_\infty OQ
\end{aligned}$$

Los resultados de las simulaciones apuntan a que se tiene un offset en la salida ya que la cancelación que existía en el controlador original ya no se lleva a cabo. Esto es que la ganancia estática del sistema retroalimentado no es 1, este sistema se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= (A^N - WM_\infty O)x_k + WM_\infty R_k \\
Y_k &= (I - HM_\infty)Ox_k + HM_\infty R_k
\end{aligned}$$

Quedando

$$\begin{aligned}
A_r &= A^N - WM_\infty O \\
B_r &= WM_\infty \\
C_r &= (I - HM_\infty)O \\
D_r &= HM_\infty
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = C_r (zI - A_r)^{-1} B_r + D_r$$

Para hacer la ganancia en estado estacionario igual a la unidad se propone un procedimiento basado en la modificación de las matrices  $B_r$  y  $D_r$ . Si se define  $G$  como la ganancia en estado estacionario de la función de transferencia sin modificar, es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{R(z)} &= C_r (zI - A_r)^{-1} B_r + D_r = \frac{z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \\
G &= \frac{b_1 + \dots + b_m}{a_1 + \dots + a_n}
\end{aligned}$$

La función de transferencia al multiplicar  $B_r$  y  $D_r$  por el inverso de la ganancia  $G$  quedaría

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = C_r (zI - A_r)^{-1} \frac{1}{G} B_r + \frac{1}{G} D_r = \frac{1}{G} (C_r (zI - A_r)^{-1} B_r + D_r)$$

Con lo que se asegura que la ganancia en estado estacionario sea unitaria.

Como  $Y$  y  $R$  son los vectores que contienen los muestreos de la salida y de la referencia respectivamente, lo que se obtendría sería una matriz de  $(s \times s)$  funciones de transferencia, siendo  $s$  el numero de muestras de la salida, La función de transferencia de cada muestra es la suma de las  $s$  funciones de transferencia con cada una de las muestras de la referencia.

Siendo  $G$  el valor por el cual vamos a multiplicar la matriz  $B_r$  y  $D_r$  para modificar la función de transferencia y obtener la ganancia unitaria.

El controlador modificado quedaría:

$$\begin{aligned} Y_k &= OPY_{k-1} + OQU_{k-1} + HU_k \\ U_k &= GM_\infty R_k + M_{1\infty} Y_{k-1} + M_{2\infty} U_{k-1} \end{aligned}$$

Quedando el sistema retroalimentado como

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A^N - WM_\infty O)x_k + WGM_\infty R_k \\ Y_k &= (I - HM_\infty)Ox_k + HGM_\infty R_k \end{aligned}$$

Donde se observa que solo se modifica la ganancia en estado estacionario, mientras que los polos del sistema permanecen sin modificar.

Para sistemas MIMO se hace el mismo análisis. En lugar de calcular una constante, lo que se obtiene es una matriz que sustituye a la que acompaña al vector de referencias. Esto significa, que en primera instancia se elimina la matriz  $M_\infty$  quedando el sistema retroalimentado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A^N - WM_\infty O)x_k + WR_k \\ Y_k &= (I - HM_\infty)Ox_k + HR_k \end{aligned}$$

El sistema en bucle cerrado es

$$\begin{aligned} A_r &= A^N - WM_\infty O \\ B_r &= W \\ C_r &= (I - HM_\infty)O \\ D_r &= H \end{aligned}$$

Entonces

$$Y(z) = (C_r (zI - A_r)^{-1} B_r + D_r) R(z)$$

Lo que se desea es que las salidas sean iguales a las referencias por lo que se debe multiplicar el vector de referencias por una Matriz  $F$  que logre este objetivo, es decir:

$$Y(z) = (C_r (zI - A_r)^{-1} B_r + D_r) FR(z)$$

Donde

$$F = (C_r (I - A_r)^{-1} B_r + D_r)^{\#}$$

Donde nuevamente  $\#$  denota la pseudoinversa, esto debido a que cuando se tiene que el número total de las acciones de control es diferente del número total de salidas, la matriz  $F$  no es cuadrada.

## 4.7 Filtro de Transición

Del análisis realizado a los controladores descritos en las secciones anteriores se desprende que estos conllevan una mejor respuesta en estado estacionario, ya que eliminan el rizado intermuestreo. No obstante la respuesta transitoria que resulta de la aplicación de los controladores originales sigue siendo mejor, por lo que se piensa en un mecanismo de transición entre las matrices de control.

Para el controlador de asignación de polos se puede aplicar el siguiente filtro

$$\Gamma(z) = \Gamma + \frac{(1-\beta)}{1-\beta z^{-1}} (\Gamma_{\infty} - \Gamma)$$

Donde  $\Gamma_{\infty}$  es la matriz de retroalimentación en estado estacionario (4-23) y  $\Gamma$  es la definida por (2-22) lo que se traduce en

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \beta \Gamma_k + (1-\beta) \Gamma_{\infty} \\ \Gamma_0 &= \Gamma \end{aligned}$$

En el caso de los controladores diseñados para seguir una referencia se aplica el siguiente filtro



$$M(z) = M + \frac{(1-\beta)}{1-\beta z^{-1}}(M_{\infty} - M)$$

Donde  $M_{\infty}$  es la matriz en estado estacionario definidas ya sea por (4-21), (4-34) o (4-49) y  $M$  es la definida por (3-2) lo que se traduce en

$$\begin{aligned} M_k &= \beta M_{k-1} + (1-\beta)M_{\infty} \\ M_0 &= M \end{aligned}$$

El valor de  $\beta$  varía desde 1 donde se tiene un controlador que trabaja solo con la matrices que no eliminan el rizado intermuestreo, hasta 0 que corresponde a la transición más rápida hacia las matrices que eliminan el rizado.

## 4.8 Conclusiones

Basados en el análisis realizado en el capítulo anterior se han presentado diferente diseños de controladores que hacen que el rizado intermuestreo desaparezca.

El primero se basa en la igualación de acciones de control mediante la aplicación de compensadores que igualan las acciones de control pero que mantienen la cancelación permitiendo que el sistema siga una referencia, esta idea es integrada en el cálculo de las matrices del controlador con lo que se obtiene un nuevo controlador que es más fácil de analizar ya que se trata de un esquema similar a un controlador de cancelación con la particularidad que sus matrices están calculadas para generar acciones de control iguales con el fin de eliminar el rizado.

Este controlador presenta la desventaja que a pesar de eliminar el rizado no se tiene influencia en el comportamiento del sistema en lazo cerrado, cosa que se logra con los controladores de asignación de polos y de control óptimo.

Por último se presentó una técnica para sacar provecho de los controladores “originales“ que presentan una mejor respuesta transitoria y los controladores aquí desarrollados que en estado estacionario eliminan el rizado.



---

## CAPÍTULO 5 HERRAMIENTAS CACSD Y EJEMPLOS

---

Para poder realizar el análisis de los controladores definidos en el capítulo anterior, se diseñó la herramienta basada en MATLAB/SIMULINK que consiste en una Biblioteca de Simulink que contiene 7 controladores basados en el modelado BMIO.

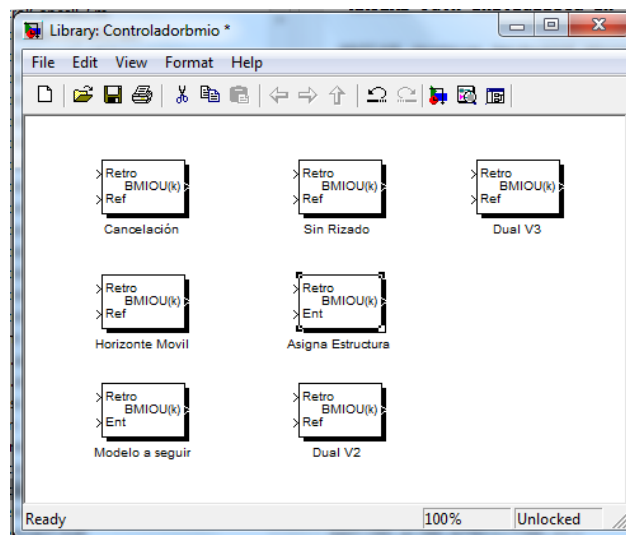


Fig. 5-1. Herramienta CACSD desarrollada en SIMULINK

El primer controlador que se observa es el de **Cancelación**, el cual es la base de este estudio. Está basado en la ley de control que define (3-2). Como se ha visto anteriormente este controlador presenta el rizado intermuestreo y junto con el controlador de **Horizonte Móvil** y de **Modelo a seguir** conforman el grupo de controladores originales del modelo BMIO.

La segunda opción disponible es el controlador de **Horizonte Móvil** el cual se describe en la sección 3.1.2, este controlador va calculando las acciones de control cuando se van actualizando, para ello se obtiene una serie de ternas de matrices ( $M$ ,  $M_1$  y  $M_2$ ), una terna para cada acción de control.

Como tercera opción se tiene el controlador de **Modelo a Seguir** que mediante la retroalimentación de la salida, asigna el comportamiento deseado (descrito por la matriz Ad) al sistema controlado, se tiene una descripción de este controlador en la sección 3.1.3.

El primer controlador utilizado en la eliminación del rizado es el denominado **Sin Rizado**, este controlador descrito en la sección 4.3 y 4.4 para sistemas MIMO se basa en el uso de matrices que incorporan los compensadores descritos en la sección 4.2.

Una modificación al anterior controlador da por resultado al controlador **Dual V2**, este es una combinación de un controlador de **Cancelación** original con un controlador **Sin Rizado**. Este utiliza el controlador original para la respuesta transitoria y mediante un filtro de transición (descrito en la sección 4.7) se conmuta a un controlador Sin Rizado para la respuesta en estado estacionario. La velocidad con la que se realiza la transición es determinada por el parámetro beta, cuyo valor va de 0 a 1, siendo 1 el valor que hace que el controlador no realice el cambio, es decir, se comporte como un controlador de **Cancelación** y el 0 para la transición más rápida hacia un controlador **Sin Rizado**.

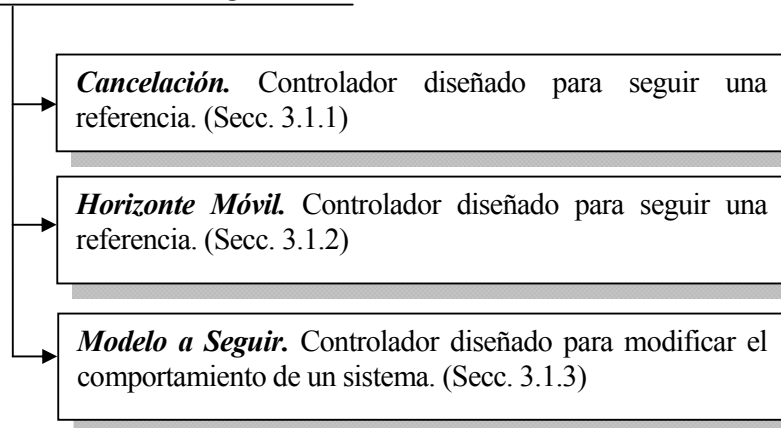
El Controlador **Asigna Estructura** es una modificación realizada al controlador Modelo a Seguir descrito anteriormente para que no presente rizado en estado estacionario. Este controlador cuenta con dos opciones, la primera utiliza la técnica de asignación de polos descrita en la sección 4.4, para lograr que el sistema controlado se comporte igual que un sistema que contenga los polos introducidos como parámetro **polos** al controlador. La segunda consiste en asignar el comportamiento definido por el control óptimo cuadrático descrito en la sección 4.5, al sistema. Adicionalmente cuenta con una opción que permite hacer una transición entre una controlador con mejor respuesta transitoria como el Modelo a Seguir y un controlador Asigna Estructura que elimina el rizado; esto mediante un filtro de transición descrito en la sección 4.7, que tiene como parámetro el valor beta, que va de 0 a 1, donde 1 corresponde a un controlador Modelo a Seguir sin transición y 0 corresponde a la mayor velocidad de transición a un controlador de Asigna Estructura.

Por último se tiene el controlador **Dual V3**, el cual realiza un seguimiento de una referencia pero aplicando uno de dos métodos a escoger. El primero es la asignación de polos (comando **place** de MATLAB) descrito en la sección 4.4, el cual mediante la retroalimentación de la salida hace que el sistema tenga un comportamiento (Asigna los polos) de un controlador de cancelación pero haciendo que las acciones de control sean iguales por lo tanto sin rizado intermuestreo. El segundo método es permitir el seguimiento de una referencia mediante el control óptimo cuadrático descrito en la sección 4.5 (comando **dlqr** de MATLAB). Al igual que el controlador Dual V2 cuenta con un filtro de transición que combina un controlador de Cancelación para la respuesta transitoria.

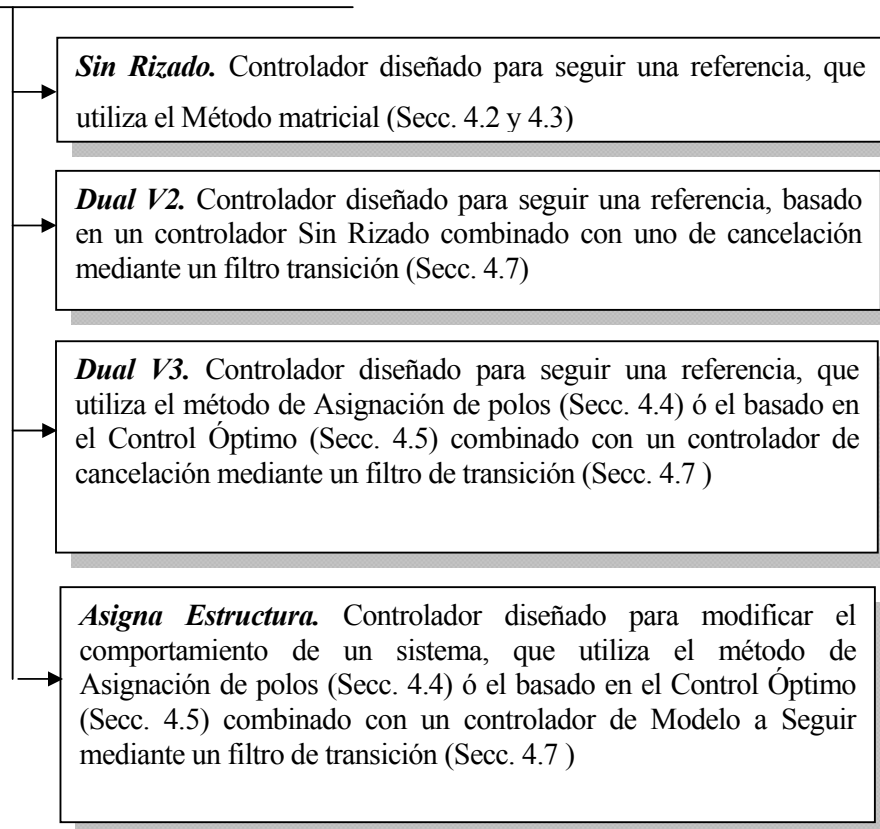
Lo anterior se resume en el siguiente esquema.

## Controladores BMIO

### Controladores originales:



### Controladores sin rizado



El uso de estos controladores es sencillo, basta con arrastrar cualquier controlador a un modelo de SIMULINK y conectar la salida del controlador a la entrada del sistema que se desea controlar y la salida de este sistema a la entrada “*Retro*” del controlador, dejando la entrada “*Ref*” para la referencia a seguir en el caso de los controladores de Cancelación,

Horizonte Móvil, Sin Rizado, Dual V2 y Dual V3; en el caso de los controladores Modelo a Seguir y Asigna Estructura la entrada “Ent” funciona como la entrada que se desea aplicar al sistema con el nuevo comportamiento logrado por el controlador.

Un modelo donde se utiliza uno de los controladores se muestra a continuación:

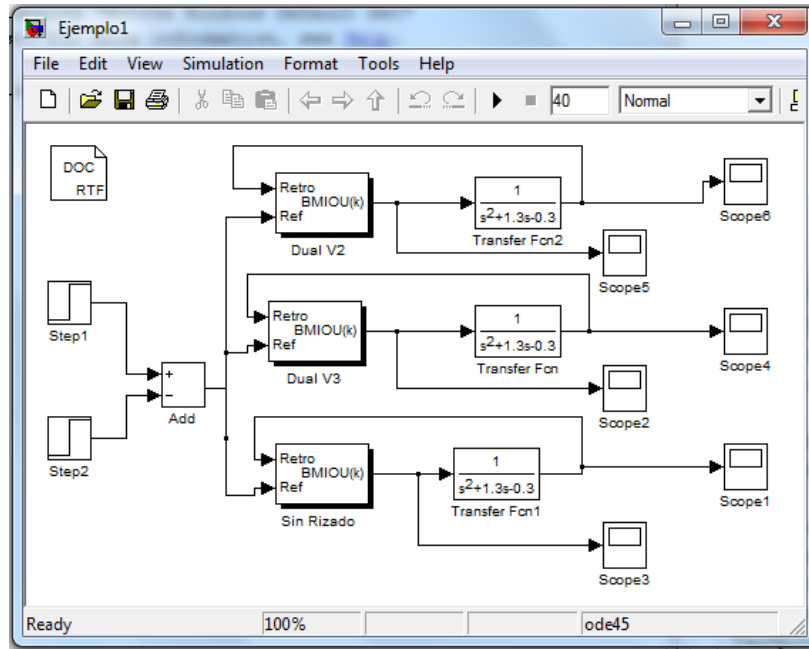


Fig. 5-2. Modelo de SIMULINK con Controladores

En las siguientes secciones se presentan ejemplos de utilización de los controladores desarrollados en esta herramienta CACSD.

## 5.1 Sistema SISO y controlador Dual V2

Consideremos el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.2)(s + 1.5)}$$

Una realización mínima está dada por

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.7 & -0.6 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

Se asume un periodo de muestreo de 0.6 s y un periodo de actualización de la señal de control de 0.4 s, para asegurar la controlabilidad y observabilidad de modelo BMIO se definen los siguientes esquemas de muestreo, donde el metaperiodo  $T_\theta$  se ha duplicado.

Las entradas {0 0.4 0.8}

Las salidas {0.6, 1.2}

Con un periodo envolvente  $T_\theta = 1.2$  s

Las matrices generadas son las siguientes

$$M = \begin{bmatrix} 10.4969 & -1.0359 \\ -10.2270 & 6.5237 \\ -6.5370 & 3.6759 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3.3020 & -12.2180 \\ -0.6450 & 4.6661 \\ -0.6427 & 3.6309 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0741 & -0.7782 \\ 0 & 0.0145 & 0.1520 \\ 0 & 0.0144 & 0.1515 \end{bmatrix}$$

Si se utiliza el método matricial para el cálculo de las matrices da por resultado

$$M_\infty = \begin{bmatrix} -2.2549 & 3.2971 \\ -2.2549 & 3.2971 \\ -2.2549 & 3.2971 \end{bmatrix} M_{1\infty} = \begin{bmatrix} 0.7248 & -1.4108 \\ 0.7248 & -1.4108 \\ 0.7248 & -1.4108 \end{bmatrix} M_{2\infty} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0163 & -0.1708 \\ 0 & -0.0163 & -0.1708 \\ 0 & -0.0163 & -0.1708 \end{bmatrix}$$

La siguiente figura muestra la comparación de la respuesta con el controlador original y la respuesta con las matrices calculadas con el método matricial.



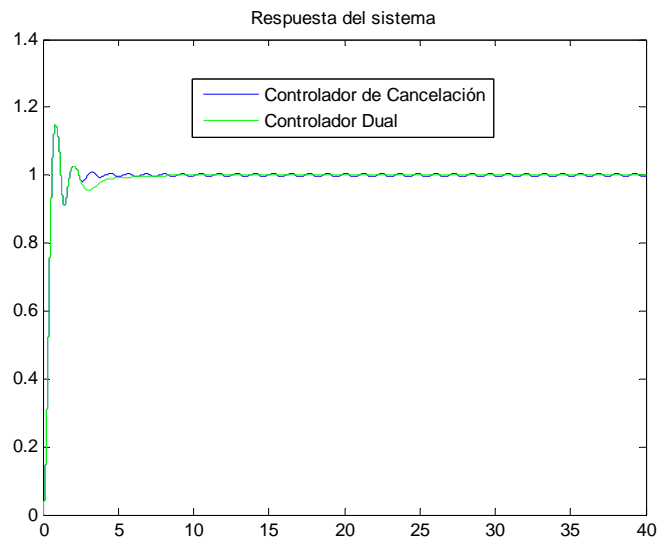


Fig. 5-3. Comparación de los controladores

La siguiente figura muestra las acciones de control de la simulación anterior observese que las acciones de control del control original cambian periódicamente mientras que las otras al final convergen a un valor constante.

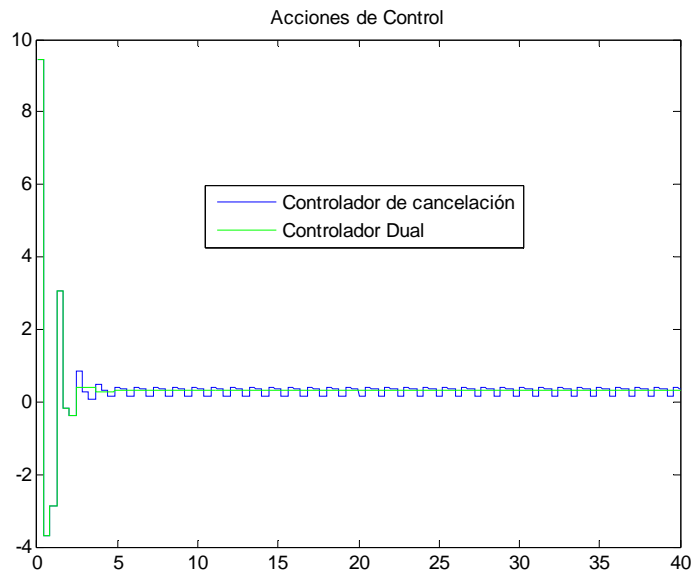


Fig. 5-4 Acciones de control

## 5.2 Sistema SISO con polo inestable y controlador dual V2

Ahora consideremos el siguiente sistema inestable:

$$G(s) = \frac{1}{(s-0.2)(s+1.5)}$$

Una realización mínima está dada por

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

Se asume un esquema de muestreo de  $[0.75, 1.5]$  y de actualización de la señal de control de  $[0 \ 0.5 \ 1]$  s quedando el periodo envolvente en 1.5 s.

Las matrices generadas son las siguientes

$$M = \begin{bmatrix} 6.5589 & -0.6190 \\ -7.1048 & 4.0213 \\ -4.3042 & 2.1836 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 2.1269 & -8.5164 \\ -0.4252 & 3.1924 \\ -0.3992 & 2.3968 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0744 & -0.7893 \\ 0 & 0.0149 & 0.1578 \\ 0 & 0.0140 & 0.1481 \end{bmatrix}$$

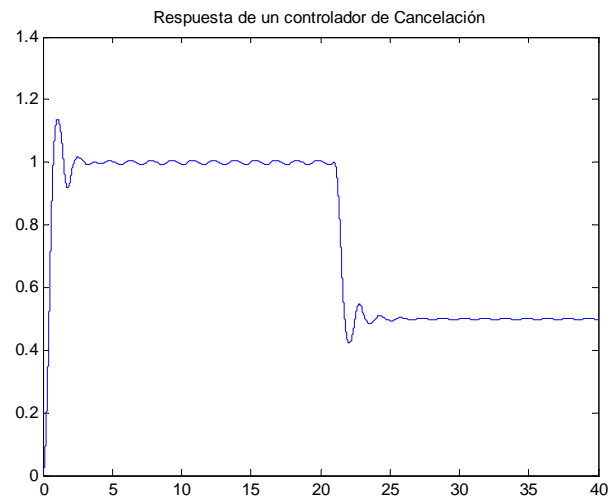


Fig. 5-5 Respuesta del controlador de cancelación

Se observa un rizado en la respuesta que se eliminará utilizando el método matricial para el cálculo de las matrices da por resultado

$$M_{\infty} = \begin{bmatrix} -1.7547 & 2.0208 \\ -1.7547 & 2.0208 \\ -1.7547 & 2.0208 \end{bmatrix} M_{1\infty} = \begin{bmatrix} 0.4712 & -1.0948 \\ 0.4712 & -1.0948 \\ 0.4712 & -1.0948 \end{bmatrix} M_{2\infty} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0165 & -0.1749 \\ 0 & -0.0165 & -0.1749 \\ 0 & -0.0165 & -0.1749 \end{bmatrix}$$

Con 3 polos en el origen y dos en sobre el eje real en 0.7572 y -0.1342 con lo que en esta ocasión el sistema es estable

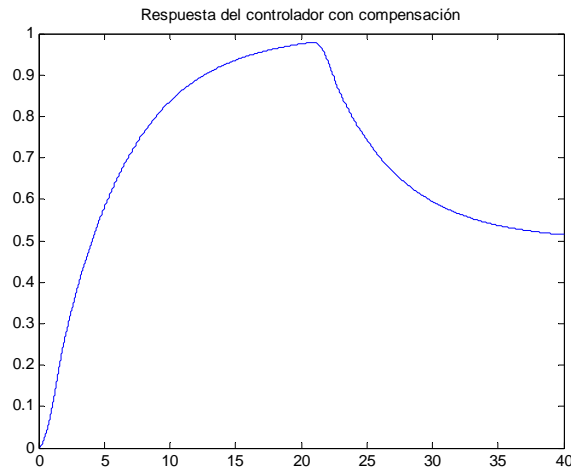


Fig. 5-6 Respuesta del controlador con compensación

Se puede observar que el sistema tiene una repuesta más lenta con lo que se piensa en un controlador que combine las características del controlador de cancelación y la del controlador con compensación, es decir, que sea igual de rápido que el primero y que elimine el rizado intermuestreo como el segundo. En la herramienta de simulink se le denomina Controlador Dual.

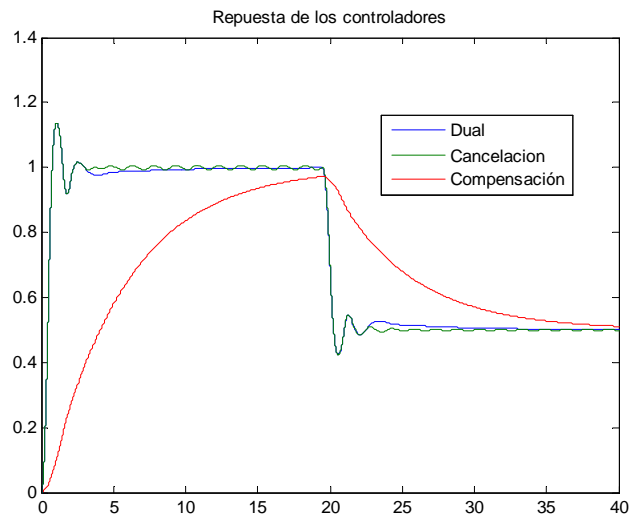


Fig. 5-7 Comparativa de la respuesta de los 3 controladores

En la figura anterior se observa como la respuesta en verde del controlador de cancelación es más rápida pero con un rizado, mientras que la salida del controlador con compensación en rojo es lenta en comparación del primero. La respuesta del controlador dual se observa en azul la cual coincide con la respuesta del primero en los primeros instantes pero luego elimina el rizado.

### 5.3 Sistema SISO y controlador dual V2

Consideremos el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.2)(s + 1)(s + 1.5)}$$

Con un esquema de muestreo de  $\{[3,6,9,12]\}$  s y con las acciones de acción en  $\{[0,2,4,6,8,10]\}$  s y periodo envolvente de 12 s

Un controlador de cancelación daría por resultado la siguiente matriz de retroalimentación

$$M = \begin{bmatrix} 1.5208 & -0.1668 & 0.0455 & -0.0109 \\ 1.0782 & 1.3653 & -0.3723 & 0.0891 \\ -0.3621 & -0.0120 & 0.6885 & -0.1648 \\ 0.4302 & -1.0068 & 1.0234 & -0.0129 \\ -0.0870 & 0.2502 & -0.8513 & 1.0256 \\ -0.0755 & 0.2018 & -0.5279 & 0.5554 \end{bmatrix}$$

La respuesta ante un escalón de magnitud dos que cambia a la mitad se muestra en la siguiente figura:

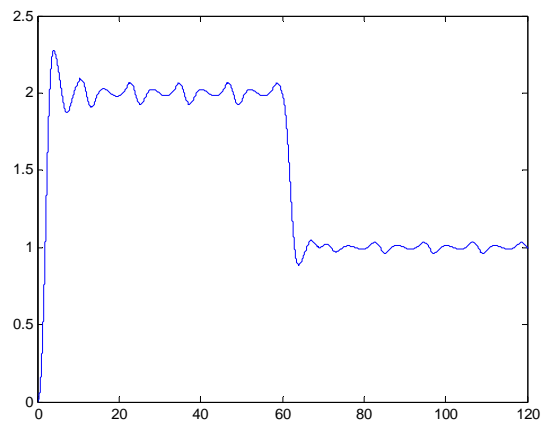


Fig. 5-8 Respuesta con controlador de cancelación

Si se utiliza un controlador sin rizado este genera la matriz de retroalimentación siguiente

$$M_{\infty} = \begin{bmatrix} .0602 & 0.1092 & 0.0010 & 0.2562 \\ 0.0602 & 0.1092 & 0.0010 & 0.2562 \\ 0.0602 & 0.1092 & 0.0010 & 0.2562 \\ 0.0602 & 0.1092 & 0.0010 & 0.2562 \\ 0.0602 & 0.1092 & 0.0010 & 0.2562 \\ 0.0602 & 0.1092 & 0.0010 & 0.2562 \end{bmatrix}$$

La respuesta ante la entrada anterior se muestra a continuación.

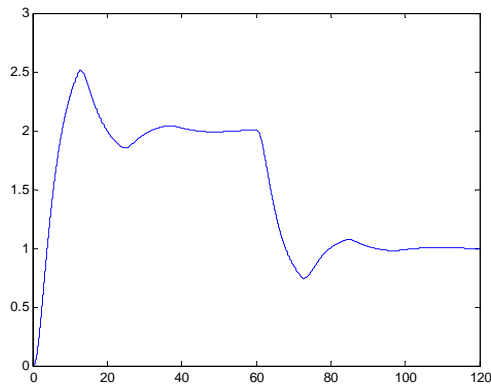


Fig. 5-9 Respuesta con controlador sin rizado

Donde se observa que el rizado ya no está presente pero la respuesta del sistema es más lenta, una opción es la utilización del controlador dual V2, el cual combina las dos matrices de retroalimentación antes obtenidas por medio de un filtro de transición, la respuesta se muestra en la siguiente figura.

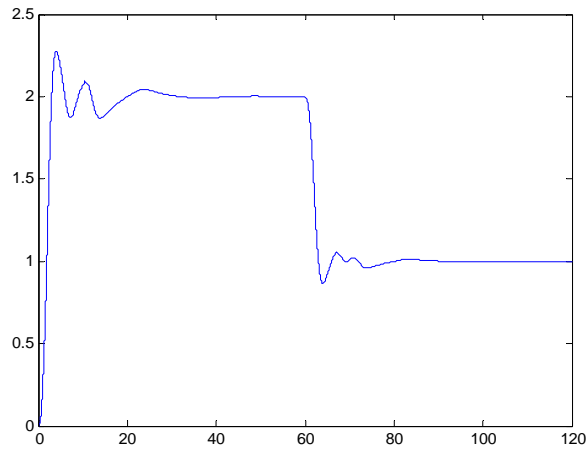


Fig. 5-10 Respuesta con controlador dual V2

Con lo que se mejora la respuesta transitoria.

## 5.4 Sistema MIMO y controlador dual V2

Ahora se considera el siguiente sistema

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5s+1} & \frac{-0.8}{6s+1} \\ \frac{-0.7}{8s+1} & \frac{0.8}{7s+1} \end{bmatrix}$$

Con un esquema de muestreo de  $\{[1.5, 3], [1.5, 3]\}$  s y con las acciones de acción en  $\{[0,1,2],[0,1,2]\}$  s

El modelo continuo queda definido por las siguientes matrices

$$A_c = \begin{bmatrix} -0.2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1429 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0 \\ 0.2500 & 0 \\ 0 & 0.5000 \\ 0 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0.4000 & 0 & -0.2667 & 0 \\ 0 & -0.3500 & 0 & 0.4571 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El modelo BMIO queda como

$$A^N = \begin{bmatrix} 0.5488 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6873 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6065 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6514 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.3038 & 0 & 0.3710 & 0 & 0.4532 & 0 \\ 0.1830 & 0 & 0.2074 & 0 & 0.2350 & 0 \\ 0 & 0.3300 & 0 & 0.3899 & 0 & 0.4606 \\ 0 & 0.1751 & 0 & 0.2020 & 0 & 0.2330 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0.2963 & 0 & -0.2077 & 0 \\ 0 & -0.2902 & 0 & 0.3690 \\ 0.2195 & 0 & -0.1617 & 0 \\ 0 & -0.2406 & 0 & 0.2978 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.1640 & -0.1130 & 0.0952 & -0.0640 & 0 & 0 \\ -0.0773 & 0.0992 & -0.0424 & 0.0551 & 0 & 0 \\ 0.1215 & -0.0880 & 0.1484 & -0.1040 & 0.1813 & -0.1228 \\ -0.0641 & 0.0800 & -0.0726 & 0.0923 & -0.0823 & 0.1065 \end{bmatrix}$$

Si se utiliza un controlador de cancelación la respuesta es la mostrada en la siguiente figura

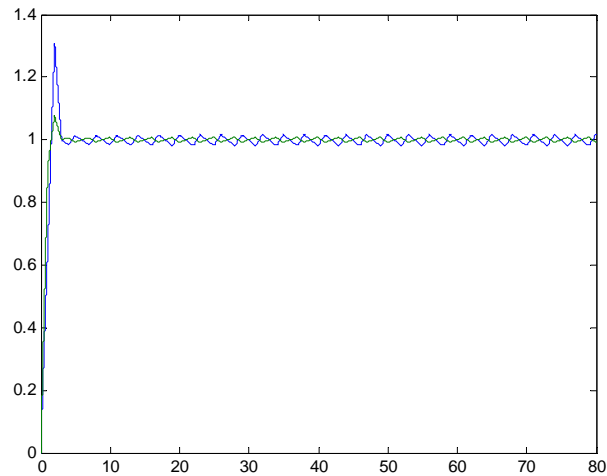


Fig. 5-11 Respuesta del sistema MIMO ante un escalón unitario

Obsérvese que las dos salidas presentan el rizado intermuestreo. Para eliminarlo se aplicará el método matricial para calcular las matrices  $M$ ,  $M1$  y  $M2$  del controlador, siguiendo el procedimiento antes explicado en (4-21). Ya que se tienen 2 entradas y dos salidas se descompone la matriz impulsional  $H$  en 4 matrices

$$H_{1,1} = \begin{bmatrix} 0.1640 & 0.0952 & 0 \\ 0.1215 & 0.1484 & 0.1813 \end{bmatrix} \quad H_{1,2} = \begin{bmatrix} -0.1130 & -0.0640 & 0 \\ -0.0880 & -0.1040 & -0.1228 \end{bmatrix}$$

$$H_{2,1} = \begin{bmatrix} -0.0773 & -0.0424 & 0 \\ -0.0641 & -0.0726 & -0.0823 \end{bmatrix} \quad H_{2,2} = \begin{bmatrix} 0.0992 & 0.0551 & 0 \\ 0.0800 & 0.0923 & 0.1065 \end{bmatrix}$$



Se calculan las matrices  $H_{k,l}^*$  dando por resultado

$$H_{1,1}^* = \begin{bmatrix} 1.7742 & 3.8406 \\ 1.7742 & 3.8406 \\ 1.7742 & 3.8406 \end{bmatrix} \quad H_{1,2}^* = \begin{bmatrix} 1.4693 & 2.9630 \\ 1.4693 & 2.9630 \\ 1.4693 & 2.9630 \end{bmatrix}$$

$$H_{2,1}^* = \begin{bmatrix} 1.8538 & 4.4354 \\ 1.8538 & 4.4354 \\ 1.8538 & 4.4354 \end{bmatrix} \quad H_{2,2}^* = \begin{bmatrix} 2.3783 & 6.5471 \\ 2.3783 & 6.5471 \\ 2.3783 & 6.5471 \end{bmatrix}$$

A partir de estas matrices se forma la matriz  $H^*$  que es la utilizada en el cálculo de las matrices de control quedando estas de la siguiente manera

$$H^* = M = \begin{bmatrix} 1.7742 & 1.8538 & 3.8406 & 4.4354 \\ 1.4693 & 2.3783 & 2.9630 & 6.5471 \\ 1.7742 & 1.8538 & 3.8406 & 4.4354 \\ 1.4693 & 2.3783 & 2.9630 & 6.5471 \\ 1.7742 & 1.8538 & 3.8406 & 4.4354 \\ 1.4693 & 2.3783 & 2.9630 & 6.5471 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = -H^*OP = \begin{bmatrix} 4.3908 & 6.0962 & 9.3491 & 11.9386 \\ 3.4455 & 8.7590 & 7.3656 & 17.0368 \\ 4.3908 & 6.0962 & 9.3491 & 11.9386 \\ 3.4455 & 8.7590 & 7.3656 & 17.0368 \\ 4.3908 & 6.0962 & 9.3491 & 11.9386 \\ 3.4455 & 8.7590 & 7.3656 & 17.0368 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = -H^*OQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1866 & 0.0558 & 0.4696 & 0.1120 \\ 0 & 0 & -0.0331 & 0.2793 & 0.0260 & 0.6124 \\ 0 & 0 & 0.1866 & 0.0558 & 0.4696 & 0.1120 \\ 0 & 0 & -0.0331 & 0.2793 & 0.0260 & 0.6124 \\ 0 & 0 & 0.1866 & 0.0558 & 0.4696 & 0.1120 \\ 0 & 0 & -0.0331 & 0.2793 & 0.0260 & 0.6124 \end{bmatrix}$$

La respuesta del controlador se observa en la siguiente figura

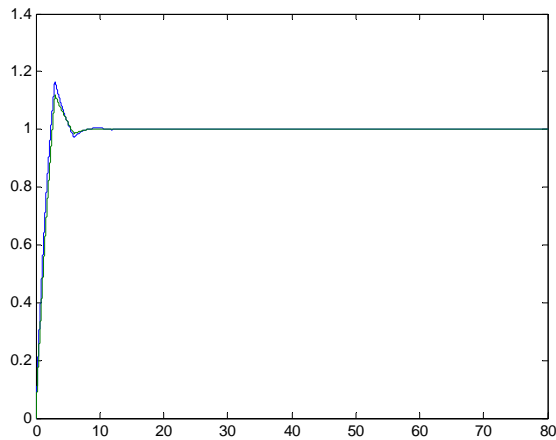


Fig. 5-12 Respuesta del controlador matricial.

Donde el rizado intermuestreo se ha eliminado.

## 5.5 Sistema SISO con polo inestable y controlador dual V3

Consideremos el sistema de la sección 5.2

$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.2)(s + 1.5)}$$

Cuya realización mínima está dada por

$$A_C = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

Se asume un esquema de muestreo de  $[0.7, 1]$  y de actualización de la señal de control de  $[0, 0.7]$  s quedando el periodo envolvente en 1 s

Si se utiliza el método matricial para el cálculo del controlador da por resultado

$$M_\infty = \begin{bmatrix} -17.9474 & 12.5737 \\ -17.9474 & 12.5737 \end{bmatrix} M_{1\infty} = \begin{bmatrix} -2.8920 & 8.0105 \\ -2.8920 & 8.0105 \end{bmatrix} M_{2\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1492 \\ 0 & 0.1492 \end{bmatrix}$$

El sistema retroalimentado estaría representado por las siguientes matrices

$$\begin{aligned}A_r &= A^N - WM_\infty O \\B_r &= WM_\infty \\C_r &= (I - HM_\infty)O \\D_r &= HM_\infty\end{aligned}$$

Para analizar la estabilidad de este sistema se calculan los valores propios de la matriz  $A_r$ ,

$$A_r = \begin{bmatrix} 0.9665 & 6.311 \\ 0.4783 & 2.8621 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son -0.0648 y 3.8934 donde se ve claramente un polo del sistema retroalimentado fuera del círculo unitario provocando la inestabilidad del sistema.

Para poder controlar este sistema se utilizara el controlador por asignación de polos dando por resultado las matrices de control siguientes

$$M_\infty = \begin{bmatrix} -3.3361 & 3.9454 \\ -3.3361 & 3.9454 \end{bmatrix} M_{1\infty} = \begin{bmatrix} -2.2122 & 3.1557 \\ -2.2122 & 3.1557 \end{bmatrix} M_{2\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1141 \\ 0 & 0.1141 \end{bmatrix}$$

En este caso la matriz queda como

$$A_r = \begin{bmatrix} -0.1382 & -0.7156 \\ 0.1523 & 0.7889 \end{bmatrix}$$

Cuyos valores propios son 0 y 0.6507 haciendo el sistema estable, la respuesta ante un escalón unitario que se reduce a la mitad pasado 20 s se muestra a continuación

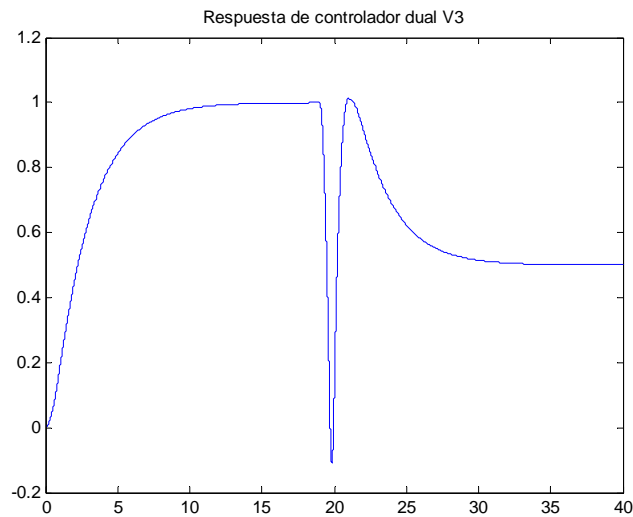


Fig. 5-13 Respuesta del controlador dual con asignación de polos

## 5.6 Sistema SISO y asignación de estructura

Consideremos el sistema inestable

$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.2)(s + 1.5)}$$

Una realización mínima está dada por

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

Se asume un esquema de muestreo de [1.5] y de actualización de la señal de control de [0 0.75] s quedando el periodo envolvente en 1.5 s. Se desea asignar un comportamiento al sistema retroalimentado definido por los polos [0.5, 0.501], se define la matriz de retroalimentación  $\Gamma$  definida por (2-22)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.2110 & -2.2727 \\ 1.9582 & 2.3696 \end{bmatrix}$$

Se observa la evolución del sistema ante una entrada escalón unitario en la siguiente figura

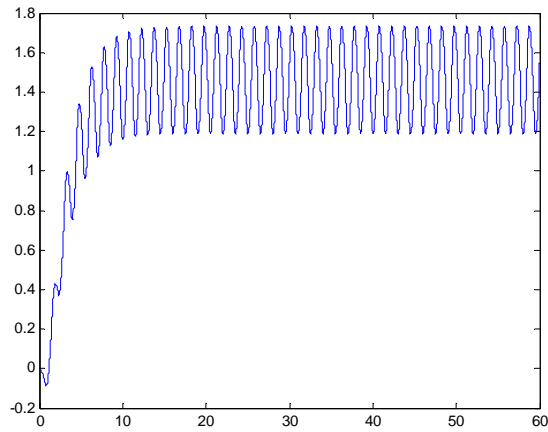


Fig. 5-14 Respuesta del controlador modelo a seguir

Donde se aprecian el rizado intermuestreo. Se utiliza ahora el controlador que asigne el mismo comportamiento pero eliminando el rizado, quedando la matriz de retroalimentación de la siguiente forma.

$$\Gamma_{\infty} = \begin{bmatrix} -0.1607 & -0.7352 \\ -0.1607 & -0.7352 \end{bmatrix}$$

Se aplica el filtro de transición con  $\beta=0,2$  y la respuesta del sistema se presenta en la siguiente figura donde se observa que el rizado fue eliminado

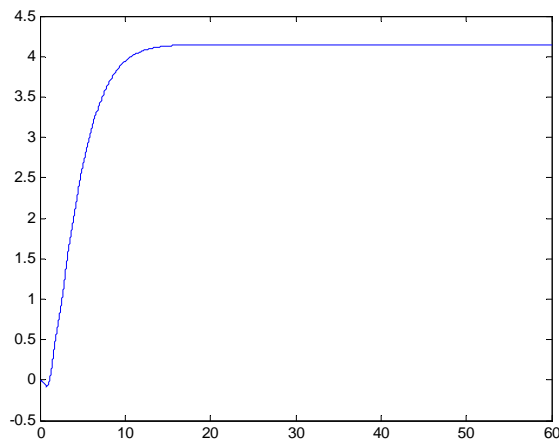


Fig. 5-15 Respuesta del controlador con asignación de polos

## 5.7 Sistema MIMO y asignación de estructura

Considérese el sistema definido para las siguientes matrices

$$A_C = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_C = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 10 & -1.2 \\ 5/6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se propone un esquemas de muestreo de  $\{[0.3,0.6],[0.2,0.4,0.6]\}$  s y la actualización de las acciones de control  $\{[0,0.2,0.4],[0,0.3]\}$  s con un periodo envolvente de 0.6 s.

Se observa la salida del sistema con las condiciones iniciales  $[1;5;4/3]$  tanto de un controlador sin eliminación de rizado como uno que si lo elimina aplicando el filtro de transición. Las matrices resultantes son

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3.0788 & 0.4894 & -1.7242 \\ -0.5707 & .0507 & -1.7300 \\ -1.2653 & 0.2310 & -0.7242 \\ 2.6221 & -0.4335 & -0.1869 \\ 2.5906 & -0.3201 & 1.0735 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\infty = \begin{bmatrix} 0.0990 & 0.0429 & -0.1657 \\ 0.5231 & -0.1251 & -1.5530 \\ 0.0990 & 0.0429 & -0.1657 \\ 0.5231 & -0.1251 & -1.5530 \\ 0.0990 & 0.0429 & -0.1657 \end{bmatrix},$$

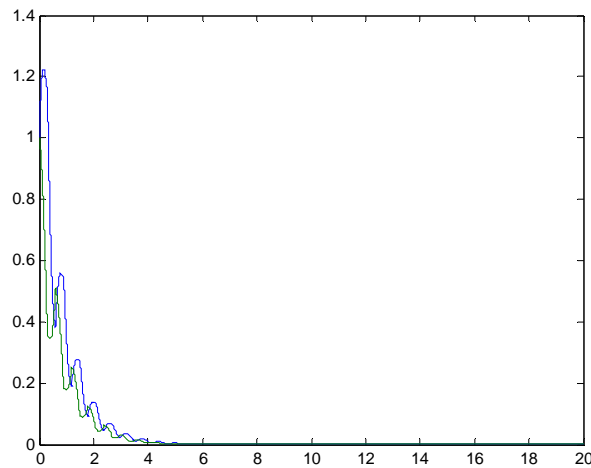


Fig. 5-16 Respuesta con controlador  $\Gamma$

En esta primera imagen se observa que el sistema tiende al estado  $[0;0]$  pero se observa una rizado en la respuesta

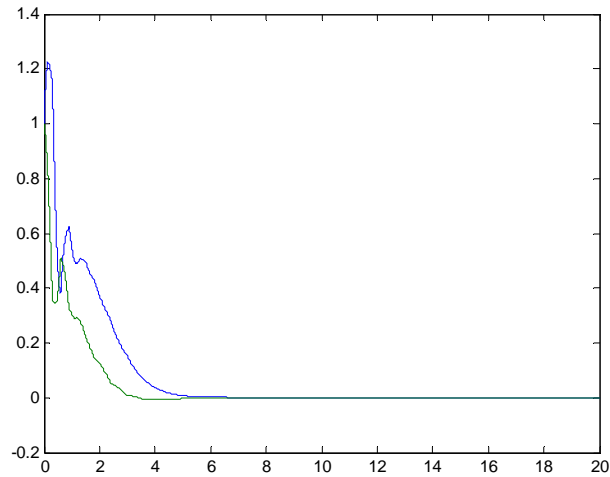


Fig. 5-17 Respuesta con controlador  $\Gamma$  y  $\Gamma_\infty$

En esta segunda imagen el rizado fue eliminado aunque se aprecia como la evolución inicial del sistema es idéntico al anterior ya que como se ha indicado, el filtro utilizado combina la matriz de retroalimentación inicial  $\Gamma$  y va cambiando a la matriz  $\Gamma_\infty$  que lo elimina.

## 5.8 Sistema MIMO con seguimiento de referencia

Considérese el sistema definido para las siguientes matrices

$$A_C = \begin{bmatrix} 1.3800 & -0.2077 & 6.7150 & -5.6760 \\ -0.5814 & -4.2900 & 0 & 0.6750 \\ 1.0670 & 4.273 & -6.654 & 5.893 \\ 0.0480 & 4.273 & 1.3430 & 2.1040 \end{bmatrix}, \quad B_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.679 & 0 \\ 1.136 & -3.146 \\ 1.136 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Se propone un esquema de muestreo de  $\{[0.02, 0.06], [0.03, 0.06]\}$  s y la actualización de las acciones de control  $\{[0.0, 0.02, 0.04], [0.0, 0.03]\}$  s con un periodo envolvente de 0.06 s.

Se diseñan los controladores para que el sistema siga una referencia, el primero se trata de un controlador dual que combina el definido por el método matricial y el controlador de cancelación a través del filtro de transición, las matrices utilizadas son las siguientes.

$$M = \begin{bmatrix} -0.0036 & 9.1095 & 0.0034 & -1.5231 \\ -16.0705 & 0.0057 & 0 & -0.0009 \\ 0.0182 & .08428 & -0.0065 & 2.8647 \\ 15.8034 & 0.0629 & -10.7599 & 0.0007 \\ 0.0181 & -8.5234 & 0.0069 & 7.8286 \end{bmatrix}$$

$$M_{\infty} = \begin{bmatrix} -0.0051 & 0.4762 & 0.0129 & 3.0567 \\ -0.1336 & 0.0343 & -5.3800 & -0.0001 \\ -0.0051 & 0.4762 & 0.0129 & 3.0567 \\ -0.1336 & 0.0343 & -5.3800 & -0.0001 \\ -0.0051 & 0.4762 & 0.0129 & 3.0567 \end{bmatrix}$$

El resultado se observa en la siguiente figura

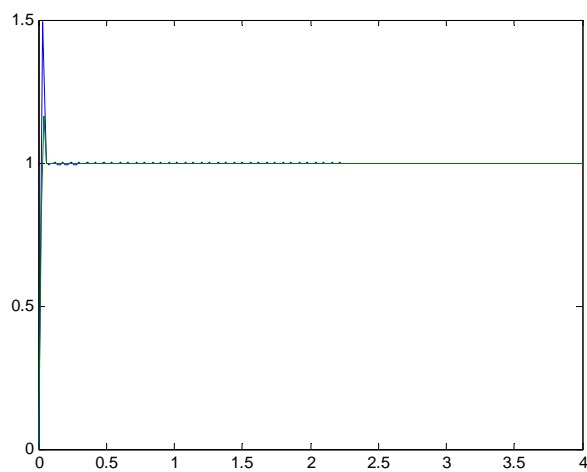


Fig. 5-18. Respuesta con controlador dual V2

Se desea comparar el resultado con el controlador dual que utiliza el método de asignación de polos para calcular la matriz en estado estacionario que elimina el rizado, siendo la matriz inicial la misma que en el controlador anterior. Recuérdese que se debe calcular la matriz  $F$



que elimina el offset que presenta este tipo de controlador. Las matrices resultantes se muestran a continuación.

$$M_{\infty} = \begin{bmatrix} -17.9166 & -83.1340 & 15.5199 & 96.9839 \\ -19.2893 & -21.9506 & 14.4889 & 24.7790 \\ -17.9166 & -83.1340 & 15.5199 & 96.9839 \\ -19.2893 & -21.9506 & 14.4889 & 24.7790 \\ -17.9166 & -83.1340 & 15.5199 & 96.9839 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.0460 & 15.8785 & -2.8268 & -2.3327 \\ -14.2928 & 5.0366 & 11.3830 & 2.6608 \\ 0.0726 & 7.7542 & -2.9135 & 6.0293 \\ 17.3664 & 5.0473 & -20.2762 & 2.6499 \\ 0.0528 & -1.7321 & -2.8361 & 15.2876 \end{bmatrix}$$

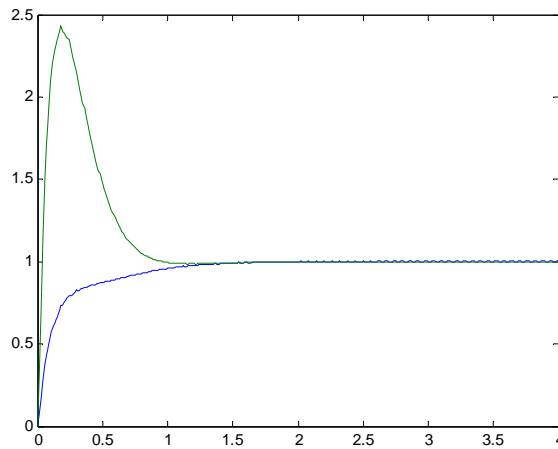


Fig. 5-19 Respuesta con controlador dual V3

Se puede observar que ambos controladores logran eliminar el rizado variando en la repuesta transitoria.

## 5.9 Sistema MIMO con cambio en la referencia

Consideremos el sistema definido para las siguientes matrices

$$A_C = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_C = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 10 & -1.2 \\ 5/6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se propone un esquema de muestreo de  $\{[0.3,0.6],[0.2,0.4,0.6]\}$  s y la actualización de las acciones de control en  $\{[0,0.2,0.4],[0,0.3]\}$  s con un periodo envolvente de 0.6 s

Si se utiliza el controlador dual V2 la matriz da por resultado

$$M_\infty = \begin{bmatrix} 10.3688 & 0.4114 & -10.3403 & 1.6411 & 4.3490 \\ -20.0822 & -3.1917 & 14.4574 & -0.4986 & -3.5745 \\ 10.3688 & 0.4114 & -10.3403 & 1.6411 & 4.3490 \\ -20.0822 & -3.1917 & 14.4574 & -0.4986 & -3.5745 \\ 10.3688 & 0.4114 & -10.3403 & 1.6411 & 4.3490 \end{bmatrix}$$

El sistema retroalimentado estaría representado por las siguientes matrices

$$\begin{aligned} A_r &= A^N - WM_\infty O \\ B_r &= WM_\infty \\ C_r &= (I - HM_\infty)O \\ D_r &= HM_\infty \end{aligned}$$

Para analizar la estabilidad de este sistema encontramos los valores propios de la matriz  $A_r$

$$A_r = \begin{bmatrix} 2.8596 & -0.5594 & -4.0109 \\ 15.6435 & -3.0121 & -22.0116 \\ 5.0976 & 1.0702 & 6.0736 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son 5.4941, 0.0507 y 0.4778 donde se ve claramente un polo del sistema retroalimentado fuera del círculo unitario provocando la inestabilidad del sistema. Por lo tanto este controlador queda descartado.

Se analizará el controlador dual V3 pero en esta ocasión calculando la matriz de retroalimentación por medio del control óptimo,

$$M_{\infty} = \begin{bmatrix} -0.8090 & -0.4004 & 0.0279 & 0.9607 & 0.6502 \\ 0.3897 & 0.0079 & 0.3250 & -0.1710 & 0.3054 \\ -0.8090 & -0.4004 & 0.0279 & 0.9607 & 0.6502 \\ 0.3897 & 0.0079 & 0.3250 & -0.1710 & 0.3054 \\ -0.8090 & -0.4004 & 0.0279 & 0.9607 & 0.6502 \end{bmatrix}$$

La matriz de comportamiento del sistema es

$$A_r = \begin{bmatrix} 0.2147 & -0.0541 & -0.1851 \\ -0.0392 & 0.0381 & -0.1965 \\ -0.004 & -0.0089 & 0.4114 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son 0.0210, 0.2245 y 0.4188 con lo que la estabilidad del sistema está asegurada.

La respuesta del sistema ante una referencia de valor 5 que cambia a 3 para la primera salida y otra de valor 4 que cambia a 2 para la segunda se muestra en la siguiente figura.

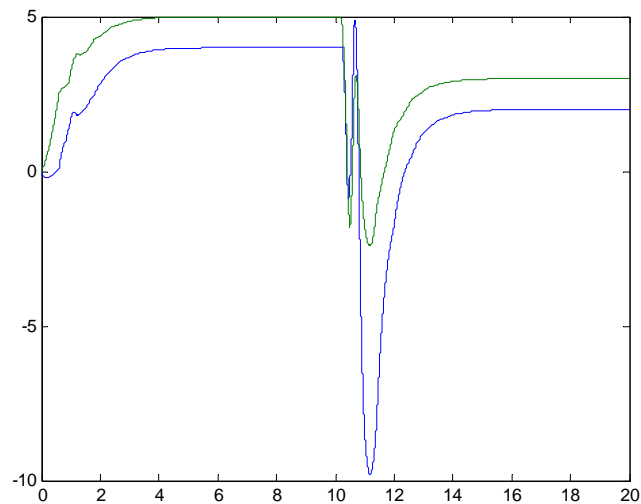


Fig. 5-20 Respuesta con controlador dual V3 y cambio en la referencia



---

## **6. CONCLUSIONES**

---

### **6.1 Conclusiones Generales.**

En el presente trabajo se demostró que la presencia del rizado intermuestreo se debe a que las acciones de control derivadas de los controladores originales basados en el modelado BMIO son cambiantes a lo largo del periodo envolvente provocando que la salida varíe.

Se presentó una forma de eliminar el rizado en la salida asociado a los controladores de cancelación utilizados para los modelos multifrecuencia BMIO. Esta se basa en la igualación de las acciones de control mediante el uso de compensadores que hacen que converjan a ciertos valores que permiten la cancelación, con lo que el sistema en lazo cerrado continúa siguiendo una referencia, como en los controladores de cancelación originales. Era de esperar que las prestaciones del sistema no fueran las mismas que las del controlador original ya que al ser modificadas las ganancias, la cancelación se realiza en un número mayor de periodos. Es importante recalcar que al modificar las filas de las matrices de control se modifica el comportamiento del sistema retroalimentado pudiéndose crear una inestabilidad en el mismo, por lo que un análisis del comportamiento será necesario para ver la viabilidad de su uso. Es aquí donde cobra importancia el método matricial desarrollado, ya que por medio de la aplicación de los compensadores, para lograr la igualdad en las acciones de

control, el modelo en bucle cerrado es más complejo por tener más variables, lo cual dificulta realizar dicho análisis.

Se ha visto que con los controladores anteriores se tiene poco poder de decisión en el comportamiento del sistema en lazo cerrado, ya que se limitan a eliminar el rizado intermuestreo manteniendo la cancelación pero realizando una asignación de polos al sistema en lazo cerrado de forma aleatoria, por lo que su uso puede no ser viable para ciertos sistemas.

Es por lo anterior que se estudiaron nuevas formas de eliminar el rizado. En primera instancia se trabajó con un controlador diseñado por medio de la asignación de polos que defina el comportamiento del sistema, pero que tenga la condición de que las acciones de control a lo largo del periodo envolvente sean iguales. Esto se logró trasladando el sistema modelado en BMIO a periodo base  $T$  a un sistema monofrecuencia a periodo  $T_0$ . De esta forma, la estabilidad del sistema retroalimentado se lleva a la etapa del diseño del controlador.

El uso de controladores basados en la asignación de polos basan su éxito en la correcta selección de los polos deseados, pudiéndose dar el caso que la selección no sea la mejor. Además cuando se utiliza este tipo de controlador para que el sistema siga una referencia, se asignan los polos de un controlador de cancelación original, lo cuales no necesariamente son la mejor opción. Por lo tanto, se trabajó con un controlador basado en el control óptimo, que al igual que el anterior mantiene la condición de mantener las acciones de control iguales a lo largo del metaperiodo lo cual se consiguió de manera similar. Este controlador también asegura la estabilidad del sistema al tratar de minimizar el índice de desempeño que se definió.

Como puede apreciarse en las simulaciones, la respuesta transitoria de los controladores originales es mejor que la que presentan los controladores desarrollados, siendo mejor la respuesta en estado estacionario mejor en los segundos. Por lo que se estudió una forma de combinar las prestaciones de ambas categorías de controladores. Esto llevó a la aplicación de filtros que permiten la combinación de las matrices de los controladores originales con las matrices de los controladores que eliminan el rizado, para el cálculo de las acciones de control.

De los resultados obtenidos en las simulaciones se puede ver que cada controlador será mejor dependiendo de los sistemas y los esquemas de muestreo utilizados por lo que el desarrollo de la herramienta computacional cobra importancia a la hora de elegir el tipo de controlador utilizar.

## 6.2 Trabajos Futuros

Cada vez se cuenta con más procesos en los que el control multifrecuencia, no solo es más eficiente, sino que se puede volver necesario, esto lleva a la necesidad de estudiar los controladores multifrecuencia con herramientas que puedan asegurarnos la estabilidad de los mismos. Una de las herramientas que se tiene, es el uso de LMI's (Linear Matrix Inequalities) para estudiar el comportamiento de los controladores multifrecuencia, la cual, presenta una ventana amplia y poderosa, en la que se pueden plantear problemas de optimización.

Aunque en esta tesis se ha trabajado con el control óptimo, se puede profundizar aun más, por lo que, una línea de investigación interesante sería el diseño de controladores robustos basados en modelos multifrecuencia, relacionados con el área de la estabilidad. Existen trabajos como el de Sagfors [75], Azad [16], Graselli [38] entre otros, donde presenta una solución al problema de control  $H_\infty$  mediante la solución del par de ecuaciones algebraicas de Riccati.

Finalmente el estudio de sistemas multifrecuencia con muestreo irregular puede ser profundizado, ya que este tipo de muestreo es común cuando se tienen sistemas de control que operan bajo redes, donde los retrasos debidos a los problemas de comunicación no están bien definidos. Su implementación en este tipo de procesos puede ser tema de futuros trabajos.





---

## **BIBLIOGRAFIA**

---

- [1] Albertos P, "Block Multirate Input-Output Model for Sampled Data Control Systems", IEEE Transactions on Control vol 35, no 9, pp 1085-1088, 1990.
- [2] Albertos P. "Soft Multirate Control" Proceedings of the 31<sup>st</sup> Conference on Decision and control pp1946-1947, 1992
- [3] Albertos, P.; Crespo, A. "Real-Time Control of Unconventionally Sampled Data Systems." IFAC Workshop on Algorithms and Architectures for Real-time Control, Vilamoura, Portugal. 1997
- [4] Albertos P., Salt J., "Receding horizon control of non-uniformly sampled data systems" Proceedings of the 1999 American Control conference, vol 6, pp 4300-4304 1999.
- [5] Albertos P.; Salt J. and Tornero J. "Dual-Rate Adaptive Control", Automatica, Vol 32, Num 7, Elsevier, July 1996, pp 1027-1030.
- [6] Amit N. "Optimal control of multirate digital control systems" Report SUDAAR No 523 Stanford University, Stanford, C.A. 1980.

- [7] Apostolakis, I.S. "An estimation algorithm for multirate sampled digital control systems." *Int. J. Control*, Vol. 56, No. 4, pp. 813-830. 1992
- [8] Apostolakis I.S.; Jordan D.; "A time invariant approach to multirate optimal regulator design", *international Journal of control*, Vol. 53, pp. 1233-1254, 1991
- [9] Åström, K.J.; Wittenmark, B. "Computer-controlled systems: Theory and Design", 3<sup>rd</sup> edition, Prentice Hall, 1997.
- [10]Astrov I., Pedai A. "Multirate Neural control for AUV's increased situational awareness during diving task using Stochastic model" *World Academy of Science, Engineering and Technology* 72, pp 214-218. 2010.
- [11]Astrov I., Pedai A., Rüstem E. "Simulation of two-rate adaptive hybrid control with neural and neuro-fuzzy networks for stochastic model of missile autopilot" *Proceedings 5<sup>th</sup> World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China. pp 2603-2607, 2004.
- [12]Aracil, R.; Jiménez, A.; Feliu, V. "Multirate sampling technique in digital control systems simulation." *IEEE trans. on Systems, Man and Cybernetics*. Vol. 14, No. 5, pp. 776-780. 1984
- [13]Araki, M. "Recent development in digital control theory" *Proceedings 12<sup>th</sup> IFAC World Congress*, Vol. 9, pp 951- 960, 1993.
- [14]Araki, M. Hagiwara T. Soma h. "Application of multilevel sampled-data controllers to simultaneous pole assignment problem" *Proceedings 31th Conference on Decision and Control*, pp. 1762-1767, 1992.
- [15]Araki, M.; Yamamoto, Y. "Multivariable multirate sample-data systems: state space description, transfer characteristics, and Nyquist criterion", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 31, pp. 145-154, 1986
- [16]Azad A.M. Hesketh T. "H $\infty$  Optima Control of multirate sampled data systems" *Proceedings of the American Control Conference*, pp 459-464, 2002
- [17]Barry P.E. "Optimal control of multirate systems", Report RN-361, Research Department, Grumman Aerospace Corporation, 1975.
- [18]Boykin, W.H.; Frazier, B.D. "Analysis of multiloop multirate sampled-data systems." *AIAA J. Guidance Contr. Dynamics*. Vol. 13, pp. 453-456. 1975

- [19] Broussard, J.R.; Glasson, D.P. "Optimal multirate flight control design." Proc. of the 1980 Joint Automatic Control Conf., San Francisco, CA. 1980
- [20] Carmiña C. "Modelado y respuesta en frecuencia de los sistemas muestreados multifrecuencia" Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática ISA, 1999.
- [21] Chen C. T. "Linear System Theory and Design" 3<sup>rd</sup> Edition New York Oxford University Press pp 172-174, 1999
- [22] Coffey, T.C.; Williams, I.J. (1966) "Stability analysis of multiloop, multirate sampled systems." *AIAA J. Guidance Contr. Dynamics*. Vol. 14, No.12, pp. 2178-2190. 1966
- [23] Colaneri, P.; Scattolini, R.; Schiavoni, N. "Stabilization of multirate sampled data linear systems." *Automática*. Vol. 26, No. 2, pp. 377-380. 1990
- [24] Coll, C.; Bru, R.; Hernández, V.; Sánchez, E. "Discrete-time linear periodic realization in the frequency domain." *Linear Algebra and its Appl.*, Vol. 203-204, pp. 301-326. 1994
- [25] Colaneri, P.; Kucera, V. "The Model Matching Problem for Periodic Discrete-Time systems." *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-42, pp. 1472-1476. 1997
- [26] Colaneri, P.; Scattolini, R.; Schiavoni, N. "LQG optimal control of multirate sampled-data systems." *IEEE Trans. on Automatic Control*. Vol. 37, No. 5, pp. 675-682. 1992
- [27] Cuesta A., Grau L. "Modelado de reguladores PID Multifrecuencia" XXV Jornadas de Automática Ciudad Real, 2004
- [28] De la Sen, M.; Marco, J.L.; López-Abadía, C. "Multirate adaptive control with applications to the laterals dynamics of aircraft." *Int. J. Control*, Vol. 45, pp. 759-778. 1987.
- [29] Dorf, R. C.; Bishop R. H. "Modern control systems", 11<sup>th</sup> edition, Prentice Hall 2008
- [30] Feliu, V.; Cerrada, J.A.; Cerrada, C. "A method to design multirate controllers for plants sampled at a low rate." *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-35, pp. 57-60. 1990

- [31]Francis, B.A.; Georgiou, T.T. “Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers.” *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 33, No. 9, pp. 820-832. 1988
- [32]Friedland, B. “Sampled-data control systems containing periodically varying members.” *Proc. of the 1st IFAC Congress, Moscow*, pp. 361-367. 1961
- [33]Fujimoto H., Hori Y. “High performance servo systems based on multirate sampling control” *Control Engineering Practice* 10 pp 773-781. 2002
- [34]Glasson, D.P. “A new technique for multirate digital control.” *AIAA Journal of Guidance and Control Dynamics*. Vol. 5, pp. 379-382, 1982
- [35]Godbout, L.F.; Jordan, D.; Apostolakis, I.S. “Closed-loop model for general multirate digital control systems.” *IEE Proceedings*, Vol. 137, Pt. D, No. 5, pp. 329-336. (1990)
- [36]Grasselli O.M., Jetto L., Longhi S. “Ripple free dead-beat tracking for multirate sampled data systems” *Int. Journal Control* Vol. 61 No 6 pp 1437-1455, 1995
- [37]Graselli, O.M.; Longhi, S.; Tornambe, “A. System equivalence for periodic models and systems.” *Siam J. Control and Optimization*, Vol. 33, No. 2, pp. 455-468. 1995
- [38]Graselli, O.M.; Longhi, S.; Tornambe, A.; Valigi, P. “Robust output regulation and tracking for linear periodic systems under structured uncertainties.” *Automática*, Vol. 32, No. 7, pp. 1015-1019. 1996
- [39]Gu, Y. Tomizuka M. “Digital redesign of continuous time controller by multirate and high orders holds” *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Conference on Decision and control* pp 34224-3427, 1999
- [40]Hagiwara, T.; Araki, M. “Absolute stability of Sampled-Data Systems with a sector nonlinearity”. *Systems and Control Letters*, Vol. 27, pp. 293-304. 1996
- [41]Hovestädt, E. “Multirate control algorithms for time-variable sampling periods.” *IFAC Design Methods of Control Systems, Zurich, Switzerland*, pp. 105-110. 1991
- [42]In H., Zhang C., “Multirate control for modelling matching” *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Conference on Decision and control*, pp 2214-2215, 1992

- [43] Jetto L. "Deadbeat ripple free tracking with disturbance rejection: A polynomial Approach" IEE transaction on automatic control, Vol 39 No 8, pp 1759-1763, 1994
- [44] Jetto L. Longhi S. "Parameterized solution of the dead-beat ripple-free control problem for multirate sampled-data systems" Proceedings of the 38<sup>th</sup> conference on decision & control, pp 3914 –3919, 1999
- [45] Jiagen D., Marcassa F., Shang-Chen W. and Masayoshi T. "Multirate Control for Computation Saving," IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.14, no.1, pp.165-169, 2006.
- [46] Jury, E.I.; Mullin, F.J. "The analysis of sampled-data control systems with a periodically time-varying sampling rate." IRE Trans. on Automatic Control, pp. 15-21. 1959
- [47] Kabamba, P.T. "Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions." IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 9, pp. 772-783. 1987
- [48] Kalman, R.E.; Bertram, J.E. "A unified approach to the theory of sampling systems." J. Franklin Institute, Vol. 267, pp. 405-436. 1959
- [49] Khargonekar, P.P.; Poolla, K.; Tannenbaum, "A. Robust control of linear timeinvariant plants using periodic compensation." IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-30, No. 11, pp. 1088-1096. 1985
- [50] Kim J.H., Lee J.H. Park H.B., "Robust  $H_\infty$  control of singular systems with time delays and uncertainties via LMI approach" Proceedings of the American Control Conference, pp 620-621, 2002
- [51] Kranc, G.M. "Input-output analysis of multirate feedback systems." IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-3, pp. 21-28. 1957
- [52] Kuo B.C. "Sistemas de control automático" séptima edición Prentice Hall 1996
- [53] Lee, J.H.; Gelormino, M.S.; Morari, M. "Model predictive control of multirate sampled-data systems: a state-space approach." Int. J. Control. Vol. 55, No. 1, pp.153-191. 1992.
- [54] Lee, J.J.; Xu, Y. "A Multi-Rate Control Scheme of Robot Manipulators." Journal of Systems Eng., Vol. 1, pp. 22-33. 1993.

- [55] Li Y. and Masayoshi T. "A Novel Design of Short-seeking Control for Hard Disk Drives," to appear in Proceedings of 2006 American Control Conference, 2006
- [56] Lin, Ch.; Kin, Ch. "Minimal periodic realizations of transfer matrices." IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-38, No. 3, pp. 462-466. 1993
- [57] Longhi, S. "Structural Properties of Multirate Sampled-Data Systems." IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. 39, No. 3, pp. 692-696. 1994
- [58] Longhi S. Zulli R. "A Robust periodic pole assignment algorithm" IEEE Transactions on automatic control , Vol 40 No 5 pp 890-894, 1995
- [59] Longhi S. "Necessary and sufficient conditions for complete reachability and observability of multirate sampled-data systems" Proceedings of the 31<sup>st</sup> Conference on Decision and control pp1944-1945, 1992
- [60] Mancilla J.L., Garcia R.A., "On the exponential stability of nonlinear sampled data systems with time varying sampling periods" Proceedings of the American Control Conference, pp 1290-1295, 2002
- [61] Meyer, D.G. "A new class of shift-varying operators, their shift-invariant equivalents, and multirate digital systems". IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-35, No. 4, pp. 429-433. 1990
- [62] Meyer, R.A.; Burrus, C.S. "A unified analysis of multirate and periodically time-varying digital filters." IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-22, pp.162-168. 1975
- [63] Meyer, R.A.; Burrus, C.S. "Design and implementation of multirate digital filters." IEEE Trans. Acoustic., Speech and Signal Processing. Vol. ASSP-24, No.1, pp. 53-58. 1976
- [64] Misra, P. "Time-invariant Representation of Discrete Periodic Systems." Automática, Vol. 32, No. 2, pp. 267-272. 1996
- [65] Moore K. Bhattacharyya S. Dahleh M. "Capabilities and limitations of multirate control scheme, Automática Vol 9 No 4 pp941-951, 1993
- [66] Neeraj Z. Masoud S."Multi-Rate Control of a Polymerization Reactor: a Comparative Study" Proceedings of the American Control Conference June 1999 pp 2553-2557

- [67]Nemani, T.; Tsao, T.; Hutchinson, S. "Multi-Rate Analysis and Design of Visual Feedback Digital Servo-Control System." *Journal of Dynamics. Systems, Measure. And Control*, Vol. 116, No. 1, pp. 45-55. 1994.
- [68]Ogata K., "Discrete time control systems" 2<sup>nd</sup> Edition, Prentice Hall, 1994.
- [69]Ogata K., "Modern control engineering" 4<sup>th</sup> Edition, Prentice Hall, 2001
- [70]Ogunnaike B.; Zambare N.; Soroush M. "Multi-rate control of a polymerization reactor: a comparative study" *Proceedings of the American Control Conference* pp 2553-2557, 1999
- [71]Patel, R.V.; Munro, N. "Multivariable System Theory and Design." Pergamon Press, London.1982
- [72]Paraskevopoulos P.N. "Digital Controls Systems" Prentice Hall, 1996.
- [73]Qing-Wei J. Kian-Keong O. "Multirate control of an HDD servo system with intersample ripple free" *IEEE Transactions on magnetic* Vol. 38 No 5 pp 2192-2194, 2002
- [74]Ritchey, S.; Franklin, G. "A stability criterion for asynchronous multirate linear systems." *IEEE Trans. on Automatic Control*. Vol. 34, pp. 529-535. 1989
- [75]Sagfors M.F., Toivonen.H.T., Lennartson B., "H $\infty$  Control of multirate sampled data systems: a state space approach", *Automática* Vol 34 No 4 pp 415-428, 1998
- [76]Sala A. Cuenca A. Salt J. "A retunable PID multi-rate controller for a networked control system" *Information Science* 179 (2009) pp 2390-2402.
- [77]Salt J., "Control de procesos con muestreo no convencional", Tesis doctoral, DISCA, Universidad Politécnica de Valencia.
- [78]Salt J., Albertos P., Tornero J. Ledesma B. "Digital Controller Improvement by Multirate Control" *IEEE Control Applications* 1994 pp 1459-1464
- [79]Shang-Chen W. and Masayoshi T. "Performance and Aliasing Analysis of Multi-rate Digital Controllers with Interlacing," *Proceedings of 2005 American Control Conference*, Vol.4, pp. 3514-3519, Boston, MA, 2004.

- [80] Sim T.; Hong G.; Lim, K. "Multirate predictor control scheme for visual servo control" IEE proceedings Control Theory Applications Vol 149 No 2 pp 117-124, 2002
- [81] Sklansky, J.; Ragazzini, J.R. Analysis of errors in sampled-data feedback systems. *AIEE Trans.*, Vol. 74, part II, pp. 65-71. 1955
- [82] Sun, F.; Sun, Z.; Zhang, R.; Zhang, F. "A multirate adaptive composite controller for flexible-link robots using neural networks." IEEE International Conf. On Systems, Man and Cybernetics, Vol. 2, pp. 1036-1041.1996.
- [83] Tangirala A.K., Li D., Patwardhan R.S., Shah S.L., Chent T. "Ripple free conditions for lifted multirate control systems" *Automática* 37 pp1637-1645, 2001
- [84] Tangirala A. K., Li D., Patwardhan R., Shah S., Chen T. "Issues in multirate control systems" Proceedings of the American Control Conference, pp 2771-2775, 1999
- [85] Tao B. Li-Sheng H. Peng S. Ziming W Huaenye S. "Analysis and design for linear singular multirate networked control systems" Proceedings of the world congress on engineering and computer science. 2008
- [86] Tham, M.T.; Vagi, F.; Morris, A.J.; Wood, R.K. "Multivariable and multirate self-tuning control. A distillation column case study." IEE Proc., Part D, Vol. 138, No. 1, pp. 9-24. 1991.
- [87] Thompson P. "Gain and phase margins of multirate sample data feedback systems" *Int. Journal Control* Vol. 44 No 3 833-846, 1986
- [88] Toker O. Chen J. "Asymptotic tracking performance of sampled data systems", Proceedings of the American Control Conference, pp 2967-2972, 2002
- [89] Tornero, J. "Una nueva metodología para el estudio de sistemas muestreados multifrecuencia: Modelado y diseño de controladores." Tesis Doctoral. ETSII. Universidad Politécnica de Valencia. 1985
- [90] Tornero, J.; Albertos, P. "A new methodology for modeling, analysis and control design of non-conventional sampled data systems." Proc. of the IFAC Symp. On Software for Computer Control. Graz, Austria. 1986
- [91] Tornero, J.; Albertos, P. "An Event Oriented Simulation Method." Int. Symposium on AI, Expert Systems and Languages in Modeling and Simulation, pp. 126-137. 1987



- [92] Tsui C.C. "Robust control system design: Advanced state space techniques" 2<sup>nd</sup> edition Marcel Dekker, 2004.
- [93] Valera, A.; Salt, J.; Sanchis, J.; Tornero, J. "Dual Rate Control of a Single Flexible Manipulator. Proc. of the 12th International Conf. on CAD/CAM Robotics and Factories of the Future, London, 1996.
- [94] Vélez C. "Modelado y simulación de sistemas con muestreo no convencional" Tesis doctoral, DISA Universidad Politécnica de Valencia.
- [95] Vélez C.; Salt J. "Simulation of irregular multirate systems" 8<sup>th</sup> IFAC Symposium on computer aided control system design, Salford UK 2000
- [96] Voulgaris, P. G. "Optimal  $L_\infty$  to  $L_2$  estimation for periodic systems." IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-41. No. 9, pp. 1392-1396. 1996.
- [97] Voulgaris, P.G.; Bamieh, B. "Optimal  $H_\infty$  and  $H_2$  control of hybrid multirate systems." System and Control Letters, Vol. 20, pp. 249-261. 1993
- [98] Voulgaris, P.G.; Dahleh, M.A.; Valavani, L.S.  $H_\infty$  and  $H_2$  optimal controllers for periodic and multirate systems. Automática, Vol. 30, No. 2, pp. 251-263. 1994
- [99] Walsh, G.C. Ye, H. Bushnell L.G. "Stability analysis of networked control systems", IEEE Transactions Control systems technologies V10, pp 438-446, 2002
- [100] Whitbeck, R.F.; Didaleusky, D.C.J. "Multirate digital control systems with simulation applications." Report AFWAL-TR-80-3101, Vols. I, II and III. Flight Dynamics Laboratory. Systems Tech. Inc, Hawthorne, California. 1980
- [101] Yuping G. Masayoshi T. "Digital redesign of continuous time controller by multirate sampling and high order holds" Proceedings of the 38<sup>th</sup> conference on decision & control, pp 3422 -3427, 1999.
- [102] Zhang W. Branicky, M.S. Phillips S.M "Stability of networked control systems" IEEE Control systems magazine V21 pp 84-99, 2001.
- [103] Zhu, K.Y.; Ling, K.V. "Multirate control for a gasification process." Proc. Of the American Control Conf., Green Valley, AZ, USA, Vol. 3, pp. 3268-3272. 1994.



---

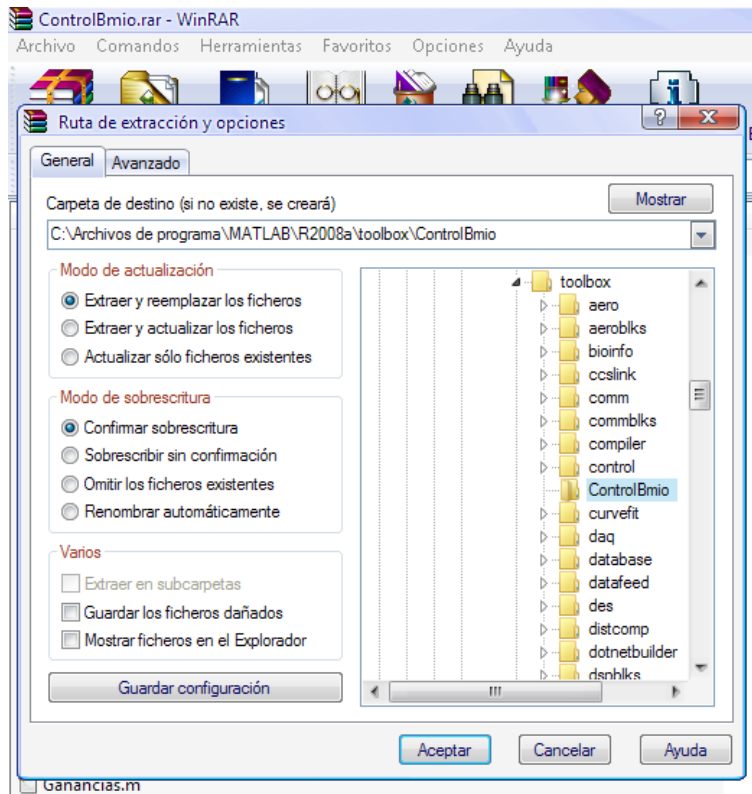
## **ANEXO 1 MANUAL DEL USUARIO**

---

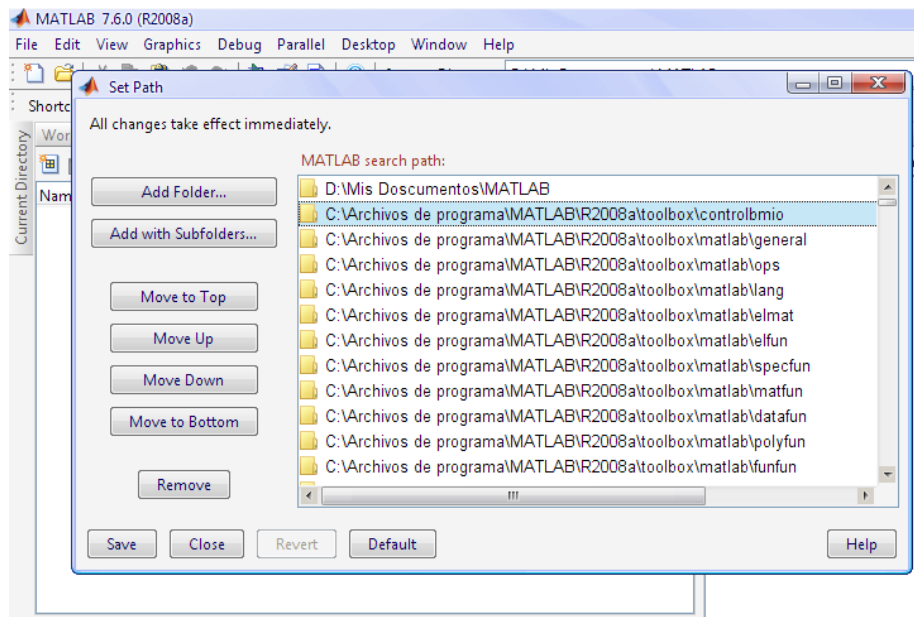
Con el fin de realizar el mayor número de pruebas se desarrolló un toolbox en **MATLAB** que consta de dos partes principales. La primera es un modulo de SIMULINK que comparara la respuesta del sistema original con la del modelo BMIO, y la ultima es un modulo de SIMULINK que simula la respuesta a diferentes tipos de controladores basados en el modelo BMIO.

### **Instalación de las herramientas de controladores BMIO**

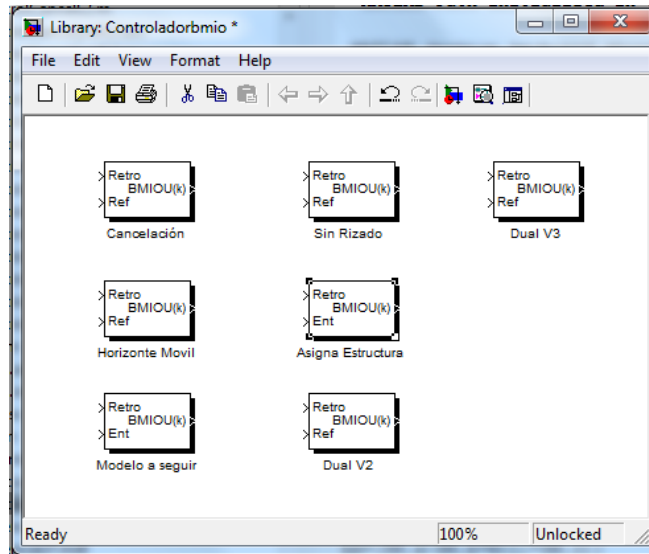
1.- Extraer el archivo ControlBmio.rar en la carpeta de toolbox de la aplicación de matlab



2.- Agregar el path de la carpeta extraída en la aplicación de Matlab



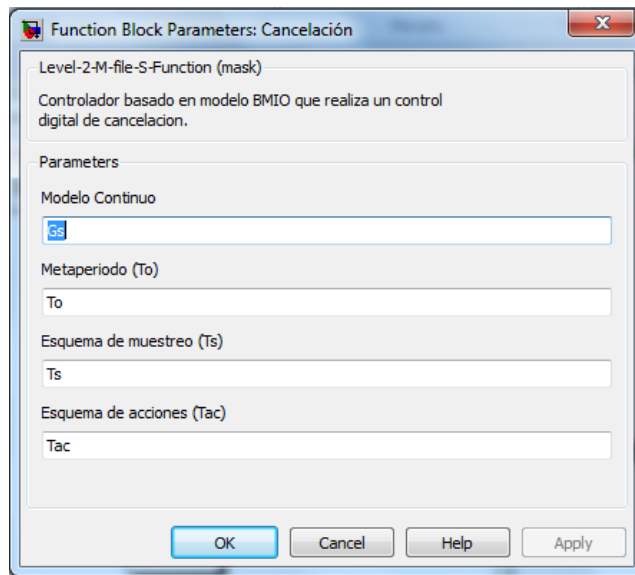
Aspecto de las herramientas de control BMIO en simulink de matlab



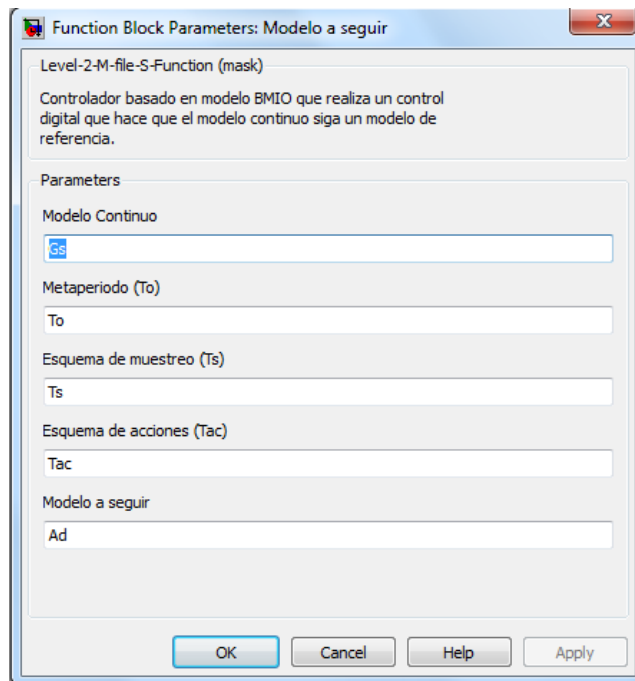
## Toolbox de control BMIO

Esta herramienta dispone de 7 diferentes controladores que se describen a continuación:

**Control deadbeat o de cancelación:** Este es el control donde la salida sigue una referencia. Se basa en el uso de la matriz  $\mathbf{H}$  (impulsional). Para su utilización requiere definir el sistema SISO o MIMO sobre el cual se requiere trabajar ya sea como función de transferencia o en ecuaciones de estado, el periodo envolvente y los esquemas de muestreo y de acciones de control, el formato debe ser  $\{ [ ], [ ], \dots [ ] \}$  donde cada corchete define los tiempos para cada salida o entrada del sistema a controlar. El cuadro de dialogo de este controlador se presenta a continuación

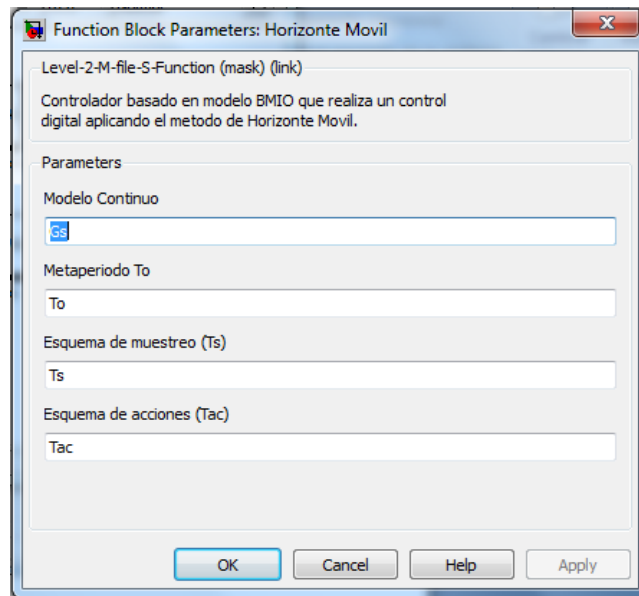


**Control de Modelo a seguir:** Con este control se asigna la dinámica de un sistema modelo mediante una retroalimentación de la salida. Además de los parámetros definidos para el controlador anterior se debe ingresar el modelo a seguir en forma de matriz  $A_d$ .

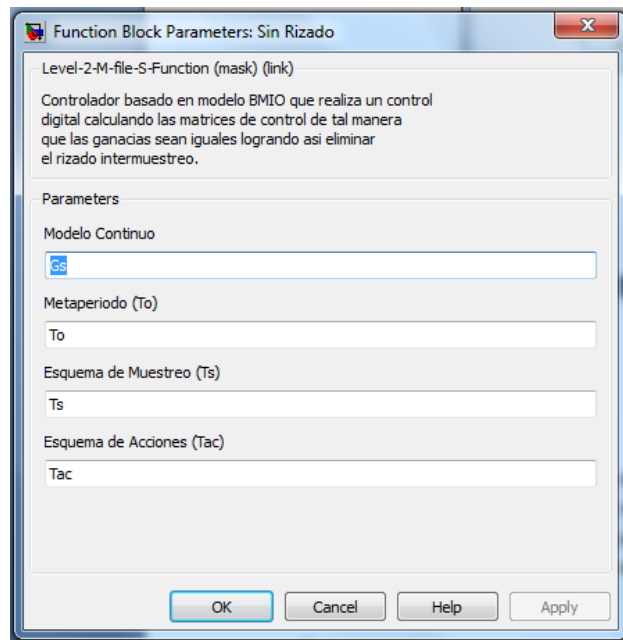


**Control de Horizonte Movil:** Es similar a la primera opción con la diferencia que las matrices de control se calculan cada instante en que existe una acción de control. Los

parámetros requeridos son los mismos que en un controlador de cancelación. Estas tres primeras opciones son las que se consideran los controladores originales del modelado BMIO. Los siguientes controladores son los propuestos en esta tesis para la eliminación del rizado.

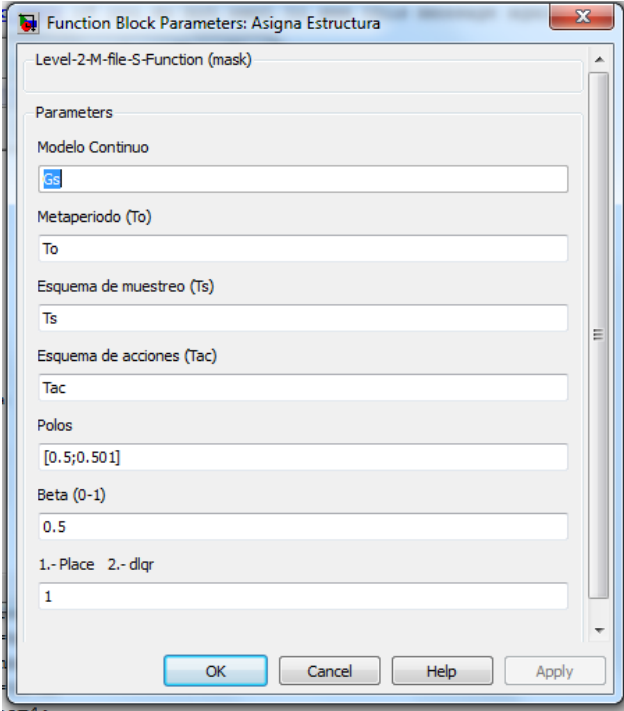


***Control Sin Rizado*** : Este tipo de control elimina el rizado intermuestreo existente en un controlador del tipo cancelación, mediante el calculo de las matrices de control por un metodo matricial descrito en la seccion 4.3, que iguala las ganancias fila a fila para igualar las acciones de control que se aplican en un metaperiodo. Los parámetros necesarios son los mismos que en un controlador de cancelación.

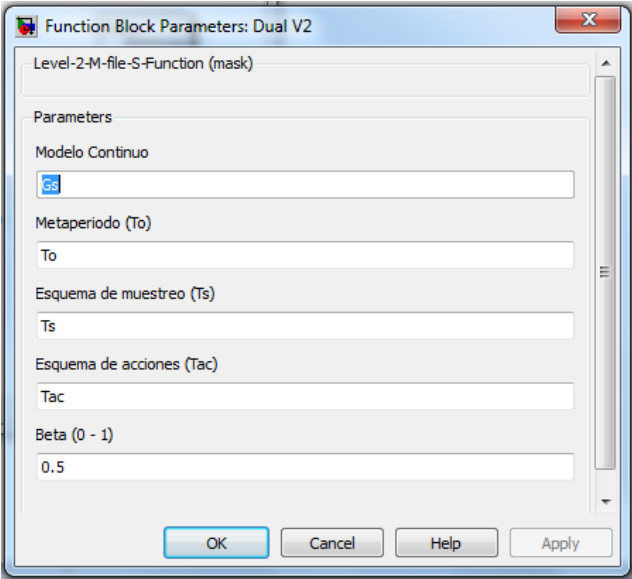


**Controlador Asigna Estructura:** Este controlador realiza la misma función que el control original Modelo a Seguir, que asigna un comportamiento al sistema retroalimentado. La ventaja que presenta es que la salida está libre de rizado intermuestreo. Los parámetros utilizados son los mismos que los requeridos para el control modelo a seguir, con la diferencia que el modelo o comportamiento está dado en forma de polos. Adicionalmente se pide el valor de beta ( $\beta$ ), que es el parámetro que establece la rapidez con la cual se realiza la transición entre las matrices originales y las matrices de estado estacionario, explicada en la sección 4.7. El rango de este parámetro es de 0 a 1, donde el valor 0 corresponde a la transición más rápida y el valor 1 a la ausencia de transición, es decir, el controlador trabaja como un controlador Modelo a seguir. Por último se tiene una selección entre 1 para la opción *Place* y 2 para *dlqr*, la primera utiliza el comando *place* de matlab para realizar la asignación de los polos deseados, mientras que la segunda opción obtiene la matriz de retroalimentación del estado basado en técnicas de control óptimo.





**Control Dual V2:** Este controlador combina un controlador de cancelación con uno de Sin Rizado, a través del filtro explicado en la sección 4.7. Además de los parámetros necesarios para un controlador sin rizado, se ingresa el valor de  $\beta$  que da la velocidad de transición entre las matrices, con un valor de 1 no se realizaría la transición manteniendo las matrices de un controlador de cancelación y con un valor de 0 realizaría la transición más rápida.



**Control Dual V3:** La siguiente opción en este toolbox es el controlador Dual V3, el cual calcula las matrices del mismo por medio de la asignación de polos descrita en la sección 4.4. o por medio del control óptimo descrito en la sección 4.5. Al igual que el controlador anterior utiliza el filtro que da una transición entre las matrices de un controlador original y las que eliminan el rizado intermuestreo. Los parámetros son los mismos que en el controlador anterior, más una opción que permite seleccionar entre la asignación de polos realizada con el comando *place* de Matlab y el control óptimo cuadrático que utiliza el comando *dlqr* para el cálculo de la matriz de retroalimentación.

