



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



departamento de ingeniería  
de sistemas y automática



# ANÁLISIS DE TÉCNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS CON ARTICULACIONES FLEXIBLES

## MÁSTER EN AUTOMÁTICA E INFORMÁTICA INDUSTRIAL

Realizado por:

**Isaac Wladimir Miguez Valle**

Dirigido por:

**Ranko Zotovic Stanisic**

Fecha: 09/2018

# **AGRADECIMIENTOS**

“Quiero aprovechar la ocasión para agradecer de todo mi corazón, el apoyo de mis queridos padres Edgar Miguez y Lupe Valle, ya que han realizado un gran esfuerzo para que su hijo sea una gran persona y logré alcanzar todos mis objetivos; así un día pueda ayudarlos de la misma manera. Asimismo, no puedo olvidar en este momento a mi querida Ericka, ya que juntos alcanzamos finalizar el mismo objetivo.”

## **Resumen**

El presente trabajo realiza un análisis comparativo de diferentes métodos de control para un robot con una articulación elástica. Se centrará en el control por realimentación de los estados, control por el método de perturbación singular y el control óptimo LQR con seguimiento de trayectoria, los cuales deben de compensar el efecto de elasticidad. Adicionalmente se realiza un análisis del consumo energético de cada uno de los controladores detallados. Para probar cada control se han realizado pruebas en Matlab.

**Palabras Clave:** Robot, articulaciones elásticas, control de un robot con articulaciones elásticas por realimentación de los estados, control de un robot con articulaciones elásticas por el método de perturbación singular, control LQR, ahorro de energía para robots con articulaciones elásticas

## **ABSTRACT**

The present work makes a comparative analysis of different control methods for a robot with an elastic joint. It will focus on the control by feedback of the states, the control by the singular perturbation method and the optimal LQR control with tracking of the trajectory, which should compensate the elasticity effect. In addition, an analysis is made of the energy consumption of each of the detailed controllers. To test each control tests have been performed in Matlab.

**Keywords:** Robot, flexible joints, feedback control for a robot with flexible joints, Singular Perturbation Model of Robots with Elastic Joints, LQR control, energy saving for robots with flexible joints

# INDICE

<b>1. Introducción</b> .....	5
<b>1.1. Objetivos</b> .....	6
<b>1.2. Justificación</b> .....	6
<b>2. Modelo de un robot manipulador con articulación elástica</b> .....	7
<b>2.1. Modelo dinámico</b> .....	7
<b>2.2. Caso de estudio</b> .....	9
<b>2.3. Modelo del robot con una articulación elástica en espacio de estados</b> .....	11
<b>2.4. Simulaciones</b> .....	13
<b>3. Generación de trayectoria</b> .....	14
<b>3.1. Selección de trayectoria</b> .....	14
<b>3.2. Simulación</b> .....	17
<b>4. Control de un robot manipulador con articulación elástica</b> .....	18
<b>5. Control por realimentación de los estados</b> .....	19
<b>5.1. Control PD del lado del elemento</b> .....	19
<b>5.2. Control PD del lado del motor</b> .....	21
<b>5.3. Control PD combinado</b> .....	24
<b>5.4. Control PD con prealimentación del Jerk del eslabón</b> .....	28
<b>5.5. Control PD con prealimentación del jerk del eslabón con compensación de los estados con valores de referencia</b> .....	30
<b>5.6. Control PD combinado con prealimentación del jerk de lado del eslabón con compensación de los estados</b> .....	33
<b>5.7. Controlador combinado con realimentación la velocidad del lado del motor</b> .....	37
<b>5.8. Control PD combinado con realimentación de la aceleración del lado del motor</b> .....	41
<b>5.9. Control PD combinado con realimentación de la aceleración del lado del eslabón</b> ...	45
<b>5.10. Control PD combinado con realimentación de la jerk lado del eslabón</b> .....	46
<b>5.11. Control PD combinado con realimentación de la jerk lado del motor</b> .....	48
<b>5.12. Conclusiones</b> .....	49
<b>6. Control por el método de perturbación singular</b> .....	51
<b>6.1. Definición del método</b> .....	52
<b>6.2. Respuesta del modelo utilizando dos escalas de tiempo</b> .....	53
<b>6.3. Teorema de Tikhonov</b> .....	56
<b>6.4. Variante del modelo para una respuesta lenta y rápida</b> .....	57
<b>6.5. Aplicación del método de perturbación singular al modelo del robot</b> .....	59
<b>6.6. Definición del control</b> .....	60
<b>6.6.1. Control para la respuesta lenta</b> .....	62

<b>6.6.2. Primera variante de control para la respuesta rápida.....</b>	<b>62</b>
<b>6.6.3. Segunda variante del control para la respuesta rápida .....</b>	<b>64</b>
<b>6.7. Resultados .....</b>	<b>66</b>
<b>6.8. Conclusiones .....</b>	<b>75</b>
<b>7. Control LQR.....</b>	<b>77</b>
<b>7.1. Control LQR.....</b>	<b>77</b>
<b>7.2. Control LQR con seguimiento de trayectoria.....</b>	<b>78</b>
<b>7.3. Resultados .....</b>	<b>81</b>
<b>7.4. Ahorro de energía variando R en dos estados (aceleración y desaceleración).....</b>	<b>89</b>
<b>7.5. Conclusiones .....</b>	<b>95</b>
<b>8. Conclusiones .....</b>	<b>96</b>
<b>9. Bibliografía .....</b>	<b>97</b>

# 1. Introducción

En la actualidad la robótica es un campo muy conocido por la teoría de control, en especial con robots rígidos, los cuales son diseñados para aplicaciones industriales, en donde son representados como elementos mecánicos robustos, conectados por transmisiones/reductores rígidos.

Por otra parte, en los últimos años, hay un creciente interés que los robots formen parte de escenarios, donde puedan trabajar cerca de los humanos. En este caso el diseño del robot debe ser más ligero y compacto.

Para esto, en los últimos años el uso de harmonic drive ha logrado reducir la eficiencia dinámica y garantizar altas reducciones con la misma eficiencia que un reductor rígido; sin embargo, este componente al ser sujeto al par de movimiento, tiene intrínsecamente elasticidad.

Esta elasticidad, provocan inestabilidad en la posición de los actuadores, desgastes en las articulaciones, así como oscilaciones en el robot, lo cual no se presenta en un robot con articulaciones rígidas. Por tanto, se ve la necesidad de analizar estrategias de control que tomen en cuenta no solo la dinámica rígida del cuerpo, sino que también la flexibilidad articular.

Por estas razones en el presente trabajo se presentan diferentes técnicas de control para el seguimiento de trayectoria de robots con articulaciones flexibles, aportando una comparativa de los resultados obtenidos para cada uno de los controles propuestos.

En el segundo capítulo, donde, se definirá el modelo del robot con una articulación elástica, el cual es de cuarto orden con respecto a la posición; además se detalla las características que posee el caso particular de estudio, para el presente trabajo; el tercer capítulo se describirá la generación de trayectoria que el robot tomará para simular las pruebas utilizando un perfil de cuarto orden, el cual toma en cuenta los límites físicos del movimiento e incluye las variables físicas del jerk (Sobreaceleración) y el snap (derivada de la sobreaceleración).

Por otro lado, en el cuarto capítulo se da una perspectiva de las características que tendrán los controladores y hablaremos un poco de cada uno de ellos; comenzando en el quinto capítulo, en el cual, se analiza el control por realimentación de los estados y su efecto en el modelo del robot.

Luego, en el sexto capítulo, se hablará sobre el control de doble bucle interior y exterior; para luego tomar este mismo enfoque en el séptimo capítulo, donde utilizaremos el control por el método de perturbaciones singulares para robots con articulaciones elásticas, utilizando dos diferentes escalas de tiempo, simplificando el modelo del sistema.

Por consiguiente, en el octavo capítulo, se detalla el uso del control óptimo LQR para robots con articulaciones flexibles, con el objetivo de reducir el consumo energético. Por último, en el noveno capítulo se presenta las conclusiones y en el décimo capítulo culminando con la bibliografía.

## 1.1. Objetivos

Los objetivos del trabajo residen en el análisis de diferentes leyes de control para un robot con articulaciones elásticas. Por esta razón, se deben cumplir los siguientes objetivos:

- Analizar las diferentes técnicas de control, utilizando la respuesta obtenida de simulaciones
- Estudiar los problemas que se encuentra para el control de robot con articulaciones elásticas
- Compensar el efecto de elasticidad en el modelo del robot
- Aprender las ventajas y diferencias de varios controladores para una articulación elástica.
- Comparar el consumo de energía de las diferentes técnicas de control

## 1.2. Justificación

En la actualidad, los sistemas robóticos con articulaciones rígidas, han sido tratados por mucho tiempo por la comunidad científica, a diferencia de los robots con articulaciones elásticas.

La problemática viene dada con el modelado dinámico del robot con articulaciones elásticas, que, a diferencia del robot con enlace rígido, se necesita el doble de variables para caracterizar por completo la configuración del robot, aumentando la dificultad de crear esquemas de control que realicen tareas básicas de movimiento.

Adicionalmente para la implementación de una ley de control, se requerirá el doble de sensores (Dos de posición y dos de velocidad para el motor y el eslabón respectivamente), ya que el par debido a la elasticidad de la articulación, provoca oscilaciones que producen desplazamientos instantáneos de posición entre el rotor del motor y el eslabón; lo que implica instalar un par de sensores, antes y después de la articulación.

de modo que, es evidente dar analizar diferentes tipos de controladores que actúen directamente sobre el modelo del robot y regule la elasticidad de la articulación, utilizando o no las cuatro variables de control.

## 2. Modelo de un robot manipulador con articulación elástica

A continuación, comienza la descripción matemática de las características físicas y cinemáticas de un brazo robot con articulaciones elásticas, el cual será la base fundamental para el desarrollo del presente trabajo.

Primero, se procede a describir el modelo dinámico del robot; para luego con la definición de este modelo, desarrollar en el capítulo 6 el modelo por el método de perturbaciones singulares y a su vez utilizar ambos modelos en el proceso del análisis de los controladores.

Por otra parte, definir la variable jerk en el algoritmo de la planificación, nos permite tener un mejor seguimiento de trayectoria, ya que disminuye los desgastes de los actuadores del robot, es decir reduce la excitación de las frecuencias de resonancia del manipulador, produciendo una menor oscilación en las articulaciones del robot.

### 2.1. Modelo dinámico

Con relación al modelo del robot con articulaciones elásticas, consideramos un modelado dinámico, en el cual, describe la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas que causan el movimiento.

Existen diferentes métodos para obtener el modelo dinámico; dos de los más comunes son el método de LaGrange [1] y el método de Newton-Euler. Ambos métodos producen el mismo resultado, aunque las ecuaciones de ambos, pueden diferir en eficiencia computacional.

Para el presente trabajo se utiliza el método de LaGrange para el modelado del robot con articulaciones elásticas, por lo cual se debe definir la estructura del robot y las interacciones entre cada elemento.

Para esto, se asume que el robot está compuesto por  $N + 1$  eslabones, interconectados por  $N$  enlaces; estos enlaces están compuestos por  $N$  articulaciones rotativas sometidas a una deflexión y accionadas por  $N$  motores eléctricos, tal y como se muestra en la

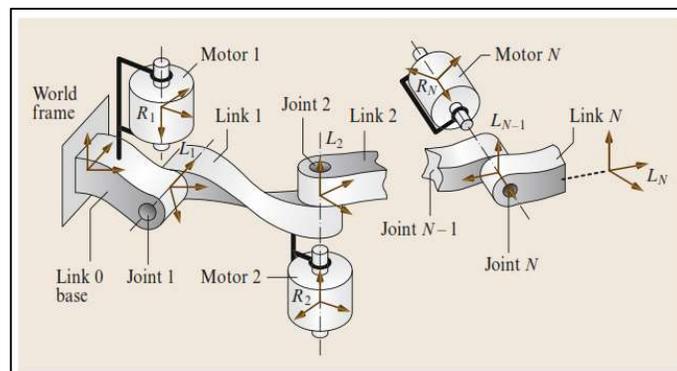


Figura 1. Estructura del robot con  $N$  articulaciones [2].

Para comenzar con el modelado se debe asumir lo siguiente, tal como en [2]:

- Las deflexiones en las articulaciones son pequeñas, de tal manera que su efecto de elasticidad tiene un comportamiento lineal.
- Los rotores de los motores eléctricos son cuerpos uniformes rígidos, teniendo su centro de masa en el eje de rotación.
- Los motores están ubicados en una posición anterior al eslabón accionado, en el brazo del robot (Esto es en el caso que el robot tenga más de un eslabón).

Por otro lado, el método de LaGrange está basado en describir la energía cinética  $K(\Theta, \dot{\Theta})$  y la energía potencial  $V(\Theta)$  por funciones escalares. Estas funciones están expresadas en función de la siguiente variable.

$$\Theta = \begin{pmatrix} q \\ \theta \end{pmatrix} \in R^{2N} \quad (2.1)$$

La variable  $\Theta$  es una agrupación vectorial de  $q$  y  $\theta$ , de acuerdo a los  $N$  elementos que este compuesto el robot; donde  $q$  es el vector de posición de los eslabones y  $\theta$  es el vector de posición de los rotores de cada motor.

Siguiendo este enfoque, se describirán las contribuciones energéticas  $L$  como

$$L = K(\Theta, \dot{\Theta}) - V(\Theta). \quad (2.2)$$

Asimismo, la energía potencial  $V(\Theta)$  en (2.2), está compuesta por la acción de la gravedad y la fuerza de elasticidad de la articulación.

En cuanto a la fuerza de elasticidad, en una articulación  $i$  tendrá un comportamiento lineal y está modelada por un muelle de rigidez  $K_i > 0$ , el cual es torsional para articulaciones rotacionales. Por otro lado si analizamos una articulación  $i$ , se tiene que

$$\theta_i = n_i q_i.$$

Donde,  $n_i > 0$  es la relación de reducción en la  $i$ -ésima articulación; por otro lado expresaremos a  $\delta_i = q_i - \theta_i$  como la deformación en la  $i$ -ésima articulación, con lo que se puede expresar a la fuerza de elasticidad como

$$\tau_i = K_i (\theta_i - q_i)$$

Que para el caso general se tiene que

$$V = \frac{1}{2} (q - \theta)^T K (q - \theta) + (\partial U_{gravedad} (q) / \partial q)^T \quad (2.3)$$

$$K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_N) \quad (2.4)$$

En cuanto a la gravedad está relacionada con la posición del baricentro o centro de masas de los eslabones (cada uno de masa  $m_i$ ) y de los motores (de masa  $m_{r_i}$ ). Debido a la suposición 2, este último será independiente de  $\theta$ .

Por otra parte, la energía cinética del robot  $K(\theta, \dot{\theta})$ , está compuesta por la suma de las contribuciones del eslabón y del motor. Para los eslabones, no existe diferencia con respecto al caso del robot rígido y, en definitiva, se la puede definir como

$$K_{eslabón} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_L(q) \dot{q}. \quad (2.5)$$

Donde  $M_L(q)$  es la matriz de inercia del eslabón, y esta debe ser definida positiva y simétrica. Para saber más propiedades de esta matriz se puede revisar [3].

Una vez definida la formulación por el método de LaGrange, el modelo derivado es el siguiente.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + g(q) - K(\theta - q) - B(\dot{\theta} - \dot{q}) = 0 \quad (2.6)$$

$$M(\theta)\ddot{\theta} + f(\dot{\theta}) + K(\theta - q) + B(\dot{\theta} - \dot{q}) = \tau \quad (2.7)$$

Como podemos observar las características del modelo son descritas por dos ecuaciones; (2.6) modela toda la dinámica del lado del elemento, mientras (2.7) será para el lado del motor respectivamente, donde ambas están acopladas por el par de elasticidad. Adicionalmente se puede decir que el modelo no es lineal, ya que incluye la fuerza de gravedad.

## 2.2. Caso de estudio

Para las simulaciones se considera un robot con un solo eslabón elástico, con el eje de rotación en posición horizontal, el cual es rotado por el acoplamiento de un motor y una articulación elástica, tal como se muestra en Figura 2.

La articulación está compuesta por un harmonic drive, el cual reduce la velocidad de giro del eslabón  $N$  veces y aumenta el par del motor en la misma medida; además este engranaje presenta características elásticas en su funcionamiento, con una constante de rigidez  $\mathbf{B}$  y de elasticidad  $\mathbf{K}$  en función, al desplazamiento entre la posición del motor  $\theta$  y la posición del eslabón  $q$ .

Al mismo tiempo, se asume que existe un rozamiento estático del lado del motor y del eslabón representados por  $\mathbf{b}_e$  y  $\mathbf{b}_m$ , denominados coeficientes de fricción viscosa.

Igualmente existirá una fuerza rotativa resultante del esfuerzo realizado por el motor para mover el sistema  $\mathbf{T}_m$ , y si es el caso, una fuerza externa del lado del elemento  $\mathbf{T}_L$ , que puede traducirse como una carga externa sujeta a la articulación del robot o la acción de la gravedad. Por último, para mayor simplicidad, asumiremos que no existe fricción en las articulaciones.

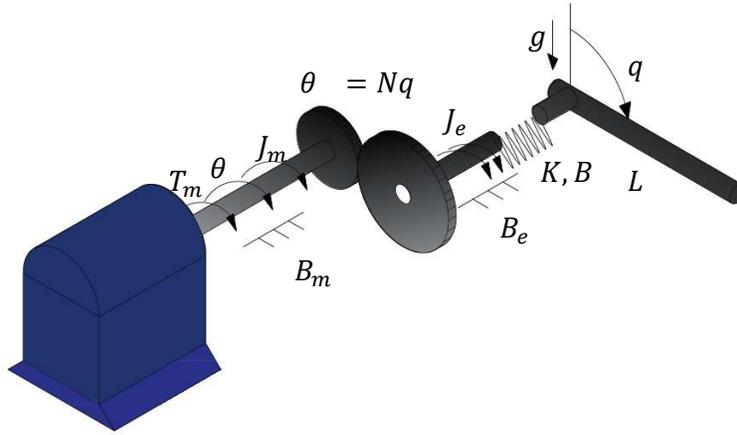


Figura 2. Modelo de una articulación elástica.

A continuación, utilizaremos (2. 6) y (2. 7) para definir nuestro modelo de una sola articulación, quedando lo siguiente.

$$J_e \ddot{q} + b_e \dot{q} + K \left( q - \frac{\theta}{N} \right) + B \left( \dot{q} - \frac{\dot{\theta}}{N} \right) + mgL \sin(q) = 0 \quad (2. 8)$$

$$J_m \ddot{\theta} + b_m \dot{\theta} + \frac{K}{N} \left( \frac{\theta}{N} - q \right) + \frac{B}{N} \left( \frac{\dot{\theta}}{N} - \dot{q} \right) = T_m \quad (2. 9)$$

Como se puede observar el sistema es de cuarto orden y se espera controlar la posición del eslabón.

Se observa que, para controlar el robot se puede variar el torque de motor  $T_m$ , sin embargo, normalmente para controlar el par del motor se utiliza una etapa de potencia, la cual puede generar un cambio de corriente o voltaje en la armadura del motor proporcional a la acción de control.

Por otro lado, se requiere que el robot mantenga una posición establecida, por lo que, se requerirá una conversión entre la posición de referencia a par motor.

Por tanto, podemos deducir una relación entre la posición y el par requerido.

$$\theta = KaI_m \quad ; \quad I = KmT_m \quad (2. 10)$$

Para este trabajo se considera que la etapa de potencia maneja la corriente de armadura del motor, donde  $Ka$  será la relación entre la trayectoria de referencia y dicha corriente ; por otro lado,  $Km$  será la relación entre la corriente de armadura y el par generado del motor.

De acuerdo a (2. 10), fácilmente podemos realizar una conversión de posición deseada a par motor con las ganancias  $Ka$  y  $Km$ . Generalmente estas ganancias son determinadas experimentalmente o pueden ser suministrada por el fabricante. El proceso de

experimentación, no es parte de estudio en este documento, por lo que usaremos ganancias preestablecidas.

Ahora, para las demás variables, a continuación, se detalla los valores utilizados para un robot con una articulación elástica, teniendo en cuenta la gravedad, las inercias del eslabón y del motor y sobre todo teniendo en cuenta la elasticidad, efectos de rozamiento y la viscosidad.

Tabla 1. Datos de las variables del modelo del robot.

Variable	Valor	Descripción
$L$	0.49	Longitud del eslabón [ $m$ ]
$M$	2.80	Masa del eslabón [ $Kg$ ]
$K$	7000.00	Rigidez elástica de acoplamiento [ $N \cdot m/rad$ ]
$B$	$5.00 \times 10^{-5}$	Coefficiente de rozamiento viscoso [ $N \cdot s/rad$ ]
$Be$	$5.00 \times 10^{-5}$	Viscosidad del eslabón [ $N \cdot s/rad$ ]
$Bm$	$1.00 \times 10^{-5}$	Viscosidad del motor [ $N \cdot s/rad$ ]
$Je$	0.67	Momento de inercia del eslabón [ $kg \cdot m^2$ ]
$m$	$1.80 \times 10^{-5}$	Momento de inercia del motor [ $kg \cdot m^2$ ]
$N$	80.00	Relación de reducción
$g$	9.80	Gravedad [ $m/s^2$ ]
$K_a$	2.20	Ganancia de corriente [ $rad/A$ ]
$K_m$	1.00	Ganancia de par motor [ $A/N \cdot m$ ]

Estos valores serán utilizados para modelar el sistema, el cual será utilizado para los distintos controladores que en el presente trabajo serán expuestos.

### 2.3. Modelo del robot con una articulación elástica en espacio de estados

Ahora para realizar la implementación de los sistemas de control, consideraremos la aplicación del método de espacio de estado, para describir nuestro modelo del robot.

Para el caso de una articulación elástica, es que, gracias a la presencia de elasticidad, la ley de control puede depender de cuatro variables las cuales serán la posición y velocidad tanto del motor, como del eslabón.

Por esta razón, se puede utilizar cuatro sensores de medición; dos de posición (encoders) y dos de velocidad como tacómetros, todo esto dispuesto antes y después de la articulación. En ocasiones no se tendrá un sensor para medir la velocidad, lo que conlleva a utilizar observadores o reconstrucciones numéricas utilizando un adecuado instrumento de medición de posición.

A continuación, escogemos las variables de estados.

$$x_1 = \theta; x_2 = \dot{\theta} \tag{2.11}$$

$$x_3 = q; x_4 = \dot{q} \tag{2.12}$$

En términos de las variables de espacio de estado tenemos lo siguiente,

$$J_m \dot{x}_4 + b_m x_4 + \frac{Kx_3}{N^2} - \frac{Kx_1}{N} + \frac{Bx_4}{N^2} - \frac{Bx_2}{N} = T_m \quad (2.13)$$

$$J_e \dot{x}_2 + b_e x_2 + Kx_1 - \frac{Kx_3}{N} + Bx_2 - \frac{Bx_4}{N} + mgL \sin(q) = 0. \quad (2.14)$$

Donde en forma de matriz, puede ser descrita como

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0. \quad (2.15)$$

Remplazando (2.13) y (2.14) en (2.15) tenemos lo siguiente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{J_e} & -\frac{b_e + B}{J_e} & \frac{K}{NJ_e} & \frac{B}{NJ_e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{NJ_m} & \frac{B}{NJ_m} & -\frac{K}{N^2 J_m} & -\frac{b_{m+B/N^2}}{J_m} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K_a K_m}{J_m} + mgL \sin(q) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Como esta descrito anteriormente, se escoge para la salida las cuatro variables de estado, las cuales pueden ser medibles.

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.18)$$

En donde,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Por consiguiente, el modelo del robot con una articulación elástica en espacio de estado será de cuarto orden y su control, deberá ser verificado en algún simulador el cual genere los resultados necesarios para realizar un análisis más exhaustivo. Por tanto, se deberá seleccionar una herramienta informática que ayude a solucionar este objetivo.

## 2.4. Simulaciones

Para realizar las simulaciones del modelo y control, utilizaremos Simulink el cual es ejecutado en el entorno de Matlab. Esta decisión fue tomada ya que, este programa nos permite trabajar en un ambiente de programación cómodo, rápido y flexible; sin la necesidad de una implementación física que en esta ocasión resultaría ser muy costoso ya que muchos de los sensores y equipos eléctricos, dependiendo de su calidad pueden alcanzar precios muy elevados. Como ejemplo a continuación, se presenta un detalle de la construcción del modelo del robot; se puede decir que en los demás capítulos no se detallará esto, ya que siempre se utilizará el mismo modelo.

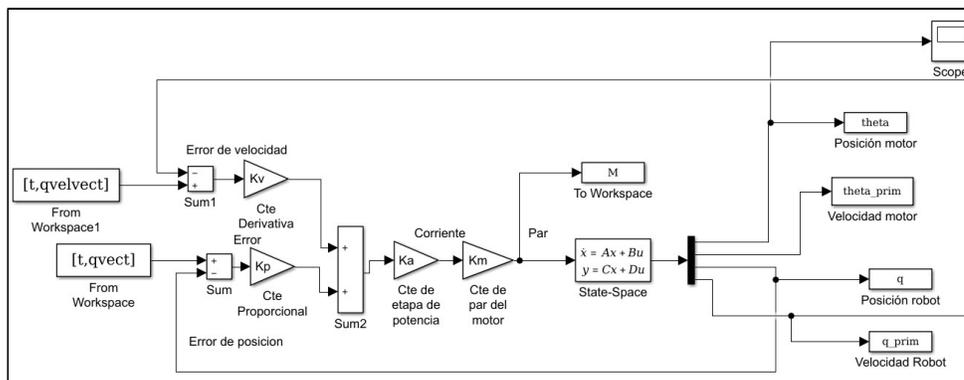


Figura 3. Modelo de una articulación elástica implementado en Simulink-Matlab.

## 3. Generación de trayectoria

### 3.1. Selección de trayectoria

Una vez detallado el modelo del robot con articulaciones elásticas, ahora se debe de tener en cuenta, la forma de como efectuará el robot su movimiento en el espacio; para esto, se requiere generar una planificación del movimiento, la cual genere una trayectoria que seguirá fielmente, cada articulación del robot.

Para el presente trabajo, es necesario detallar algún proceso de planificación, la cual será base para tomar medidas, en la acción de control del modelo del robot.

Cuando hablamos de trayectoria, siempre nos referiremos a un conjunto de puntos que determinan una posición en el espacio; estos puntos identifican el camino que debe de seguir una o varias articulaciones del robot para ubicarlo en alguna posición deseada. Estas trayectorias pueden ser generadas punto a punto o mediante funciones polinómica.

El objetivo de la generación de trayectoria es que se produzca un camino, el cual será una señal de referencia para el controlador de las articulaciones del robot.

Por otro lado, es necesario que la trayectoria cumpla los siguientes requisitos:

- El recorrido generado lo deberá hacer en el menor tiempo posible
- Se debe de tomar en cuenta, los límites mecánicos o problemas de seguridad de los actuadores
- La posición final planificada de la trayectoria deberá ser igual a la posición final deseada
- Se debe de minimizar el tiempo de procesamiento de la planificación de la trayectoria
- El algoritmo a escoger para generar la trayectoria, siempre deberá darnos una solución válida
- Debe haber uniformidad en el movimiento
- Los valores máximos de la trayectoria estarán limitados por las condiciones físicas del robot

Estos puntos indican que la trayectoria deberá presentar el máximo de prestaciones, conociendo las limitaciones físicas que pueda tener el robot.

En la mayoría de aplicaciones industriales los robots comerciales, normalmente utilizan un perfil trapezoidal, debido a su sencillez de implementación y bajo consumo computacional; el cual posee tres etapas, de aceleración constante, velocidad constante y desaceleración constante, tal como se aprecia en la Figura 4.

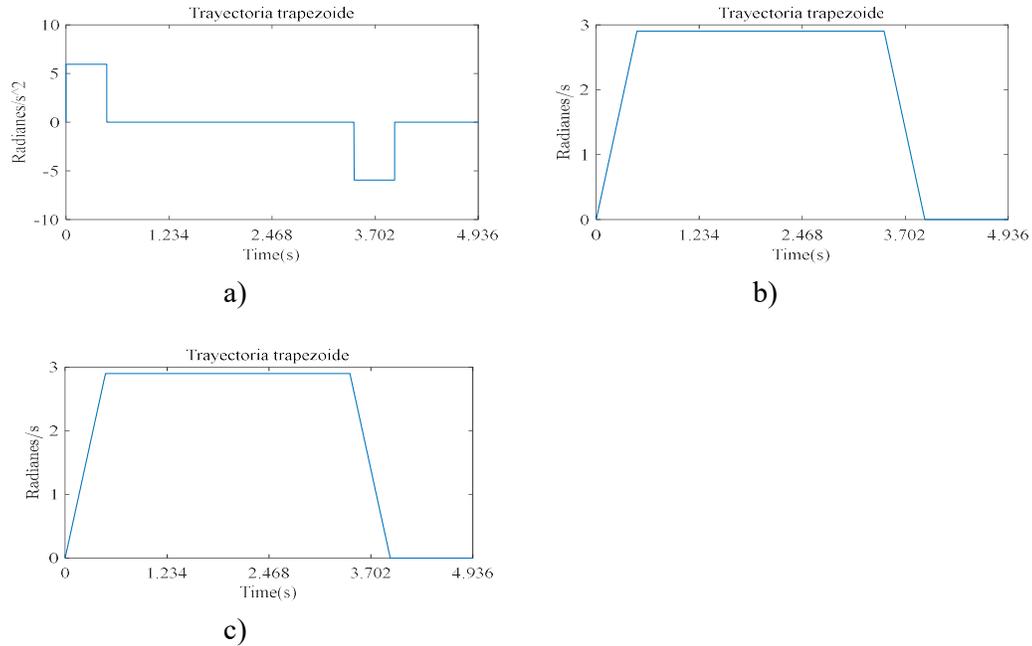


Figura 4. Gráficos del perfil trapezoidal; a) Trayectoria de aceleración, b) Trayectoria de velocidad, c) Trayectoria de posición.

No obstante, al integrar la elasticidad en la articulación del robot, el modelo se vuelve de cuarto orden con respecto a la posición; lo que evidentemente, requiere que la aceleración no tenga esos cambios bruscos de valor, como lo presenta el perfil trapezoidal.

Para nuestro caso, utilizaremos un **perfil en S de cuarto orden**, el cual contempla las limitaciones del snap ( $d$ ), jerk ( $j$ ), aceleración ( $a$ ) y velocidad ( $v$ ), suponiendo que en el instante inicial todas estas variables son cero. Estas condiciones aseguran una trayectoria ( $q$ ) uniforme y suave; permitiendo un movimiento factible y evitando el desgaste de todas las articulaciones del robot.

La gran mayoría de los fabricantes proporcionan los valores límites de estas variables, pero en la práctica, se los puede determinar con ensayos experimentales o solicitarlos directamente al fabricante.

El perfil en S de cuarto orden se basa en un algoritmo, el cual construirá una trayectoria simétrica, compuesta por 4 períodos de movimiento, el intervalo de snap constante, el de jerk constante, la de aceleración constante y el intervalo de velocidad constante. El resultado del algoritmo lo podemos ver en la Figura 5.

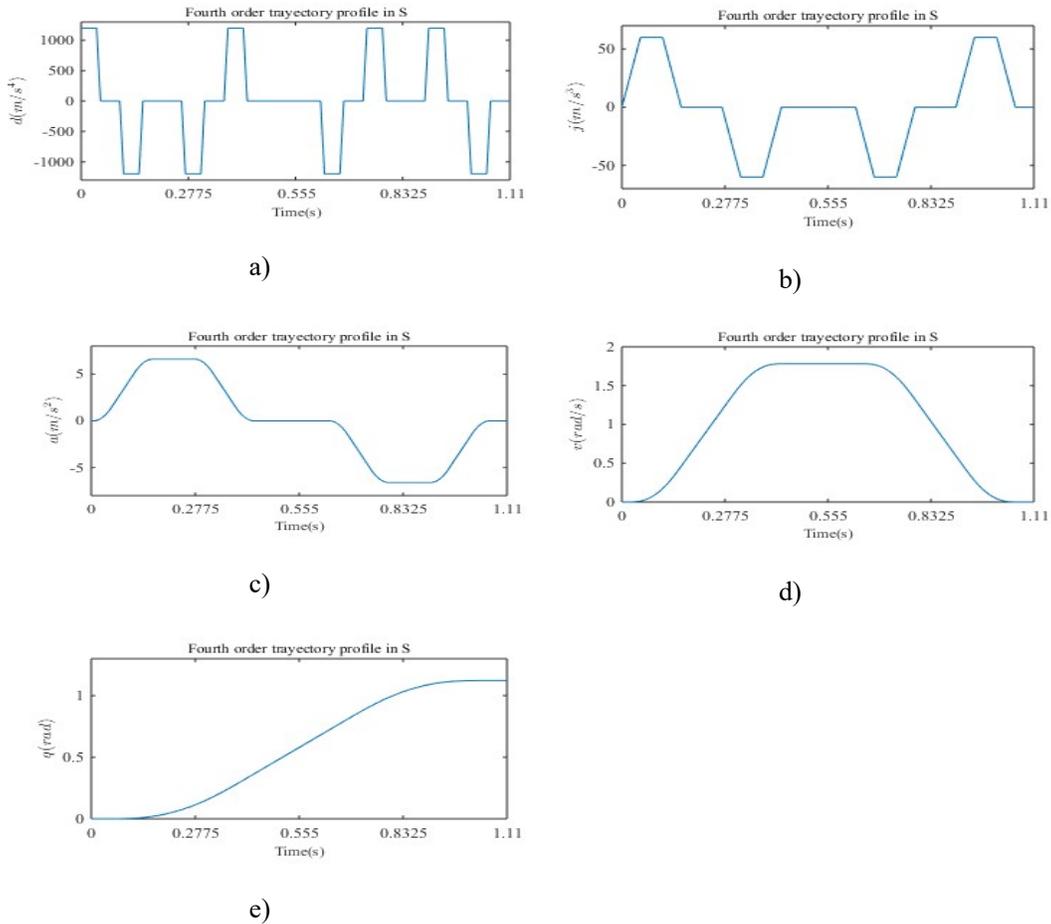


Figura 5. Gráficos del perfil en S de cuarto orden; a) Trayectoria de snap, b) Trayectoria de Jerk, c) Trayectoria de aceleración, d) Trayectoria de velocidad, e) Trayectoria de posición.

Conviene subrayar que, a diferencia de otras trayectorias, se asoció al perfil en S de cuarto orden la variable snap, el cual es la variación del jerk con respecto al tiempo, con el propósito de que, la aceleración posea una trayectoria lineal, lo que eliminaría una discontinuidad en la energía transmitida por la elasticidad de la articulación, en las aceleraciones y desaceleraciones.

Por otra parte, definir la variable jerk en el algoritmo de la planificación, nos permite tener un mejor seguimiento de trayectoria, ya que disminuye los desgastes de los actuadores del robot, es decir reduce la excitación de las frecuencias de resonancia del manipulador, produciendo una menor oscilación en las articulaciones del robot.

En conclusión, este perfil está capacitado para ser utilizado en robot con articulaciones flexibles, que requieran mayor suavidad en sus movimientos, a diferencia de otros perfiles, como el trapecoidal. Para más información ver [4].

### 3.2. Simulación

Una vez determinado el planificador de trayectoria, para el propósito de simulación, se dará al robot la tarea de moverse desde la posición inicial  $q = 0$  [radianes], hasta una posición final igual a  $2\pi$  [radianes]. Adicionalmente, se detalla los límites de movimiento en la siguiente tabla.

Tabla 2. Datos del límite de movimiento del robot.

Variable	Valor	Descripción
$a_{max}$	4.15	Aceleración máxima [radianes/s <sup>2</sup> ]
$v_{max}$	3.59	Velocidad máxima [radianes/s ]
$j_{max}$	41.00	Jerk máximo [radianes/s <sup>3</sup> ]
$s_{max}$	103.00	Snap máximo [radianes/s <sup>4</sup> ]
$t_m$	$1.00 \times 10^{-3}$	Tiempo de muestreo [s]
$t_{final}$	2.00	Tiempo final de movimiento [s]

Como se puede observar, el tiempo de simulación de la trayectoria está definida por  $t_{final}$ , teniendo un tiempo de muestreo  $t_m$ ; adicionalmente, una vez finalizado su recorrido, se dará 1 segundo de tiempo extra de simulación, con el objetivo de verificar el comportamiento del robot cuando llega a su posición final.

## 4. Control de un robot manipulador con articulación elástica

En la actualidad, los sistemas robóticos con articulaciones rígidas, han sido tratados por mucho tiempo por la comunidad científica, a diferencia de los robots con articulaciones elásticas; de modo que, el objetivo en este capítulo, es dar a conocer diferentes tipos de controladores que actúen directamente sobre el modelo del robot y regule la elasticidad de la articulación. La problemática viene dada con el modelado dinámico del robot con articulaciones elásticas, que, a diferencia del robot con enlace rígido, se necesita el doble de variables para caracterizar por completo la configuración del robot, aumentando la dificultad de crear esquemas de control que realicen tareas básicas de movimiento.

Adicionalmente para la implementación de una ley de control, se requerirá el doble de sensores (Dos de posición y dos de velocidad para el motor y el eslabón respectivamente), ya que el par debido a la elasticidad de la articulación, provoca oscilaciones que producen desplazamientos instantáneos de posición entre el rotor del motor y el eslabón; lo que implica instalar un par de sensores, antes y después de la articulación.

Por otro lado, existe la posibilidad de no contar con un par de sensores a cada extremo, por lo que se puede reconstruir la medición mediante una diferenciación numérica adecuada, de un sensor de alta precisión. Pongámonos por caso un robot con articulación elástica sin sensores de velocidad; esta puede reconstruirse con un encoder de posición que esté utilizando el robot. Cabe aclarar que no es tema de estudio para el presente trabajo, la compensación de la gravedad, pero trataremos de darle un enfoque derivativo a la compensación del mismo, sin dejar de lado el tema principal de compensar el par elástico de a articulación.

Una vez establecido una idea básica de la situación actual de los controladores para articulaciones elásticas, se comienza con una idea básica de realimentación de los estados; analizando su papel en la acción de control del sistema; luego tomaremos un enfoque de control en cascada con un doble bucle interior y exterior, con el fin de probar una división de controladores para regular no solo su posición, si no el par de elasticidad. Por otro lado, retomando el enfoque de dividir la acción de control, utilizaremos el control por el método de perturbaciones singulares para cambiar el proceso de regulación a dos diferentes escalas de tiempo, simplificando de manera beneficiosa el modelo de nuestro sistema. Por último, analizaremos el control óptimo LQR, el cual nos ayuda a regular la cantidad de energía consumida por el robot para alcanzar la posición final.

Cabe mencionar que, se plantea dos criterios que debemos tomar en cuenta para el control:

- Al implementar el control, no debe existir una sobreoscilación, es decir el sistema no puede ser subamortiguado.
- La respuesta del sistema debe ser rápida.

Estas condiciones, deberán de cumplirse sintonizando el controlador hasta obtener una respuesta aceptable para cada caso. Adicionalmente para determinar la potencia consumida por el motor se utilizará la siguiente formula

$$Potencia = T_m w [W]$$

Donde  $T_m$  es el par del motor y  $w$  es la velocidad angular del motor.

## 5. Control por realimentación de los estados

Para los sistemas dinámicos, se puede expresar que, luego de un tiempo finito, las variables de estado de dicho sistema, pueden ser controladas por una acción de control que no sea enganchada a ninguna restricción. Por lo tanto, si alguna de estas variables, sometidas a un estudio de controlabilidad, resulta ser controlable, se puede desarrollar un controlador para lograr los requerimientos establecidos.

Con relación al robot con una articulación elástica, se puede contar con dos variables de posición y dos de velocidad correspondiente al lado del eslabón y del motor. Así mismo, al ser un modelo de cuarto orden, las variaciones de la aceleración no pueden ser instantáneos, por lo que, derivadas de orden más superior, pueden corregir en gran medida la estabilidad del sistema como acción de control.

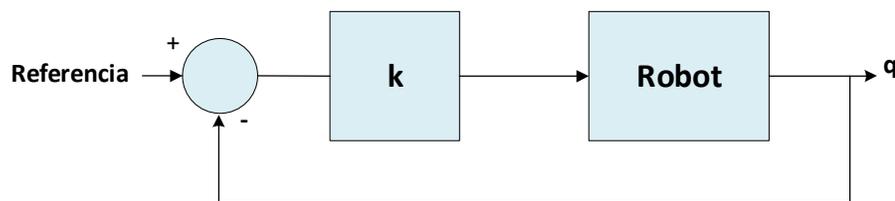


Figura 6. Diagrama de control por realimentación de estado.

En este capítulo, intentaremos analizar estas realimentaciones y observar el comportamiento del sistema de estudio ante ellas.

Cabe mencionar, que no siempre se puede contar con todos los sensores disponibles para medir las variables, por lo que nos centraremos en realizar combinaciones que posiblemente puedan darse el caso en la vida real.

Para esta ocasión, no se tomará en cuenta la fuerza de gravedad en el modelo del robot, ya que el objetivo no es centrarnos en compensar el efecto de oscilación que produce la elasticidad en la articulación.

### 5.1. Control PD del lado del elemento

Implementaremos un control PD, en el cual, la ley de control está compuesta de un término proporcional al error de posición y la derivada del error de velocidad, ambos del lado del eslabón, donde la ley de control quedará de la siguiente manera:

$$u = K_p (q_{ref} - q) + K_v (\dot{q}_{ref} - \dot{q})$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional y derivativa respectivamente.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador son  $K_p = 10$  y  $K_v = 1$ , estos valores fueron determinados de manera analítica y no constará su deducción en este trabajo.

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

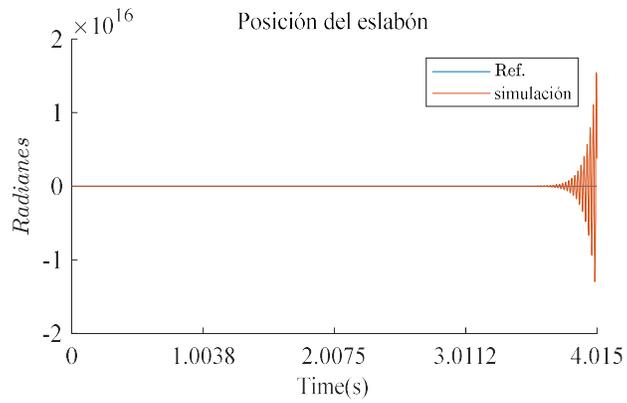


Figura 7. Trayectoria de posición del eslabón. En azul la respuesta del modelo y en rojo la referencia.

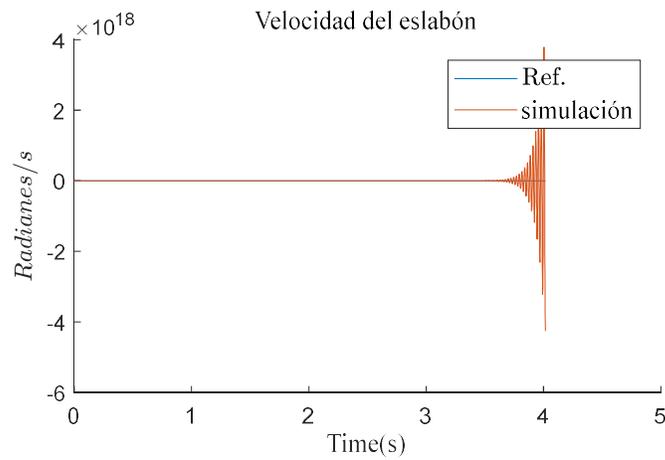


Figura 8. Trayectoria de velocidad del eslabón. En azul la respuesta del modelo y en rojo la referencia.

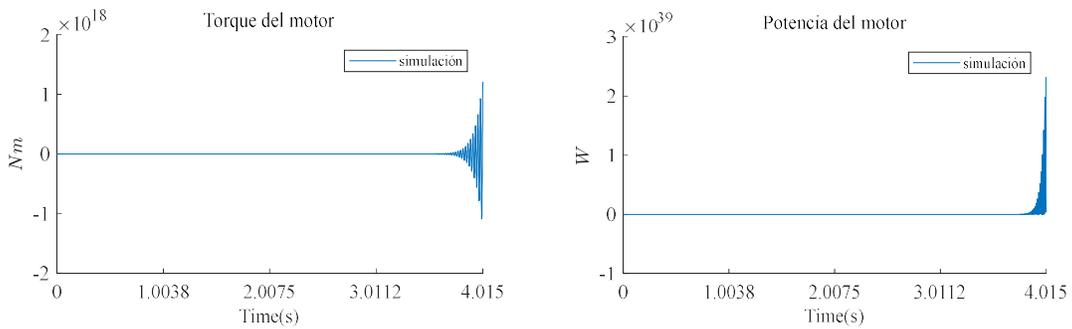


Figura 9. Trayectoria del torque como acción de control a la izquierda, y la potencia consumida por el motor a la derecha.

En relación a la respuesta del controlador PD por el lado del elemento, podemos decir que, aunque parece lógico hacer el control del eslabón, ya que es este lado el cual estamos interesados, resulta que su respuesta es inestable, independientemente de la ganancia del controlador que se pueda elegir.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 3. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	$1.228 \cdot 10^{30}$	$8.629 \cdot 10^{34}$	$4.512 \cdot 10^{37}$
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico/Tiempo pico [Radianes]/s
C1	$1.544 \cdot 10^{16}$	<i>Ninguno</i>	$1.544 \cdot 10^{16}/4.010$

Al observar la Tabla 3, podemos observar que el error de posición y velocidad del elemento, es muy elevado, lo que produce una sobreoscilación en la respuesta del sistema, con lo cual nunca se logrará utilizando este controlador, la estabilidad.

## 5.2. Control PD del lado del motor

Ahora, para el control PD utilizando realimentación por el lado del motor, la ley de control está compuesta, así como el anterior, un término proporcional al error de posición y la derivada del error de velocidad. Con lo que, la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p \left( q_{ref} - \frac{\theta}{N} \right) + K_v \left( \dot{q}_{ref} - \frac{\dot{\theta}}{N} \right)$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional, y derivativa respectivamente.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la tabla que se presenta a continuación.

Tabla 4. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	10	1
C3	10	100

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

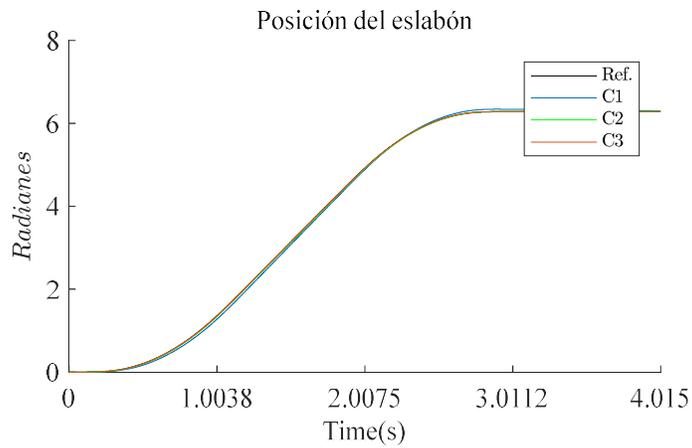


Figura 10. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias del controlador.

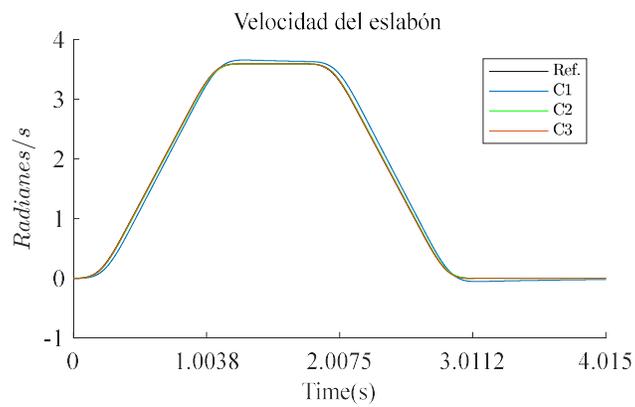


Figura 11. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias del controlador.

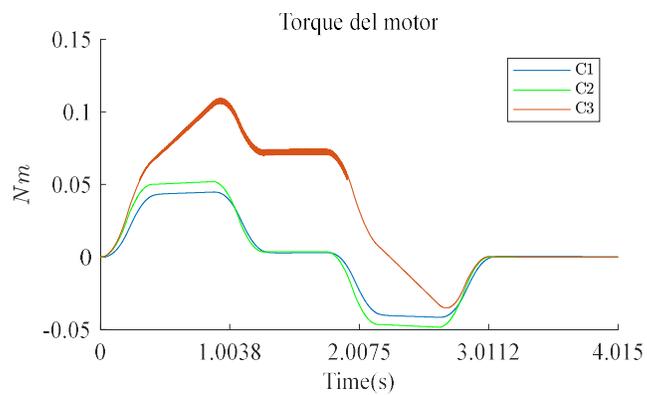


Figura 12. Torque del motor de las tres diferentes ganancias del controlador PD del lado del motor.

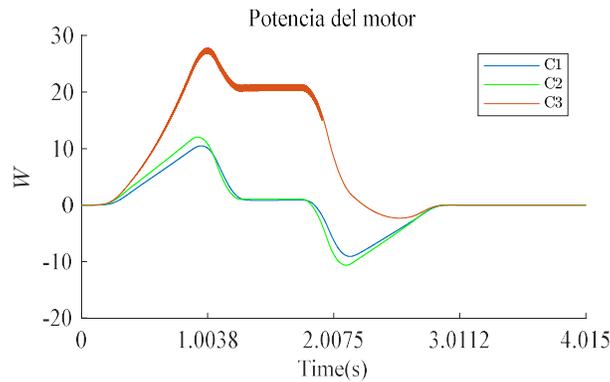


Figura 13. Potencia del motor de las tres diferentes ganancias del controlador.

Observando la acción del controlador, se puede observar que existe una mejor respuesta del sistema. Para C1, se puede decir que existe un retraso con respecto a la referencia, algo que se disminuye en C3 al aumentar la ganancia proporcional. Por otro lado, aumentar la ganancia derivativa solo corrigió el amortiguamiento de la respuesta.

Cabe notar que, para mayores valores de la ganancia proporcional, el motor exige más potencia, algo que se debe tomar en cuenta en la vida real, donde el motor posee una capacidad limitada de generación de par nominal.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 5. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	1.515	1.756	3.4731
C2	0.919	0.158	6.747
C3	0.009	0.103	5.417
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	40.7168	<i>Ninguno</i>	8.839 – 3.186
C2	29.53	<i>Ninguno</i>	8.137 – 4.015
C3	2.408	3.612	6.433 – 4.015

Al observar la *Tabla 5*, podemos observar que el error de posición y velocidad del elemento, son bajos y que entre menos ganancia proporcional tenga más potencia consume. Por otro lado, con el resultado del valor pico, se puede deducir que la ganancia derivativa disminuye en la respuesta el amortiguamiento; esto se nota entre el cambio de C1 y C2, en el cual disminuye su pico, sin embargo, esto retrasa el sistema. Por último, se aprecia cuando se aumenta la ganancia proporcional se disminuye este retraso en la respuesta y con ayuda de la ganancia derivativa, la misma se mantiene amortiguada, lo que logra menor error de seguimiento de trayectoria.

En conclusión, la respuesta del controlador PD por el lado del motor, es la respuesta más estable y llega a la referencia con las ganancias escogidas para el control. Se nota que es una mejor opción que la anterior, la cual es siempre inestable.

### 5.3. Control PD combinado

Por otro lado, para el control PD combinado, la ley de control está compuesta de un término proporcional al error de posición del motor y la derivada de velocidad del motor. Con lo que, tenemos que la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p \left( q_{ref} - \frac{\theta}{N} \right) - K_v \left( \frac{\dot{\theta}}{N} \right)$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional y derivativa respectivamente.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la Tabla 6, la cual se presenta a continuación.

Tabla 6. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	10	1
C3	10	100

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

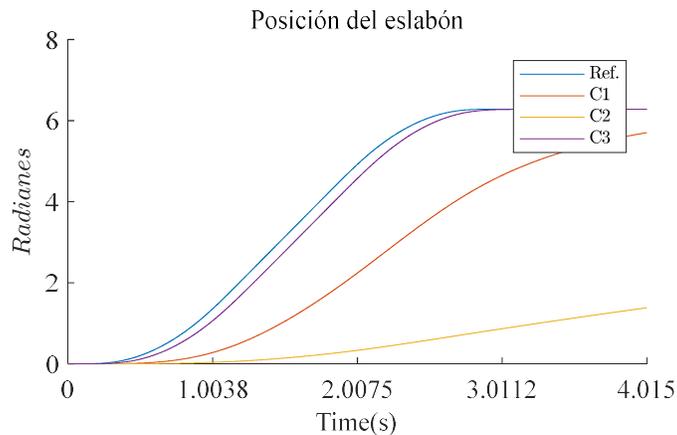


Figura 14. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

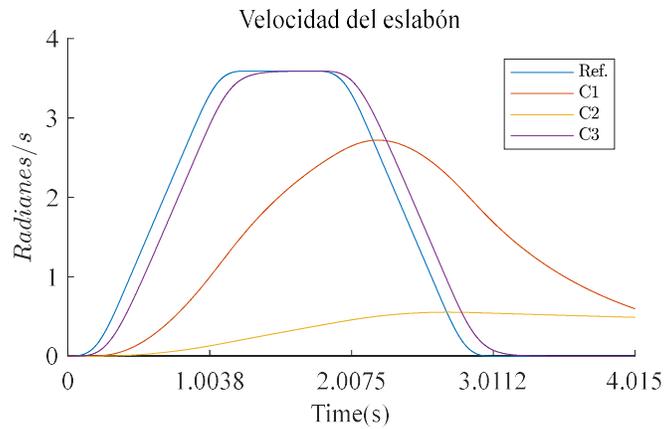


Figura 15. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias.

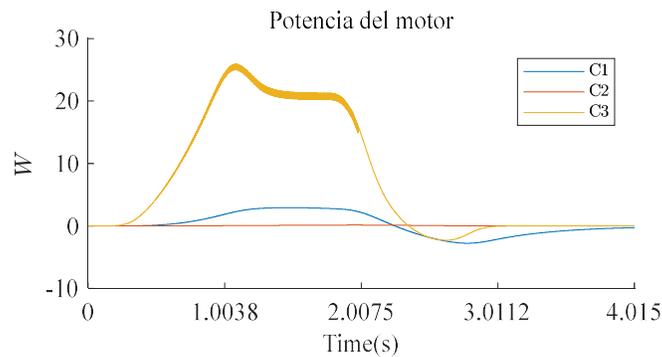


Figura 16. Potencia del motor de las tres diferentes ganancias.

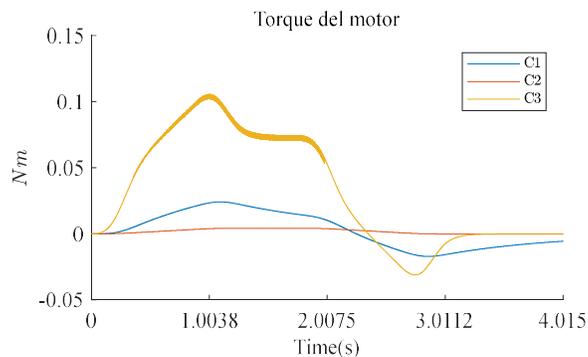


Figura 17. Torque del motor de las tres diferentes ganancias del controlador PD lado combinado.

Observando la acción del controlador, se puede observar que Para C1, con el mismo valor de ganancia que el control anterior, no tiene un buen seguimiento de trayectoria, y que al aumentar la ganancia derivativa empeora aún más. Por otro, lado al aumentar la ganancia proporcional el cambio de C2 a C3 mejora drásticamente, mejorando el seguimiento de

la trayectoria, aunque tenga el mismo retraso en la respuesta, debido al amortiguamiento del sistema.

Lo mismo ocurre en la señal de velocidad y, por consiguiente, al mejorar la acción de control, nuevamente aumenta la potencia que el motor exige para corregir la posición del eslabón.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 7. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	289.5	186.6	0.999
C2	1624.5	388.7	0.165
C3	4.6	6.2	29.873
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	0	<i>Ninguno</i>	5.704 – 4.015
C2	0	<i>Ninguno</i>	1.384 – 4.015
C3	0	2.702	6.282 – 4.015

Al observar la Tabla 7, podemos observar que el error de posición y velocidad del elemento, para el caso C1 y C2 son altos, cosa contraria el caso C3, el cual tiene errores bajos. Esto se debe al aumento de la ganancia proporcional, que en esta ley de control tiene un mayor peso.

Por otro lado, aumentar solo la ganancia derivativa, no mejora el seguimiento de trayectoria, como se observa en el caso C1 y C2. Además, en C3 se puede observar que llega sigue la referencia y llega a su valor final, aunque tenga un retraso.

En conclusión, la respuesta del controlador PD combinado, es también estable y llega a la referencia con las ganancias escogidas para el control. Se nota que es una mejor opción.

Ahora solo analizaremos la mejor respuesta posible y ese es el caso cuando  $K_p = 100$  y  $K_v = 0.5$ . A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

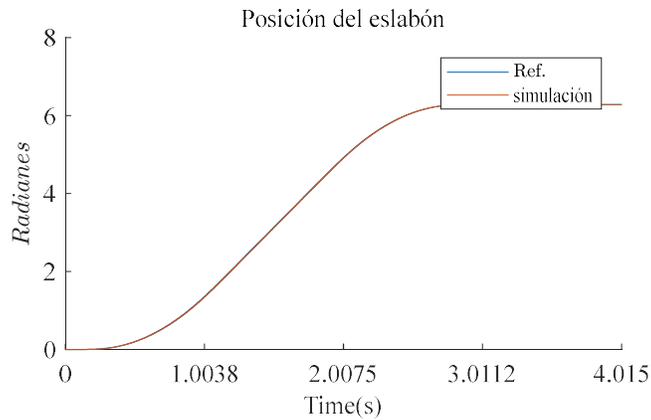


Figura 18. Trayectoria de posición del eslabón.

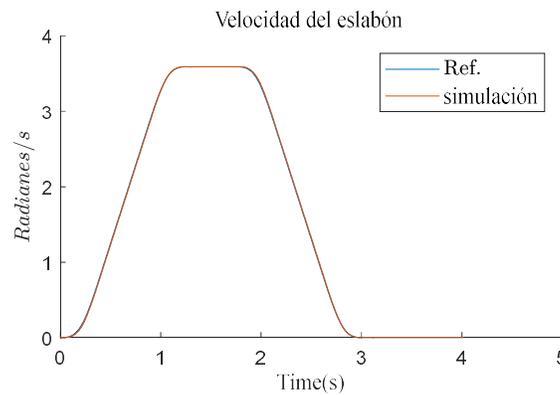


Figura 19. Trayectoria de velocidad del eslabón.

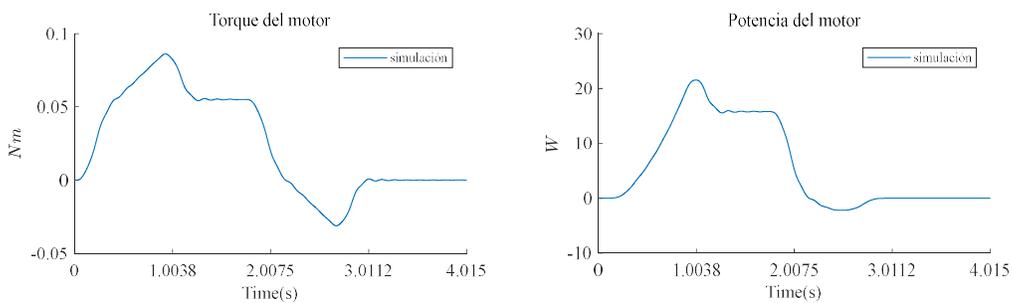


Figura 20. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Al disminuir la ganancia derivativa y mantener la ganancia proporcional como C3, se logra mejorar la respuesta del sistema, esto se da, ya que, al realimentar la velocidad del motor, estamos aumentando la fricción viscosa, lo que hace que la respuesta se atrase con respecto a referencia por estar más amortiguada; si disminuimos el amortiguamiento, se reduce este retraso, pero puede provocar que aparezcan oscilaciones; para este caso la respuesta es muy estable y tiene un fiel seguimiento de la trayectoria.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 8. Característica del resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	$1.433 \cdot 10^{-2}$	$1.805 \cdot 10^{-2}$	22.857
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	$6.3758 \cdot 10^{-4}$	2.585	6.2821 – 2.962

Con estos parámetros disminuyeron notablemente el error de posición y adicionalmente llega a la coordenada final satisfactoriamente, mucho antes que los otros dos controladores estudiados, por lo que se puede decir que, este controlador del sistema es estable y puede ser utilizado con el diseño de parámetros del controlador.

#### 5.4. Control PD con prealimentación del Jerk del eslabón

Para el control PD combinado con prealimentación de la cuarta derivada, la ley de control está compuesta de un término proporcional al error de posición del motor, la derivada de velocidad del motor, ambos vistos desde el lado del eslabón y una prealimentación de la derivada jerk de referencia.

En esta ocasión se va a analizar la inclusión de la referencia del jerk, en el control combinado, estudiado anterior; se espera que mejore los resultados.

tenemos que la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p \left( q_{ref} - \frac{\theta}{N} \right) - K_v \left( \frac{\dot{\theta}}{N} \right) + \frac{NJ_e J_m \widehat{q_{ref}^{(4)}}}{K_a K_m K}$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional y derivativa respectivamente.

.Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la Tabla 9, la cual se presenta a continuación.

Tabla 9. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	10	1
C3	10	100

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

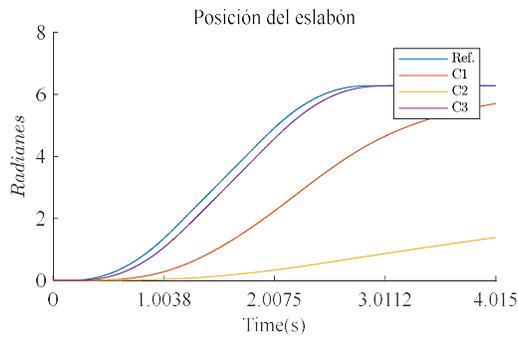


Figura 21. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

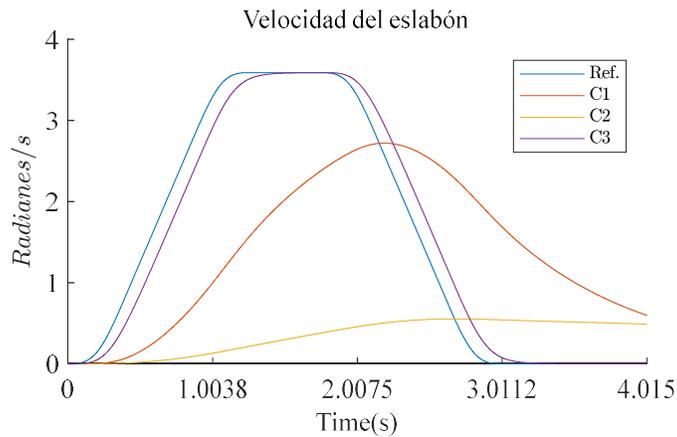


Figura 22. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias.

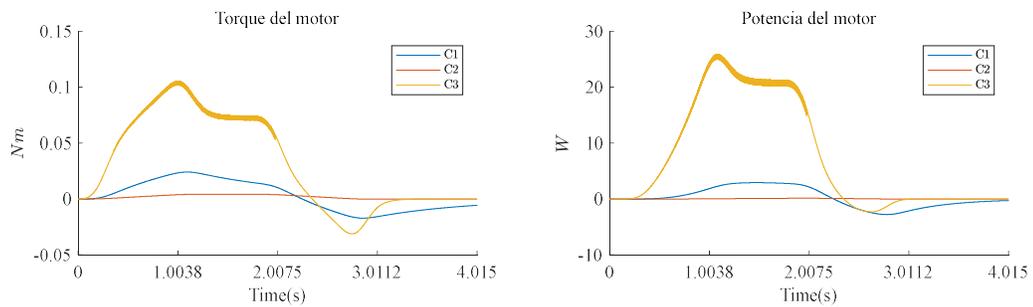


Figura 23. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Como podemos observar, incluir la pre alimentación del jerk, no tiene gran diferencia con el control anterior, por lo que se puede decir que, esta variable no aporta casi nada al control del sistema. Esto se puede apreciar con los datos de las características presentados en la siguiente tabla, los cuales tienen los mismos valores que el anterior controlador.

Tabla 10. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	284.500	186.600	0.999
C2	1624.500	388.700	0.165
C3	4.600	6.200	29.873
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	0	<i>Ninguno</i>	5.704 – 4.015
C2	0	<i>Ninguno</i>	1.384 – 4.015
C3	0	2.702	6.282 – 4.015

En conclusión, la prealimentación del jerk del lado del eslabón, no aporta de gran manera la controlabilidad del sistema.

### 5.5. Control PD con prealimentación del jerk del eslabón con compensación de los estados con valores de referencia

Para el control PD combinado con prealimentación del jerk del lado del eslabón y compensación de los estados con valores de referencia, la ley de control está compuesta de un término proporcional al error de posición del motor visto del lado del eslabón, la derivada de velocidad del motor visto del lado del eslabón, la prealimentación de la derivada jerk, jerk, velocidad y aceleración de referencia como compensación de estados.

tenemos que la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p \left( q_{ref} - \frac{\theta}{N} \right) - K_v \left( \frac{\dot{\theta}}{N} \right) + \frac{(K(J_m + J_e) + (Bb_e + Bb_m + b_e b_m))q_{ref}'' + (J_m(B + b_e) + J_e(B + b_m))q_{ref}'' + N J_e J_m \dot{q}_{ref}^4}{K_a K_m K} + \frac{(b_e + b_m)q_{ref}'}{K_a K_m}$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional y derivativa respectivamente, las demás son retroalimentaciones de los estados.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la siguiente tabla, la cual se presenta a continuación.

Tabla 11. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	10	1
C3	10	100

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

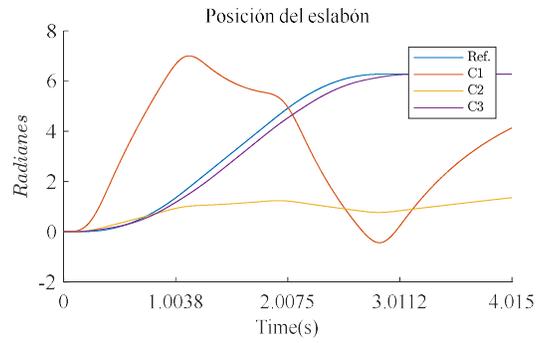


Figura 24. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

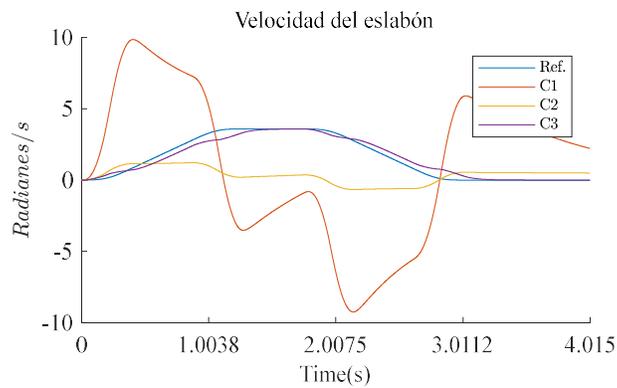


Figura 25. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias.

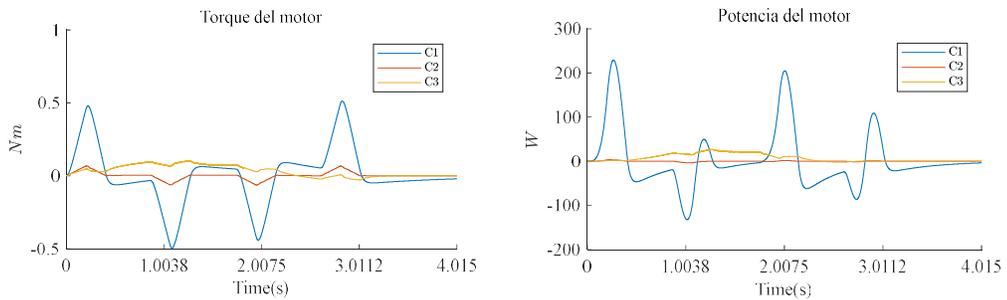


Figura 26. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 12. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	1517.100	3740.200	10.389
C2	1420.200	418.200	0.239
C3	4.800	9.000	27.932
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	11.498	<i>Ninguno</i>	7.004 – 1.122
C2	0	<i>Ninguno</i>	1.359 – 4.015
C3	0	2.8345	6.2821 – 4.015

Como conclusión, se puede decir que agregar una pre alimentación del jerk del lado del eslabón y los demás compensadores de estados, no aporta mucho al control.

Ahora, tomaremos el mismo ejemplo anterior, solo con valores correspondientes a la sintonización del controlador son  $K_p = 500$  y  $K_v = 10$ .

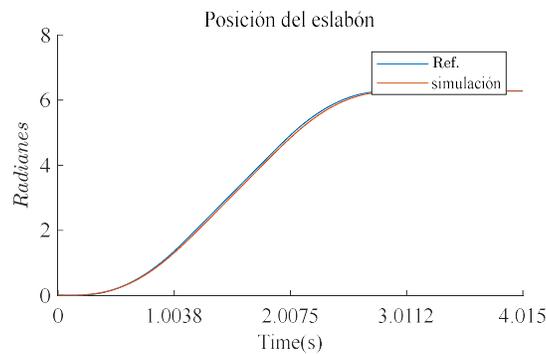


Figura 27. Trayectoria de posición del eslabón.

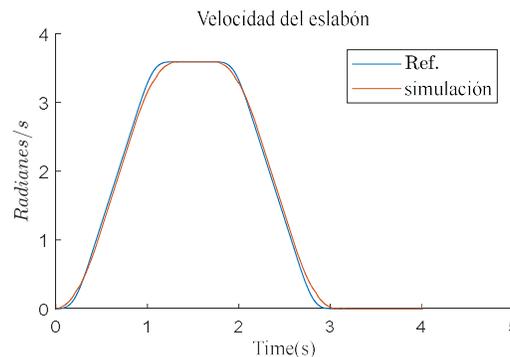


Figura 28. Trayectoria de velocidad del eslabón.

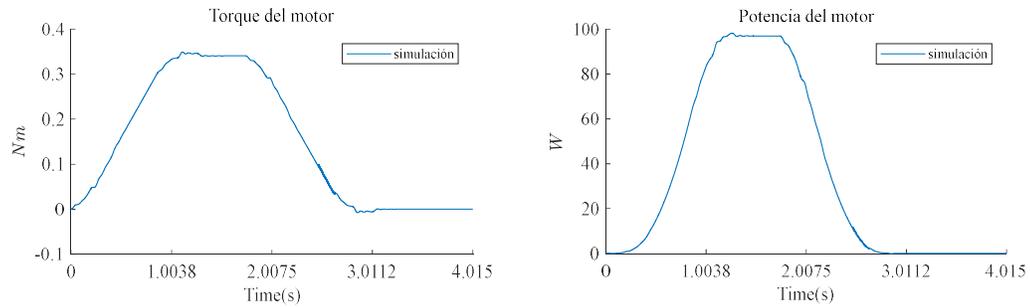


Figura 29. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 13. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	0.200	0.400	138.301
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico/Tiempo pico [Radianes]/s
C1	$1.296 \cdot 10^{-4}$	2.626	6.282/3.097

En definitiva, se necesita mayor ganancia proporcional para mejorar el control, lo que implica un aumento de consumo de energía del motor. Por tanto, aunque es un buen controlador, no mejora mucho la controlabilidad del sistema.

Aunque no se puede observar en simulación, este controlador implementado en la vida real, puede ser más robusto que los demás anteriores.

## 5.6. Control PD combinado con prealimentación del jerk de lado del eslabón con compensación de los estados

Para el control PD combinado con prealimentación del jerk del eslabón y compensación de los estados con valores de referencia, la ley de control está compuesta de un término proporcional al error de posición del motor visto del lado del eslabón, la derivada de velocidad del motor visto del lado del eslabón, la prealimentación de la derivada jerk, jerk, velocidad y aceleración de posición del eslabón como compensación de estados.

tenemos que la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p \left( q_{ref} - \frac{\theta}{N} \right) - K_v \left( \frac{\dot{\theta}}{N} \right) + \frac{(K(J_m + J_e) + (Bb_e + Bb_m + b_e b_m))\ddot{q} + (J_m(B + b_e) + J_e(B + b_m))\dot{q} + N J_e J_m \widehat{q}_{ref}^4}{K_a K_m K} + \frac{(b_e + b_m)\dot{q}}{K_a K_m}$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional y derivativa respectivamente, las demás son retroalimentaciones de los estados.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la tabla, la cual se presenta a continuación.

Tabla 14. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	10	1
C3	10	100

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

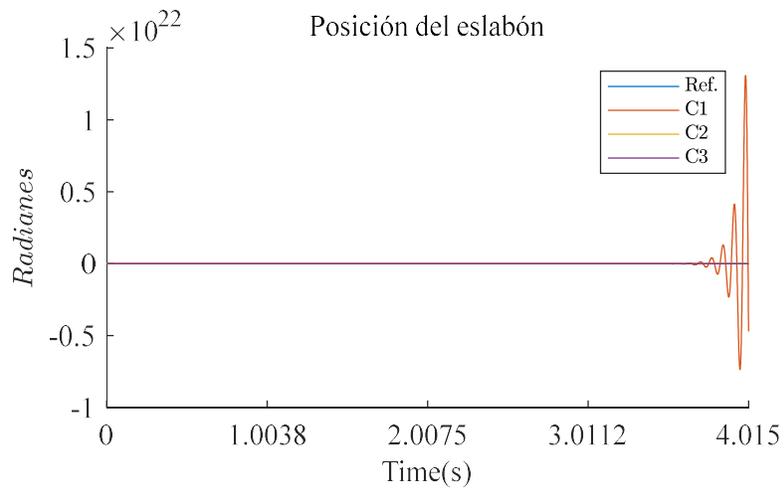


Figura 30. Trayectoria de posición del eslabón.

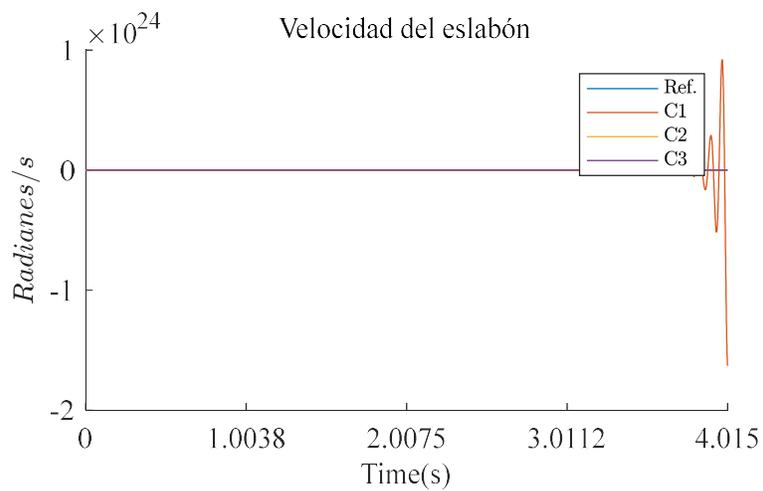


Figura 31. Trayectoria de velocidad del eslabón.

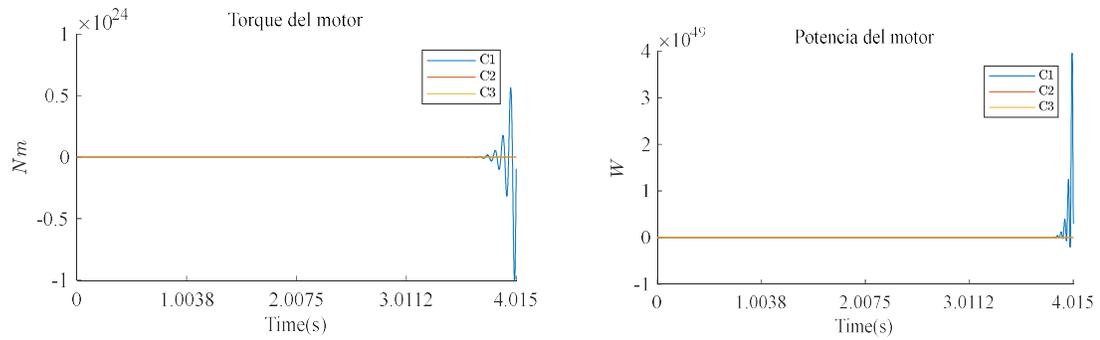


Figura 32. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Como se puede observar, al realimentar las variables de velocidad, aceleración, jerk y snap del lado del eslabón, resulta que, a diferencia de realimentar las mismas variables, pero con los valores de referencia, el controlador no es estable.

Tabla 15. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	$1.092 \cdot 10^{44}$	$1.112 \cdot 10^{48}$	$9.190 \cdot 10^{47}$
C2	1623.400	388.500	0.126
C3	4.630	6.970	29.963
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	$2.081 \cdot 10^{23}$	Ninguno	$1.170 \cdot 10^{23} - 3.996$
C2	0	Ninguno	1.386 – 4.015
C3	0.0817	2.704	6.287 – 3.989

Para que pueda estabilizarse, se necesita aumentar las ganancias, lo que produce un aumento en la acción de control que requiere para mantener la trayectoria, es decir, se aumenta la energía de consumo.

Por otro lado, las ganancias no pueden ser demasiado altas, ya que los sistemas electrónicos de control en la vida real, tienen límites físicos, los cuales limitan la acción de control ejercida al sistema, así como también sus parámetros.

A continuación, mostraremos un ejemplo correspondientes a la sintonización del controlador con  $K_p = 500$  y  $K_v = 1$

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

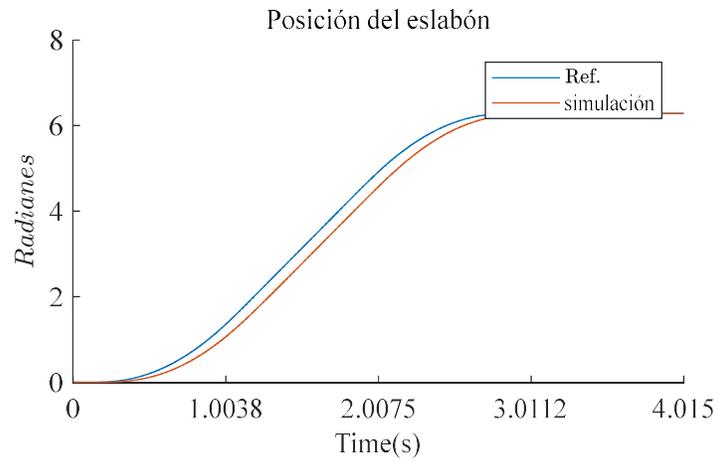


Figura 33. Trayectoria de posición del eslabón.

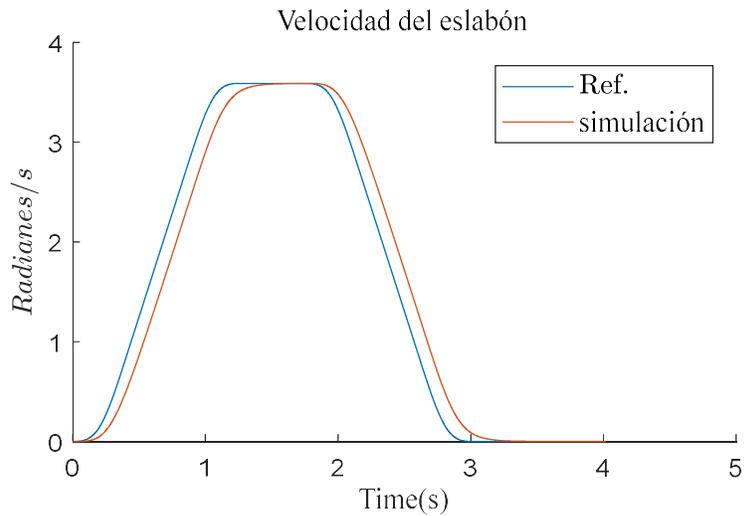


Figura 34. Trayectoria de velocidad del eslabón.

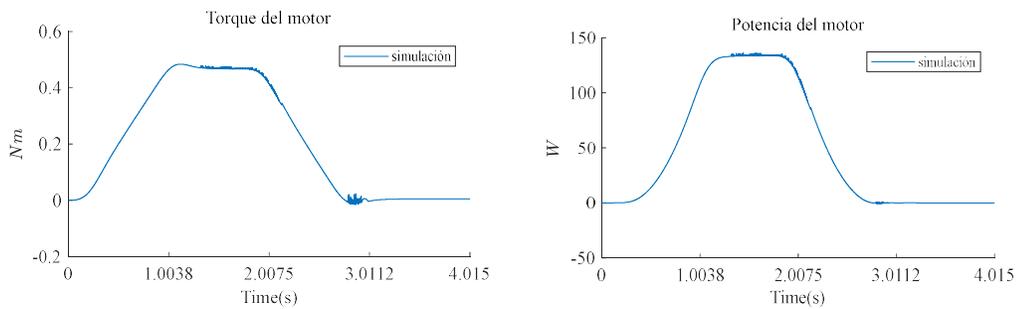


Figura 35. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 16. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	4.600	6.200	191.42
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico/Tiempo pico [Radianes]/s
C1	$5.633 \cdot 10^{-6}$	2.704	6.282/3.965

A simple vista se logra mejorar los resultados, pero evidentemente, se lo pudo gracias al aumento de las ganancias del sistema. En conclusión, aunque esta ley de control logre solucionar el problema de seguimiento de trayectoria y no se produzcan oscilaciones debido a la elasticidad de la articulación, se necesita mucha energía para lograrlo.

### 5.7. Controlador combinado con realimentación la velocidad del lado del motor

Ahora, construiremos un control PD utilizando realimentación de la velocidad del motor, la ley de control está compuesta, así como el anterior, un término proporcional al error de posición del eslabón y la derivada de la posición del motor. Con lo que, la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p(q_{ref} - q) - K_v\left(\frac{\dot{\theta}}{N}\right)$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional, y derivativa respectivamente.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la tabla, la cual se presenta a continuación.

Tabla 17. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	1	100
C3	100	100

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

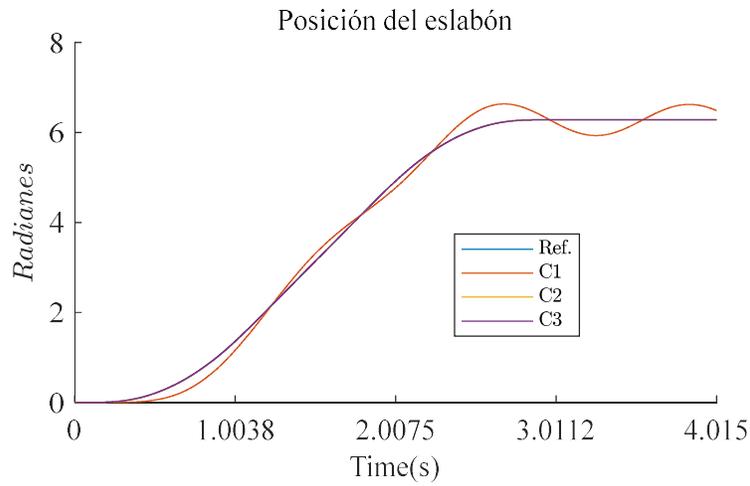


Figura 36. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

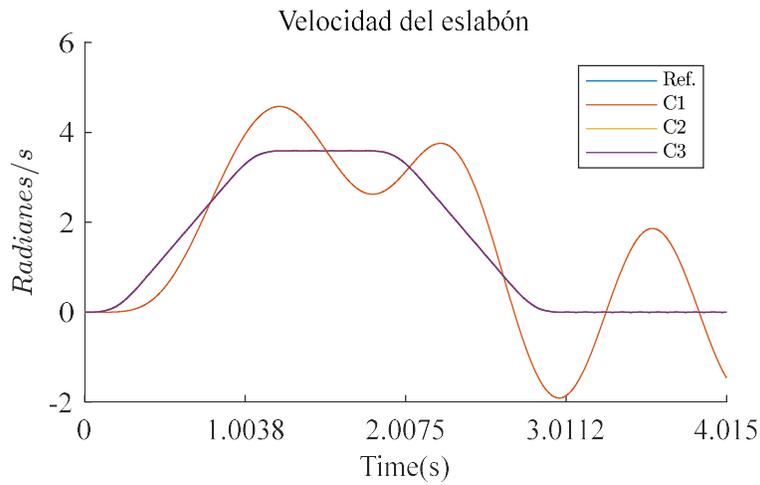


Figura 37. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias.

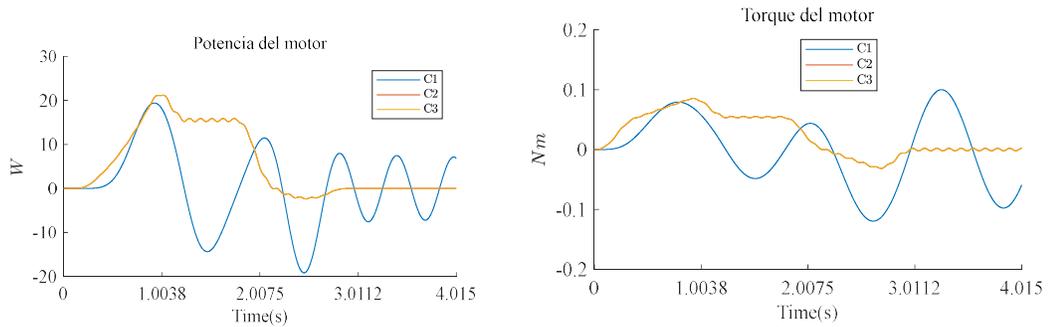


Figura 38. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Como podemos observar, el sistema es estable a la acción de control; como se ve la acción de control C3 y C2, tiene un mejor seguimiento de trayectoria que C1. Por otro lado, si aumentamos la acción derivativa, se amortigua la respuesta del sistema, como se puede

observar en la transición desde C1 a C2. Entre C2 Y C3, no existe mucha diferencia que se pueda apreciar a simple vista.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 18. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	4.451	92.420	2.646
C2	$2.085 \cdot 10^{-4}$	0.001	22.501
C3	0.012	1.111	3.364
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	5.6175	<i>Ninguno</i>	6.635 – 2.686
C2	0.001	2.580	6.282 – 3.046
C3	0.176	2.574	6.293 – 3.164

Ahora que tenemos algunos detalles de la respuesta de cada modificación en la ganancia del controlador, se puede observar que entre C2 y C3 hay una diferencia en todos los parámetros, ya que C2 tiene mejor respuesta que C3, con lo que podemos concluir que, para esta ley de control, al aumentar la ganancia derivativa, aumenta el amortiguamiento de la respuesta, con lo que, disminuye el seguimiento de trayectoria.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se observan en la tabla, la cual se presenta a continuación.

Tabla 19. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	10	1
C3	10	100

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador son  $K_p = 10$  y  $K_v = 1$ , estos valores fueron determinados de manera analítica y no constará su deducción en este trabajo.

Ahora solo analizaremos la mejor respuesta posible y ese es el caso cuando  $K_p = 100$  y  $K_v = 1$ . A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

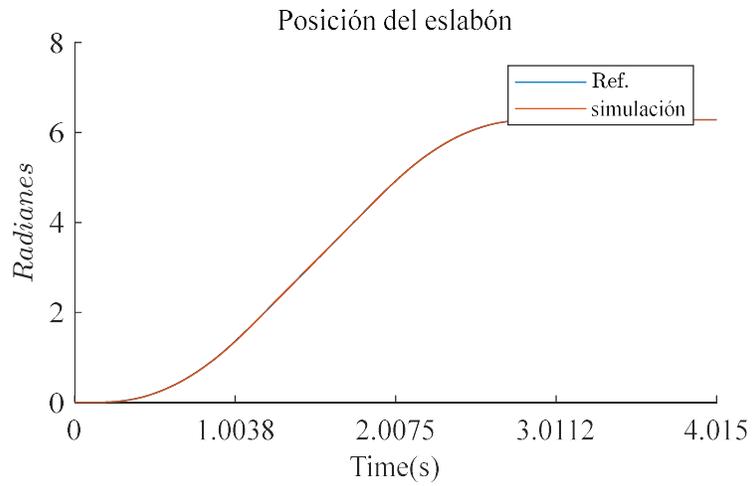


Figura 39. Trayectoria de posición del eslabón.

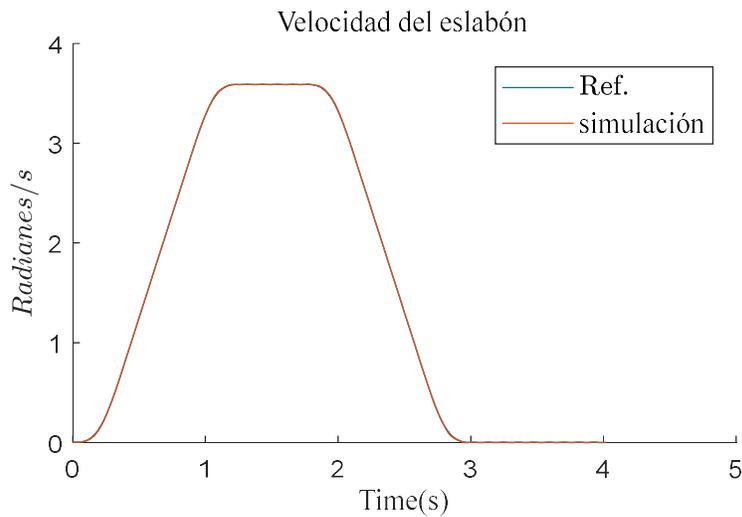


Figura 40. Trayectoria de velocidad del eslabón.

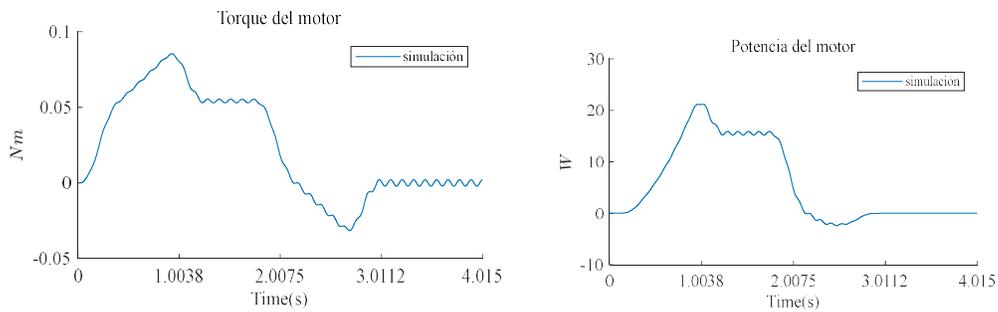


Figura 41. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 20. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	$2.085 \cdot 10^{-4}$	0.001	22.501
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico/Tiempo pico [Radianes]/s
C1	0.001	2.580	6.282/3.046

En conclusión, se puede decir que el control estabiliza el sistema y presenta un buen seguimiento de trayectoria, aunque su consumo de energía no es tan elevado, no podemos decir que haya un ahorro del mismo. Así mismo, la acción de control logra alcanzar la posición final en el tiempo establecido en la trayectoria de referencia.

### 5.8. Control PD combinado con realimentación de la aceleración del lado del motor

Ahora, construiremos un control utilizando realimentación de la aceleración del motor, la ley de control está compuesta, así como el anterior, un término proporcional al error de posición del eslabón y la derivada de la  $v$  del motor. Con lo que, la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p (q_{ref} - q) - K_v \left( \frac{\dot{\theta}}{N} \right)$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional, y derivativa respectivamente.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la tabla, la cual se presenta a continuación.

Tabla 21. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	10	1
C3	10	100

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

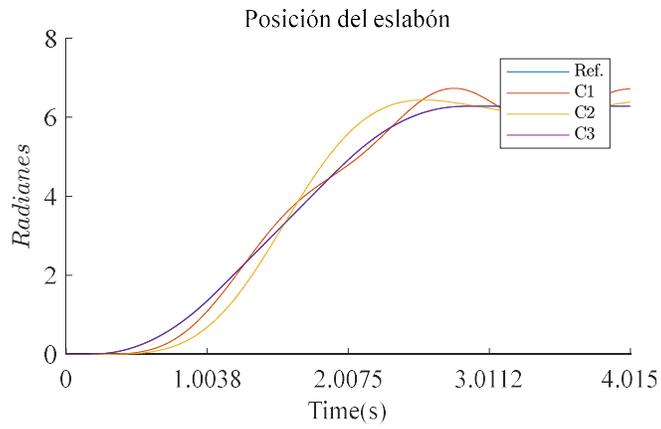


Figura 42. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias

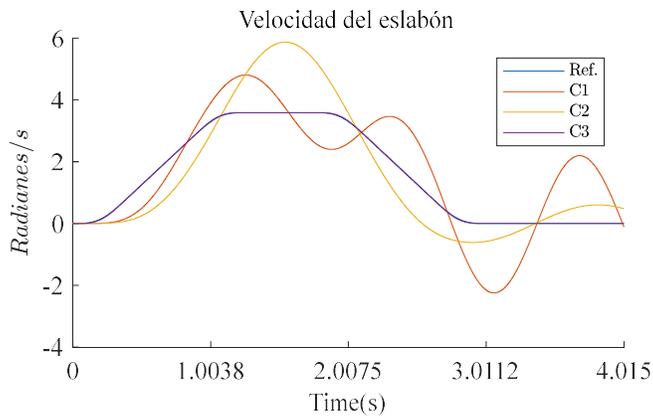


Figura 43. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias

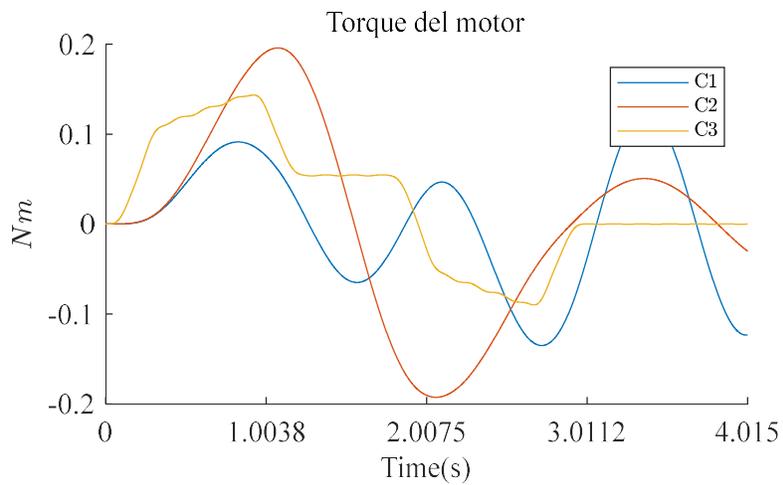


Figura 44. Torque del motor.

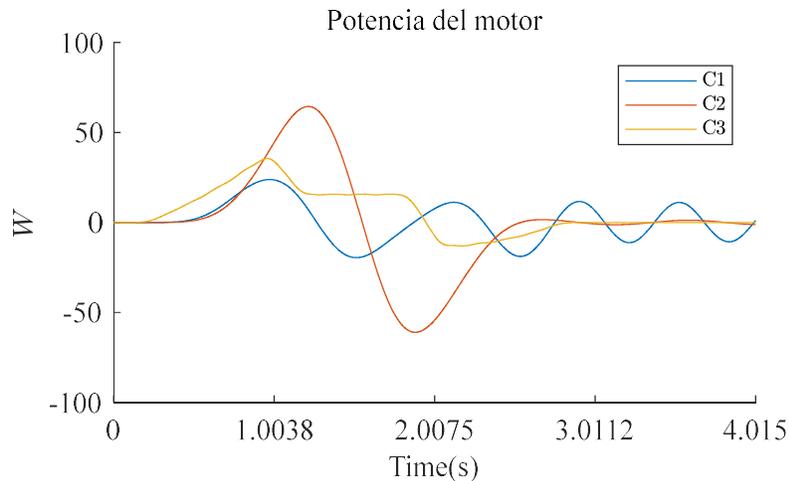


Figura 45. Potencia del motor.

En esta ocasión la inclusión de la aceleración del lado del motor, tiene el mismo efecto de amortiguamiento que la velocidad del sistema, con la diferencia que el aumento de la ganancia de la aceleración representa un incremento en la inercia del motor, lo que hace que frene al motor en su movimiento. Esto posibilita que, a mayor ganancia proporcional, menor sobre oscilación tendrá la respuesta del sistema.

Tabla 22. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	6.072	123.097	1.896
C2	13.911	96.056	2.265
C3	$6.122 \cdot 10^{-4}$	0.004	22.552
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	7.161	Ninguno	6.7319 – 2.759
C2	2.471	3.596	6.437 – 2.545
C3	$5.225 \cdot 10^{-5}$	2.578	6.282 – 3.091

Una vez revisado los resultados de las simulaciones, podemos corroborar que el aumento de la ganancia derivativa logra un mejor ajuste en el control para el seguimiento de trayectoria. También se evidencia que con este control no se puede dar un ahorro de energía, ya que igual que los anteriores, tienen a aumentar la acción de control al aumentar la ganancia del control.

En conclusión, se puede decir que existe la posibilidad de utilizar esta ley de control, para robots con articulaciones elásticas, ya que controla el seguimiento de trayectoria y que convenientemente la realimentación de la aceleración, disminuye las oscilaciones producidas por la elasticidad.

Para una mejor visión, presentaremos los valores correspondientes a la sintonización del controlador que más se ajustan al modelo y estos son  $K_p = 100$  y  $K_v = 10$ . A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

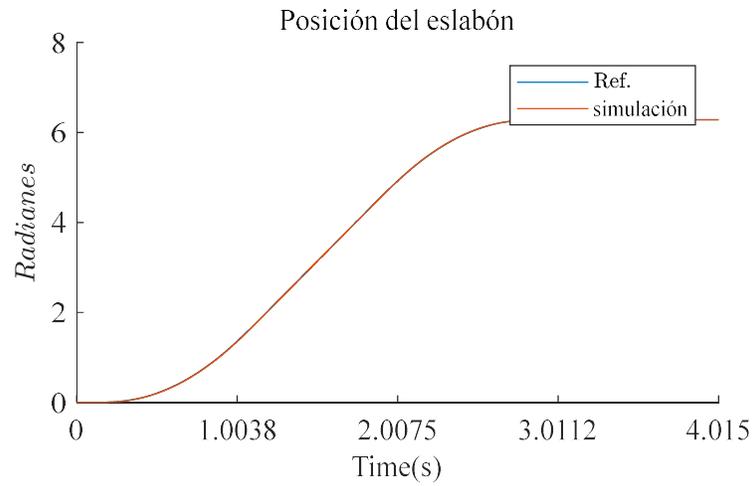


Figura 46. Trayectoria de posición del eslabón.

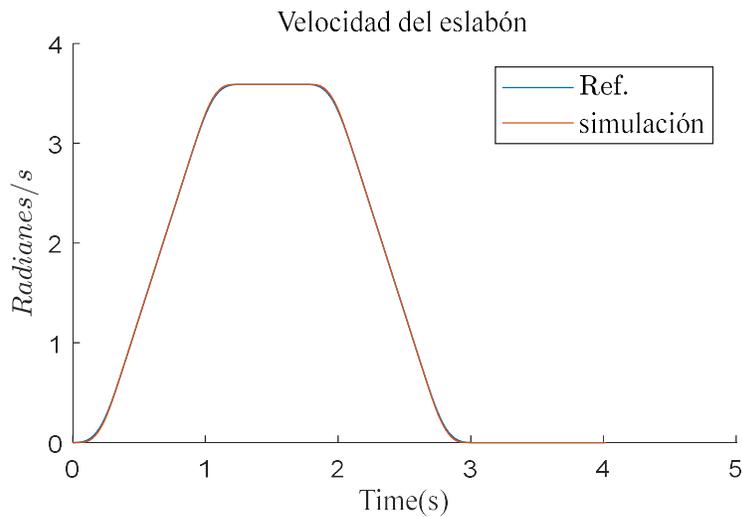


Figura 47. Trayectoria de velocidad del eslabón.

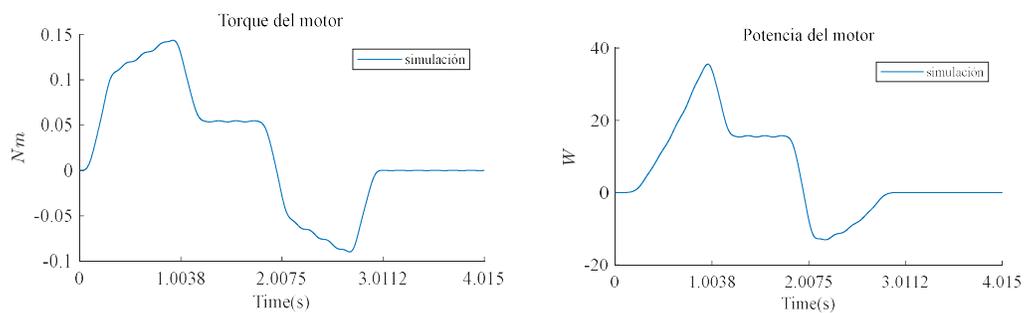


Figura 48. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Por otro lado, los errores de la trayectoria de posición y la información de la respuesta del sistema fueron las siguientes:

Tabla 23. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	$6.122 \cdot 10^{-4}$	0.004	22.552
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] - s
C1	$5.225 \cdot 10^{-5}$	2.578	6.282 - 3.091

En conclusión, se puede implementar este controlador para un robot con articulación elástica.

### 5.9. Control PD combinado con realimentación de la aceleración del lado del eslabón

Como la sección anterior, ahora construiremos un control PD utilizando realimentación de la aceleración del lado del eslabón, la ley de control está compuesta, así como el anterior, un término proporcional al error de posición del eslabón y la segunda derivada de la posición del eslabón. Con lo que, la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p(q_{ref} - q) - K_v(\dot{q})$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional, y derivativa respectivamente.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador son  $K_p = 10$  y  $K_v = 1$  y los resultados de las simulaciones se presentan a continuación.

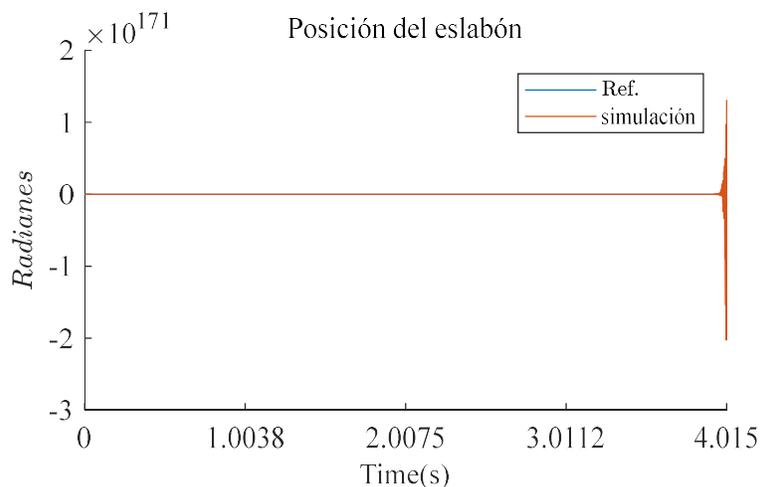


Figura 49. Trayectoria de posición del eslabón.

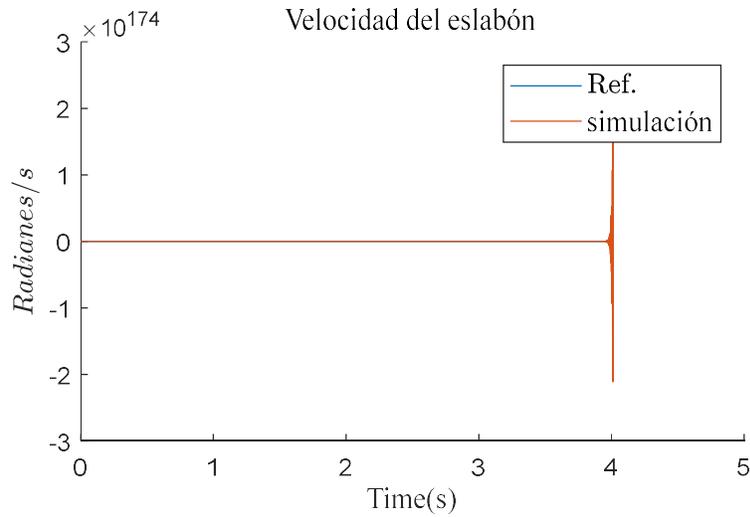


Figura 50. Trayectoria de velocidad del eslabón.

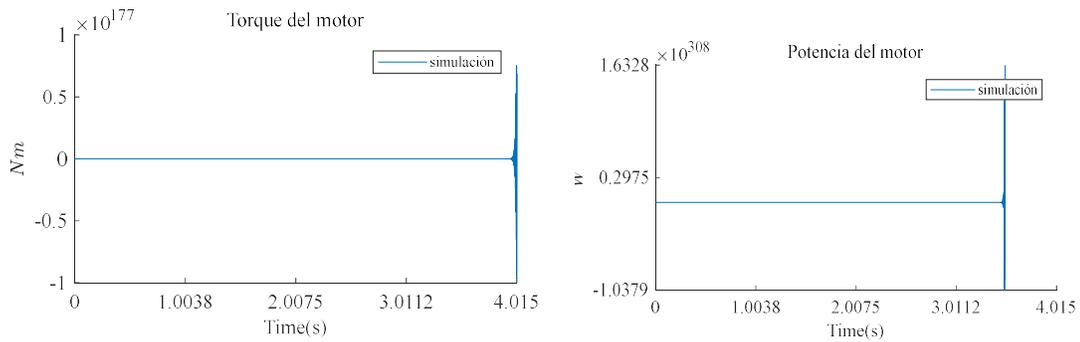


Figura 51. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

A simple vista, la ley de control implementada, no es estable para ningún valor de ganancias.

En conclusión, se puede decir que esta ley de control no es apta para un robot con articulación elástica. Se esperaba que al igual que la realimentación de la aceleración del lado del motor, aumente la inercia en este caso en el lado del elemento, pero no se cumple con esto. Aunque se tenga una respuesta negativa, se da a conocer para futuras observaciones y análisis.

### 5.10. Control PD combinado con realimentación de la jerk lado del eslabón

Ahora, para la construcción de un control PD utilizando realimentación del jerk del eslabón, la ley de control está compuesta por un término proporcional al error de posición del eslabón, y la sobreaceleración o jerk. Con lo que, la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p(q_{ref} - q) - K_v(\ddot{q})$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional, y derivativa respectivamente.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la tabla, la cual se presenta a continuación.

Tabla 24. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	1	100
C3	10	100

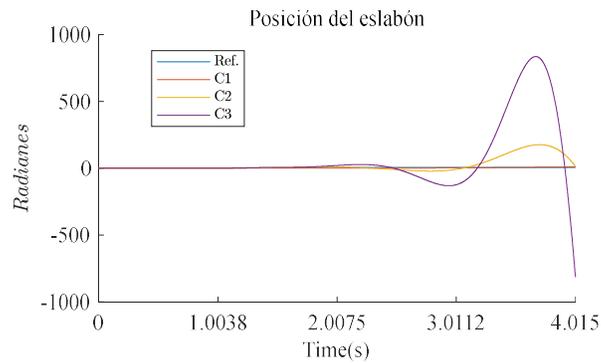


Figura 52. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

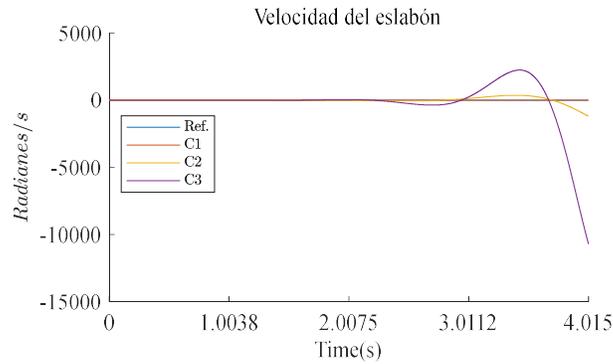


Figura 53. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias.

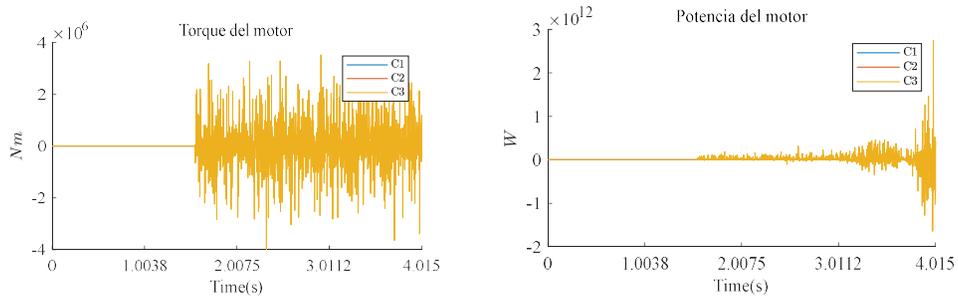


Figura 54. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Como se puede observar, la ley de control implementada no estable para cualquier ganancia. Se estudia el caso ya que, la sobreaceleración o jerk, puede suavizar el amortiguamiento de las posibles oscilaciones que presente el robot, por cambios bruscos de movimiento.

En conclusión, esta ley de control no es apta para nuestra aplicación y se descartaría su utilización en la forma presentada.

## 5.11. Control PD combinado con realimentación de la jerk lado del motor

Ahora, para la construcción de un control PD utilizando realimentación del jerk del eslabón, la ley de control está compuesta por un término proporcional al error de posición del eslabón, y la sobreaceleración o jerk. Con lo que, la ley de control será la siguiente:

$$u = K_p(q_{ref} - q) - K_v(\ddot{\theta})$$

Donde  $K_p$  y  $K_v$  deben ser definidas positivas y representan la ganancia proporcional, y derivativa respectivamente.

Los valores correspondientes a la sintonización del controlador se presentan en la tabla, la cual se presenta a continuación.

Tabla 25. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	1	100
C3	10	100

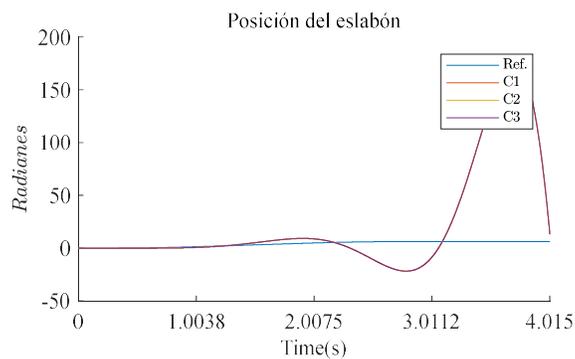


Figura 55. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes

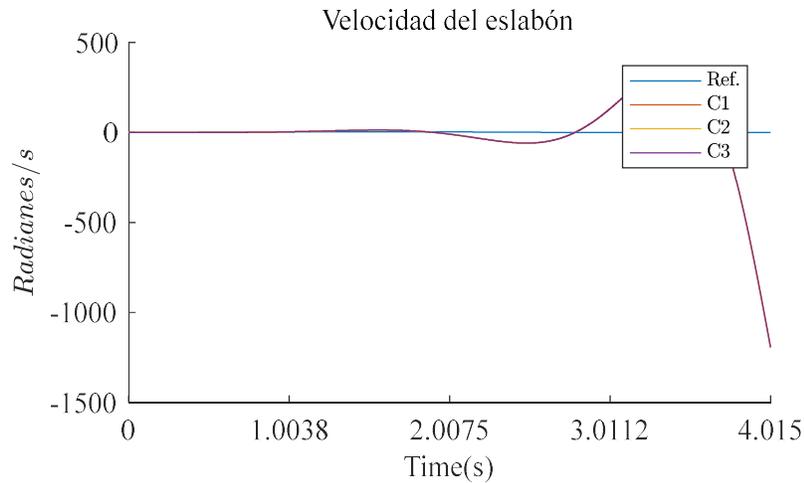


Figura 56. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres ganancias.

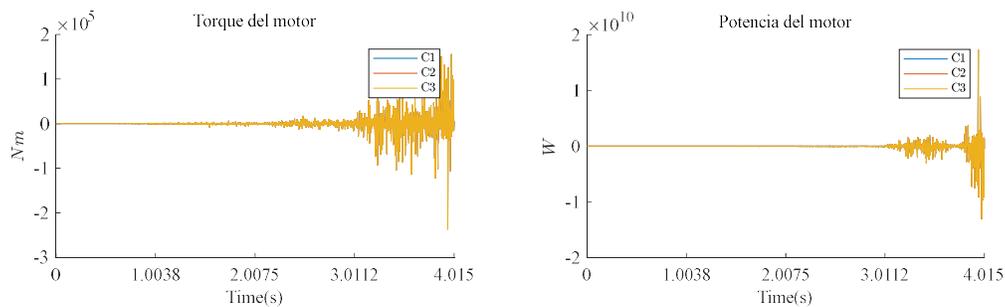


Figura 57. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor

Como se puede observar, la ley de control implementada para un robot con una articulación elástica no es estable para cualquier ganancia del controlador. Se tenía pensado como en el caso anterior que la sobreaceleración frene la acción de control del sistema, pero al ser una tercera derivada, se nota mucho que afecta a la sensibilidad del sistema.

En conclusión, esta ley de control no es apta para nuestra aplicación y se descartaría su utilización en la forma presentada.

## 5.12. Conclusiones

En conclusión, la ventaja del control por realimentación de los estados es que se puede utilizar toda la información que nos ofrece el modelo del modelo, para generar una ley de control, que establezca la respuesta del sistema. Adicionalmente resulta fácil de ser implementada y tiene un coste computacional muy bajo.

Evidentemente, realizamos varias combinaciones de los cuatro estados que tiene el robot con una articulación elástica, las cuales, algunas presentan una estabilidad en su respuesta y de manera completa, compensan en gran medida las oscilaciones producidas por el par de elasticidad, más que todo las del lado del motor como la posición, velocidad y aceleración, las cuales representan un aumento en los parámetros físicos del modelo y estos a su vez producen consecuencias en sus respuestas.

Uno de estos es la aceleración, que en el caso del lado de motor aumenta la rigidez del sistema, o como la velocidad aumenta el amortiguamiento; estas dos características son imprescindibles para modificar la respuesta al sistema. Cabe mencionar que el jerk amortigua la sobreaceleración cuando existe cambios bruscos de movimiento, como paradas imprevistas; aunque la trayectoria del perfil S de cuarto orden es suave, no se pudo notar su acción de control en el sistema.

También vemos que otras, como la realimentación de las variables del lado del eslabón, que intuitivamente se piensa que es la mejor opción para realizar el control, ya que es lado en el cual se está interesado, casi no aporta mucha controlabilidad en las leyes de control propuestas.

En cuanto al consumo energético la gran mayoría de las leyes de control implementadas, no tienen una directa de ahorro, ya que, al aumentar las ganancias, la acción de control aumenta, lo que produce aumento de potencia requerida por el actuador, que en este caso es el motor.

Por último, el inconveniente que tiene esta solución es que, la realimentación y las ganancias de las mismas, son sensibles a perturbaciones y errores de modelado, lo que provoca que, en gran medida, si se requiriera utilizar en la industria, solo se puede utilizar en tareas que no necesitan mucha precisión.

En cuanto al consumo energético la gran mayoría de las leyes de control implementadas, no tienen una directa de ahorro, ya que, al aumentar las ganancias, la acción de control aumenta, lo que produce aumento de potencia requerida por el actuador, que en este caso es el motor.

Por último, el inconveniente que tiene esta solución es que, la realimentación y las ganancias de las mismas, son sensibles a perturbaciones y errores de modelado, lo que provoca que, en gran medida, si se requiriera utilizar en la industria, solo se puede utilizar en tareas que no necesitan mucha precisión.

## 6. Control por el método de perturbación singular

A continuación, describiremos varios conceptos básicos para entender el desarrollo del control para un robot con una articulación elástica, utilizando el método de perturbación singular.

Para comenzar, la estructura del modelo por el método de perturbación singular, puede ser utilizado en sistemas donde exista la inclusión de un variable pequeña y positiva  $\varepsilon$ , la cual cambie el orden del sistema y produzca considerables perturbaciones a la respuesta del mismo; esta variable debe de estar multiplicada por lo menos, en alguna derivada de cualquier estados de sistema.

Por otro lado, la base fundamental del uso del método de perturbación singular, es que la respuesta causada por alguna perturbación, puede eliminarse si se analiza en dos escalas de tiempos diferentes. Esta metodología es una de las características principales de este método y será tratada en este capítulo con más detalle.

Los hechos expuestos motivan al estudio del modelado y control por el método de perturbación singular, el cual tiene el objetivo para nuestro problema, tratar de controlar la elasticidad del robot.

Para nuestro caso, se presenta un robot con una articulación sometida a una fuerza de elasticidad; esta fuerza, introduce deformaciones dinámicas de posición, produciendo un comportamiento oscilatorio en la respuesta, tal y como pudimos apreciar en el capítulo anterior.

Cabe comentar que, al utilizar el método de perturbaciones singulares, se espera que, en la escala de tiempo más lenta, afecte el control solo al modelo de un robot con articulación rígida; esto es algo beneficioso ya que, para el control de posición de este modelo, existe un vasto estudio ya desarrollado en la actualidad.

Por otro lado, para el control en la escala de tiempo más rápida, este capítulo se enfoca en presentar dos caminos para compensar la elasticidad en el modelo del robot. Cada una de ellas, tienen la función de controlar el sistema de capa límite, las cuales son aproximaciones de la respuesta del sistema y serán explicados en detalle en las secciones presentadas a continuación.

Con relación al modelado mostraremos una formulación del método de perturbaciones singulares de manera general y posterior aplicaremos el control a nuestro problema del robot con una articulación elástica.

## 6.1. Definición del método

Para comenzar consideremos la siguiente forma de expresar el modelo sistema dinámico no lineal invariante en el tiempo, tal como en [5].

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon) \quad (6.1)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon) \quad (6.2)$$

Donde (6.1), describe la planta no lineal con vector de estados  $x(t)$  y (6.2) definen las variables de comportamiento asociado al problema.

Una vez definidas las funciones  $f$  y  $g$ , estas deben ser continuas y diferenciables en sus argumentos  $f(t, x, z, \varepsilon)$ ,  $t \in [0, t_1]$ ,  $x \in D_x$ ,  $z \in D_z$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , donde  $D_x \subset R^n$  y  $D_z \subset R^m$ . A continuación, asumiremos que  $\varepsilon = 0$  en (6.1) y (6.2); lo que resulta que la dimensión del estado del sistema se reduce de  $n + m$  a  $n$  debido a que (6.2) cambia a la ecuación presentada a continuación.

$$0 = g(t, x, z, 0) \quad (6.3)$$

Ahora podemos afirmar que la forma de expresar el modelo del sistema (6.1) y (6.2) es correcta, si en (6.3) se puede determinar todas las  $k \geq 1$  raíces reales.

$$z = h_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (6.4)$$

Esta asunción asegura que podamos definir un modelo n-dimensional reducido el cual corresponderá a cada raíz de (6.4). Para obtener este modelo reducido, se debe sustituir (6.4) en (6.1), con la asunción de  $\varepsilon = 0$ , así obtener lo siguiente,

$$x = f(t, x, h_i(t, x), 0), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (6.5)$$

Este tipo de modelo es llamado un modelo de estado casi estacionario debido a  $z$ , cuya velocidad  $\dot{z} = g/\varepsilon$  puede ser grande cuando  $\varepsilon$  es pequeña y la función  $g \neq 0$ , y pudiera converger rápidamente a una de las raíces de (6.3), las cuales son el punto de equilibrio de (6.2).

Conviene subrayar que modelar un sistema por este método no es fácil, ya que siempre se debe de tener claro que parámetro se podría considerar pequeño; afortunadamente para algunos casos, el conocimiento del proceso y sus componentes nos pueden llevar a una buena asunción.

Adicionalmente se debe decir que (6.5) es conocida como el modelo lento.

## 6.2. Respuesta del modelo utilizando dos escalas de tiempo

Ahora hablaremos de las propiedades de tener dos escalas de tiempo en (6. 1) y (6. 2). Las perturbaciones singulares causan un comportamiento multi-tiempo en la dinámica del sistema, caracterizado por la presencia transitorios rápidos y lentos en la respuesta ante un estímulo externo.

La respuesta lenta es aproximada por (6. 5), mientras que ahora toca resolver la discrepancia entre la respuesta de este modelo reducido y el completo, al que llamaremos respuesta rápida.

Para comprender esto, vamos a considerar el problema de resolver la siguiente ecuación de estado, las cuales fueron tratadas anteriormente.

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon) \quad (6. 6)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), \quad z(t_0) = \eta(\varepsilon) \quad (6. 7)$$

Donde  $\xi(\varepsilon)$  y  $\eta(\varepsilon)$  dependen de la suavidad de  $\varepsilon$  y  $t_0 \in [0, t_1]$ . Ahora  $x(t, \varepsilon)$  y  $z(t, \varepsilon)$  serán tratados como la notación de la solución del problema completo para las ecuaciones (6. 6) y (6. 7).

Ahora al definir el problema para el modelo reducido (6. 5), solo podemos especificar  $N$  condiciones iniciales, ya que el modelo es de orden  $N$ . Naturalmente, nosotros podemos retener el estado inicial de  $x$  para obtener el problema reducido.

$$\dot{x} = f(t, x, h_i(t, x), 0), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon) = \xi_0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (6. 8)$$

La solución de la ecuación (6. 8), se la notará como  $\bar{x}(t)$ ; esto es debido a que la variable  $z$  ha sido excluida del modelo reducido y sustituida por su estado casi estacionario  $h(t, x)$ . La única información que se puede obtener de  $z$  después de resolver la ecuación (6. 8), es calcular  $\bar{z} = h(t, \bar{x}(t))$ .

Esta ecuación, describe el comportamiento del estado casi estacionario de  $z$  cuando  $x = \bar{x}$ . En contraste con la variable original  $z$  que comienza en  $t_0$  desde un  $\eta(\varepsilon)$  prescrito, el estado casi estacionario  $\bar{z}$  no es libre de comenzar desde un valor prescrito y puede haber una gran diferencia entre el valor inicial  $\bar{z}(t_0) = h(t_0, \xi_0)$  y el estado inicial prescrito  $\eta(\varepsilon)$ . Por lo tanto,  $\bar{z}(t)$  no puede ser una aproximación uniforme de  $z(t, \varepsilon)$ . Lo mejor que podemos esperar es que la estimación.

$$z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t) = O(\varepsilon)$$

Se mantendrá en un intervalo excluyendo  $t_0$ . Eso es para  $t \in [t_b, t_1]$  cuando  $t_b > t_0$ . Por otro lado, es razonable esperar la estimación.

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$$

Para mantener uniformemente para todo  $t \in [t_b, t_1]$ , ya que

$$x(t_0, \varepsilon) - \bar{x}(t_0) = \xi(\varepsilon) - \xi(0) = O(\varepsilon)$$

Si el error  $z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t)$  es  $O(\varepsilon)$  sobre  $[t_0, t_1]$ , entonces debe ser cierto que durante el intervalo inicial  $[t_0, t_1]$  (Capa limite), la variable  $z$  se aproxima a  $\bar{z}$ .

Recordemos que la velocidad de  $z$  puede ser alta porque  $\dot{z} = g/\varepsilon$ . De hecho, habiendo establecido  $\varepsilon = 0$  en (6. 2), hemos hecho que el transitorio de  $z$  sea instantáneo, siempre que  $g \neq 0$ .

De nuestro estudio previo de la estabilidad de los puntos de equilibrio, para que  $z$  converja a su estado casi estacionario  $\bar{z}$ , se deben cumplir ciertas condiciones que satisfagan la estabilidad. Tales condiciones serán el resultado del próximo análisis.

Para efectuar este análisis, es más conveniente realizar el cambio de variables.

$$y = z - h(t, x) \quad (6. 9)$$

Esto desplaza el estado casi estacionario de  $z$  al origen. En las nuevas variables  $(x, y)$ , el problema completo es

$$\dot{x} = f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), x(t_0) = \xi(\varepsilon) \quad (6. 10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{y} &= g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \\ y(t_0) &= \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (6. 11)$$

El estado casi estacionario de (6. 11) es ahora  $y = 0$ , que cuando esto es sustituido en (6. 10) resulta en el modelo reducido de la ecuación (6. 8). Para analizar (6. 11), observemos que  $\varepsilon \dot{y}$  puede permanecer finito incluso cuando  $\varepsilon$  tiende a cero y  $\dot{y}$  tiende al infinito. Por esta razón, es muy conveniente cambiar la escala de tiempo,

$$\varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \tau}, \text{ por lo tanto, } \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Usando  $\tau = 0$  como el valor inicial en  $t = t_0$ ; la nueva variable de tiempo  $t = (t - t_0)/\varepsilon$  se estira; es decir, si  $\varepsilon$  tiende a cero,  $\tau$  tiende al infinito incluso para un  $t$  finito, solo ligeramente mayor que  $t_0$  por una diferencia fija (independiente de  $\varepsilon$ ). En la escala de tiempo  $\tau$ , la ecuación (6. 11) está representada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \tau} &= g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \\ y(0) &= \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (6. 12)$$

Las variables  $t$  y  $x$  en (6. 12) variarán lentamente ya que, la escala de tiempo  $\tau$ , viene dado por

$$t = t_0 + \varepsilon \tau, x = x(t_0 + \varepsilon \tau, \varepsilon).$$

El ajuste  $\varepsilon = 0$  congela estas variables en  $t = t_0$  y  $x = \xi_0$ , y reduce a (6. 12) al sistema autónomo.

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = g(t_0, \xi_0, y + h(t_0, \xi_0), 0), \quad y(0) = \eta(0) - h(t_0, \xi_0) \quad (6. 13)$$

El cual tiene un equilibrio en  $y = 0$ . Si este punto de equilibrio es asintóticamente estable y sí  $y(0)$  pertenece a su región de atracción, es razonable esperar que la solución de (6. 13) alcance una vecindad de  $O(\xi)$  en el origen, durante el intervalo de la capa límite.

Más allá de este intervalo, necesitamos una propiedad de estabilidad que garantice que  $y(\tau)$  permanecerá cerca del origen, mientras que los parámetros  $(t, x)$ , los cuales varían lentamente, se alejarán de sus valores iniciales  $(t_0, \xi_0)$ . Para analizar esta situación, permitiremos que el parámetro congelado tome valores en la región del parámetro  $(t, x)$  [3] que varía lentamente. Supongamos que la solución  $\bar{x}(t)$  del problema reducido se define para  $t \in [0, t_1]$  y  $\bar{x}(t) \in D_x \subset R^n$ , para algún dominio  $D_x$ . reescribimos (6. 13) como

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = g(t, x, y + h(t, x), 0) \quad (6. 14)$$

Donde  $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$  se tratan como parámetros fijos. Nos referiremos a la ecuación 14 como el modelo de capa límite o el sistema de capa límite. A veces, también nos referiremos a (6. 13) como una evaluación de (6. 14), para un tiempo inicial y un estado inicial dado. La estabilidad crucial que necesitamos para (6. 14) es la estabilidad exponencial de su origen, uniformemente en los parámetros congelados, como se establece en la siguiente definición.

**Definición 1.** El punto de equilibrio  $y = 0$  del sistema de capa límite (6. 14) es exponencialmente estable y uniformemente en  $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$ , si existen las constantes positivas  $k, \gamma$  y  $\rho_0$ , de tal manera que las soluciones de (6. 14) satisfacen

$$\|y(\tau)\| \leq k \|y(0)\| \exp(-\gamma\tau), \forall \|y(0)\| < \rho_0, \forall (t, x) \in [0, t_1] \times D_x, \forall \tau \geq 0. \quad (6. 15)$$

Aparte de los casos triviales donde la solución del modelo de capa límite puede conocerse en forma cerrada, la verificación de la estabilidad exponencial del origen tendrá que hacerse ya sea por linealización o por medio del análisis de Lyapunov. Se puede demostrar que si la matriz jacobiana  $\partial g / \partial y$  satisface la condición de autovalores

$$Re \left[ \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial y}(t, x, h(t, x), 0) \right\} \right] < -c < 0, \forall (t, x) \in [0, t_1] \times D_x \quad (6. 16)$$

Luego existen las constantes  $k, \gamma$  y  $\rho_0$  para las cuales se cumple en (6. 15). Esto, por supuesto, es un resultado local. Es decir, la constante  $\rho_0$  podría ser muy pequeña. Alternativamente, se puede mostrar que si hay una función de Lyapunov  $V(t, x, y)$ , se satisface lo siguiente.

$$c_1 \|y\|^2 \leq V(t, x, y) \leq c_2 \|y\|^2 \quad (6. 17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} g(t, x, y + h(t, x), 0) \leq c_3 \|y\|^2 \quad (6. 18)$$

Para  $(t, x, y) \in [0, t_1] \times D_x \times D_y$ , donde  $D_y \subset R^m$  es un dominio que contiene el origen; la ecuación (6. 15) cumple con las siguientes estimaciones.

$$\rho_0 = \rho \sqrt{c_1/c_2}, k = \sqrt{c_2/c_1}, \gamma = c_3/2c_2. \quad (6. 19)$$

En qué  $B_\rho \subset D_y$ .

### 6.3. Teorema de Tikhonov

**Teorema 6.1** Considere el problema de perturbación singular de la ecuación (6. 6) y (6. 7) deja que  $z = h(t, x)$  sea una raíz aislada de (6. 3). Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones para todos [6] y [5].

$$(t \in [0, t_1], x \in D_x, z - h(t, x) \in D_y, 0 \in [0, \varepsilon_0])$$

Para algunos dominios  $D_x \subset R^n$  y  $D_y \subset R^m$ , en los que  $D_x$  es convexo y  $D_y$  contiene el origen.

- Las funciones  $f, g$ , sus primeras derivadas parciales con respecto a  $(x, y, \varepsilon)$ , y la primera derivada parcial de  $g$  con respecto a  $t$  son continuas. La función  $h(t, x)$  y la jacobiana  $[\partial g(t, x, z, 0)/\partial z]$  tienen las primeras derivadas parciales continuas con respecto a sus argumentos. Los datos iniciales  $\xi(\varepsilon)$  y  $\eta(\varepsilon)$  son funciones suaves de  $\varepsilon$ .
- La ecuación de problema reducido 8 tiene una solución única  $\bar{x}(t) \in S$ , para  $t \in [t_0, t_1]$ , donde  $S$  es un subconjunto compacto de  $D_x$ .
- El origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable de (6. 14) del modelo de capa límite, uniformemente en  $(t, x)$ . sea  $R_y \subset D_y$  la región de atracción de (6. 13) y  $\Omega_y$  sea un subconjunto compacto de  $R_y$ .

Entonces, existe una constante positiva  $\varepsilon^*$  tal que para todo  $\eta_0 - h(t_0, \xi_0) \in \Omega_y$  y  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , el problema de perturbación singular de (6. 6) y (6. 7) tiene una solución única  $x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)$  en  $[0, t_1]$  y

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon) \quad (6. 20)$$

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}(t/\varepsilon) = O(\varepsilon) \quad (6. 21)$$

Mantenga uniformemente para  $t \in [t_0, t_1]$ , donde  $\hat{y}(t/\varepsilon)$  es la solución de (6. 13) del modelo de capa límite. Además, dado cualquier  $t_b > t_0$ , hay  $\varepsilon^{**} \leq \varepsilon^*$  tal que

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) = O(\varepsilon) \quad (6. 22)$$

Se mantiene de forma uniforme durante  $t \in [t_0, t_1]$  cuando  $\varepsilon < \varepsilon^{**}$ .

Este teorema se conoce como el teorema de Tikhonov. Su demostración usa las propiedades de estabilidad del modelo de capa límite para mostrar que

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \exp\left[\frac{-\alpha(t - t_0)}{\varepsilon}\right] + \varepsilon\delta.$$

## 6.4. Variante del modelo para una respuesta lenta y rápida

En esta sección, damos una vista diferente al comportamiento de dos escalas de tiempo de las soluciones de (6. 1) y (6. 2) como trayectorias en  $R^{n+m}$ . Para simplificar la notación, consideramos que  $f$  y  $g$  son independientes de  $\varepsilon$ . por lo tanto, consideramos la siguiente forma más simple de la ecuación del sistema singularmente perturbada (6. 1) y (6. 2).

$$\dot{x} = f(x, z) \tag{6. 23}$$

$$\varepsilon\dot{z} = g(x, z) \tag{6. 24}$$

Primero hacemos que  $z = h(x)$ , la cual debe ser una raíz aislada de  $0 = g(x, z)$  y supongamos que las suposiciones del **teorema 6.1** satisfacen para cada raíz de  $g$ . La ecuación  $z = h(x)$  describe una variedad n-dimensional en el espacio de estado dimensional  $n + m$  de  $(x, z)$ . Es una solución invariante para el sistema

$$\dot{x} = f(x, z) \tag{6. 25}$$

$$0 = g(x, z) \tag{6. 26}$$

Dado que una trayectoria de (6. 25) y (6. 26) que comienza en una solución de respuesta  $z = h(x)$  permanecerá en la solución para todo el tiempo futuro. El movimiento en esta solución es descrito por el modelo reducido

$$\dot{x} = f(x, h(x)) \tag{6. 27}$$

El **teorema 6.1** muestra que las trayectorias de (6. 23) y (6. 24), que comienzan en una vecindad  $O(\varepsilon)$  de  $z = h(x)$ , permanecerán dentro de una vecindad  $O(\varepsilon)$  de  $z = h(x)$ . Esto motiva la siguiente pregunta: ¿existe alguna respuesta análoga a la solución de respuesta invariante  $z = h(x)$  para  $\varepsilon > 0$  ?.

Resulta que, bajo las suposiciones del **teorema 6.1**, hay una solución de respuesta invariante cercano para (6. 23) y (6. 24) que se encuentra dentro de un vecindario  $O(\varepsilon)$  de  $z = h(x)$ . Seleccionamos la solución invariable para la ecuación (6. 23) y (6. 24) en la forma

$$z = H(x, \varepsilon) \tag{6. 28}$$

Donde  $H$  es una función suficientemente lisa (es decir, muchas veces continuamente derivable) de  $x$  y  $\varepsilon$ . la expresión (6. 28) define una variedad n-dimensional, depende de

$\varepsilon$ , en el espacio de estado dimensional  $n + m$  de  $x, z$ . para que  $z = h(x)$  sea una solución de respuesta invariable de la ecuación (6. 23) y (6. 24), debe ser cierto que,

$$z(0, \varepsilon) - H(x(0, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \rightarrow z(t, \varepsilon) - H(x(t, \varepsilon), \varepsilon) = 0, \forall t \in J \subset [0, \infty).$$

Donde  $J$  es cualquier intervalo sobre el cual existe la solución  $[x(t, \varepsilon), \varepsilon]$ . Diferenciando ambos lados de (6. 28) con respecto a  $t$ , multiplicándolo por  $\varepsilon$ , y sustituyendo por  $\dot{x}$ ,  $\varepsilon \dot{z}$  y  $z$  de la ecuación (6. 23), (6. 24) y (6. 28) respectivamente, obtenemos la condición múltiple,

$$0 = g(x, H(x, \varepsilon)) - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x} f(x, H(x, \varepsilon)). \quad (6. 29)$$

$H(x, \varepsilon)$  debe satisfacer para todo  $x$  en la región de interés y todo  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ . en  $\varepsilon = 0$ , la ecuación diferencial parcial (6. 29) degenera en,

$$0 = g(x, H(x, 0)).$$

Lo que muestra que  $H = (x, \varepsilon)$ . ya que  $0 = g(x, z)$  puede tener más de una raíz aislada  $z = h(x)$ , podemos buscar una solución invariante para la ecuación (6. 23) y (6. 24) en la vecindad de cada raíz. Se puede demostrar que existe  $\varepsilon^* > 0$  y una función  $H(x, \varepsilon)$  que satisface la condición múltiple para todo  $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$  y,

$$H(x, \varepsilon) - h(x) = O(\varepsilon).$$

Para acotado  $x$ . la solución invariante  $z = H(x, \varepsilon)$  se llama una solución lenta para (6. 23) y (6. 24). Para cada solución lenta, corresponde un modelo lento.

$$\dot{x} = f(x, H(x, \varepsilon))$$

Que describe exactamente el movimiento en esa variedad.

En la mayoría de los casos, no podemos resolver la condición múltiple (6. 29) exactamente, pero podemos aproximar  $H(x, \varepsilon)$  arbitrariamente de cerca como una serie Taylor en  $\varepsilon = 0$ . El procedimiento de aproximación comienza sustituyendo a (6. 29) por una serie Taylor para  $H(x, \varepsilon)$ ,

$$H(x, \varepsilon) = H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \dots$$

Calculando  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$  y así sucesivamente, por términos de ecuación de potencias similares de  $\varepsilon$ . esto requiere que las funciones  $f$  y  $g$  sean continuamente diferenciables en sus argumentos una cantidad de veces suficiente. Está claro que  $H_0(x) = H(x, 0) = h(x)$ . La ecuación para  $H_1(x)$  es

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, h(x)) H_1(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x, h(x))$$

Y tiene una solución única si el  $\partial g / \partial z$  de jacobiano en  $z = h(x)$  es no singular. La no singularidad del jacobiano está implícita en la condición de valor propio.

Similar a  $H_1$ , las ecuaciones para términos de orden superior serán lineales y solucionables si el jacobiano  $\partial g/\partial z$  es no singular. Para introducir la noción de una variedad rápida, examinamos la ecuación (6. 23) y (6. 24) en la escala de tiempo  $t = t / \varepsilon$ . En  $\varepsilon = 0$ , mientras  $z(\tau)$  evoluciona de acuerdo a,

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = g(x(0), z).$$

Acercándose al punto de equilibrio  $z = h(x(0))$ ; este movimiento describe las trayectorias  $(x, z)$  en  $R^{n+m}$ , que, para cada  $x(0)$  dada, se encuentran en una solución rápida  $F_x$  definida por  $x = x(0) = \text{constante}$  y desciende rápidamente a la solución  $z = h(x)$ . para  $\varepsilon$  mayor que cero, pero pequeño, las soluciones rápidas son foliaciones de soluciones que se acercan rápidamente a la variedad lenta.

## 6.5. Aplicación del método de perturbación singular al modelo del robot

Ahora, para modelar el robot, asumiremos que está compuesto solo por una articulación elástica; utilizaremos las ecuaciones (2. 8) y (2. 9), que fueron descritas para el modelo dinámico del robot. Cabe notar que todas las definiciones de cada variable se explican en el capítulo 2.

Para comenzar, recordaremos las ecuaciones (2. 8) y (2. 9), las cuales son

$$J_e \ddot{q} + b_e \dot{q} + K \left( q - \frac{\theta}{N} \right) + B \left( \dot{q} - \frac{\dot{\theta}}{N} \right) + MgL \text{sen}(q) = 0 \quad (6. 30)$$

$$J_m \ddot{\theta} + b_m \dot{\theta} + \frac{K}{N} \left( \frac{\theta}{N} - q \right) + \frac{B}{N} \left( \frac{\dot{\theta}}{N} - \dot{q} \right) = K_a K_m T_m \quad (6. 31)$$

A continuación, como fue descrito en la sección anterior, la constante que debemos seleccionar de  $\varepsilon$ , debe ser pequeña y positiva y por lo menos, tiene que estar multiplicada por la derivada de una variable del modelo; por lo que, es evidente que seleccionaremos a la constante de rigidez ( $K$ ) para nuestro caso, ya que es nuestro objetivo de estudio [7].

Si identificamos  $K$ , lo que se puede decir es que siempre, presenta un valor muy grande y finito, por lo que podemos definir a  $\varepsilon$  como,

$$\varepsilon = 1/K \quad (6. 32)$$

Una vez definido  $\varepsilon$ , ahora debemos definir  $z$ ; por conveniencia,  $z$  la definiremos como la fuerza elástica de la articulación y  $T_m$  la acción de control del sistema . En consecuencia, tomaremos a  $T_m$  y  $z$  como,

$$z = K \left( q - \frac{\theta}{N} \right); T_m = K_{am} u; K_{am} = K_a K_m . \quad (6. 33)$$

Una vez definidas estas variables, procedemos a reemplazar (6. 33) en (6. 30) y (6. 31).

$$\ddot{q} + \frac{b_e}{J_e} \dot{q} + \frac{z}{J_e} + \frac{B\varepsilon}{J_e} \dot{z} + \frac{MgL \text{sen}(q)}{J_e} = 0 \quad (6. 34)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{b_m}{J_m} \dot{\theta} - \frac{1}{J_m N} z + \frac{B\varepsilon}{J_m N} \dot{z} = \frac{K_{am} u}{J_m} \quad (6.35)$$

Dividiendo (6.35) por  $-N$  y sumándolo a (6.34) se obtiene,

$$\varepsilon \ddot{z} - \frac{b_m}{J_m N} \dot{\theta} + \frac{b_e}{J_e} \dot{q} + \frac{z}{J_m N^2} + \frac{B\varepsilon}{J_m N^2} \dot{z} + \frac{K_a K_m u}{J_m N} + \frac{z}{J_e} + \frac{B\varepsilon}{J_e} \dot{z} + \frac{MgL \text{sen}(q)}{J_e} = 0$$

Donde,

$$\varepsilon \ddot{z} = -\varepsilon \dot{z} \left[ \frac{B}{J_m N^2} + \frac{B}{J_e} + \frac{b_m}{J_m} \right] - \dot{q} \left[ \frac{b_e}{J_e} - \frac{b_m}{J_m} \right] - z \left[ \frac{1}{J_m N^2} + \frac{1}{J_e} \right] - \frac{K_{am} u}{J_m N} - \frac{MgL \text{sen}(q)}{J_e}$$

Por último, obtenemos el modelo en términos de  $q$  y  $z$  es

$$\ddot{q} = a_1 \dot{q} + A_1 z + a_5 \varepsilon \dot{z} + a_2 \text{sen}(q) \quad (6.36)$$

$$\varepsilon \ddot{z} = a_3 \dot{q} + a_4 \varepsilon \dot{z} + A_2 z + B_2 u + a_2 \text{sen}(q) \quad (6.37)$$

Donde,

$$\begin{aligned} a_1 &= -\left[ \frac{b_e}{J_e} \right] & a_2 &= \left[ -\frac{MgL}{J_e} \right] & a_3 &= -\left[ \frac{b_e}{J_e} - \frac{b_m}{J_m} \right] \\ a_4 &= -\left[ \frac{B}{J_m N^2} + \frac{B}{J_e} + \frac{b_m}{J_m} \right] & a_5 &= -\left[ \frac{B}{J_e} \right] & A_1 &= -\left[ \frac{1}{J_e} \right] \\ A_2 &= -\left[ \frac{1}{J_m N^2} + \frac{1}{J_e} \right] & B_2 &= -\frac{K_{am}}{J_m N} \end{aligned}$$

La ecuación (6.36) y (6.37) serán consideradas como nuestro modelo de perturbación singular y desde este punto se hará el análisis del mismo para determinar la mejor opción de control.

## 6.6. Definición del control

Para comenzar, nos basaremos en los conceptos expresados en la **sección 6.2**, el cual considera que, el modelo, está caracterizado por dos transitorios, uno rápido y otro lento; para el transitorio lento, la acción debe ser elegida para el sistema estándar o llamado modelo de estado casi estable (6.5), el cual como se detallo debe tener una única solución; por conveniencia la acción de control estará definida en términos de la variable posición del eslabón.

Mientras para la respuesta rápida necesita un control diseñado para que compense la variable de perturbación y no afecte al modelo de estado casi estable.

Por tanto, nuestra acción de control, deberá estar expresada por una acción de control para la respuesta lenta y otra para la rápida, con lo cual tendremos lo siguiente.

$$u = u_{slow}(q, \dot{q}, t) + \epsilon u_{fast}(z, \dot{z}, q, \dot{q}, t) \quad (6.38)$$

Donde  $u_{fast}$  no contiene algún término de orden  $1/\epsilon$  o mayor y está diseñado para compensar la acción de la variable de perturbación;  $u_{slow}$  en términos generales está diseñado para compensar la corrección de la variable de control del modelo sin la variable de perturbación.

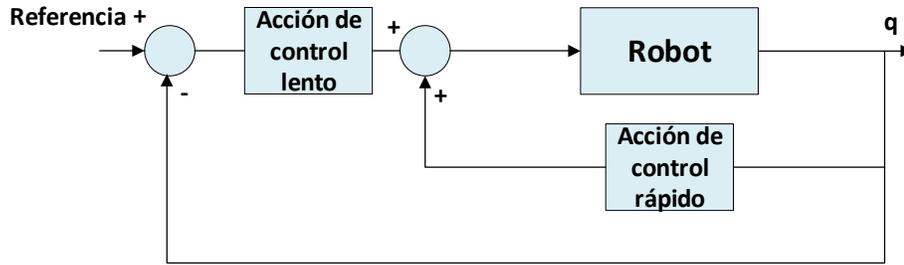


Figura 58. Diagrama de control por el método de perturbaciones singulares

A continuación, asumiremos que  $\epsilon = 0$  en (6.36) y (6.37), teniendo el siguiente resultado,

$$\ddot{q} = a_1 \dot{q} + A_1 z + a_2 \text{sen}(q) \quad (6.39)$$

$$0 = a_3 \dot{q} + A_2 z + B_2 u + a_2 \text{sen}(q) \quad (6.40)$$

Como resultado de despejar  $z$  en (6.40), tal como se expresa en (6.5), es decir definimos  $h(t, x)$ , obtenemos lo siguiente,

$$z = A_2^{-1} [-a_3 \dot{q} - A_2 z - B_2 u - a_2 \text{sen}(q)] = h(t, x) \quad (6.41)$$

Ahora procederemos a sustituir (6.41) en (6.39), obteniendo lo siguiente,

$$\ddot{q} = \varphi_0 \dot{q} + \varphi_1 \text{sen}(q) + B_0 u. \quad (6.42)$$

Donde,

$$\varphi_0 = a_1 - A_1 A_2^{-1} a_3 \quad \varphi_1 = a_2 - A_1 A_2^{-1} a_2 \quad B_0 = -[A_1 A_2^{-1} B_2]$$

La ecuación (6.42) será nuestro modelo reducido, modelo de estado estacionario o modelo lento. Como se puede observar, (6.42) presenta una característica muy importante, y es que es equivalente al modelo de un robot con articulación rígida, la cual no toma en consideración la fuerza de elasticidad en la articulación. Esta conclusión será muy importante ya que, nosotros podemos incluir al modelo lento cualquier control; para robots con articulaciones rígidas existe mucha información ya investigada.

Por otro lado, nos queda aún el problema de controlar la fuerza de elasticidad, la cual como detalla en las definiciones presentadas en este capítulo, debe de tener una acción de control mucho más rápida.

### 6.6.1. Control para la respuesta lenta

Con respecto a la respuesta lenta, habíamos establecido que la ecuación (6. 42), es equivalente al modelo de un robot con articulación rígida, por lo cual es muy conocido su comportamiento en presencia de diferentes tipos de controladores. Para nuestro caso, utilizaremos un control PD para regular la posición de la articulación.

Ahora para nuestro propósito, volveremos a enunciar la ecuación (6. 42) a continuación,

$$\ddot{q} = \varphi_0 \dot{q} + \varphi_1 \text{sen}(q) + B_0 u$$

El principal propósito del controlador es que la posición el eslabón  $q$ , siga fielmente la trayectoria  $q_{ref}$ , por lo que podemos decir que es necesario que el error de seguimiento de trayectoria sea cero, entonces podemos definir lo siguiente,

$$(\ddot{q}_{ref} - \ddot{q}) + K_v(\dot{q}_{ref} - \dot{q}) + K_p(q_{ref} - q) = 0 \quad (6. 43)$$

Despejando la acción de control se tiene lo siguiente,

$$u_{slow} = B_0^{-1}[\ddot{q} - \varphi_0 \dot{q} - \varphi_1 \text{sen}(q)] \quad (6. 44)$$

Donde tenemos que, para el seguimiento de trayectoria (6. 43), se tiene

$$\ddot{q} = \ddot{q}_{ref} + K_p(q_{ref} - q) + K_v(\dot{q}_{ref} - \dot{q}). \quad (6. 45)$$

Donde  $K_p$  es la acción proporcional,  $K_v$  la acción derivativa,  $\ddot{q}_{ref}$  es la trayectoria de referencia de la aceleración,  $q_{ref}$  es la trayectoria de referencia de posición y  $\dot{q}_{ref}$  es la trayectoria de referencia de velocidad. Ahora incluyendo (6. 45) en (6. 44) tenemos lo siguiente,

$$u_{slow} = B_0^{-1}[\ddot{q}_{ref} + K_p(q - q_{ref}) + K_v(\dot{q} - \dot{q}_{ref}) - \varphi_0 \dot{q} - \varphi_1 \text{sen}(q)] \quad (6. 46)$$

Se puede mencionar que se pudo haber utilizado cualquier otra estrategia de control para definir  $u_{slow}$ .

### 6.6.2. Primera variante de control para la respuesta rápida

Ahora necesitamos definir un procedimiento para compensar la respuesta rápida, para esto nos basaremos en la sección 6.2; para comenzar, anteriormente se obtuvo el modelo reducido (6. 42), el cual no toma en cuenta la variable  $z$ , ya que fue sustituida por (6. 41).

Es decir, la única información que tenemos de  $z$ , puede ser su propia solución en (6. 41), la cual es llamada  $\bar{z}$ ; pero, como se describe anteriormente, esta solución no se la puede

contemplar como una respuesta correcta. Lo que mejor se puede hacer es que se cumpla lo expresado en (6. 9), la cual asume que cumpliendo los requisitos del teorema de Tichonov, esta solución cumple con ser la solución a la respuesta rápida del modelo.

Primeramente, expresaremos a la acción de control en  $u$  en (6. 37) por (6. 38), obteniendo lo siguiente,

$$\varepsilon \ddot{z} = a_3 \dot{q} + a_4 \varepsilon \dot{z} + A_2 z + B_2 u_{slow} + B_2 u_{fast} + a_2 \text{sen}(q). \quad (6. 47)$$

Para el análisis, ahora debemos de realizar el cambio de variable detallado en (6. 9).

$$\varepsilon \ddot{y} = a_3 \dot{q} + a_4 \varepsilon (y + \dot{h}(t, x)) + A_2 (y + h(t, x)) + B_2 u_{slow} + B_2 u_{fast} + a_2 \text{sen}(q) \quad (6. 48)$$

Este cambio de variable y el ajuste de  $\varepsilon = 0$ , es con el propósito que la ecuación resultante nos mantenga en una región de respuesta limite, en el cual mantenga el sistema estable.

$$\varepsilon \ddot{y} = a_3 \dot{q} + A_2 (y + A_2^{-1} [-a_3 \dot{q} - A_2 z - B_2 u_{slow} - a_2 \text{sen}(q)]) + B_2 u_{slow} + B_2 u_{fast} + a_2 \text{sen}(q) \quad (6. 49)$$

Por último, utilizaremos el resultado del análisis descrito en la sección 6.2, para describir la ecuación como en (6. 14), obteniendo lo siguiente.

$$\varepsilon \ddot{y} = A_2 y + B_2 \varepsilon u_{fast} \quad (6. 50)$$

De acuerdo a la **definición 1**. La respuesta de (6. 50), debe ser exponencialmente estable e uniforme en toda su trayectoria. Para resolver esto, necesitamos definir un  $u_{fast}$ , que cumpla estas condiciones, por lo tanto por conveniencia lo definimos como,

$$u_{fast} = -K_f \dot{y} = -K_f \dot{z} \quad (6. 51)$$

Sustituyendo (6. 51) en (6. 50) se tiene lo siguiente,

$$\varepsilon \ddot{y} = A_2 y - B_2 \varepsilon K_f \dot{y}. \quad (6. 52)$$

Como se observa, (6. 52) y de acuerdo al teorema de Tychonov, la meta del diseño del controlador es obtener una ecuación exponencialmente estable y para la trayectoria, con anterioridad sabemos que la cursa en S de cuarto orden no posee saltos en su trayectoria, con lo cual cumple con lo descrito.

Por último, el control para la respuesta rápida quedara definido como,

$$u_{fast} = -K_f \left( \dot{q} - \frac{\dot{\theta}}{N} \right). \quad (6. 53)$$

Ahora que tenemos, toda la respuesta, nuestra acción de control quedaría así,

$$u = B_0^{-1}[\ddot{q}_{ref} + K_p(q_{ref} - q) + K_v(\dot{q}_{ref} - \dot{q}) - \varphi_0\dot{q} - \varphi_1\text{sen}(q)] - K_f\left(\dot{q} - \frac{\dot{\theta}}{N}\right) \quad (6.54)$$

### 6.6.3. Segunda variante del control para la respuesta rápida

En el análisis anterior, la parte del control lento se diseñó con la asunción de  $\varepsilon = 0$ , logrando obtener un resultado estable, dentro de una región aproximada a la solución del modelo [7].

Para darle una mayor complejidad, se puede ampliar la validez del control lento más allá de  $\varepsilon = 0$ . Para esto se puede expresar la acción de control como una expansión de una serie de Taylor, la cual como vimos en la sección 6.4 puede mantener la evolución del sistema dentro de una región estable.

Como hemos comentado, para dar otra perspectiva al método de perturbaciones singulares; a continuación, nos basaremos en los conceptos expresados en la sección 6.4, el cual aproxima la solución invariante  $z = h(x)$  como una serie de Taylor.

Primeramente, como utilizaremos para el modelo del robot una expresión definida en una serie de Taylor, se asumirá que nuestra acción de control, deberá estar expresada de la misma manera, con lo cual tendremos lo siguiente.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (6.55)$$

Ahora, utilizaremos el modelo descrito en (6.36) y (6.37) para proceder con nuestro análisis. El procedimiento de aproximación comienza sustituyendo en (6.36) una serie Taylor para  $H(x, \varepsilon)$ , definida de la siguiente forma,

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \quad (6.56)$$

Una vez reemplazado (6.56) en (6.36), se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \varepsilon(h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots) \\ = a_3 \dot{q} + a_4 \varepsilon(h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots) + A_2(h_0 + \varepsilon h_1 \\ + \varepsilon^2 h_2 + \dots) + a_2 \text{sen}(q) + B_2(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \end{aligned} \quad (6.57)$$

Ahora, para mejor comprensión clasificaremos a cada variable como potencia de  $\varepsilon$  [7].

$$\varepsilon^0: 0 = a_3 \dot{q} + a_2 \text{sen}(q) + B_2 u_0 + A_2 h_0 \quad (6.58)$$

$$\varepsilon^n: h_{n-1}'' = a_4 h_{n-1}' + A_2 h_n + B_2 u_n \quad (6.59)$$

La variable  $n$ , representa la potencia de  $\varepsilon$ . Una vez, clasificado cada miembro, se realiza una recursión para determinar cada elemento de (6.56).

$$h_0 = A_2^{-1}[-a_3 \dot{q} - B_2 u_0 - a_2 \text{sen}(q)] \quad (6.60)$$

$$h_n = A_2^{-1} [h_{n-1}'' - a_4 h_{n-1}' - B_2 u_n] \quad (6. 61)$$

Podemos observar que el resultado (6. 60) es equivalente a (6. 41), el cual era una validación del procedimiento que se detalla en la **sección 6.5**. A continuación se procedía a sustituir  $h$  como (6. 56) en (6. 39). Esta sustitución se la puede realizar hasta el grado de precisión deseado para  $\varepsilon$ .

$$\ddot{q} = a_1 \dot{q} + A_1 (h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots) + a_2 \text{sen}(q) \quad (6. 62)$$

Sustituyendo cada variable  $h$  de (6. 62) por (6. 60) y cada potencia de  $\varepsilon$  evaluado en la ecuación (6. 61), se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \ddot{q} = & (a_1 - A_1 A_2^{-1} a_1) \dot{q} + (a_2 - A_1 A_2^{-1} a_2) \text{sen}(q) - A_1 A_2^{-1} B_2 u_0 \\ & + \varepsilon A_1 A_2^{-1} [h_0'' - a_4 h_0' - B_2 u_1] + \dots \\ & + \varepsilon^n A_1 A_2^{-1} [h_{n-1}'' - a_4 h_{n-1}' - B_2 u_n] \end{aligned} \quad (6. 63)$$

Para mayor comodidad, los términos de potencias mayores a  $\varepsilon^2$ , se denominaran  $P(\varepsilon^{n \geq 2})$ . Ahora nos podemos dar cuenta que (6. 63) tiene algunos parámetros de (6. 42), por lo que podemos expresarlo de la siguiente forma.

$$\ddot{q} = \varphi_0 \dot{q} + \varphi_1 \text{sen}(q) + B_0 u_0 + \varepsilon A_1 A_2^{-1} [h_0'' - a_4 h_0' - B_2 u_1] + P(\varepsilon^{n \geq 2}) \quad (6. 64)$$

Nuevamente obtenemos un modelo reducido, en el cual podemos observar que podemos realizar una acción correctiva para cualquier orden de  $\varepsilon$ . Por otro lado, para el valor de  $u_0$  reutilizaremos la ecuación (6. 46) que previamente fue calculada, para determinar la acción de control procedente del resultado de obtener un modelo equivalente al robot con articulación rígida. Cabe recordar que la acción de control elegida para (6. 46), fue un control PD, el cual fue diseñado para la tarea de seguir una trayectoria de referencia [7].

$$u_0 = B_0^{-1} [\ddot{q}_{ref} + K_p (q_{ref} - q) + K_v (q_{ref}' - \dot{q}) - \varphi_0 \dot{q} - \varphi_1 \text{sen}(q)]$$

Ahora, debemos compensar la fuerza de elasticidad, para esto el control  $u_1$  esta diseñado para ser eliminado del termino de  $\varepsilon$ , de la siguiente manera,

$$u_1 = B_2^{-1} [h_0'' - a_4 h_0']. \quad (6. 65)$$

Como podemos observar (6. 65) debe de estar en función de las variables del modelo, por lo que a simple vista, debemos derivar a  $h_0$  que fue determinado en (6. 60). A continuación, se presenta un breve resumen de la acción de control determinada.

Tabla 26. Resumen del control por el método de perturbaciones singulares, cuando suponemos que  $\varepsilon > 0$ .

Modelo del sistema:	$\ddot{q} = a_1 \dot{q} + A_1 z + a_5 \varepsilon \dot{z} + a_2 \text{sen}(q)$ $\varepsilon \ddot{z} = a_3 \dot{q} + a_4 \varepsilon \dot{z} + A_2 z + B_2 u + a_2 \text{sen}(q)$
Asunciones:	$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$ $h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots$
Acción de control:	$u_0 = B_0^{-1} [\ddot{q}_{ref} + K_p (q - q_{ref}) + K_v (\dot{q} - \dot{q}_{ref}) - \varphi_0 \dot{q} - \varphi_1 \text{sen}(q)]$ $u_1 = B_2^{-1} [\ddot{h}_0 - a_4 \dot{h}_0]$ $h_0 = A_2^{-1} [-a_3 \dot{q} - B_2 u_0 - a_2 \text{sen}(q)]$

## 6.7. Resultados

En cuanto a los resultados obtenidos, para simplificar la comparación con los otros controladores, el modelo del robot de una articulación elástica se basará en las condiciones de modelado descritas en el capítulo 2 y, además, se utiliza el perfil S de cuarto orden, con el objetivo de verificar la capacidad del control para el seguimiento de la trayectoria. Por último, se incluye el efecto de la gravedad en el modelo del robot.

La acción de control, como fue descrito en un control lento y un control rápido, en el cual se ha descrito dos variantes; para ilustrar la importancia de cada controlador, primero comenzaremos por observar el comportamiento del controlador lento; luego la primera variante del control rápido y la unión de los dos, y por último analizaremos la segunda variante del control rápido.

El control de la respuesta lenta está compuesto de un término proporcional al error de posición, un término proporcional al error de velocidad, otro término proporcional a la velocidad y otro para comenzar la gravedad; todo esto del lado del eslabón. A continuación, se puede observar nuevamente el control.

$$u = B_0^{-1} [\ddot{q}_{ref} + K_p (q_{ref} - q) + K_v (q_{ref} - \dot{q}) - \varphi_0 \dot{q} - \varphi_1 \text{sen}(q)]$$

Ahora los valores correspondientes a la sintonización del controlador son  $K_p = 100$ ,  $K_v = 10$  y  $K_f = 0$ . A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

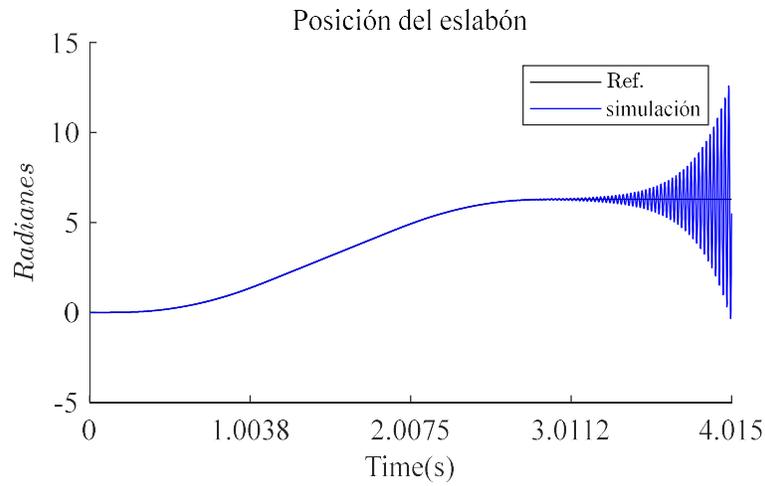


Figura 59. Resultados de la simulación de la posición del eslabón.

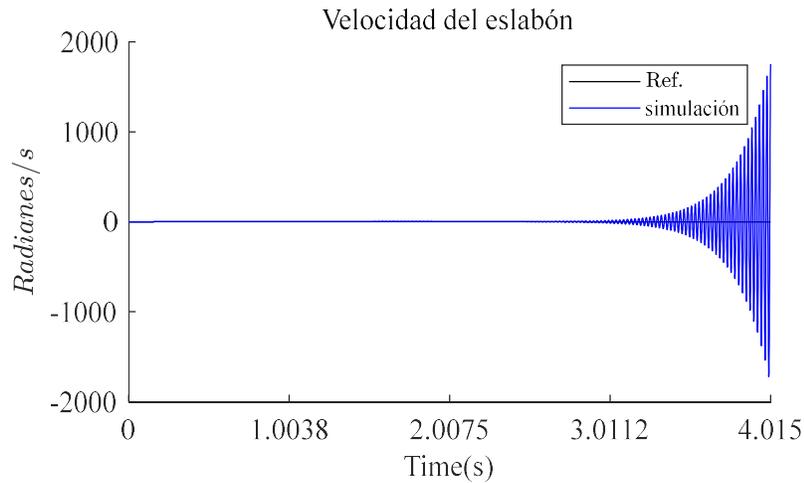


Figura 60. Resultados de la simulación de la velocidad del eslabón.

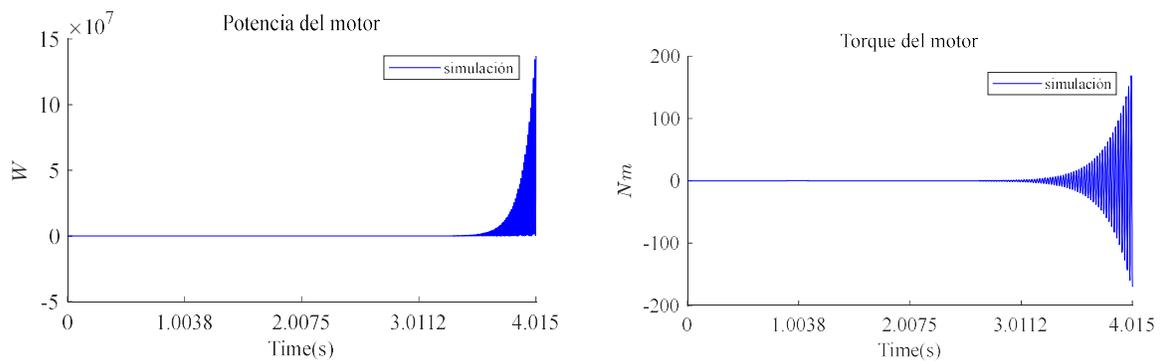


Figura 61. Resultados de la simulación de la potencia del motor en la figura de la izquierda y el torque del mismo a la derecha.

Como se puede observar, el control lento, el cual es un controlador PD, no estabiliza el sistema como ya lo habíamos deducido en el capítulo de realimentación de estados;

adicionalmente las dos ganancias de velocidad del eslabón y la compensación de la gravedad casi no presentan ninguna compensación, por lo que por sí solo no es un buen controlador.

Ahora se presenta las modificaciones del controlador PD para  $K_p = 10$ ,  $K_v = 100$  y  $K_f = 0$ .

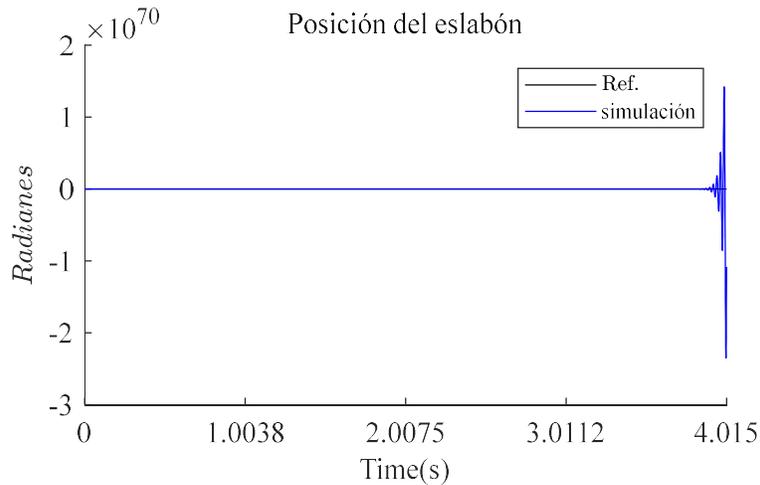


Figura 62. Resultados de la simulación de la posición del eslabón.

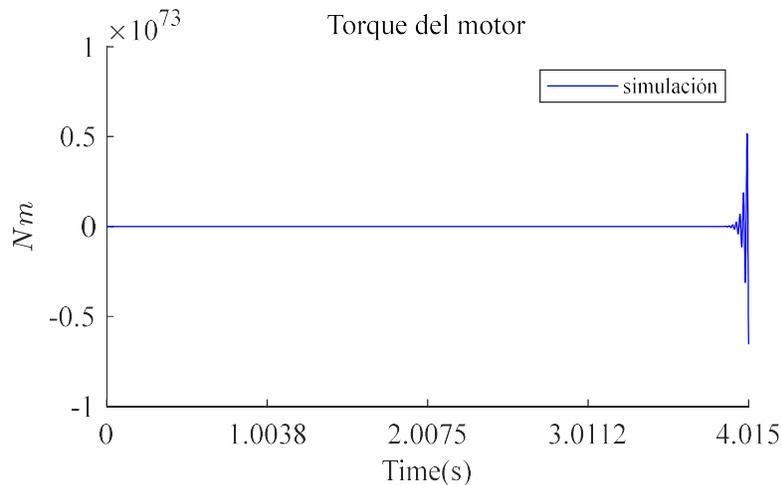


Figura 63. Resultados de la simulación de la posición del eslabón.

En ambos ejemplos, podemos observar que cambiando las ganancias proporcional y derivativa no tiene mucho efecto en la acción de control, por lo que por sí solo el controlador lento no estabiliza la respuesta del sistema.

Ahora modificaremos la ganancia  $K$  para observar su efecto en el sistema, y las variaciones de esta ganancia se presenta a continuación.

Tabla 27. Diseño del controlador diseñado en simulaciones.

Control	$K_v$	$K_p$	$K_f$
C1	0	0	10
C2	0	0	100
C3	0	0	1000

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

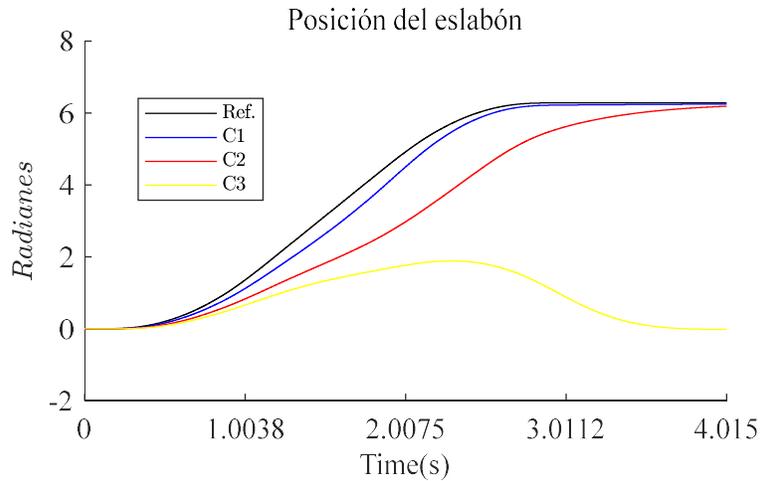


Figura 64. Resultados de la simulación de la posición del eslabón para la variación de  $K_f$  en C1, C2 y C3.

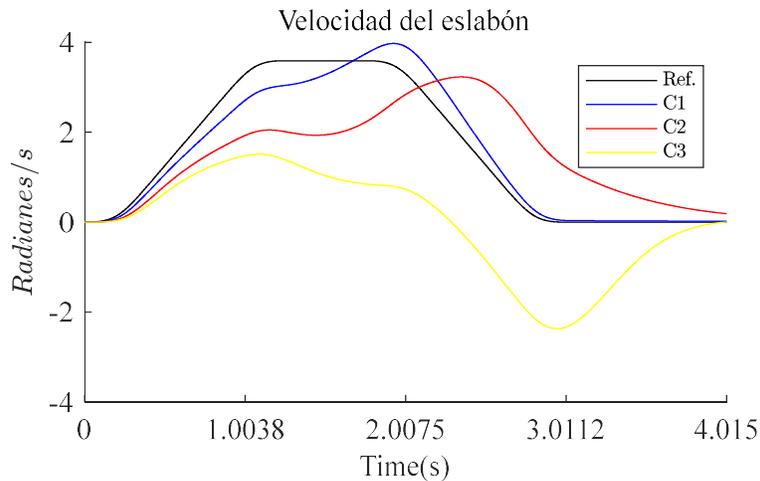


Figura 65. Resultados de la simulación de la velocidad del eslabón para la variación de  $K_f$  en C1, C2 y C3.

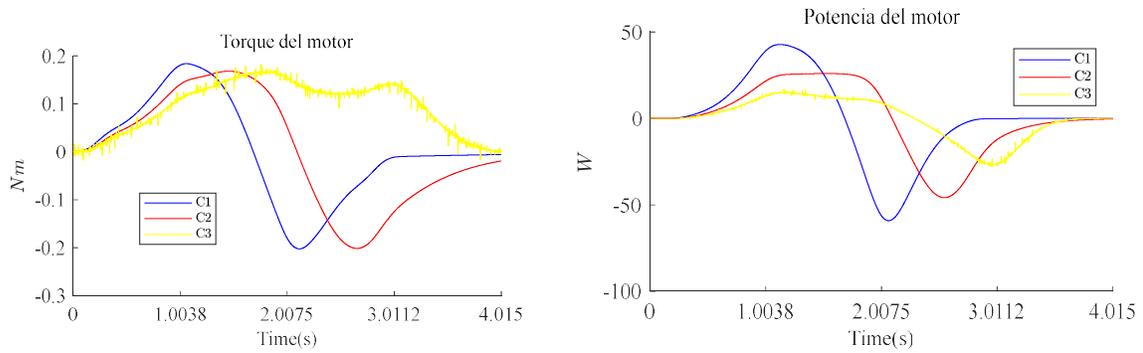


Figura 66. Resultados de la simulación de la potencia del motor en la figura de la izquierda y el torque del mismo a la derecha; para  $K_f$  en C1, C2 y C3.

Como podemos observar el control rápido de alguna manera corrige el error de posición del eslabón y entre más grande  $K_f$ , menos corrección existe. De acuerdo a lo enunciado para que  $u_{fast}$  sea más rápido que  $u_{slow}$ , la variable  $K_f$  debe de ser menor a  $1/\epsilon$ . En nuestro caso  $K_f$  deberá ser menor a  $K$ , que para nuestro trabajo tiene un valor de 7000.

Una vez, establecido la importancia de cada regulador, es hora de juntar ambos y verificar si la acción de control en conjunto mejora drásticamente la estabilidad del sistema y logra reducir el par de elasticidad.

Para esto, se presenta las modificaciones del controlador combinado con las ganancias  $K_p = 100$ ,  $K_v = 10$  los cuales no controlaban el sistema y  $K_f = 1$ , ya que fue la que mejor resultados dio. A continuación, se presentan los resultados de las simulaciones.

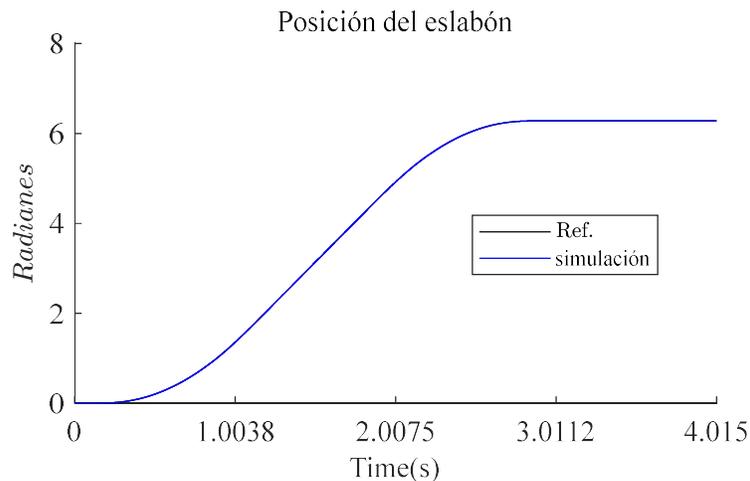


Figura 67. Resultados de la simulación de la posición del eslabón.

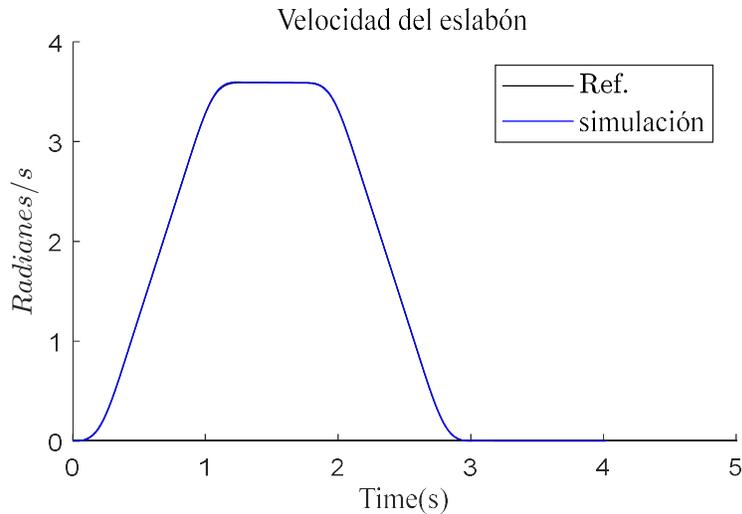


Figura 68. Resultados de la simulación de la velocidad.

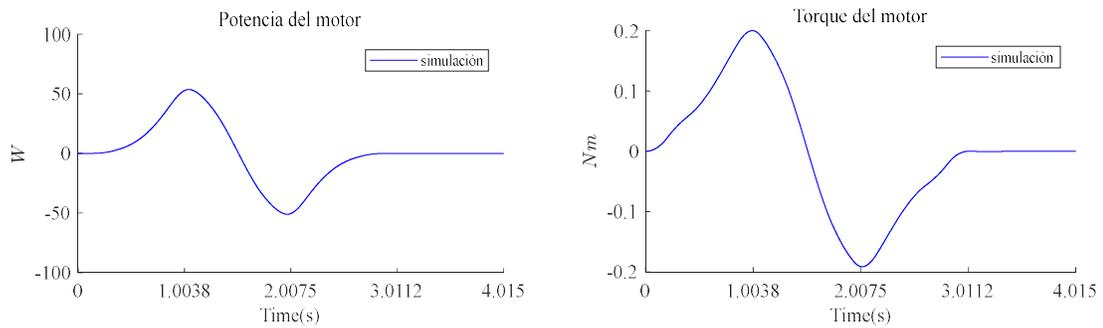


Figura 69. Resultados de la simulación de la potencia del motor en la figura de la izquierda y el torque del mismo a la derecha; para  $K_f$  en C1, C2 y C3.

Tabla 28. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	$1.308 \cdot 10^{-4}$	0.001	1.884
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	0.0015	2.582	6.282/3.316

Como observamos el control con doble regulador, estabiliza al sistema correctamente; los errores de posición y velocidad son muy bajos y el consumo de energía a diferencia de los anteriores, es mucho menor. Nos podemos dar cuenta que la acción de control rápida, compensa perfectamente el par elástico y el control normal el cual es idéntico al control de un robot rígido, hace un perfecto seguimiento de trayectoria.

En conclusión, este controlador sirve para robots con articulaciones elásticas, ya que además de seguir fielmente la trayectoria, realiza la compensación de la elasticidad, disminuyendo la acción de control para el control directo.

Ahora, nos enfocaremos en medir la estabilidad del sistema variando  $K_f$ , para analizar las dos escalas de tiempo afectan al sistema y como se contempla en forma simulada la estabilidad por Tikhonov. A continuación se presenta las variaciones de  $K_f$  en la siguiente tabla.

Tabla 29. Diseño del controlador diseñado en simulaciones.

Control	$K_v$	$K_p$	$K_f$
C1	10	100	1
C2	10	100	10
C3	10	100	100

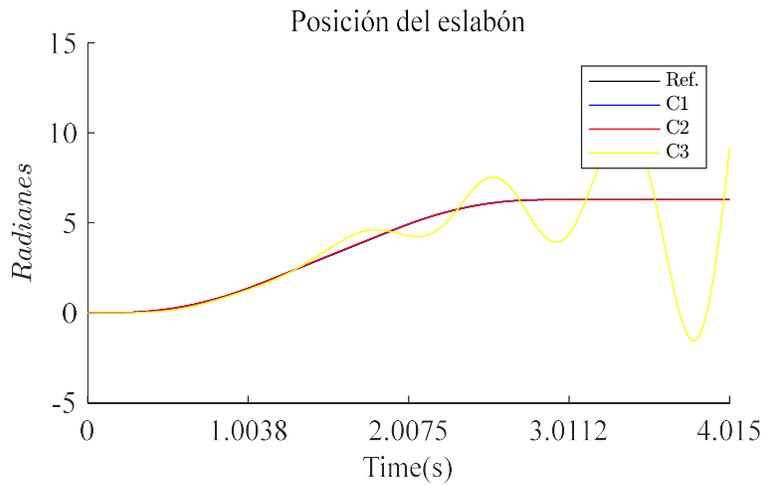


Figura 70. Resultados de la simulación de la posición del eslabón.

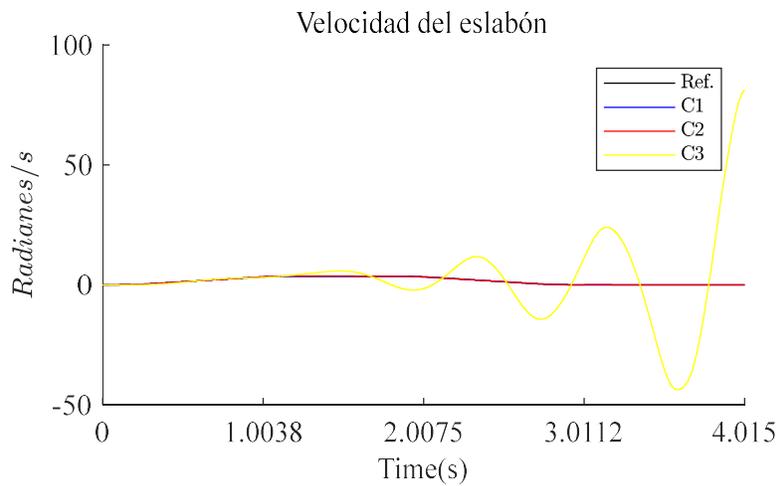


Figura 71. Resultados de la simulación de la velocidad del eslabón.

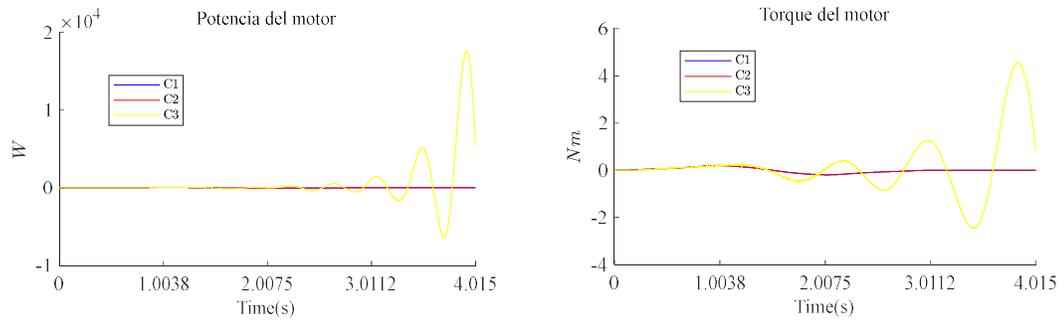


Figura 72. Resultados de la simulación de la potencia del motor en la figura de la izquierda y el torque del mismo a la derecha; para  $K_f$  en C1, C2 y C3.

De acuerdo a lo enunciado para que  $u_{fast}$  sea más rápido que  $u_{slow}$ , la variable  $K_f$  debe de ser menor a  $1/\varepsilon$  y mayor a 0 para que el sistema siempre se encuentre dentro de la región limite a la respuesta de compensación de elasticidad. En nuestro caso  $K_f$  deberá ser menor a  $K$ , que para nuestro trabajo tiene un valor de 7000.

Por último, desarrollaremos la segunda variante del control rápido, la cual solo utiliza las ganancias  $K_v$  y  $K_p$ . A continuación, se presenta las variaciones propuestas para la simulación en la siguiente tabla.

Tabla 30. Diseño del controlador diseñado en simulaciones.

Control	$K_v$	$K_p$
C1	1	1
C2	10	1
C3	1	10

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

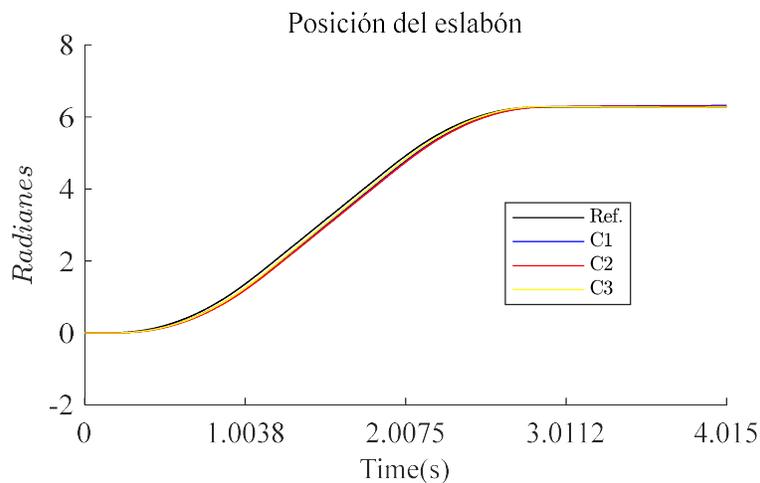


Figura 73. Resultados de la simulación de la posición del eslabón.

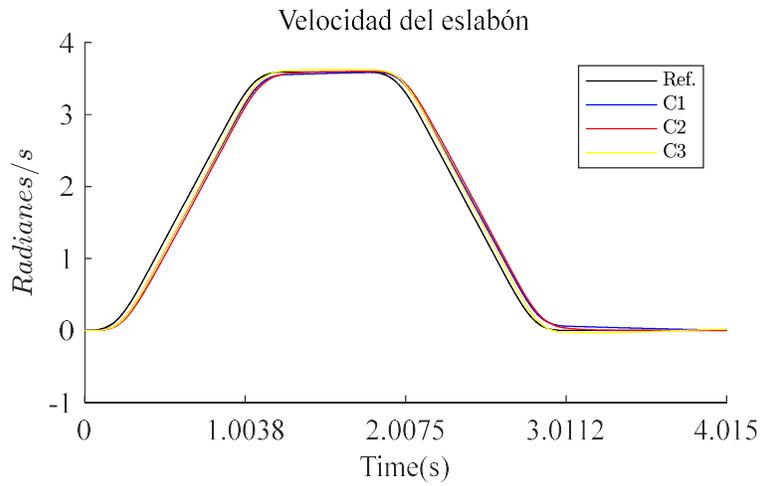


Figura 74. Resultados de la simulación de la velocidad del eslabón para la variación de  $K_f$  en C1, C2 y C3.

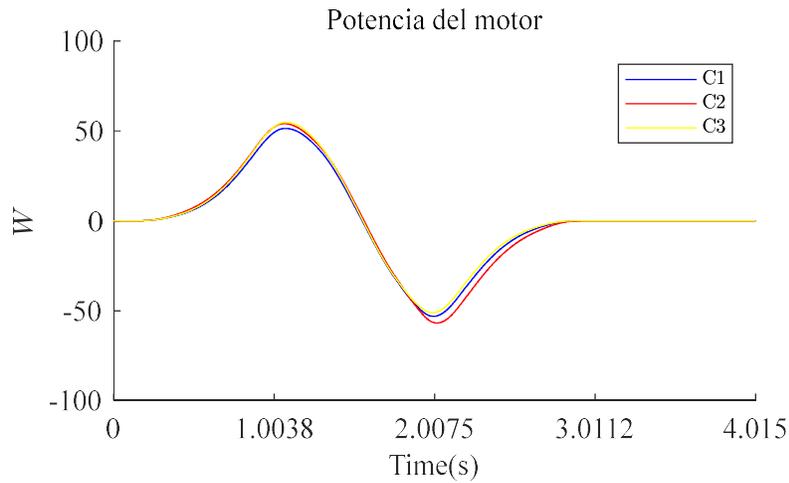


Figura 75. Resultados de la simulación de la potencia del motor en la figura de la izquierda y el torque del mismo a la derecha; para  $K_f$  en C1, C2 y C3.

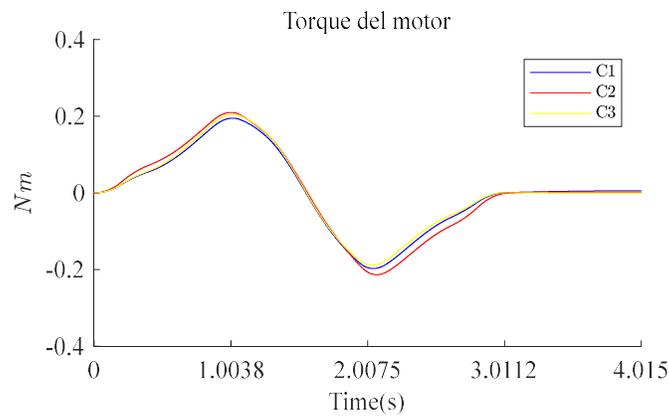


Figura 76. Resultados de la simulación de la potencia del motor en la figura de la izquierda y el torque del mismo a la derecha; para  $K_f$  en C1, C2 y C3.

Tabla 31. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	0.007	1.133	0.963
C2	1.298	1.906	0.658
C3	$0.44010^{-4}$	0.045	1.906
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	0.5972	2.628	6.319 – 4.015
C2	0.217	2.632	6.295 – 3.423
C3	0.161	2.594	6.292 – 2.928

Como se puede observar la segunda variante del control por el método de perturbación singular, regula de mejor manera que la anterior, con menos ganancia del regulador.

Esto se debe a que el control rápido está diseñado para que sea una aproximación a la región límite de compensación de la elasticidad, que a diferencia de la primera variante.

En conclusión, esta variante funciona correctamente, además, también se produce un consumo menor de energía, ya que como el caso anterior se divide la acción de control en el regulador del modelo simple y la compensación de la elasticidad.

Cabe indicar que ambas variantes funcionaron correctamente, gracias a la buena selección de la variable de perturbación, ya que conocíamos el comportamiento de las variables físicas del robot con articulación elástica.

## 6.8. Conclusiones

En conclusión, la ventaja del control por el método de perturbación singular es dividir el control en dos escalas de tiempo, donde la escala más lenta nos presenta un modelo reducido del robot rígido, en el cual se puede utilizar cualquier tipo de controlador, que en la actualidad está más que estudiado por la comunidad científica. Luego para escala más rápida, el control compensa el par de elasticidad del robot directamente.

Para la primera versión, las asunciones se basaron en el teorema de Tykhonov, donde el objetivo es diseñar una capa límite exponencialmente estable, y al mismo tiempo se tiene que converger el error de seguimiento de trayectoria en el estado casi estable, esto suponiendo que exista un valor pequeño de un  $\varepsilon$ , que haga que esta capa límite sea mucho más rápida.

Para la segunda versión, también se basa en el teorema de Tykhonov con la única diferencia que la respuesta de la capa límite sea una aproximación de Taylor, el cual no necesite de manera algebraica resolver determinar su función. Cabe mencionar que si se presenta en la vida real más perturbaciones en el sistema, se puede utilizar más variables en el orden de  $\varepsilon$  para la serie de Taylor.

Por otro lado, para la primera variante, de acuerdo a los experimentos propuestos, se nota que por sí solo la acción lenta no regula el sistema, sino que necesita de la acción rápida para tener un mejor control.

En cuanto al consumo energético, se nota que al separar la acción de control divide el esfuerzo de cada uno, logrando una disminución de la acción de control, esto equivale a que el motor no tenga

sobresfuerzo para seguir la trayectoria fielmente. Además, se nota que a pesar de tener presente la acción de gravedad no pierde la trayectoria, con lo que se podría decir que es menos sensible a perturbaciones que los casos mencionados anteriormente.

Por último, el mayor inconveniente es que el método de perturbación singular está limitado al teorema de Tykhonov, el cual tiene una débil justificación teórica para tratar la estabilidad, ya que como hemos visto, la compensación de cada ganancia se lo realiza de manera intuitiva y existe solo detalles o procedimientos para establecer una regulación para estabilizar el sistema.

## 7. Control LQR

El controlador lineal cuadrático (LQR) es una estrategia de control óptimo, el cual se basa en minimizar el costo de la acción de control, para que un sistema dinámico lineal, expresado en la forma de variable de estados, obtenga una respuesta de acuerdo a una trayectoria óptima definida de antemano, para cualquier variable de estado del sistema.

Esto quiere decir que si tenemos una trayectoria óptima entre los instantes  $t_0$  y un instante determinado  $t$ , podemos utilizar esta metodología para calcular una trayectoria próxima a la óptima entre el instante  $t_0$  y un instante final  $t_f < t$ , la cual, el coste de la acción de control, no deba ser mayor que el valor de coste para la trayectoria óptima.

De acuerdo a lo expresado, nos enfocaremos en diseñar un control LQR para un robot con articulación elástica, debido a que, en el uso cotidiano de articulaciones elásticas en robot colaborativos, requiere una mejora drástica en el comportamiento dinámico del movimiento, con el objetivo de disminuir el error de posición, así como también considerar de manera cuantificada el consumo energético que requiera la articulación para generar su movimiento.

Por otro lado, el control LQR garantiza que el sistema alcance el estado estable, pero no garantiza que, en cada instante de muestreo, el modelo, deba seguir la trayectoria; por lo que, resulta interesante integrar al proceso un compensador que ayude al esquema de control a seguir una trayectoria deseada durante todo el intervalo de tiempo. En este sentido, se puede mejorar la precisión de posicionamiento y generar bajos errores de seguimiento de trayectoria teniendo en cuenta el bajo consumo energético que requiera la acción de control.

### 7.1. Control LQR

Para definir el método general del control LQR, daremos un detalle general sobre esta y nos enfocaremos con más profundo al seguimiento de trayectoria.

En primer lugar, consideremos un sistema discreto lineal, descrito en forma de variable de estados como se ve en (7. 1) y (7. 2). Además, asumiremos que todos los estados están disponibles para su medición, es decir que el sistema es observable.

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (7. 1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (7. 2)$$

Cabe indicar que  $k$ , representa el estado temporal que se encuentra el sistema. Ahora, para el sistema queremos calcular la ley de control  $u(k)$ , tal que el sistema pase de un estado inicial a uno final, de tal manera que el coste de la acción de control sea la mínima; para esto se tiene una ecuación  $J$ , llamada ecuación de coste, el cual debe de tener involucrado todas las variables de interés, para lograr un control óptimo. Por tanto, esta función de coste viene dado por, la cual es una función cuadrática.

$$J = \frac{1}{2}x(N)^T Q_f x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} x(k)^T Q(k)x(k) + u(k)^T R(k)u(k) \quad (7.3)$$

La función en (7.3), se lo puede tratar como el costo total que requiere el control para la transición de un estado inicial a uno final. Además, podemos decir que,  $Q(k)$  es la penalización de las variables de estado  $x$ , para que el modelo consiga seguir la trayectoria eficientemente,  $Q_f(k)$  es la penalización del modelo para llegar a la posición final,  $R(k)$  es la penalización del control que determina el gasto energético del sistema,  $x(k)$  es el vector de estados y  $u(k)$  es el vector de entrada; siendo  $N$  el instante de tiempo final y  $k$  cada instante de tiempo.

Las matrices  $Q_f$ ,  $Q$  Y  $R$  deben cumplir el siguiente requerimiento:

- $Q_f, Q \geq 0$  y  $R > 0$

Esto quiere decir que las matrices  $Q_f$  y  $Q$  deberán ser simétricas y no negativas, mientras  $R$  deberá ser definida positiva y simétrica.

Esta función de coste está dada por la ley de control realimentación de estado,

$$u(k) = -K(k)x(k). \quad (7.4)$$

Con  $K$  fijado en

$$K(k) = R(k)^{-1}B(k)^T S(k). \quad (7.5)$$

Donde  $S$  es la solución única a la ecuación de riccati; esta ecuación puede ser resuelta por herramientas numéricas en algebra lineal.

$$S = A(k)^T (S(k+1)^{-1} + B(k)R(k)^{-1}B(k))^{-1} A(k) + Q(k). \quad (7.6)$$

Con las ecuaciones (7.4), (7.5) y (7.6), podemos obtener una ganancia óptima en cada instante, hasta un tiempo finito final.

## 7.2. Control LQR con seguimiento de trayectoria

Ahora, necesitamos diseñar un sistema de control que ayude al sistema a seguir una trayectoria deseada durante cada instante de tiempo. Estas estrategias tienen una notable importancia en el control de robots.

Para esto, primero utilizaremos la forma de ecuación de estado discreto (7.1) y (7.2) para definir nuestro modelo. Por otro lado, se define una trayectoria de referencia  $r(k)$  la cual este descrita para todo el intervalo de tiempo  $[t_0, N]$ . Ahora, utilizaremos (7.3) como función de coste e incluiremos esta referencia, teniendo lo siguiente,

$$J = \frac{1}{2}(Cx(N) - r(N))^T Q_f(N)(Cx(N) - r(N)) + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} (Cx(k) - r(k))^T Q(k)(Cx(k) - r(k)) + u(k)^T R(k)u(k). \quad (7.7)$$

Las matrices  $Q_f$ ,  $Q$  Y  $R$  deben cumplir el siguiente requerimiento:

- $Q_f, Q \geq 0$  y  $R > 0$

Esto quiere decir que las matrices  $Q_f$  y  $Q$  deberán ser simétricas y no negativas, mientras  $R$  deberá ser definida positiva y simétrica. Adicionalmente el valor de  $x(N)$  no está restringido [8].

Una vez definido la función de coste, la ley de control por realimentación de estado, está fijado en,

$$u(k) = -R^{-1}B^T \lambda(k+1); x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (7.8)$$

Además, el sistema de co-estado es el siguiente,

$$\lambda(k) = \left( \frac{\partial f}{\partial x(k)} \right)^T \lambda(k+1) + C^T Q C x(k) - C^T Q r(k) \quad (7.9)$$

Por último, la condición estacionaria y limite será la siguiente,

$$0 = \left( \frac{\partial f}{\partial u(k)} \right)^T \lambda(k+1) + R u(k) \quad (7.10)$$

$$\lambda(N) = C^T P (Cx(k) - r(k)). \quad (7.11)$$

Una vez definidas las condiciones, la acción de control (7.8), se lo puede expresar de la siguiente manera.

$$u(k) = -R^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial u(k)} \right)^T \lambda(k+1) \quad (7.12)$$

La entrada jacobiana en (7.12), es decir la derivada  $\partial f / \partial u(k)$ , es no lineal, de modo que la retroalimentación será también no lineal así como también el co-estado. En conclusión el efecto de agregar la referencia  $r(k)$  al modelo del sistema, adhiere dos términos adicionales a la ecuación del regulador, lo que hace que el sistema hamiltoniano no sea homogéneo, como lo vemos a continuación.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ C^T Q C & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C^T Q \end{bmatrix} r(k) \quad (7.13)$$

Como observamos, no podemos expresar el control como una retroalimentación de estado; sin embargo, se puede expresar  $u(k)$  como una combinación de una retroalimentación lineal de los estados más un término que depende de  $r(k)$ . Para hacer esto, debemos asumir para todo  $k \leq N$  lo siguiente,

$$\lambda(k) = S(k+1)x(k) - v(k) \quad (7.14)$$

Donde  $S(k)$  y  $v(k)$ , serán matrices auxiliares todavía desconocidas. Se puede ver que  $S(k)$  es una matriz  $n \times n$  y  $v(k)$  es un vector de dimensión  $n$ , donde  $n$  es el número de variables de estado.

Para determinar estas variables sustituiremos (7.14) en (7.13), obteniendo lo siguiente.

$$x(k+1) = Ax(k+1) - BR^{-1}B^T S(k+1)x(k+1) + BR^{-1}B^T v(k+1) \quad (7.15)$$

Al resolver para  $x(k+1)$  se tiene,

$$x(k+1) = (I - BR^{-1}B^T S(k+1))^{-1}(Ax(k) - BR^{-1}B^T v(k+1)) \quad (7.16)$$

Por otro lado si se utiliza (7.16) y (7.15) en (7.9) se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} S(k)x(k) - v(k) &= C^T Q C x(k) \\ &+ A^T S(k)(I - BR^{-1}B^T S(k+1))^{-1}(Ax(k) - BR^{-1}B^T v(k+1)) \\ &- A^T v(k+1) - C^T Q r(k) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Esta ecuación debe mantener todos los estados  $x(k)$  dado cualquier  $x_0$ , de manera que algunos términos pueden desaparecer. Usando el lema de inversión de matrices, se puede definir a  $S(k)$  y  $v(k)$  como,

$$S(k) = A^T [S(k+1) - S(k+1)B(B^T S(k+1)B + R)^{-1}B^T S(k+1)]A + C^T Q C \quad (7.18)$$

$$v(k) = [A^T - A^T S(k+1)B(B^T S(k+1)B + R)^{-1}B^T]v(k+1) + C^T Q r(k) \quad (7.19)$$

Si comparamos (7.14) y (7.11), las condiciones límites para estas recursiones deben ser las siguientes,

$$S(N) = C^T P C \quad (7.20)$$

$$v(N) = C^T P r(N) \quad (7.21)$$

Con esto las secuencias  $S(k)$  y  $v(k)$  ya pueden ser programadas; luego (7.14) es válida si el control es,

$$u(k) = -R^{-1}B^T \left( S(k+1)(Ax(k+1) + Bu(k)) + R^{-1}B^T v(k+1) \right). \quad (7.22)$$

Pre-multiplicando a (7.22) por  $R$  y resolvemos para  $u(k)$ , se tiene lo siguiente,

$$u(k) = (B^T S(k+1)B + R)^{-1} B^T (-S(k+1)Ax_k + v(k+1)). \quad (7.23)$$

La ecuación (7.23), podemos obtener dos ganancias, las cuales son

$$K(k) = (B^T S(k+1)B + R)^{-1} B^T S(k+1)A \quad (7.24)$$

$$K(k)^v = (B^T S(k+1)B + R)^{-1} B^T. \quad (7.25)$$

A continuación, se presenta un breve resumen de la acción de control determinada.

Tabla 32. Resumen del control LQR con seguimiento de trayectoria.

Detalle	Valores
Modelo del sistema:	$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ $y(k) = Cx(k)$
Índice de rendimiento:	$J = \frac{1}{2} x(N)^T Q_f(N) x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} x(k)^T Q(k) x(k) + u(k)^T R(k) u(k)$
Asunciones:	$Q_f, Q \geq 0 \text{ y } R > 0; \text{ todas simétricas}$
Acción de control:	$K(k) = (B^T S(k+1)B + R)^{-1} B^T S(k+1)A, S(N) = C^T P C$ $S(k) = A^T S(k+1)(A - BK(k)) + C^T Q C$ $v(k) = (A - BK(k))^T v(k+1) + C^T Q r(k)$ $K(k)^v = (B^T S(k+1)B + R)^{-1} B^T.$ $u(k) = K(k)x(k) + K(k)^v v(k+1)$

Gran parte del trabajo de la Tabla 32, se lo puede realizar fuera de línea, esto con el propósito de simplificar la implementación del control, ya que se puede ver que la ecuación de Ricatti no depende de la trayectoria de los estados.

Por lo tanto,  $S(k)$ ,  $K(k)^v$  y  $K(k)$  se puede pre-calcular antes de iniciar la acción de control, almacenándose en la memoria, para poder usarla en la ejecución del control en un robot real. Por otro lado, se puede verificar que la trayectoria de referencia  $r(k)$ , es conocida, por lo que también se puede pre-calcular  $v(k)$ .

Con esto, solo queda en la ejecución del control en tiempo real, calcular el control óptimo  $u(k)$ .

### 7.3. Resultados

Una vez establecido el algoritmo de control, los resultados obtenidos se basarán en analizar la regulación del control, el ahorro de energía y la importancia de las matrices  $Q_f$ ,  $Q$  y  $R$  en el regulador LQR.

Primero, analizaremos para que sirve cada matriz de ganancia; para esto se han establecido tres diferentes ganancias, las cuales implican un mayor valor a cada matriz, con el propósito de dar

relevancia en la acción de control a cada una en las simulaciones. A continuación, se presentan estas ganancias en la siguiente tabla.

Tabla 33. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$Q_f$	$Q$	$R$
C1	1	1	100
C2	100	1	1
C3	1	100	1

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

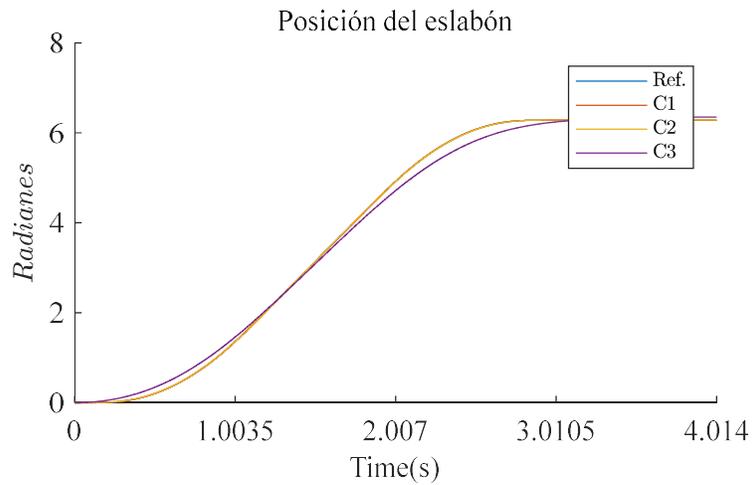


Figura 77. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

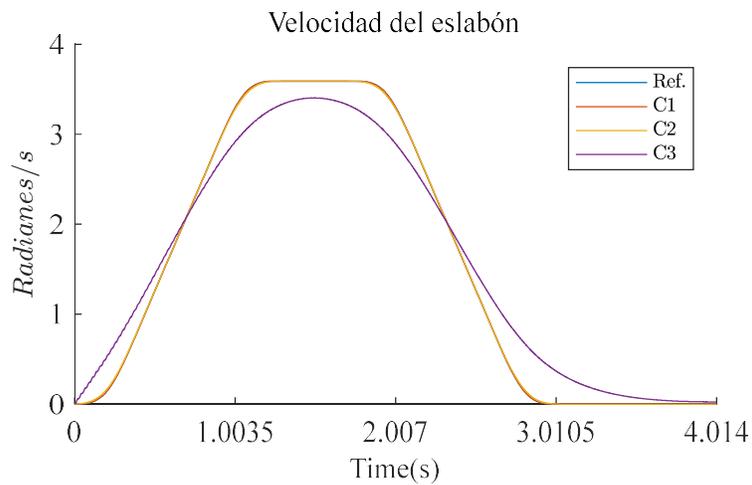


Figura 78. Trayectoria de velocidad del eslabón para las tres diferentes ganancias.

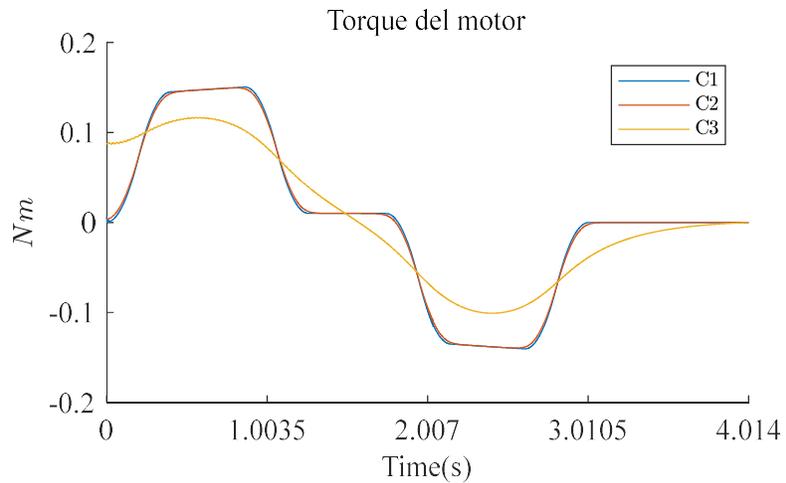


Figura 79. Torque del motor.

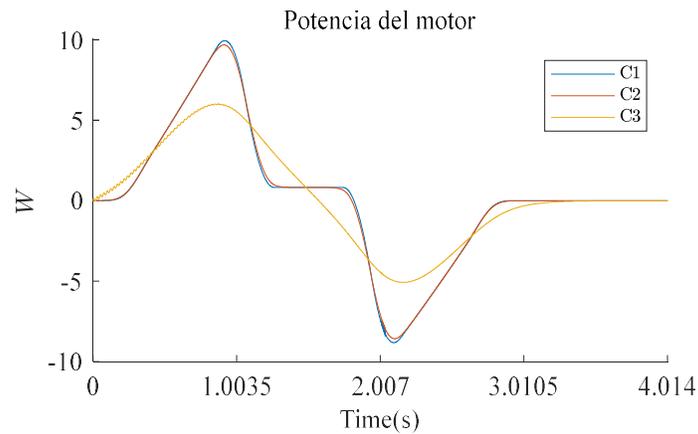


Figura 80. Potencia del motor

De acuerdo a los resultados de la simulación, nos podemos dar cuenta que al aumentar la ganancia en la matriz  $Q$  en C2, aumenta el seguimiento de trayectoria, en comparación con C1 y C3. Por otro lado cuando se aumenta la ganancia de la matriz  $Q_f$  en C2, se puede observar que llega a la posición final mejor que C1, pero no mantiene un fiel seguimiento a la trayectoria, ya que lo hace de una manera muy similar de C1.

Por último, aumentando la ganancia de la matriz  $R$  en C1, se nota que la respuesta del sistema sigue peor la trayectoria, ya que utiliza menos acción de control que las otras dos.

Tabla 34. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C3	1.775	7.373	1.047
C1	$2.993 \cdot 10^{-5}$	$2.383 \cdot 10^{-5}$	1.183
C2	$5.578 \cdot 10^{-4}$	0.0058	1.181
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C3	1.118	2.833	6.352 – 4.014
C1	0.007	2.581	6.283 – 2.987
C2	0.023	2.584	6.283 – 3.034

Una vez obtenido las características de los resultados, podemos apreciar como es lógico que C2, el cual tiene mayor ganancia en  $Q$ , tendrá un menor error de trayectoria en velocidad como en posición. Por otro lado, el que posee menor consumo de energía será C1, ya que tiene mayor ganancia en  $R$  la cual penaliza la acción de control. Por ultimo si comparamos el tiempo de estabilización, observamos que C2, tiende a estabilizar más rápido, ya que él tiene mayor ganancia en  $Q_f$ , lo que lo obliga a llegar a su valor final de manera más rápida.

Ahora, analizaremos el ahorro de energía variando  $R$ , para esto se da una tabla que se presenta a continuación, donde se irá aumentando la ganancia de esta matriz, con el objetivo de analizar los resultados de la misma. Por otro lado se mantiene constante la matriz  $Q$ , con el propósito de no influir en el seguimiento de trayectoria y para  $Q_f$  se le da un valor de 100 para que siempre el resultado llegue a la posición final.

A continuación, se presentan estas ganancias en la siguiente tabla.

Tabla 35. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$Q_f$	$Q$	$R$
C1	100	1	10
C2	100	1	100
C3	100	1	1000

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

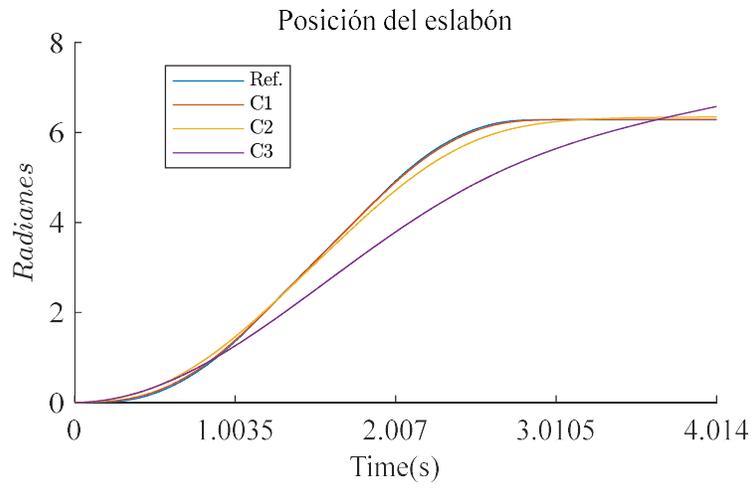


Figura 81. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

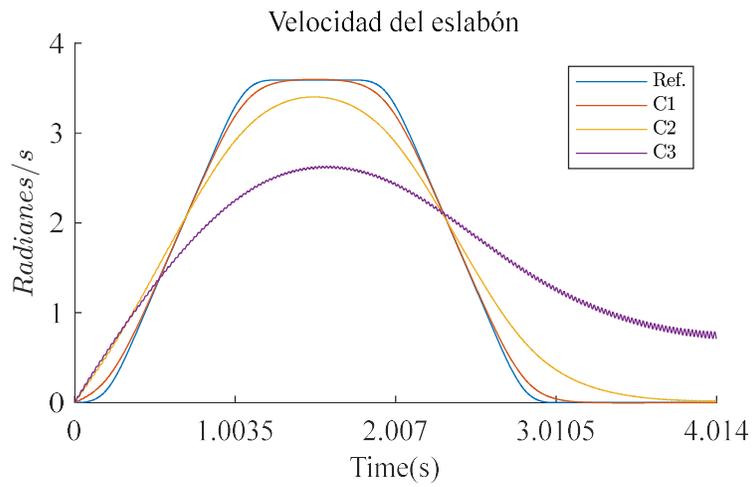


Figura 82. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias.

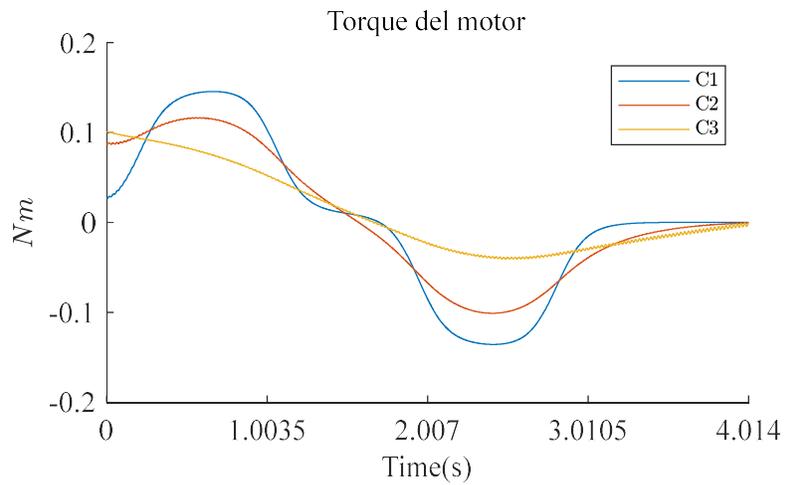


Figura 83. Torque del motor.

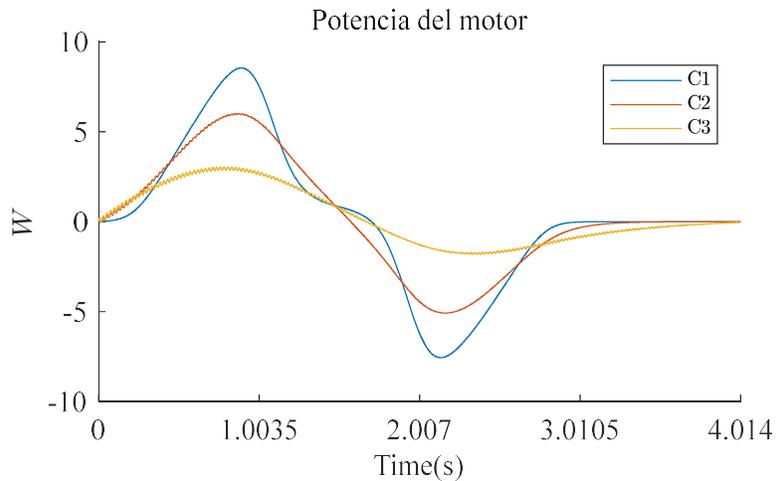


Figura 84. Potencia del motor para las tres diferentes ganancias.

Como se puede dar cuenta, al aumentar la ganancia de  $R$ , disminuye la potencia consumida por el motor, y gracias a  $Q_f$ , la trayectoria simulada llega a la posición final.

Por otro lado, se ve que en C3, el cual la ganancia de  $R$  es mayor a  $Q_f$ , la trayectoria simulada, se propasa de la posición final y sigue su camino, pensando que si continua así, no llega nunca a estabilizarse.

Con esto se puede decir que el ahorro de energía empeora la trayectoria; pero si se mantiene una buena relación con la penalización de la posición final  $Q_f$ , nos puede resultar muy útil, en condiciones de ahorro energético.

Tabla 36. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	0.042	0.318	1.159
C2	1.780	7.344	1.046
C3	45.141	73.163	1.045
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	0.142	2.615	6.291 – 3.227
C2	1.008	2.836	6.345 – 4.014
C3	4.719	<i>Ninguno</i>	6.578 – 4.014

Estos resultados solo nos confirma lo expresado anteriormente sobre el uso medido de la matriz de ganancia  $R$ . Cabe notar que a mayor  $R$  es menor la energía consumida y peor el error de posición y velocidad.

Con respecto a la matriz de ganancia  $Q$ , la cual no se tuvo en cuenta en el experimento anterior por muchas razones, una de las cuales es que al aumentar el consumo energético también. Por esta razón en las siguientes simulaciones vamos a detallar su funcionamiento. Para esto se han preparado varias ganancias que se presentan en la tabla a continuación.

Tabla 37. Diseño del controlador diseñado en simulaciones.

Control	$Q_f$	$Q$	$R$
C1	100	10	10
C2	100	100	100
C3	100	1000	100

A continuación, presentaremos los resultados de la simulación.

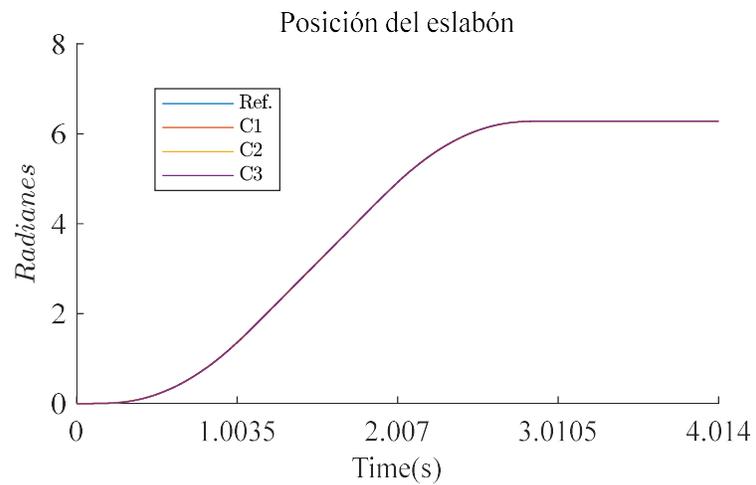


Figura 85. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

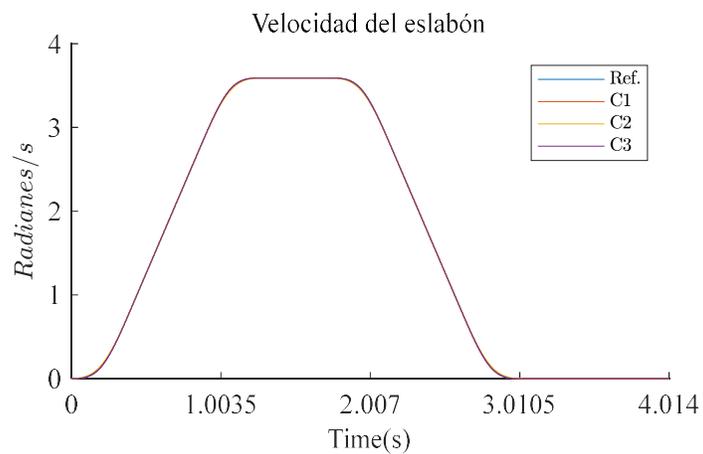


Figura 86. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias.

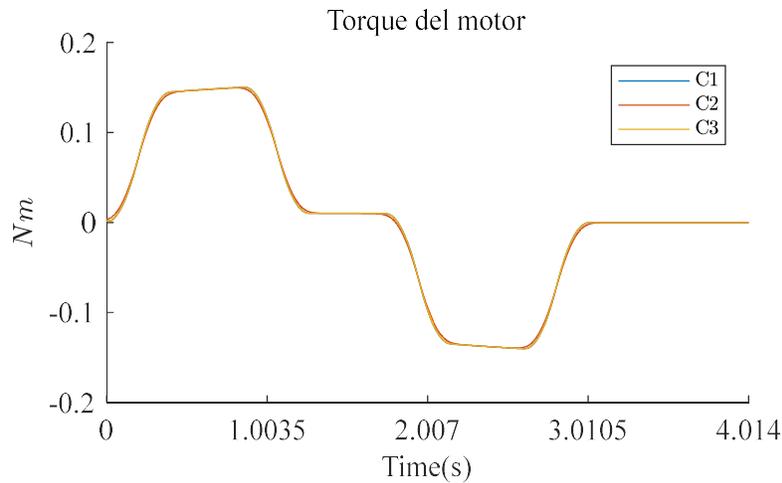


Figura 87. Torque del motor para las tres diferentes ganancias.

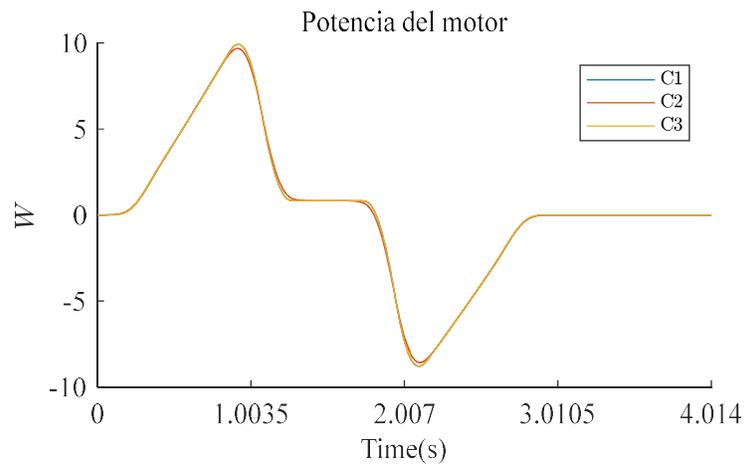


Figura 88. Potencia del motor para las tres diferentes ganancias.

Como se puede observar, visualmente no hay una diferencia entre cada variación de las ganancias del controlador, ya que todos siguen la trayectoria fielmente. Por esta razón, utilizaremos los datos presentados a continuación para diferenciar la respuesta de cada uno.

Tabla 38. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	$3.287 \cdot 10^{-5}$	$9.163 \cdot 10^{-5}$	1.183
C2	$5.589 \cdot 10^{-5}$	0.005	1.181
C3	$3.287 \cdot 10^{-5}$	$9.162 \cdot 10^{-5}$	1.183
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	0.0089	2.5816	6.2826 – 2.993
C2	0.024	2.584	6.283 – 3.035
C3	0.008	2.5816	6.2826 – 2.993

Con estos resultados, podemos notar que, aunque se aumente la ganancia de la matriz  $R$ , no tiene mayor relevancia ya que en esta ocasión se observa que  $Q$  tiene mayor ponderación en el algoritmo de control. Por las demás características, nos damos cuenta que todas se comportan de igual manera.

#### 7.4. Ahorro de energía variando $R$ en dos estados (aceleración y desaceleración)

De acuerdo a los resultados obtenidos, podemos observar que al variar de manera adecuada la matriz de ganancia  $R$ , obtenemos una disminución muy ponderada de la energía consumida por el motor.

Por esta razón, esta funcionalidad del control LQR, se la puede utilizar como ejemplo en una tarea normal de un robot con fuente de alimentación inalámbrico, en el cual, al tener su batería cargada, el control puede funcionar normalmente a toda su capacidad. Por otro lado, cuando le quede poca batería, el control deberá de perder precisión para ganar ahorro de energía, siempre pensando en que realice la tarea correctamente.

Esta situación, se la puede resolver añadiendo dos etapas de regularización del sistema utilizando el control óptimo LQR. Estas etapas vienen dadas por el movimiento del robot, ya que el robot comenzara su movimiento hasta detenerse en su posición final. Al principio el robot tendrá que acelerar para ganarle a la inercia del sistema, luego se mantendrá con una velocidad constante para luego desacelerar.

Una vez mencionado esto, el objetivo de las dos etapas es pensar que, al momento de acelerar y mantener su velocidad, no es primordial que lo realice con una trayectoria correcta; luego en su desaceleración aumenta la importancia de alcanzar su posición final. Llevando esta idea al control LQR, podemos usar dos diferentes valores de  $R$  para que cuando este en la etapa inicial se tenga un ahorro de energía sin pensar en seguir una trayectoria, luego en la segunda etapa modificar esta matriz de ganancia, de modo que se le dé más importancia al seguimiento de trayectoria.

Una vez explicado esto, en la tabla a continuación pondremos a prueba este análisis, al variar la acción de control modificando la matriz de ganancia  $R$ .

Tabla 39. Ganancias del controlador para la simulación

Control	$Q_f$	$Q$	$R_{max}$	$R_{min}$
C1	100	1	1000	1
C2	1000	1	1000	1
C3	1000	1	100	1

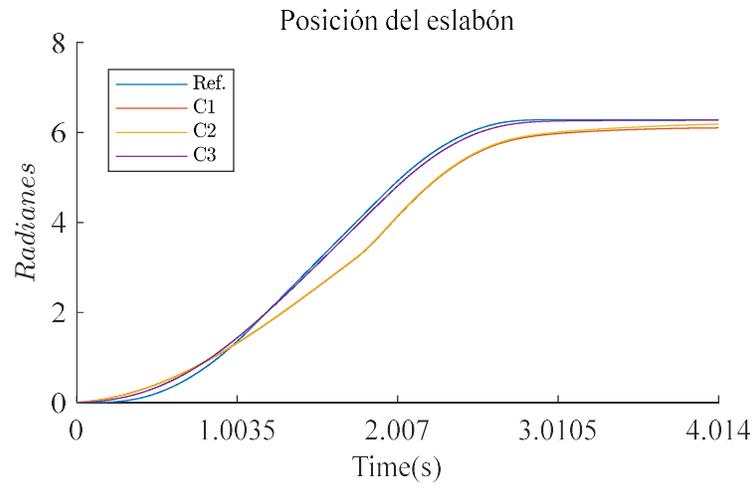


Figura 89. Trayectoria de posición del eslabón de las tres diferentes ganancias.

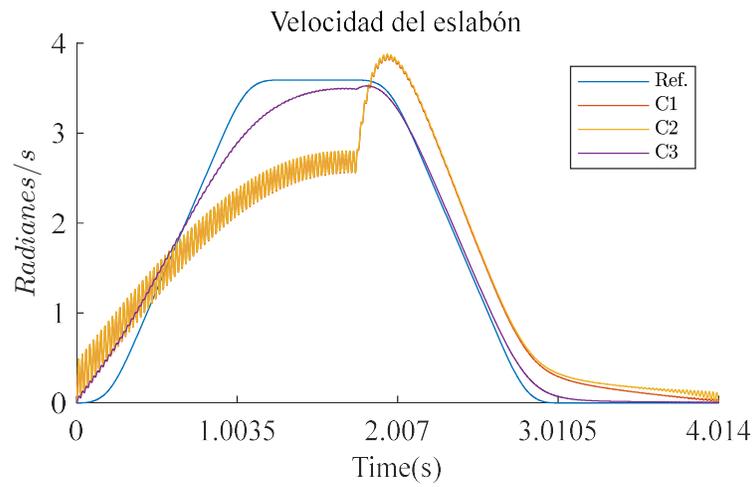


Figura 90. Trayectoria de velocidad del eslabón de las tres diferentes ganancias.

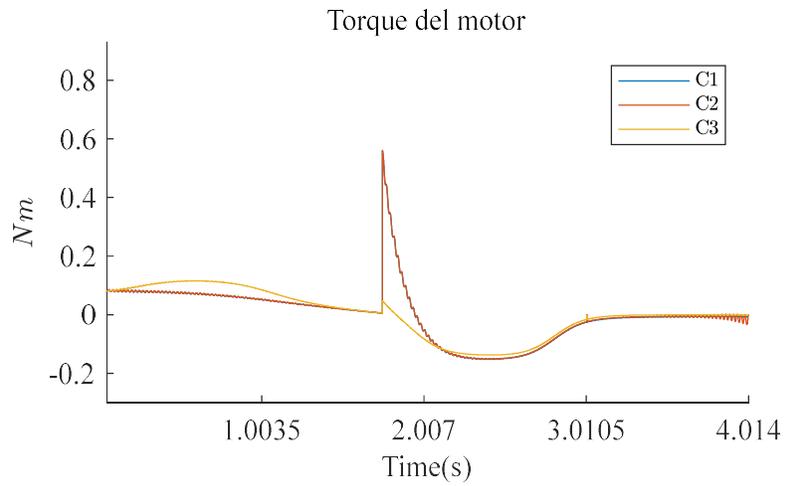


Figura 91. Torque del motor para las tres diferentes ganancias.

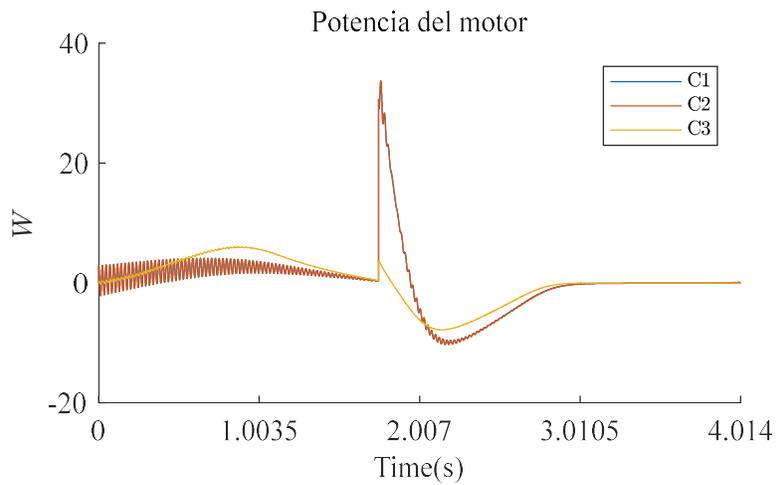


Figura 92. Potencia del motor para las tres diferentes ganancias.

Los resultados de las simulaciones se presentan a continuación.

Tabla 40. Característica de resultado de la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	18.016	34.009	0.853
C2	16.895	34.666	0.869
C3	0.601	3.014	1.107
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] – s
C1	0	<i>Ninguno</i>	6.103 – 4.014
C2	0	3.733	6.185 – 4.014
C3	0	2.674	6.274 – 4.014

Como se puede observar todas las variaciones de ganancia ahorran energía, menos en C3, la cual el valor de la matriz de ganancia  $R$  es menor a  $Q_f$ , lo cual aumento la energía consumida por el motor. Por otro lado C2, la ganancia de la matriz  $R$  es igual a  $Q_f$ , lo que por los resultados podemos decir que llega a la posición final con la misma energía que C1, la cual por tener un valor muy bajo de  $Q_f$ , no lo logra hacer lo mismo.

En conclusión, con la implementación de las dos etapas se logra reducir el consumo de energía, pero es muy importante que  $Q_f$  tenga un valor igual o mayor que  $R$ , para que la respuesta del sistema llegue a la posición final.

Por último, se analiza el caso en que el motor regenera energía en el proceso de desaceleración. A continuación, se presenta los resultados de la simulación.

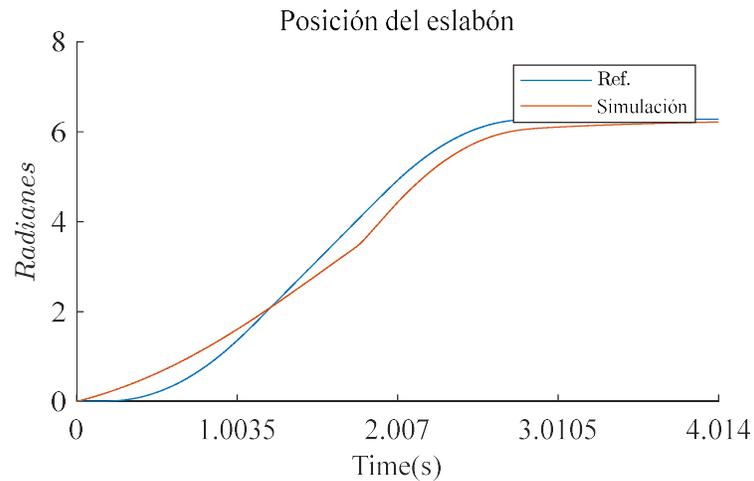


Figura 93. Trayectoria de posición del eslabón.

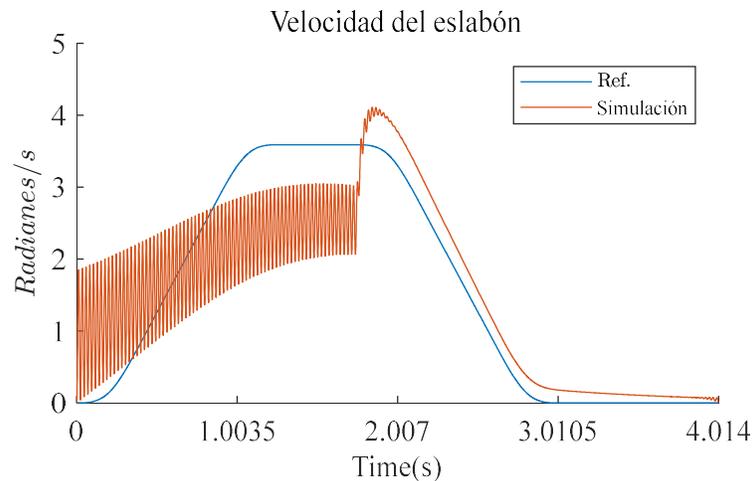


Figura 94. Trayectoria de velocidad del eslabón.

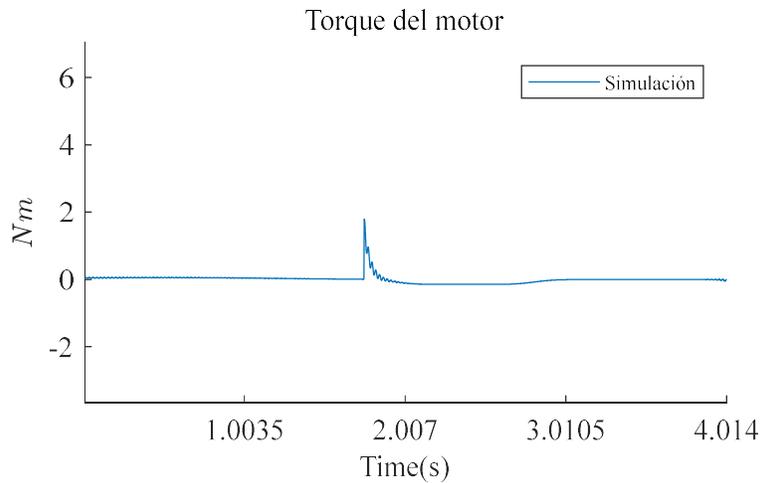


Figura 95. Torque del motor.

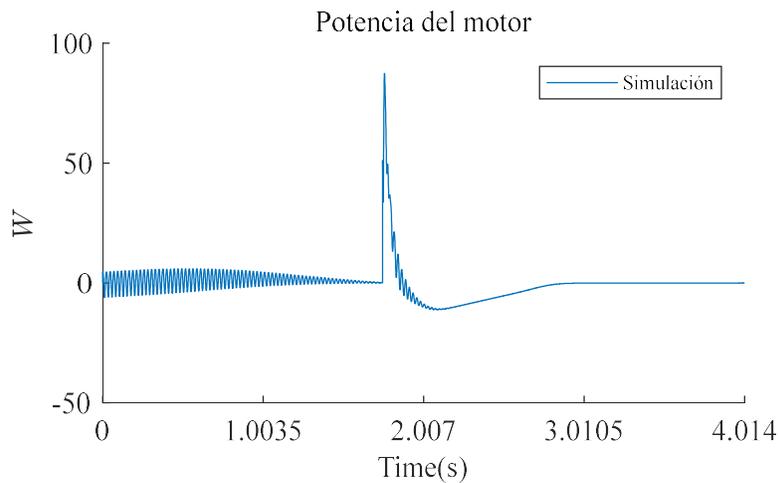


Figura 96. Potencia del motor.

Se puede observar demasiada oscilación en la respuesta de velocidad, lo que en la vida real puede ser un problema de desgaste en el motor y la articulación.

Tabla 41. Ganancias del controlador para la simulación

Control	Error de $q$ [%]	Error de $\dot{q}$ [%]	Energía consumida por el motor [W]
C1	9.433	49.880	-0.4929
	Sobreimpulso %	Tiempo de estabilización [s]	Valor Pico-Tiempo pico [Radianes] - s
C1	0	3.353	6.216 - 4.014

Como se puede apreciar las ganancias del regulador LQR, en la primera etapa no le importa seguir la trayectoria, luego en la segunda etapa mejora el seguimiento de la misma causando que llegue a su estado final. También se debe notar que, aunque se cumple con la trayectoria, existe mucha

oscilación en la velocidad lo que conlleva, a desgastes del motor y de la articulación. Por último, logramos regenerar energía utilizando este tipo de control.

Por ultimo vemos una nueva inclusión de una etapa cuando el robot mantiene su velocidad constante. A continuación, los resultados.

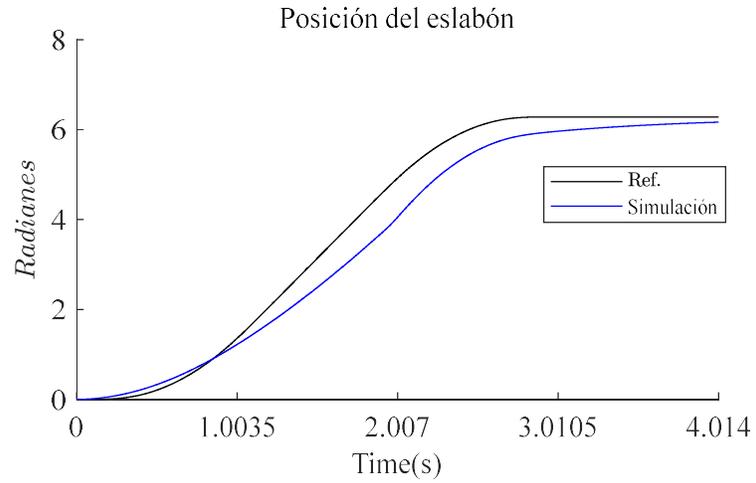


Figura 97. Trayectoria de posición del eslabón.

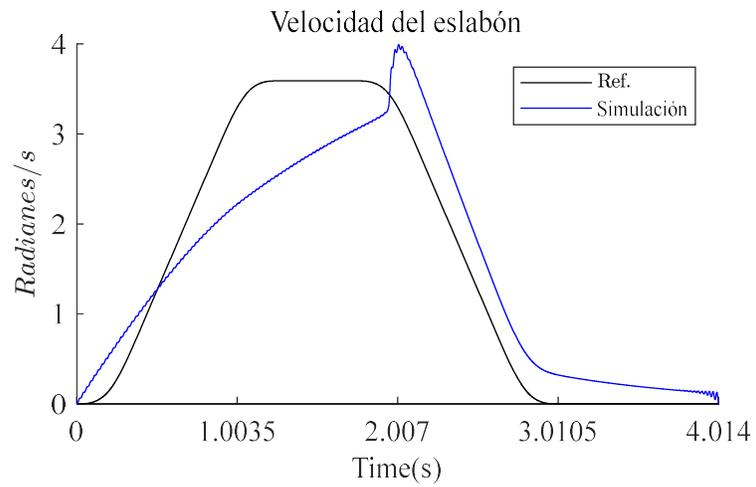


Figura 98. Trayectoria de velocidad del eslabón.

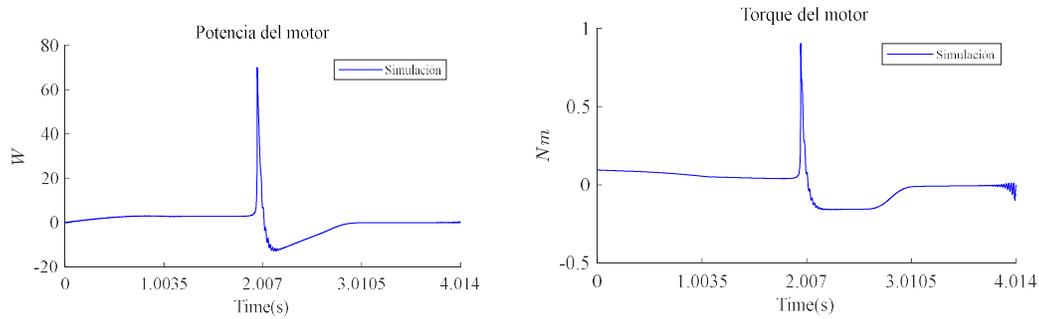


Figura 99. Torque del motor a la izquierda y a la derecha la potencia del motor.

Como podemos observar con esta inclusión de una regulación lineal cuando el robot presenta una velocidad constante, se ha eliminado esa sobrecilación que presentaba el de dos etapas. Aunque no se ha podido regenerar energía, se ha logrado reducir el consumo en comparación al control normal.

## 7.5. Conclusiones

En conclusión, podemos decir que el control óptimo LQR presenta tres matrices de ganancias que penalizan el seguimiento de trayectoria  $Q$ , el consumo de acción de control para seguir la trayectoria  $R$  y la condición de llegar a la posición final de la trayectoria  $Q_f$ . El ajuste de estas ganancias es muy poco intuitivo, ya que no refleja de por sí un seguimiento real a la penalización de cada una, sino que debe ser un acuerdo entre todas, para dar un mejor resultado.

Al momento de darle mayor ajuste a  $Q$ , la respuesta del sistema tiende a darle prioridad al seguimiento de trayectoria y no importa si  $R$  es más alto, por el algoritmo de control siempre tendrá más privilegio. Caso que no se da entre  $Q_f$  y  $R$ , donde siempre  $Q_f$  deberá ser mayor o similar a  $R$ , para que la respuesta a la acción de control llegue a su posición final.

En cuanto al consumo de energía, se vio la posibilidad de ajustar dicho parámetro gracias a la matriz de ganancia  $R$ . Esto se nota en los resultados de las simulaciones y hasta presentamos un canso de regeneración de energía. Esto es muy útil en robots con alimentación inalámbrica, ya que en estos casos se requiere de manera especial una regulación controlada del consumo de energía.

Por este motivo, al dividir en dos etapas el algoritmo de control LQR, se puede notar que se mejora el ahorro de energía, identificando que en la aceleración no importa el camino que tome y desaceleración del robot si importe.

Por otro lado, al dividir entre aceleración, velocidad constante y desaceleración, logramos reducir las oscilaciones vistas en el control de dos etapas, regulando en la etapa de velocidad constante un incremento lineal hasta alcanzar el valor de  $R$  en la etapa de desaceleración. En el futuro esto puede ser motivo de investigación si se tratará de regular este incremento por diferentes recursos matemáticos.

Por último, un inconveniente es que este método de control funciona en sistemas lineales; pero a través de nuevas técnicas de linealización actuales, este inconveniente queda más que solucionado.

## 8. Conclusiones

En conclusión, se puede decir que, para el control de un robot con articulaciones flexibles, en el presente trabajo se analizó diferentes métodos de control; el primero es basado en la realimentación de los estados, el segundo es el control por el método de perturbaciones singulares y por último el control óptimo LQR. Como resultado si analizamos la respuesta del sistema para cada regular se puede decir lo siguiente.

Para el caso de la realimentación de estados, se puede decir que tiene la ventaja de ser fácil de implementar y que se puede utilizar toda la información del modelo, para generar diferentes leyes de control, las cuales establezcan el sistema. Por otro lado, existen casos los cuales resultaron tener un buen seguimiento de trayectoria. En referencia a la compensación de la elasticidad, estos tipos de controladores no realizaron un estudio directo sobre la misma, pero a la final logran compensar el par elástico, reduciendo las oscilaciones de la respuesta del sistema. También cabe indicar que existen casos que, al realimentar los estados, sobre todo los del lado del eslabón no estabilizan el sistema.

En cuanto al consumo de energía, es evidente que todos los casos presentados, tienen un mayor consumo a diferencia del método de perturbación singular y el control LQR.

Por último, este tipo de controladores es sensible a perturbaciones externas y errores de modelado, lo que provoca que su utilización quede a tareas de poca precisión.

Ahora para el método de perturbación singular podemos decir que es un buen método de control, ya que también es fácil de implementar y que separa en dos escalas de tiempo la regulación, donde la escala más lenta presenta el modelo de un robot rígido, de la cual existe actualmente muchas técnicas de control implementadas; para la escala de tiempo más rápida se presentó dos variantes las cuales compensan el par de elasticidad directamente. En general la respuesta al control, es considerablemente estable, ya que sigue fielmente la trayectoria, presentando errores de seguimiento muy bajos.

En cuanto al consumo de energía se nota que disminuye en par generado por el motor, esto es gracias a que la acción de control está dividida exclusivamente en dos reguladores diferentes, lo que hace que en general ambos ataquen al mismo problema al mismo tiempo, reduciendo la necesidad de aumentar la acción de control.

Por último, el principal inconveniente es que este método está limitado al teorema de Tykhonov, el cual tiene muy poca justificación de estabilidad.

Por último, del control óptimo LQR es un control más complejo de implementar ya que requiere de una mayor capacidad de cómputo que de las otras dos; adicionalmente se ha desarrollado este control con el fin de ahorrar energía para robots con alimentación inalámbrica. Este caso no ha sido estudiado actualmente y puede dar un gran aporte a la comunidad científica, ya que, al realizar los experimentos y diferentes modificaciones en el algoritmo de control, podemos hasta en cierta medida regenerar energía. El principal inconveniente es que su utilización queda para sistemas lineales, que con las actuales técnicas de linealización esto queda superado.

Con estas aclaraciones queda cumplido todos los objetivos propuestos y solo queda decir que cada controlador tiene sus beneficios y desventajas y que cada uno es útil en medida de su aplicación real.

Queda para futuros trabajos, determinar el uso correcto de estos controladores en un robot con articulación elástica en la vida real, en especial el ahorro de energía para aplicaciones de robots inalámbricos.

## 9. Bibliografía

- [1] Spong, Marck W, Hutchinson Seth and Vidyasagar, “Robot modeling and control”, IEEE Control Systems, vol. 26, pp. 113-115, 2006.
- [2] Bruno Siciliano and Oussama Khalib, “Handbook of robotic”, Vol. 46, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016.
- [3] L. Sciavicco, M. Grimble and M. Johnson, Modelling and Control of Robot Manipulators. London: Springer London, 2000.
- [4] Lambrechts, P. F. (2003). Trajectory planning and feedforward design for electromechanical motion systems. (DCT rapporten; Vol. 2003.008). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.
- [5] Hassan K. Khalil, “Nonlinear Systems”, Third edition, Prentice-Hall 2002.
- [6] Carlos Canudas de Wit, Bruno Siciliano and Georges Bastin, “Theory of Robot Control”, chapter 5, Springer,1996.
- [7] Mark Spong, Petar Kokotovi and Khashayar Khorasani,” An integral Manifold approach to the feedback control of flexible joint robots”, IEEE Journal of robotics and automation, Vol. RA-3, August 1987.
- [8] Frank Lewis, Draguna Vrabie and Vassilis Syrmos, “Optimal Control”, Third edition, John Wiley & Sons, 2012.