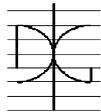


Trabajo de Investigación CST/MIH

PROPUESTA DE ESBELTEZ LÍMITE EN FLEXIÓN ESVIADA DE SOPORTES RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO

Por:
Eduardo Cortés Moreno

Diciembre 2009

Author / Author: Eduardo Cortés Moreno	Fecha / Date: Diciembre 2009	
Título / Title PROPUESTA DE ESBELTEZ LÍMITE EN FLEXIÓN ESVIADA DE SOPORTES RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO.		
Directores del trabajo / Supervisores: Dr. José Luis Bonet Senach.	Código / Coda: CST/MIH	Nº páginas / Pagés: 217
Departamento / Departamento: INGENIERÍA DE LA CONSTRUCCIÓN Y PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL		
Universidad / University: UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA		 UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA
Palabras clave / Keywords: Esbeltez, soporte de hormigón armado, flexión esviada. Slenderness, reinforced concrete column, biaxial bending.		
Código Unesco: 3305.05		

Resumen

En este trabajo, se propone una expresión para el cálculo de la esbeltez en soportes intraslacionales de hormigón armado de sección rectangular, cuya finalidad es distinguir cuando la influencia del eje débil puede ser despreciada en el cálculo.

Esta expresión es válida para hormigones convencionales y de alta resistencia, bajo carga instantánea como sostenida sometidos a una sollicitación de flexocompresión recta sobre su eje fuerte a los que se le aplica una excentricidad accidental sobre su eje débil.

Partiendo de un criterio basado en acotar la pérdida relativa de capacidad resistente del soporte con excentricidad accidental respecto al solicitado en flexocompresión recta en un 10% en términos de flexión y utilizando un modelo numérico como referencia se han analizado los distintos parámetros que influyen en la esbeltez de esviaje. Los principales factores han sido incluidos en la expresión propuesta.

ÍNDICE

I	NOTACIÓN EMPLEADA	9
II	INTRODUCCIÓN	13
III	NATURALEZA DEL PROBLEMA	17
II.1	COMPORTAMIENTO NO-LINEAL. ESFUERZOS DE SEGUNDO ORDEN.....	18
II.1.1	NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA.....	18
II.1.2	NO-LINEALIDAD DE LOS MATERIALES.....	20
II.2	DEFINICIÓN DEL ESTADO LÍMITE.....	23
II.3	FLEXIÓN ESVIADA.....	28
IV	ESTADO DEL ARTE	33
IV.1	ENSAYOS EXPERIMENTALES.....	33
IV.1.1	FURLONG.....	33
IV.1.2	MAVICHAK Y FURLONG.....	34
IV.1.3	KIM Y LEE.....	35
IV.1.4	PALLARÉS.....	36
IV.2	MÉTODOS DE ANÁLISIS EN FLEXIÓN ESVIADA.....	36
IV.2.1	MÉTODOS GENERALES.....	36
IV.2.2	MÉTODOS SIMPLIFICADOS.....	37
IV.3	ESBELTEZ LÍMITE.....	39
IV.3.1	FLEXIÓN RECTA.....	39
IV.3.2	FLEXIÓN ESVIADA.....	47

V	PLANTEAMIENTO. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS	49
V.1	CRITERIO DE ERROR EMPLEADO. DEFINICIÓN DE ESBELTEZ DE ESVAJE.....	50
V.2	PARÁMETROS DE ESTUDIO E INTERVALOS DE VARIACIÓN.....	52
V.2.1	PARÁMETROS REFERENTES A LA GEOMETRÍA.....	52
V.2.2	PARÁMETROS REFERENTES A LOS MATERIALES.....	56
V.2.3	PARÁMETROS REFERENTES A LAS CARGAS.....	59
V.3	METODOLOGÍA.....	61
V.3.1	PROCEDIMIENTO EMPLEADO EN LA OBTENCIÓN DE λ_{ESV}	61
V.3.2	DESCRIPCIÓN Y CALIBRACIÓN DEL PROGRAMA.....	64
V.3.3	PROGRAMA DE ENSAYOS.....	70
VI	RESULTADOS OBTENIDOS	71
VII	ANÁLISIS DE RESULTADOS	73
VII.1	PARÁMETROS GEOMÉTRICOS.....	73
VII.2	PARÁMETROS REFERENTES A LOS MATERIALES.....	78
VII.3	PARÁMETROS REFERENTES A LAS ACCIONES.....	81
VIII	PROPUESTA DE CÁLCULO DE LA ESBELTEZ DE ESVAJE	83
VIII.1	ELECCIÓN DE LA FUNCIÓN DE AJUSTE.....	88
VIII.2	OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES DE LAS FUNCIONES DE AJUSTE.....	92
VIII.3	ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS COEFICIENTES DE AJUSTE.....	93
VIII.4	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PROPUESTA.....	101
IX	VALIDACIÓN DEL AJUSTE	105
IX.1	BONDAD DEL AJUSTE.....	105
IX.2	CONTRASTE.....	114

X CONCLUSIONES	121
X.1 CONCLUSIONES GENERALES.....	121
X.2 RECOMENDACIONES FUTURAS.....	124
XI BIBLIOGRAFÍA	127

ANEJO A. PROGRAMA DE ENSAYOS.

ANEJO B. RESULTADOS OBTENIDOS.

I NOTACIÓN EMPLEADA

A_c	Área de hormigón de la sección.
A_s	Área de las armaduras de la sección.
a	Deformación del soporte.
b	Ancho de la sección.
c	Recubrimiento mecánico de las armaduras.
C_m	Coefficiente de equivalencia. $C_m = \frac{e_e}{e_2} = 0.6 + 0.4 \cdot \alpha$
E_c	Módulo de elasticidad del hormigón.
E_s	Módulo de elasticidad de las armaduras.
e_0	Excentricidad de primer orden constante en el soporte.
e_1	Excentricidad de primer orden de menor valor absoluto.
e_2	Excentricidad de primer orden de mayor valor absoluto.
e_a	Excentricidad adicional.
e_e	Excentricidad equivalente. $e_e = 0.6 \cdot e_2 + 0.4 \cdot e_1$
f_c	Resistencia a compresión del hormigón.
f_{cd}	Resistencia de cálculo a compresión del hormigón.
f_{ck}	Resistencia característica a compresión del hormigón.

f_y	Límite elástico del acero.
f_{yd}	Valor de cálculo del límite elástico del acero.
f_{yk}	Valor característico del límite elástico del acero.
H	Fuerza horizontal sobre el soporte.
h	Canto de la pieza en la dirección de la flexión principal mayor.
I_c	Momento de inercia de la sección de hormigón.
I_s	Momento de inercia de las armaduras.
i_c	Radio de giro de la sección de hormigón.
i_s	Radio de giro de las armaduras.
L, l_0	Longitud del elemento.
l_p	Longitud de pandeo de la pieza.
M	Esfuerzo flector.
M_x	Esfuerzo flector según el eje fuerte.
M_y	Esfuerzo flector según el eje débil.
N, N_{tot}	Esfuerzo axial que solicita un elemento estructural.
N_{sg}	Axial que provoca deformación de fluencia.
N_{cr}	Axial crítico del soporte.
N_0	Axial último que agota la sección transversal en compresión simple.
N^*	Axial de bifurcación.
n	Número de elementos finitos.
y	Deformación total (flecha) en cada sección del soporte.
α	Relación de excentricidades en los extremos del soporte. $\alpha = \frac{e_1}{e_2}$, con $ e_2 \geq e_1 $
β	Ángulo que forma el momento en flexión esviada con el eje fuerte.
δ	Deformación del soporte en cada sección.
ε	Deformación unitaria.
ε_M	Error, pérdida de capacidad de la pieza esbelta en cuanto a momentos.

ε_N	Error, pérdida de capacidad de la pieza esbelta en cuanto a axiles.
η	Excentricidad relativa de la pieza. $\eta = \frac{e}{h}$
φ_{EHE}	Coeficiente de fluencia según la instrucción EHE-08[19].
φ_{eq}	Coeficiente de fluencia equivalente. $\varphi = \varphi_{eq} = \varphi_{EHE} \cdot \frac{N_{sg}}{N_{tot}}$
λ	Esbeltéz de la pieza.
λ_{esv}	Esbeltéz de esviaje.
λ_{lim}	Esbeltéz límite inferior.
λ_g	Esbeltéz geométrica. $\lambda_g = \frac{l_p}{h}$
λ_m	Esbeltéz mecánica. $\lambda_m = \frac{l_p}{i}$
ν	Axil reducido.
ρ	Cuantía geométrica de armadura. $\rho = \frac{A_s}{A_c}$
σ	Tensión.
ω	Cuantía mecánica de armadura.
ξ	Ratio de error.

II INTRODUCCIÓN

En los últimos 100 años, el campo de las estructuras se ha entregado casi por completo a dos únicos materiales básicos: el hormigón y el acero. Por tanto, se trata de materiales históricos, sometidos a muchos años de estudio y teorización, y cuya aplicación está ampliamente sancionada por la experiencia.

Históricamente, debido a sus diferentes características físicas y mecánicas el ámbito de aplicación de uno y otro ha sido distinto, aunque compartidos en un cierto rango. Las diferencias en el comportamiento de uno y otro material han facilitado que tradicionalmente el acero se haya asociado a la construcción de estructuras esbeltas, mientras que el hormigón se suponía más adecuado para la ejecución de estructuras masivas.

Sin embargo, esta distinción ha ido cambiando paulatinamente, y las estructuras de hormigón alcanzan actualmente cotas de esbeltez anteriormente reservadas al acero. Esta circunstancia está motivada por el empleo de materiales más resistentes y controlados, y por el desarrollo de herramientas de cálculo más potentes y precisas, que permiten un mayor conocimiento y aprovechamiento de las cualidades del material.

La contrapartida que presenta el afinamiento de las estructuras de hormigón es, en muchos casos, un incremento notable de la complejidad y el tiempo de cálculo. Concretamente, en lo que se refiere a los soportes comprimidos, existe diferencia cualitativa entre los modelos e hipótesis de cálculo aplicables a elementos que puedan considerarse cortos, y los aplicables a soportes esbeltas. Los primeros pueden analizarse mediante teorías de primer orden, mientras que en los segundos el cálculo debe realizarse teniendo en cuenta los fenómenos de segundo orden.

Obviamente, es necesario, para enfrentarse al dimensionamiento o comprobación de un soporte disponer de un límite claro que permita distinguir rápidamente en qué grupo se sitúa el soporte en cuestión. Dicho límite se establece a través de la esbeltez límite inferior, y constituye

la frontera que separa los soportes en los que los esfuerzos de segundo orden pueden despreciarse en el cálculo (soportes cortos), de aquellos en los que deben ser tenidos en cuenta (soportes esbeltos).

Cuando la esbeltez limite inferior en una dirección principal se sobrepasa, es necesario hacer una comprobación en sección esviada –aplicando como mínimo las excentricidades dictadas en las diferentes normativas- especialmente si las cargas de diseño actúan solo en la otra dirección principal. La interacción de los momentos de primer orden sobre los dos ejes principales en una sección rectangular es pequeña cuando la excentricidad aplicada está cercana a uno de los ejes. Pero esto puede no ser cierto para los momentos de segundo orden, cuando las esbelteces para ambos ejes son muy diferentes. De hecho, la reducción de la capacidad del soporte para resistir el momento de eje fuerte puede tener dos valores distintos dependiendo de si se tiene en cuenta o no la influencia del eje débil. Un criterio para tener en cuenta la flexión biaxial, cuando las condiciones de carga recaen sobre único plano, no ha sido todavía encontrado.

El comportamiento de los soportes esbeltos sometidos a una sollicitación de flexocompresión esviada depende, entre otros parámetros, de la forma de la sección. Cuando la sección es rectangular, la flexibilidad del soporte es diferente en cada dirección principal de flexión. Así, tal y como indica Furlong (1979) [27], los efectos de segundo orden en soportes sometidos a flexión esviada están muy influenciados por la flexibilidad del eje débil del soporte, dando lugar a un acoplamiento entre los efectos de segundo orden en las dos direcciones principales de flexión (influencia del eje débil).

El EC-2 [20][21][22], CM-90 [3], ACI-318 (2008) [1] y EHE-08 [19] proponen que se debe considerar una cierta excentricidad en el cálculo de los soportes, producida por posibles imperfecciones que no pueden ser consideradas de otra manera.

Cuando los soportes están sometidos a esfuerzos de flexocompresión esviada, las distintas normativas amplifican el momento flector de primer orden en cada dirección independientemente. A partir de estos esfuerzos amplificados se realiza el diseño de la sección transversal del soporte. Según Bonet (2001) [4], estos métodos en flexión esviada pueden dar lugar a situaciones del lado de la inseguridad en soportes de sección rectangular para niveles de axil cercanos al axil crítico del soporte si la flexión más importante corresponde a la dirección de menor esbeltez del soporte (flexión respecto a su eje fuerte). Esta situación se debe a que dichos métodos no tienen en cuenta la influencia del eje débil en el comportamiento estructural del soporte.

Ello implica que para un soporte cualquiera sometido a flexión recta según el eje fuerte de la sección, una excentricidad accidental, le supone un pequeño momento flector perpendicular al principal. Esta situación de carga puede dar lugar a pérdidas de capacidad importantes. En este sentido resulta interesante obtener un límite para considerar o no un cálculo que tenga en cuenta dicha excentricidad accidental. A este límite se le denominará en adelante como esbeltez de esviaje.

El objetivo del presente estudio es obtener una expresión para el cálculo de la esbeltez de esviaje que constituya una frontera válida en el caso de soportes intraslacionales de sección rectangular. Para ello, tras un análisis de la situación actual del conocimiento, se determinarán

las variables que influyen con mayor importancia en el fenómeno, y se ensayarán numéricamente un número suficiente de soportes, que permita establecer las pautas de comportamiento del límite de esbeltez respecto a cada parámetro, y obtener finalmente una expresión de la esbeltez de esviaje. Esta expresión debe cumplir dos exigencias: ser de sencilla aplicación y ajustarse adecuadamente al fenómeno.

III NATURALEZA DEL PROBLEMA.

La determinación de la esbeltez límite inferior centra su importancia dentro de la problemática general del análisis de la inestabilidad de elementos comprimidos. Por ello, para abordar el estudio del límite de esbeltez es necesario esbozar los trazos esenciales del comportamiento de un soporte sometido a esfuerzos conjuntos de flexión y compresión.

En un cálculo a nivel de sección, donde los esfuerzos principales son un axil de compresión y un momento flector de eje fuerte, la aplicación de una excentricidad transversal al esfuerzo principal de flexión es poco relevante. Para que el cálculo de la esbeltez de esviaje tenga sentido, se debe realizar un cálculo teniendo en cuenta los efectos de segundo orden, siendo en este aspecto en el que se centra primeramente el estudio.

Por una parte, ya que la esbeltez límite se define como un valor que delimita la frontera entre la necesidad de tener o no en cuenta los esfuerzos de segundo orden en un soporte, en este capítulo se va a analizar la aparición de esfuerzos de segundo orden, desarrollando convenientemente los conceptos de no-linealidad geométrica y no-linealidad mecánica.

Además, se describirán las posibles formas de agotamiento de un soporte flexo-comprimido que se emplearán en el presente estudio, dentro de la teoría de los Estados Límite.

Por último, se completará una visión general del tema, incluyendo un apartado en el que se analizan las peculiaridades del comportamiento de un soporte sometido a una sollicitación de flexión esviada.

III.1 COMPORTAMIENTO NO-LINEAL. ESFUERZOS DE SEGUNDO ORDEN.

III.1.1 No-linealidad geométrica.

En un elemento estructural cualquiera, el concepto de no-linealidad geométrica se refiere a las diferencias observadas en los esfuerzos a lo largo de la pieza, según se realice el cálculo suponiendo el equilibrio en la geometría inicial o la deformada. Se denominan esfuerzos de primer orden a los calculados en la estructura sin deformar. Pero, si se supone la estructura en su posición deformada, los esfuerzos que equilibran cada sección difieren de los primeros. Precisamente esa diferencia es la motivada por la deformación real de la estructura, y se identifica como un esfuerzo de segundo orden. El fenómeno está representado en la Figura III.1.

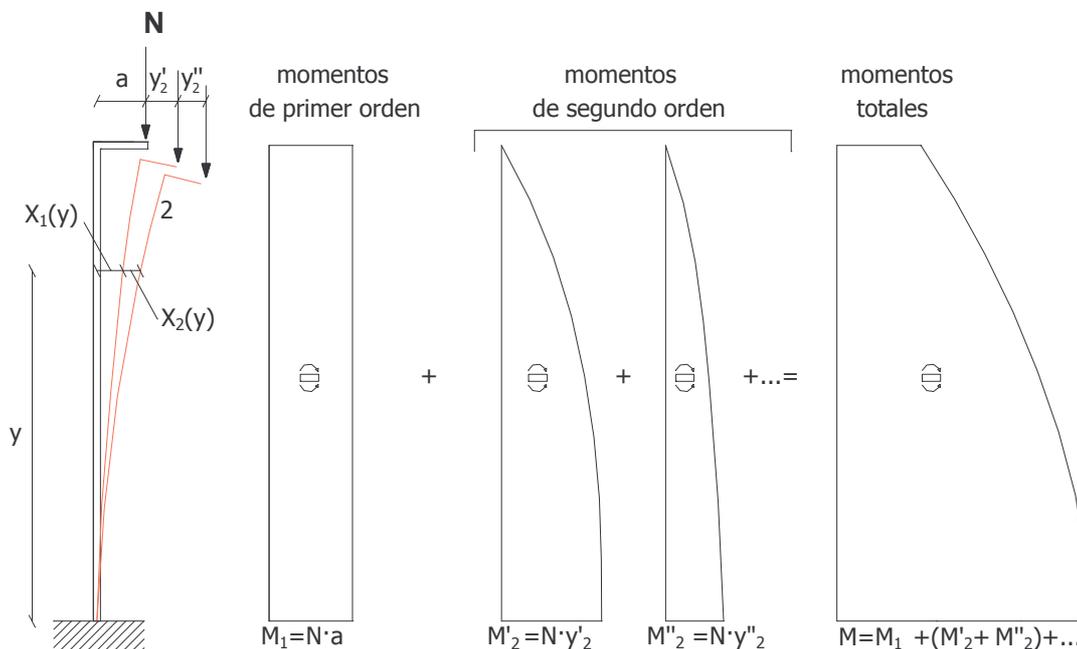


Figura III.1.- Incrementos sucesivos de los esfuerzos debidos a los efectos de segundo orden.

En la Figura III.1, la línea 1 representa la deformada de la columna provocada por los momentos de primer orden, $M_1 = N \cdot a$. Al deformarse el pilar según la línea 1 se genera un momento flector adicional en el empotramiento de la columna, que vale $M'_2 = N \cdot y'_2$. Este flector incrementa nuevamente la deformación del pilar, que pasa a ocupar la posición 2. Esto produce a su vez unos nuevos momentos adicionales en el empotramiento que valen $M''_2 = N \cdot y''_2$. Al aumentar los momentos adicionales, vuelve a aumentar la deformación del pilar, lo que produce unos nuevos momentos adicionales y así sucesivamente hasta que los incrementos de flecha o de momento adicional entre dos etapas sucesivas se puedan despreciar.

Por tanto, para analizar correctamente el pilar será necesario plantear las ecuaciones de equilibrio en la posición deformada y no sobre la forma original del pilar, y el cálculo deberá necesariamente realizarse mediante la teoría de segundo orden.

Dado que existe un aumento del flector por la deformación que adquiere el elemento, se intuye que puede haber un determinado axil a partir del cual los incrementos de flecha provocan que el soporte sea incapaz de alcanzar una posición de equilibrio estable. Dicho axil se denomina axil crítico, y la pérdida de estabilidad de la pieza es lo que se conoce como **pandeo**, o **inestabilidad a nivel de estructura**. La Figura III.2 muestra el comportamiento de la sección más solicitada de un soporte biarticulado constituido por un material elástico lineal, con axiles crecientes y cercanos al crítico.

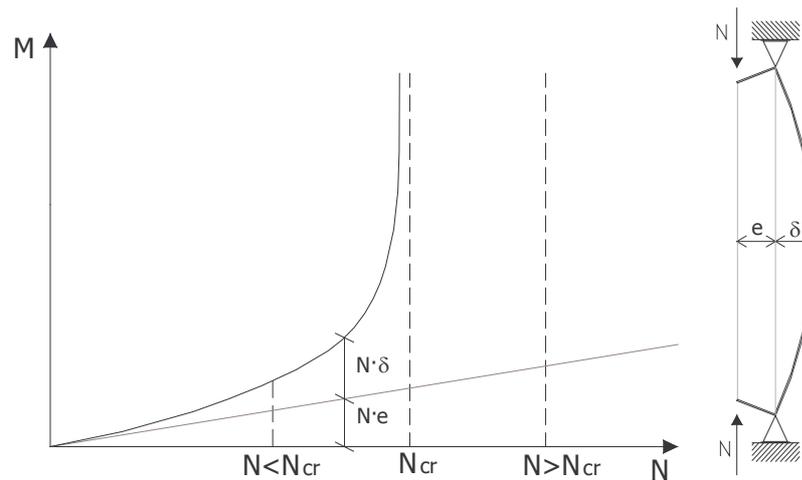


Figura III.2.- Comportamiento seccional axil-flector.

Un problema clásico de elasticidad consiste en obtener el axil crítico en un soporte biarticulado de sección constante (momento de inercia, I , constante) constituido por un material elástico lineal. Esta es la llamada solución de Euler.

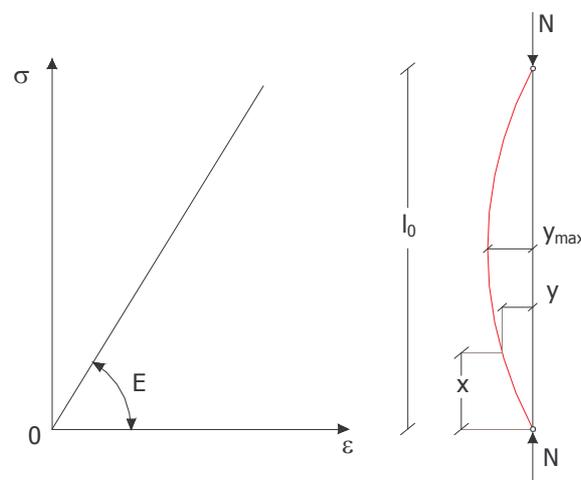


Figura III.3.- Ley constitutiva de un material elástico lineal. Soporte biarticulado.

Al plantear el equilibrio de la estructura en la posición deformada, la ecuación de equilibrio del esfuerzo flector viene dada por la expresión general:

$$N \cdot y = -E \cdot I \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene:

$$y = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{N}{EI}}x\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{N}{EI}}x\right)$$

Aplicando las condiciones de contorno, se calculan las constantes A y B:

$$x=0; \quad y=0; \rightarrow B = 0$$

$$x=l_0; \quad y=0; \rightarrow A \cdot \sin\sqrt{\frac{N}{EI}} \cdot l_0 \rightarrow A = 0; \quad \text{ó} \quad \sqrt{\frac{N}{EI}} \cdot l_0 = n \cdot \pi$$

Por tanto, para $n=1$ se obtiene la conocida carga crítica de Euler:

$$N_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l_0^2}$$

En el caso de que el axil sea igual al crítico, el equilibrio es inestable. Si $N < N_{cr}$ la pieza tiende a adoptar una posición de equilibrio y en cambio para valores de $N > N_{cr}$ es imposible encontrar una solución de equilibrio al problema.

III.1.2 No-linealidad de los materiales.

La segunda fuente de efectos de segundo orden es la no-linealidad mecánica. El hormigón armado, como material, no presenta una relación lineal entre las deformaciones y el nivel de tensiones existente en la pieza. En su respuesta deformacional influyen fenómenos que alejan el comportamiento de la variación lineal. Entre dichos fenómenos se encuentran la fisuración, la plastificación de las armaduras y la existencia de deformaciones diferidas (Figura III.4).

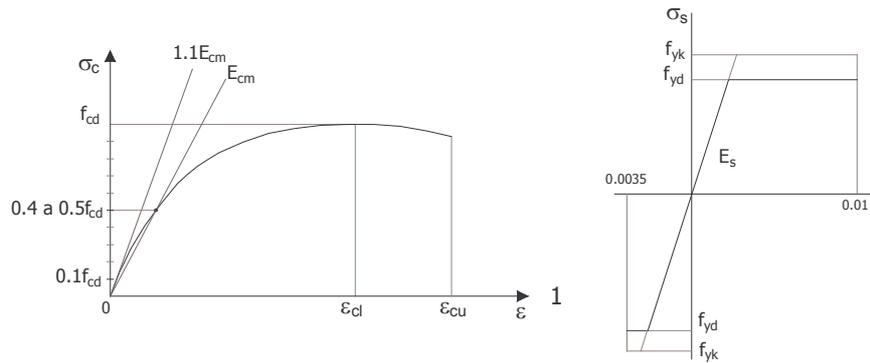


Figura III.4.- Diagramas tensión-deformación del hormigón y del acero

Al considerar el comportamiento no lineal del material en la ecuación general de equilibrio a nivel sección, se tiene que la inercia de la sección y el módulo de deformación no son constantes. En ese caso la curva carga-flecha no se aproxima asintóticamente al valor del axil crítico, sino que alcanza un máximo (Figura III.5). Este valor máximo se denomina axil crítico por analogía con el anterior, pero su magnitud es diferente a la del axil crítico de Euler asociado a un comportamiento elástico y lineal.

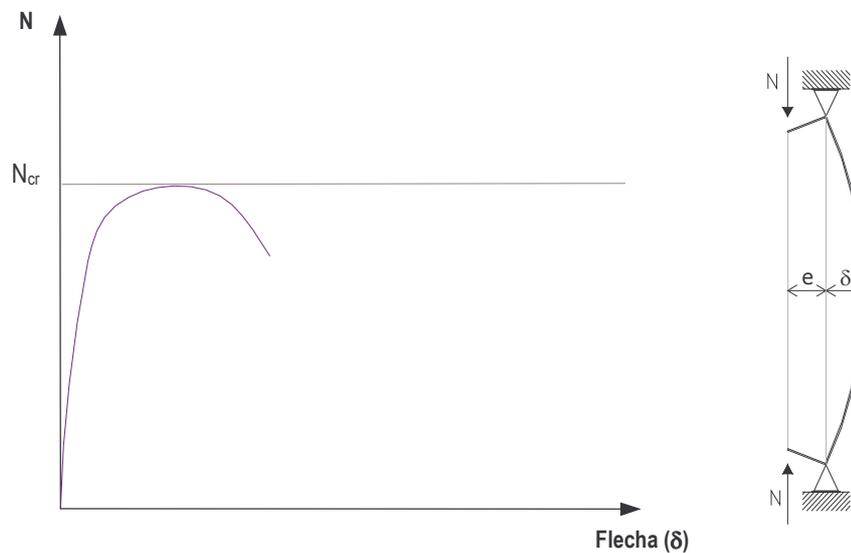


Figura III.5.- Relación carga-flecha de un soporte sometido a flexocompresión recta. Material no lineal.

Resultan interesantes las observaciones referentes a los fenómenos no lineales que destaca Marco Menegotto en su trabajo [6]:

- Los soportes esbeltos modifican sensiblemente la excentricidad de la carga a lo largo de todas las secciones transversales del soporte, lo cual es debido a los efectos de segundo orden. Esto se traduce en un incremento de los momentos.

- La reducción de la capacidad portante en los soportes esbeltos proviene de la interacción entre la no-linealidad geométrica y la no-linealidad mecánica. La primera tiene que ver con que no existe proporcionalidad entre deformación y esfuerzos, y la segunda viene de la amplificación del flector a causa de la flecha (Figura III.6).

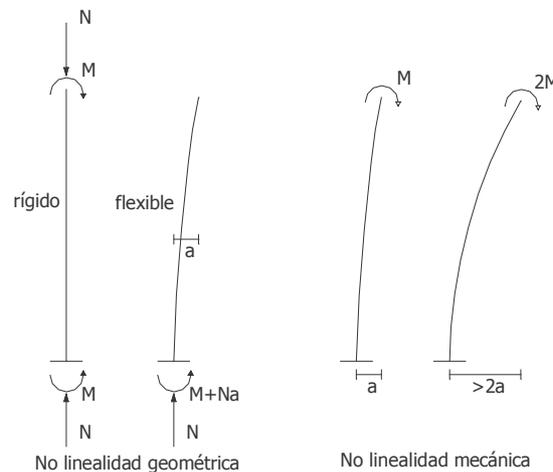


Figura III.6.- Aparición de efectos no lineales en un soporte flexo-comprimido.

- Las no linealidades afectan a la ductilidad, esto es, a la capacidad de adquirir deformación sin aumentar significativamente el momento aplicado. La disminución de ductilidad está causada porque el soporte esbelto comprimido no permite que se desarrolle la tensión suficiente como para que plastifiquen las armaduras, provocando una merma de ductilidad. Es decir, los efectos de segundo orden hacen que, en piezas fundamentalmente comprimidas, la rotura se produzca por inestabilidad y por el hormigón, sin permitir que se desarrolle la deformación de plastificación de las armaduras. Este fenómeno resulta especialmente crítico en el diseño sísmico.
- En la gráfica (Figura III.7), R representa la reducción de resistencia, y D es la energía que no puede ser disipada, como consecuencia de los efectos de segundo orden.
- Cuando la esbeltez límite inferior en una dirección principal se sobrepasa, es necesario hacer una comprobación en sección esviada –aplicando como mínimo las excentricidades dictadas en las diferentes normativas- especialmente si las cargas de diseño actúan solo en la otra dirección principal. La interacción de los momentos de primer orden sobre los dos ejes principales en una sección rectangular es pequeña cuando la excentricidad aplicada está cercana a uno de los ejes. Pero esto puede no ser cierto para los momentos de segundo orden, cuando las esbelteces para ambos ejes son muy diferentes. De hecho, la reducción de la capacidad del soporte para resistir el momento de eje fuerte puede tener dos valores distintos dependiendo de si se tiene en cuenta o no la influencia del eje débil.

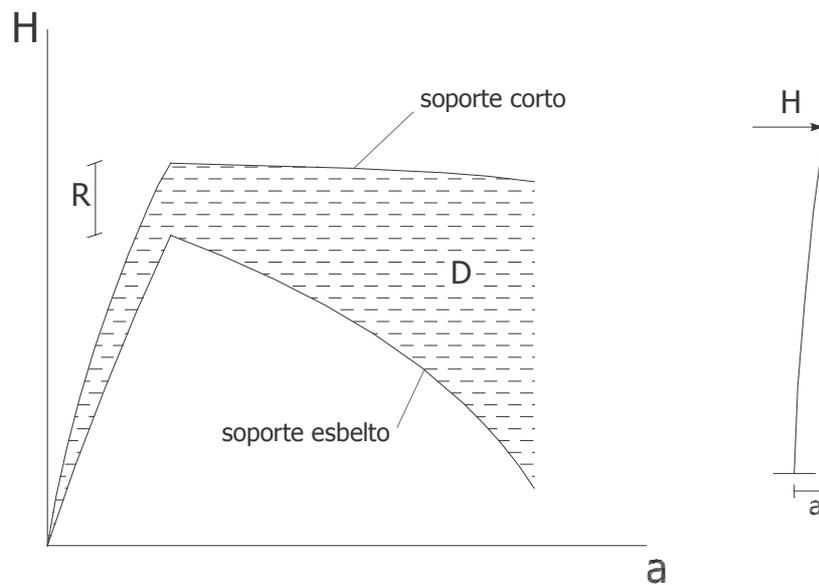


Figura III.7.- Diagramas carga-flecha de un soporte corto y otro esbelto.

III.2 DEFINICIÓN DEL ESTADO LÍMITE.

En un soporte sometido a esfuerzos combinados de compresión y flexión pueden darse dos formas de rotura distintas: inestabilidad o agotamiento. Para analizar estas vías de rotura es necesario estudiar conjuntamente la respuesta del soporte, a nivel sección, con el diagrama de interacción axil-flector y la curva axil-flecha, que incluye el axil crítico.

A continuación se va a desarrollar, en grandes trazos, la respuesta de un soporte comprimido, y sus posibles formas de rotura. Para ello, es necesario definir previamente un concepto clave en este estudio: la esbeltez.

La esbeltez es un parámetro adimensional que expresa generalmente una relación entre la longitud de pandeo de una pieza y una variable geométrica que caracterice su rigidez a flexión. Dependiendo del parámetro geométrico escogido, puede hablarse de varios tipos de esbeltez. Entre ellos, los más habituales son:

- Esbeltez geométrica: relaciona la longitud de pandeo con el canto de la pieza en la dirección de flexión considerada.

$$\lambda_g = \frac{l_p}{h}$$

Aunque ésta es la manera habitual de definir la esbeltez geométrica, también es posible definir una esbeltez geométrica respecto del ancho de la sección.

- Esbeltez mecánica: relaciona la longitud de pandeo con el radio de giro de la sección transversal correspondiente a la dirección de flexión considerada.

$$\lambda_m = \frac{l_p}{i}$$

En la Figura III.8 está representado un soporte con dos posibles formas de sección transversal, la sección A-A 1 y la A-A 2. Al ser ambas de igual canto, su esbeltez geométrica será idéntica. Sin embargo, si la esbeltez considerada es la mecánica, se tiene que el soporte de sección tipo 2 es más esbelto que el otro, puesto que el radio de giro de su sección transversal es menor que el de la sección tipo 1.

Este ejemplo evidencia que la esbeltez mecánica permite independizar el concepto de esbeltez de la forma de la sección transversal, al incluirla en su definición a través del radio de giro, i . Por ello, es la definición de esbeltez más utilizada. Sin embargo, en el presente estudio se empleará la formulación geométrica, ya las secciones de estudio serán siempre rectangulares y, en caso que la forma de la sección transversal no varíe, la esbeltez geométrica proporciona una idea más intuitiva de la dimensión longitudinal de la pieza.

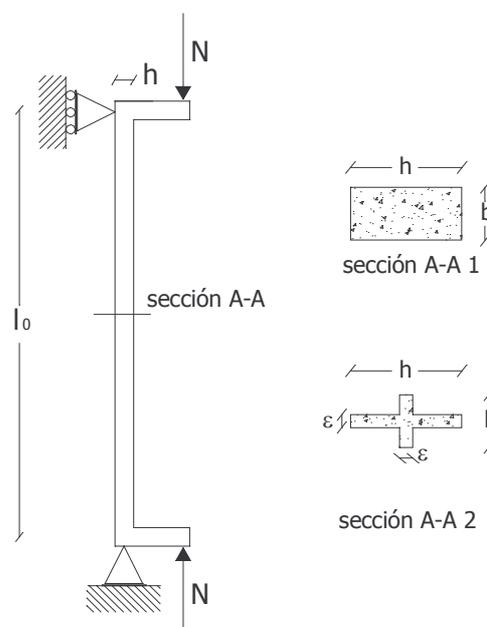


Figura III.8.- Diferencia entre esbeltez mecánica y geométrica.

En caso de sección rectangular, es fácil establecer la relación entre ambas formas de definición de la esbeltez:

$$\lambda_m = \sqrt{12} \cdot \lambda_g$$

Una vez definido el concepto de esbeltez, se pasa a analizar la respuesta de un soporte, planteando el siguiente problema:

1. Sea un soporte biarticulado sometido a sendos axiles de compresión en sus extremos, tal y como se representa en la Figura III.9.

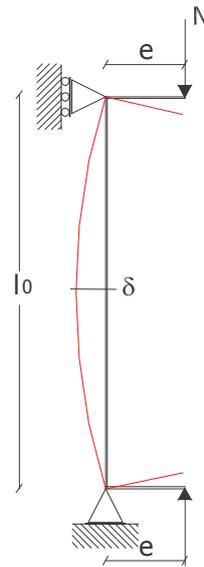


Figura III.9.- Soporte tipo considerado.

2. Para cada nivel de axil la sección transversal más solicitada (en este caso, la sección de centro luz) resistirá un momento de rotura M . A la representación gráfica de los pares $N-M$ se le llama **diagrama de interacción**, y su forma es similar a la que sigue (Figura III.10).

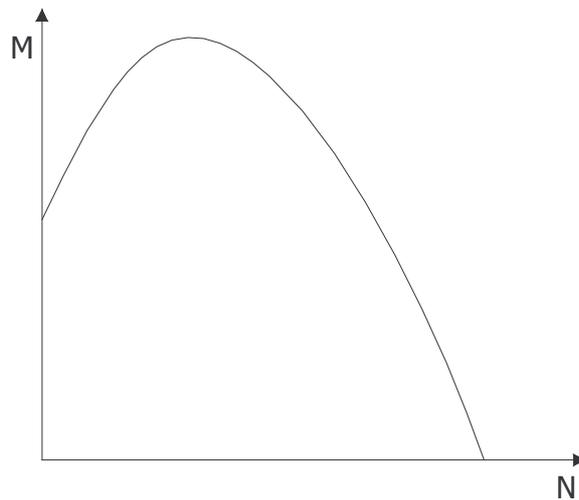


Figura III.10- Diagrama de interacción de la sección transversal.

3. El máximo momento que resiste la sección transversal más solicitada, para cada nivel de axil, tendrá dos componentes (Figura III.9):

$$M_{tot} = M^I + M^{II}$$

donde:

M^I es el momento de primer orden, de valor: $M^I = N \cdot e$

M^{II} es el esfuerzo de segundo orden, de valor: $M^{II} = N \cdot \delta$

Por otra parte, si la pieza es de esbeltez nula se cumple necesariamente que $M^{II} = 0$. Esto significa que el diagrama de interacción de la sección transversal coincide con la de un supuesto soporte de esbeltez nula.

1. Se llama diagrama de interacción de la pieza esbelta a la representación de los pares $(N; M^I)$ de esfuerzos aplicados en los extremos de la pieza de esbeltez λ . A M^I , es decir, al momento de primer orden en los extremos, se vendrá a denominar en este trabajo M_λ , admitiendo de esta forma que el momento hace referencia a un soporte con una esbeltez determinada, λ . Dada una esbeltez, más adelante se distinguirá cuál es el soporte sometido a flexocompresión recta y cuál es el sometido a flexocompresión esviada.

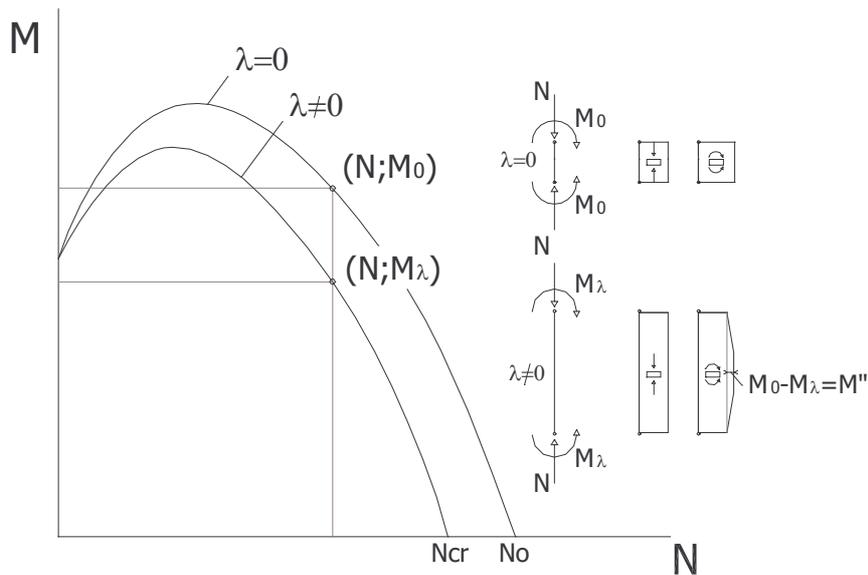


Figura III.11.- Diagramas de interacción de la pieza corta y de la pieza esbelta.

Por otro lado, ya se vio que al analizar la respuesta del soporte en relación con el diagrama de interacción axil-flector de la sección, se observa (Figura III.5) que puede producirse un axil máximo, N_{cr} , de forma que para axiles mayores no se puede encontrar el equilibrio del soporte (inestabilidad o pandeo). Si se superponen ambas gráficas (Figura III.5 y Figura III.11), puede determinarse la forma de rotura que se dará en el soporte. Se está, pues, en condiciones de definir los estados límite que se pueden dar en el soporte.

Un soporte de esbeltez λ_i alcanza su **estado límite último de inestabilidad**, para un determinado nivel de axil, N^* , si se ha alcanzado el axil crítico ($N^*=N_{cr}$) de la sección para una determinada excentricidad. (Figura III.12)

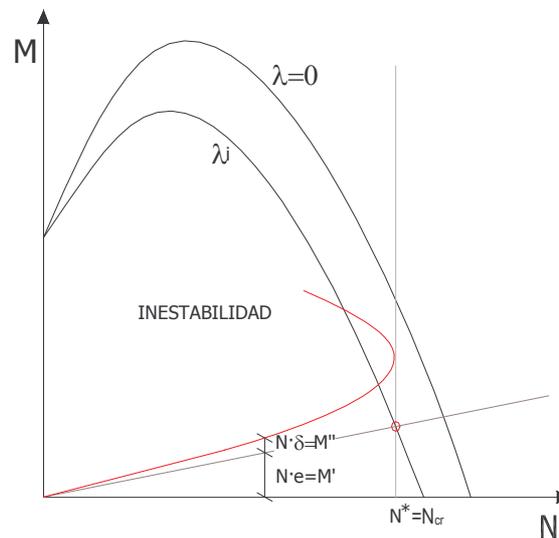


Figura III.12.- Estado límite último de inestabilidad.

Sin embargo, cuando un soporte de esbeltez λ_i ha alcanzado el **estado límite último de agotamiento**, para un determinado nivel de axil, N^* , los esfuerzos en la sección son tales que provocan el agotamiento de la misma por sollicitaciones normales. En el gráfico siguiente (Figura III.13) se ve reflejada esta circunstancia, ya que la curva de color rojo (curva 1), que corresponde al comportamiento de la sección transversal, tiene un punto de intersección con el diagrama de interacción de la sección (recuérdese que este diagrama representa los pares axil-flector últimos de la sección) para un nivel de axil menor que el crítico.

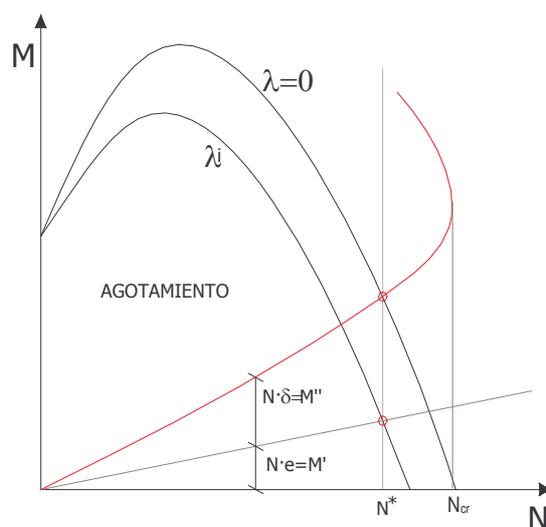


Figura III.13.- Estado límite último de agotamiento.

III.3 FLEXIÓN ESVIADA.

El análisis hecho en el punto anterior suponía un soporte sometido a flexocompresión recta. El comportamiento de un elemento bajo una sollicitación de flexión esviada precisa algunos comentarios adicionales.

Se supone, en primer lugar, un soporte aislado de sección rectangular sometido a flexocompresión esviada. El análisis que sigue es aplicable a un **soporte no arriostrado**, es decir, un soporte en el cual los desplazamientos laterales no están impedidos en ningún punto, salvo en los extremos.

El diagrama de interacción de pares ($N; M$) correspondiente a flexión recta, se convierte en sollicitación esviada en una superficie de interacción ($M_y; M_x; N$) que caracteriza el comportamiento de la pieza esbelta.

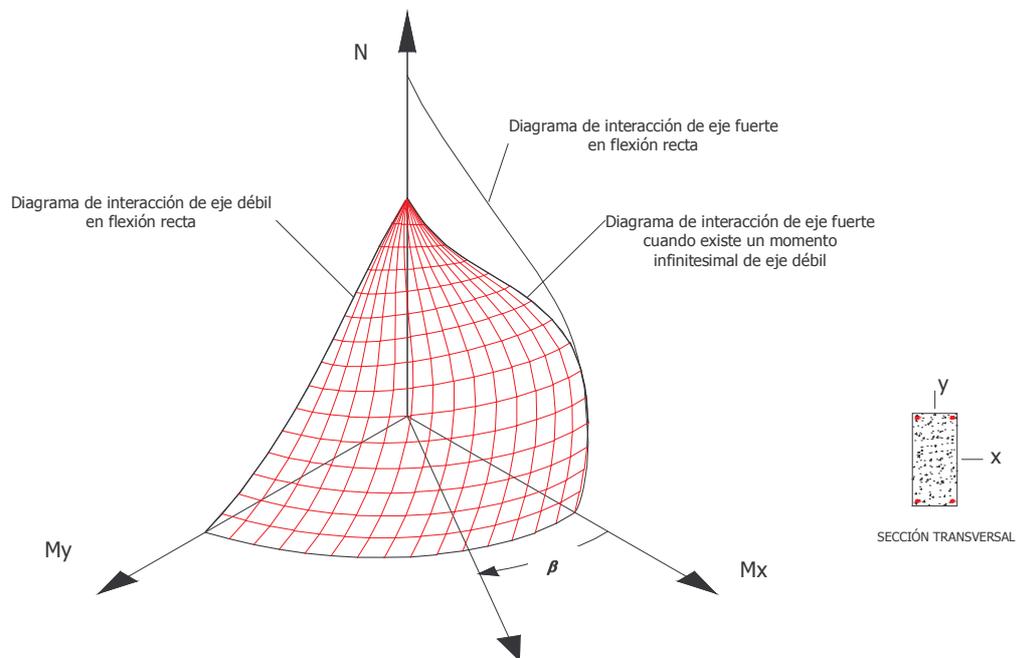


Figura III.14.-Superficie de interacción de la pieza esbelta (Bonet (2001)).

La intersección de la superficie de interacción con los planos coordenados determina dos diagramas de interacción en flexión recta, correspondientes a cada uno de los ejes principales de flexión. Son dos diagramas diferentes porque, al ser la sección rectangular, la esbeltez cambia dependiendo del eje de flexión que se considere. Así, el de eje fuerte (eje x) tiene un axil crítico mayor que el de eje débil. La forma de los diagramas de interacción en flexión recta es manifiestamente diferente dependiendo del eje de flexión que se considere, porque se ha representado un caso en que la esbeltez de eje débil es mucho mayor que la de eje fuerte (Figura III.14).

En el diagrama $N-M_x$ se observa la existencia de un punto de bifurcación, N^* , a partir del cual se separan las curvas correspondientes a flexión recta y flexión esviada de eje fuerte. En realidad, en ambos casos el flector que solicita la pieza tiene componente únicamente en el eje fuerte. Sin embargo, en caso de no estar arriostrado lateralmente (lo cual es equivalente a flexión esviada con un momento infinitesimal de eje débil), el soporte empieza flectando respecto al eje fuerte (tramo común, en la gráfica), pero acaba flectando respecto al eje débil al superarse el axil de bifurcación, y su axil crítico será el asociado al eje débil. Esta circunstancia puede observarse en la Figura III.14 y Figura III.16.

Cualquier otra sollicitación de flexión esviada se define a través del ángulo β que forma el momento flector, M , con el eje fuerte (Figura III.15).

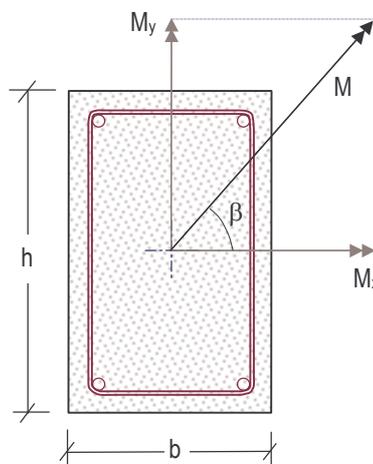


Figura III.15.- Esfuerzo flector de esviaje β .

En caso de flexión esviada de ángulo β , el diagrama de interacción puede obtenerse por intersección de la superficie de interacción con el plano $N-M$ (Figura III.16), en el que el eje M se obtiene por composición vectorial de los momentos en los ejes principales.

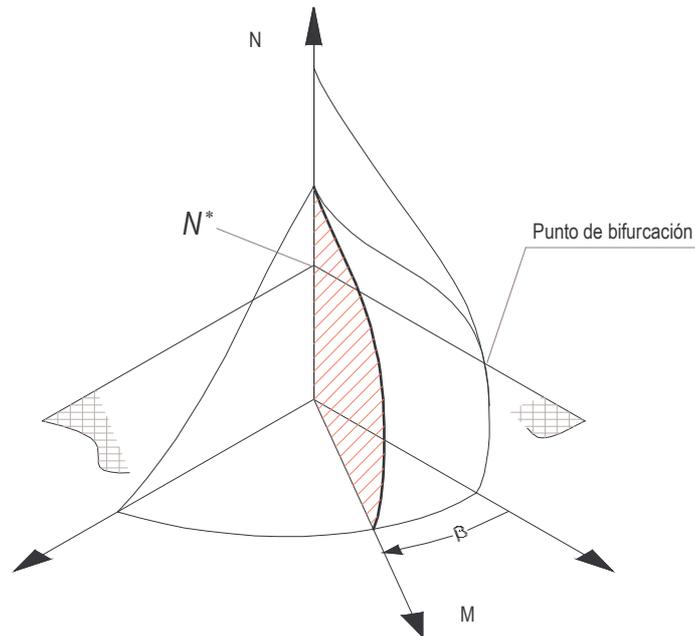


Figura III.16.- Obtención del diagrama de interacción asociado al ángulo β .

Una última observación interesante, que atañe a la forma de cálculo habitual en flexión esviada, es la que se extrae de la Figura III.17. En la pieza esbelta considerada, al hacer un corte a la superficie de interacción por un plano horizontal se obtienen los diagramas de interacción M_x - M_y para cada nivel de axil. Si el corte se realiza para un axil mayor que N^* debe tenerse cuidado al linealizar el diagrama M_x - M_y , ya que en esa situación el flector último en el eje fuerte, al no estar arriostrado el soporte, no coincide con el que se obtendría suponiendo una sollicitación de flexión recta.

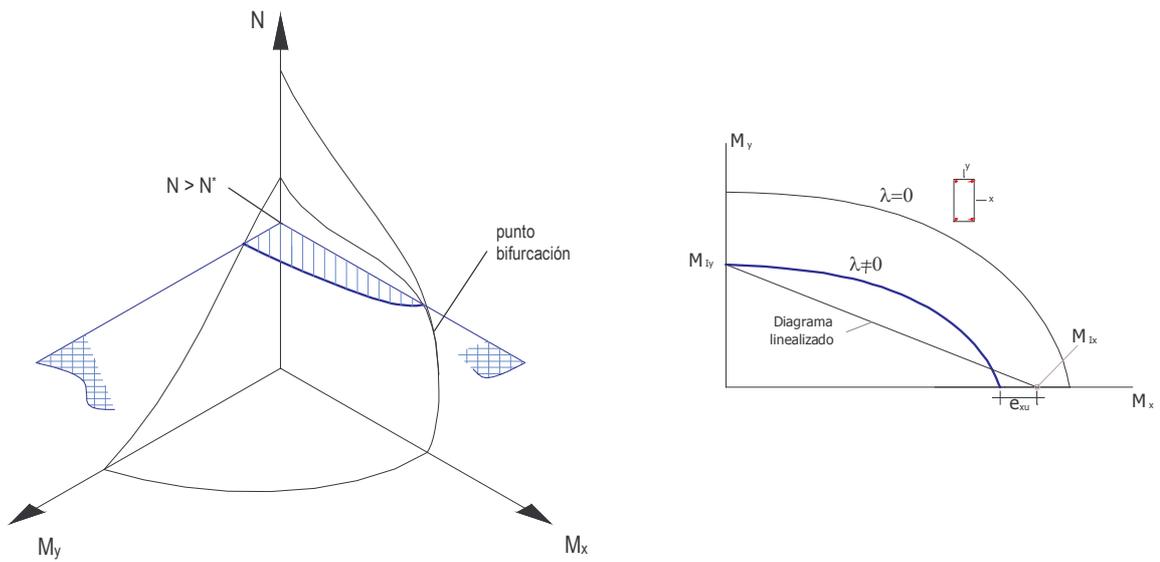


Figura III.17.- Cálculo linealizado. Caso $N > N^*$.

Como se aprecia en la Figura III.17, no tener en cuenta que se ha rebasado el punto de bifurcación puede llevar a situaciones del lado de la inseguridad, al emplear para el cálculo el diagrama de interacción linealizado. Teóricamente, el punto de bifurcación se encuentra en el punto de axil nulo, ya que a partir de ahí, siempre habrá una diferencia entre el soporte sometido a flexión recta y a flexión esviada de eje fuerte, aunque esta diferencia es despreciable para valores bajos de axil.

IV ESTADO DEL ARTE.

En los últimos años, distintos autores han abordado el problema general de la inestabilidad estructural y los fenómenos de segundo orden y, en particular, el de los límites de esbeltez. Todos ellos parten de la necesidad de revisión y mejora de las propuestas recogidas en las normativas. La crítica más común formulada al respecto es que las esbelteces límite proporcionadas resultan excesivamente conservadoras en la mayoría de casos, obligando a realizar innecesarios cálculos complejos, mientras que, sin embargo, en otros casos quedan del lado de la inseguridad. Una segunda carencia detectada en la normativa es la omisión sistemática en las expresiones de variables fundamentales del comportamiento analizado, como el coeficiente de fluencia o la resistencia del hormigón. Si añadimos además, que en este estudio se busca, no sólo tener en cuenta los efectos de segundo orden, sino que además, se trata de un caso particular como es la búsqueda de una expresión que permita distinguir si es o no necesario un cálculo a flexión esviada, las respuestas encontradas en la literatura disminuyen hasta tal punto que únicamente unos pocos autores hacen referencia al problema..

En este capítulo se han destacado los autores que de alguna manera han hecho referencia a la influencia del eje débil en el comportamiento a flexión recta de soportes de hormigón. Además, en las diferentes normativas se pueden encontrar indicaciones de que es necesario tener en cuenta este efecto en el cálculo, aunque únicamente en la BS-8110 (2008) [18] da criterios de aplicación.

IV.1 ENSAYOS EXPERIMENTALES.

IV.1.1 Furlong [27].

En el año 1979, Richard W. Furlong realizó una series de ensayos experimentales sobre probetas rectangulares de hormigón armado de dimensiones 13x23 cm y 13x28 cm. Sus análisis le llevaron a darse cuenta de que “los efectos de la esbeltez en flexión esviada estaban

ampliamente supeditados por la flexibilidad del eje débil, y se encontraron diferencias significantes entre el ángulo de esviaje de la fibra neutra y el ángulo de esiaje de la carga excéntrica”.

Tras haber ensayado 23 soportes distintos de hormigón armado de sección rectangular o parcialmente redondeada, la comparación entre fuerzas y desplazamientos medidos y obtenidos analíticamente le hicieron llegar a las siguientes conclusiones:

- La diferencia entre el ángulo que forma la fibra neutra y la carga aplicada recae hacia el eje débil. Pequeñas excentricidades sobre el eje fuerte podría producir grandes diferencias entre ambos ángulos, pero la tendencia a girar alrededor del eje del soporte es casi imposible de detectar.
- La integración de las tensiones compatibles con las fuerzas medidas muestran claramente que la representación del diagrama rectangular de tensiones del hormigón no es la que se produce en el fallo de la sección. El uso de un diagrama parábola-trapecio produce resultados más cercanos con el comportamiento observado.
- Los valores de la rigidez a flexión, EI , fueron evaluados midiendo desplazamientos transversales antes del fallo de los soportes. Los valores de EI parecen incrementarse a medida que la relación entre la carga última del soporte y la carga aplicada aumenta. Las ecuaciones propuestas por el ACI 318-77 producen valores en general mayores que los derivados de los ensayos.

IV.1.2 Mavichak y Furlong [30].

Los autores realizan un estudio acerca de la rigidez de soportes de hormigón armado solicitados a flexocompresión esviada. Ensayan nueve soportes de sección rectangular y quince de sección parcialmente redondeada, con una carga axial constante y en los que aumentan el momento aplicado hasta que se produce el fallo. Durante los ensayos se realizaron medidas de los desplazamientos de los soportes para todos los niveles de carga.

Todas las medidas realizadas fueron comparadas con un modelo de elementos finitos que iba siendo modificado para obtener resultados que fueran en concordancia con lo que se estaba midiendo. También fue examinada la influencia de los efectos de la esbeltez sobre el eje débil con ayuda del método de amplificación de momentos, que se empleó por separado para cada eje principal de flexión.

El análisis del modelo de elementos finitos fue empleado para producir más datos analíticos para compararlos con métodos de análisis aproximados. Aproximaciones simples de la rigidez a flexión EI no eran consistentes con los datos ensayados cuando los niveles de carga variaban y cuando las esbelteces eran grandes.

La conclusión más importante a la que llegaron los autores fue la siguiente. El ángulo de la carga y el ángulo de la fibra neutra no es el mismo. La diferencia entre ambos siempre mostraba que la fibra neutra tiende hacia el eje de flexión más débil. Esa diferencia es importante

y no puede ser omitida en el análisis. Sin embargo, no observaron ningún efecto del nivel de carga en este aspecto.

La deformada del soporte provocó que la relación entre el momento sobre el eje fuerte y el momento sobre el eje débil variara a lo largo del mismo debido a su esbeltez. Estos soportes flectaban más sobre el eje débil que sobre el eje fuerte, lo que provocaba un mayor momento sobre ese eje débil.

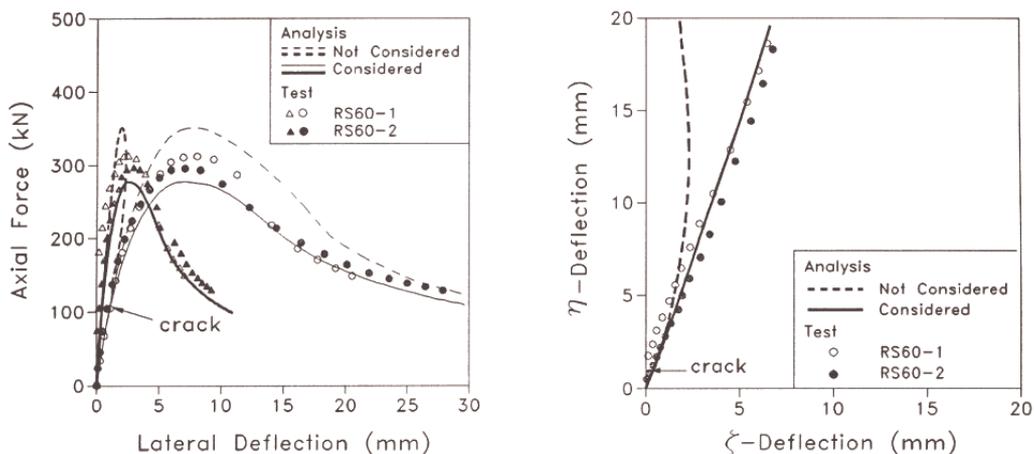
Al igual que en el caso anterior, estos ensayos muestran una influencia del eje débil, pero ninguno de los autores realiza propuestas al respecto, únicamente resaltan el tema.

IV.1.3 Jin-Keun Kim y Sang-Son Lee [31].

“Cuando las tensiones se encuentran cerca del límite elástico y se produce la rotura de un soporte sometido a axil y flexión esviada, la curvatura alrededor de cada eje principal de la sección puede estar influenciada por la fuerza axil y los momentos alrededor de ambos ejes principales. Se debe principalmente a la traslación y la rotación de los ejes principales de la sección transversal tras la rotura.”

El mecanismo de fallo de un soporte de hormigón armado con diversas condiciones de carga, cambia dependiendo de si se produce o no la rotura del mismo. Si no se produce, la fuerza axil y el momento aplicados al soporte no tendrán efectos acoplados. De todas formas, en rotura, la fuerza axil aplicada sobre el centroide de la sección transversal puede influir sobre la curvatura y el momento flector sobre el eje principal de la sección puede también influir sobre las fuerzas normales en el centroide de la sección.

Además, en un soporte de hormigón armado sometido a una sollicitación de flexión esviada, la curvatura alrededor de cada eje principal de la sección se ve afectada por los momentos flectores de eje fuerte y eje débil. Si el efecto del acoplamiento no se considera, la carga última estará sobreestimada y la tendencia de la deformada puede ser muy diferente al comportamiento real tras la rotura (Figura IV.1):



(a) Axial force-lateral deflection relation

(b) Lateral deflection trajectory

Figura IV.1.- Influencia de la interacción entre los momentos flectores de eje fuerte y eje débil.

Tras analizar los ensayos llevados a cabo por Furlong [27], los autores concluyen que es necesario proponer un método que mantenga acopladas la flexión sobre el eje débil y sobre el eje fuerte de la sección, ya que en caso de no considerarlo, la carga última estaría sobreestimada y las deformaciones producidas en rotura serían muy diferentes de las estimadas.

IV.1.4 Pallarés [29].

Pallarés estudia el comportamiento de soportes de sección rectangular de hormigón armado sometidos a flexocompresión esviada, para lo que realiza un programa experimental de 56 soportes fabricados con hormigón de alta resistencia. Analiza el acoplamiento de los efectos de segundo orden en cada dirección principal de flexión, observando que el comportamiento del soporte está muy influenciado por la flexibilidad del eje débil.

Su conclusión más relevante, en lo que a este estudio se refiere, es que “ el comportamiento de los soportes sometidos a una sollicitación de flexocompresión recta de eje fuerte difiere si tiene impedida la flexión respecto al eje débil. Si no está impedida y el modo de fallo del soporte es por inestabilidad, existe una gran influencia del eje débil del soporte. Esta influencia, que se refleja en la pérdida de capacidad resistente, es más importante en los soportes de mayor esbeltez”.

Según Pallarés [29], el comportamiento de los soportes queda evidenciado en el análisis de la inclinación de la fibra neutra, tal y como anteriormente dijeron Furlong y Mavichak [27][30]. Destaca también que ni el ACI-318 (08) [1] ni el EC-2 (2004) [22] definen ningún criterio acerca de cuándo hay que tener en cuenta la influencia del eje débil.

IV.2 MÉTODOS DE ANÁLISIS EN FLEXIÓN ESVIADA.

IV.2.1 Métodos generales

Para analizar las estructuras de hormigón teniendo en cuenta el comportamiento no-lineal de los materiales y los efectos de segundo orden pueden aplicarse métodos generales de análisis no-lineal o métodos simplificados. Los métodos generales más habitualmente utilizados se citan a continuación indicando sus características más relevantes y sus posibilidades para el análisis no-lineal de estructuras de hormigón:

- Método de los elementos finitos (planteamiento en rigidez): este procedimiento plantea como ventaja que es aplicable de forma sencilla a cualquier tipología estructural, siendo relativamente fácil incorporar los aspectos relacionados con el comportamiento del hormigón armado. A continuación se describirán las características más relevantes de este método.
- Método de los elementos finitos (planteamiento en flexibilidad): este planteamiento tiene como ventaja frente al de rigidez que la solución es más exacta debido a que interpola los esfuerzos. Sin embargo, numéricamente su formulación es más complicada, y requiere un mayor número de operaciones en cada iteración. Este

planteamiento es muy eficaz para el caso del análisis de estructuras solicitadas a acciones sísmicas.

- Método de integración de las curvaturas: se trata de un método eficaz para analizar soportes aislados, sin embargo para el caso de estructuras reticuladas su aplicación es más complicada. El procedimiento de cálculo para analizar una columna exenta, consiste en subdividir el soporte en un número suficiente de tramos representativos, y mediante un proceso iterativo encontrar la solución que satisface las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones y, todo ello teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas de los materiales considerados.
- Método de las diferencias finitas: habitualmente, este método se aplica para el análisis de soportes aislados. Sin embargo, la utilización de este procedimiento para estructuras reticulares se complica no siendo eficaz su empleo.

Cualquiera de los métodos mencionados implican un tiempo importante de computación, necesario si lo que se pretende es obtener una solución exacta que tengan en cuenta el acoplamiento de las flexiones en los ejes débil y fuerte, pero poco funcional en cualquier caso. Tanto Bonet (2004) [33] como Kim y Lee [31] hacen referencia a la importancia de la influencia del eje débil, pero el objetivo es encontrar una expresión sencilla que permita evitar la búsqueda de costosas soluciones exactas.

IV.2.2 Métodos simplificados

A la hora de realizar un análisis simplificado del problema en cuestión, las diferentes normativas lo que proponen es considerar una serie de imperfecciones geométricas a través de excentricidades ficticias. De esta manera se aumentan los esfuerzos de cálculo que son sencillos de abordar en un cálculo manual, o que no necesitan grandes cantidades de tiempo de computación, a cambio de omitir esfuerzos que complicarían sobremanera el cálculo.

Para un cálculo en flexión esviada, la norma española EHE-08 [19] dice que, para elementos de sección rectangular y armadura constante se puede realizar una comprobación en cada eje principal de sección por separado en caso de pequeñas excentricidades. Cuando las excentricidades se salen de los rangos marcados por la instrucción, la norma considera que “el soporte se encuentra en buenas condiciones respecto a pandeo” si se cumple la siguiente expresión:

$$\frac{M_{xd}}{M_{xu}} + \frac{M_{yd}}{M_{yu}} \leq 1$$

M_{xd} es el momento de cálculo en la dirección x, en la sección crítica de comprobación considerando los efectos de segundo orden.

M_{yd} es el momento de cálculo en la dirección y, en la sección crítica de comprobación considerando los efectos de segundo orden.

M_{xu} es el momento máximo en la dirección x, resistido por la sección crítica.

M_{yu} es el momento máximo en la dirección y, resistido por la sección crítica.

Para el cálculo de los momentos considerando los efectos de segundo orden, la norma propone tener en cuenta una excentricidad adicional, función del armado del soporte, la deformación de las armaduras, la geometría de la sección transversal, la longitud de pandeo y las excentricidades de cálculo.

El EC-2 (2004) [22] propone tener en cuenta los efectos de las imperfecciones geométricas mediante una inclinación del soporte. En común con la norma española es el hecho de tener en consideración la longitud de pandeo del soporte.

En el caso de soportes aislados, la normativa europea permite convertir la imperfección en forma de inclinación del soporte tanto en una excentricidad como en una fuerza horizontal. En el primer caso, la excentricidad aplicada depende únicamente de la longitud de pandeo del soporte. En el caso de la fuerza transversal, su valor es proporcional al axil de compresión al que está sometido el soporte, además de ser también función de la longitud de pandeo del mismo. No se tiene en cuenta, por tanto, la geometría de la sección transversal.

El CM-90 [3] sigue los mismos criterios que el EC-2 para el análisis de soportes aislados de hormigón armado. Permite considerar los efectos de segundo orden mediante la aplicación de una excentricidad adicional que sólo depende de la longitud de pandeo de la pieza en cuestión, o mediante una fuerza horizontal proporcional al axil que solicita el soporte.

Por último, la norma británica BS 8110 (08) [18] postula que cuando el momento es significativo en ambos ejes, los momentos adicionales se deben calcular en ambos ejes principales, que junto con los momentos de primer orden proporcionan los esfuerzos de diseño en ambas direcciones.

Las cuatro normativas citadas señalan la necesidad de considerar los esfuerzos de segundo orden, pero no tienen en cuenta la interacción entre ejes fuerte y débil en su formulación. A este respecto, el FIB [32], resalta que, cuando la esbeltez límite inferior en una dirección principal se sobrepasa, es necesario hacer una comprobación en sección esviada – aplicando como mínimo las excentricidades dictadas en las diferentes normativas- especialmente si las cargas de diseño actúan solo en la otra dirección principal. La interacción de los momentos de primer orden sobre los dos ejes principales en una sección rectangular es pequeña cuando la excentricidad aplicada está cercana a uno de los ejes. Pero esto puede no ser cierto para los momentos de segundo orden, cuando las esbelteces para ambos ejes son muy diferentes. De hecho, la reducción de la capacidad del soporte para resistir el momento de eje fuerte puede tener dos valores distintos dependiendo de si se tiene en cuenta o no la influencia del eje débil.

En cuanto a los autores, Bonet (2004) [33] es el único que propone un método simplificado para el diseño de soportes esbeltos de hormigón armado solicitado por esfuerzos de axil y flexión esviada. El método se basa en la amplificación de momentos, y propone una expresión para la rigidez a flexión, EI , con la que se obtiene el factor de amplificación de momentos para simple y doble curvatura. Bonet obtiene una rigidez equivalente a partir de la rigidez del acero y de la del hormigón modificada mediante lo que llama un factor de rigidez efectiva.

Además de la longitud del soporte, Bonet tiene en cuenta la resistencia a compresión del hormigón, parámetro que nadie había incluido hasta el momento como variable.

Hasta el momento se han visto los métodos simplificados propuestos en diversas normativas para tener en cuenta los efectos de segundo orden. También se ha señalado la importancia de tener en cuenta la influencia del eje débil sobre los soportes, y la influencia del acoplamiento entre los esfuerzos de eje débil y eje fuerte. Sin embargo, la única norma que propone un criterio a partir del cual se debe considerar un cálculo a flexión esviada es la BS 8110 (08) [18].

En el apartado 3.8.3.4 dice que en los casos en los que la relación entre la longitud efectiva del soporte y el canto del mismo (esbeltez geométrica respecto al eje fuerte) sea superior a 20, “la sección deberá ser diseñada a flexión esviada, siendo cero el momento de primer orden del eje débil”.

En el apartado siguiente, el 3.8.3.5, señala que cuando la diferencia entre el lado mayor y el lado menor de un soporte sea del triple o más (relación canto/ancho mayor o igual que tres), “la sección deberá ser diseñada a flexión esviada, siendo cero el momento de primer orden del eje débil”.

Así pues, éste es el único criterio recogido en la literatura para, de manera simplificada, distinguir qué soportes deben ser calculados teniendo en cuenta la flexión esviada y cuáles no.

IV.3 ESBELTEZ LÍMITE

IV.3.1 Flexión recta

El tratamiento que se da en las diversas normativas para el cálculo de la esbeltez límite en flexión recta es muy diverso.

La instrucción española EHE-08 [19] considera despreciables los efectos de segundo orden en piezas sometidas a compresión que sufran una pérdida de capacidad resistente inferior al 10% respecto a la de la sección transversal. Propone un límite inferior de esbeltez mecánica a través de la siguiente expresión:

$$\lambda_{\text{lim},m} = 35 \cdot \sqrt{\frac{C}{\nu} \cdot \left[1 + \frac{0,24}{e_2/h} + 3,4 \cdot \left(\frac{e_1}{e_2 - 1} \right)^2 \right]} \leq 100$$

donde:

ν , axil reducido

e_2 , excentricidad de primer orden en el extremo del soporte con mayor momento considerada positiva.

e_1 , excentricidad de primer orden en el extremo del soporte con menor momento, positiva si tiene el mismo signo que e_2 .

En estructuras traslacionales se tomará e_1/e_2 igual a 1.

h , canto de la sección en el plano de flexión considerado.

C, coeficiente que depende de la disposición de armaduras cuyos valores son:
 0,24 para armadura simétrica en dos caras opuestas en el plano de flexión.
 0,20 para armadura igual en las cuatro caras.
 0,16 para armadura simétrica en las caras laterales.

Por su parte, la instrucción británica BS 8110 (08) [18] propone un límite inferior de esbeltez geométrica constante, en soportes intraslacionales de valor, $\lambda_{lim,g} = 15$.

El EC-2 se trata de una norma muy dinámica, en constante revisión y evolución. Basta mencionar que la expresión del límite de esbeltez, por ejemplo, sufrió variaciones cualitativas importantes en los textos de octubre de 2001 [21] y diciembre de 2004 [22].

En su versión actual, la expresión que permite obtener una esbeltez límite marca un cambio en la manera de abordar el problema. La propuesta recogida para el cálculo del límite inferior de esbeltez es la siguiente:

$$\lambda_{lim,m} = A \cdot B \cdot C \cdot \frac{20}{\sqrt{\nu}}$$

donde:

$$A = \frac{1}{(1 + 0.2 \cdot \varphi)} \quad (\text{si } \varphi \text{ es desconocido, puede tomarse } A=0.7)$$

$$B = \sqrt{1 + 2 \cdot \omega} \quad (\text{si } \omega \text{ es desconocido, tomar } B=1.1)$$

$$C = 1.7 - r_m \quad (\text{si } r_m \text{ es desconocido, tomar } C=0.7)$$

$$\nu = \frac{N_d}{(A_c \cdot f_{cd})} \quad \text{axil reducido}$$

φ coeficiente de fluencia

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{(A_c \cdot f_{cd})} \quad \text{cuantía mecánica de armadura}$$

$$r_m = \frac{M_{01}}{M_{02}} \quad \text{relación de momentos de primer orden en los extremos, con } |M_{02}| \geq |M_{01}|$$

Por tanto, en caso de no conocer los valores de las variables, la esbeltez límite sería:

$$\lambda_{lim,m} = \frac{10.78}{\sqrt{\nu}}$$

Corresponde a una situación conservadora, de armadura mínima, fluencia y excentricidad constante (si se considera axil constante a lo largo de la pieza, el factor r_m es equivalente a la relación de excentricidades, α , en la que los parámetros toman unos valores:

$$\varphi=2.14$$

$$\omega=0.105$$

$$r_m=1$$

La formulación propuesta por el Eurocódigo 2 resulta muy completa, ya que por primera vez una norma incluye todas las variables principales y, en particular, la fluencia. Tiene además la ventaja de ser una expresión sencilla, que refleja el comportamiento de la esbeltez límite respecto a cada variable de forma separada.

Un gran acierto es incluir la opción que permite tomar un valor del lado de la seguridad, en caso de no querer realizar cálculos más complejos, o no disponer de todos los datos, situación que se da en los casos de comprobación y predimensionamiento.

Otro punto de interés es la cautela en la utilización de relaciones de excentricidad distintas a la unidad, recogiendo las observaciones de Menegotto[5]; la norma impone ciertas condiciones restrictivas en la consideración de r_m , que deberá tomarse igual a 1 en los casos:

- Miembros arriostrados en los que los momentos de primer orden se deban únicamente a las imperfecciones o a cargas transversales.
- Miembros no arriostrados.

Se trata, en fin, de asegurar que en la pieza con $r_m \neq 1$ puede desarrollarse la deformada de doble curvatura.

Respecto a la flexión esviada, el EC 2 insta al cálculo y comprobación de la esbeltez límite de forma separada en cada uno de los ejes de flexión lo que marca la principal diferencia entre la esbeltez de la norma y la propuesta en el presente trabajo.

En el CM-90 [3] se define la esbeltez límite inferior como aquella por debajo de la cual los efectos de segundo orden pueden despreciarse, asociada a una reducción de la capacidad portante, con respecto al estado límite última de flexocompresión según la teoría de primer orden, no mayor del 10%.

En la determinación de los valores de cálculo f_{cd} y E_{ci} emplea un coeficiente de seguridad reducido $\gamma_c=1.2$, adecuado para el comportamiento deformacional global (en vez del habitual, empleado en la evaluación de la resistencia última de las secciones críticas en comprobación local: $\gamma_c=1.5$)

Propone un valor de la esbeltez límite, en términos mecánicos, válido únicamente para armadura mínima. En ausencia de un análisis más riguroso, el límite de esbeltez para elementos intraslacionales es el siguiente:

$$\lambda_{lim,m} = \frac{7.5 \cdot (2 - \alpha)}{\sqrt{\nu}} \quad , \text{ si } \nu \leq 0.39$$

$$\lambda_{lim,m} = 12 \cdot (2 - \alpha) \quad , \text{ si } \nu > 0.39$$

donde α es la relación de excentricidades y v es el axil reducido.

El Código Modelo sólo permite la introducción de valores negativos para la relación α si el soporte está calculado para la combinación del esfuerzo axil N_d y un momento de cálculo mínimo $M_d = N_d \cdot h/20$, y si las vinculaciones en los extremos del soporte pueden resistir ese momento, de forma que se produzca una deformada de doble curvatura.

Por otra parte, considera significativos los efectos de la fluencia si el incremento de los momentos flectores debidos a los efectos de segundo orden causados por la fluencia y las acciones longitudinales supera el 10% de los momentos flectores de primer orden. Proporciona las comprobaciones a efectuar para despreciar o considerar los efectos de la fluencia: dichos efectos pueden despreciarse si se cumplen simultáneamente dos de las siguientes condiciones:

1. $\lambda_m \leq 53 / \left(f_{ck}^{1/3} \cdot \sqrt{v_c} \right)$
2. $e_o \geq 2 \cdot h$
3. $\kappa \cdot \mu \leq 0.2$

donde:

$v_c = N_g / (f_{ck} \cdot A_c)$, siendo N_g la carga axil bajo acciones cuasi-permanentes

e_o : excentricidad de primer orden de N_g

h : canto de la sección

κ : relación entre la carga axil cuasi-permanente N_g y la carga axil total mayorada N_d , correspondiente al estado límite último

μ : relación entre el momento flector cuasi-permanente M_g y el momento flector total mayorado M_d , correspondiente al estado límite último

El valor de la esbeltez de la ecuación 1 es un valor del límite inferior, en el caso de comportamiento diferido en el tiempo.

La expresión empleada en Estados Unidos, propuesta por el ACI-318 [1] proporciona un límite inferior de esbeltez en términos mecánicos, para estructuras intraslacionales:

$$\lambda_{lim,m} = 34 - 12 \cdot \frac{M_1}{M_2} \leq 40$$

donde M_1 y M_2 son los momentos actuantes en los extremos del soporte, con $|M_2| \geq |M_1|$

La única variable incluida en la expresión de la esbeltez límite es la relación de flectores en los extremos, que es equivalente a la relación de excentricidades, si el axil es constante a lo largo de la pieza.

En cuanto a la literatura fuera de las normativas, son numerosos los artículos de diversos autores tratando el tema de la esbeltez límite inferior en flexión recta, definida como la esbeltez para la que un soporte pueda ser calculado sin la necesidad de tener en cuenta los efectos de segundo orden. Los métodos numéricos de ensayo son diferentes en cada autor:

- Menegotto[5][6] emplea un programa de elementos finitos, que integra numéricamente las curvaturas y desplazamientos de la pieza.
- Río y Morán[9][10][11] calculan la esbeltez límite por tanteos, utilizando el método general: Método de Engesser-Viannello o de las diferencias finitas.
- Corres et al.[12] siguen el Método de las Curvaturas de Referencia, y emplean como directriz geométrica la propuesta por el Método de la Columna Modelo.
- Goberna y Bonet et al.[13][14] calculan la esbeltez límite mediante elementos finitos (Bonet[4]).
- Grupo de trabajo GT1/2, Hormigón de alta resistencia [16]: no emplea métodos numéricos, sino que basa su expresión en deducciones teóricas.

En cuanto a las variables de estudio, el trabajo de Marí y Hellesland[15] pone de manifiesto la necesidad de incluir en la expresión del límite inferior de esbeltez variables tales como el esfuerzo axial, la relación de excentricidades o la cuantía de armadura. Pero cada autor plantea inicialmente los factores que pueden resultar más influyentes en el comportamiento y, tras el conveniente análisis, presenta una propuesta para la expresión de la esbeltez límite, que incluye los parámetros que finalmente han destacado como más importantes, con el condicionante implícito de conseguir una ecuación suficientemente sencilla.

En 1983, Marco Menegotto [5][6] publica un estudio acerca de los límites de esbeltez en soportes de hormigón armado. Hasta ese momento, las normativas establecían un único valor concreto de la esbeltez mecánica (por ejemplo, $\lambda=25$, en MC78) como límite inferior de esbeltez, lo que no se correspondía con el comportamiento observado. En realidad, Menegotto realiza el análisis con el fin de validar una expresión del límite de esbeltez que propone “a priori”. Por supuesto, el estudio realizado le proporciona información sobre el comportamiento de los soportes frente a la inestabilidad, y le lleva a enunciar conclusiones interesantes, pero no lo emplea para la deducción de la fórmula. Otra singularidad en su estudio es el empleo de un soporte tipo ménsula, frente al soporte articulado ensayado por el resto de autores.

Resulta interesante destacar que, hasta el trabajo de Goberna y Bonet et al.[13][14], sólo Menegotto[5][6] analiza el comportamiento diferido de los soportes esbeltos y propone un límite de esbeltez alternativo, con el axil que provoca fluencia. Goberna y Bonet et al.[13][14] se dan cuenta de la importancia que tiene la respuesta diferida de los materiales en el fenómeno de inestabilidad, y la incluyen en su análisis, a través del coeficiente de fluencia.

Todos los autores analizados identifican el axil reducido como parámetro esencial. Destacan, igualmente, la importancia de la relación de excentricidades ($\alpha = e_1/e_2$, con $|e_2| \geq |e_1|$), y la incluyen en sus expresiones, a excepción de Menegotto, que se muestra muy

crítico con el empleo de excentricidades distintas en los extremos, y propone una expresión contrastada para el caso de $\eta=1$, muy del lado de la seguridad para los valores de $\eta \neq 1$.

Por su parte, Olga Ríó y Francisco Moran [9][10][11], parten de la necesidad de revisar los límites de esbeltez que recogían en su momento las diversas normas existentes. Llevan a cabo un estudio sistemático de dichos límites, analizando la influencia de los distintos parámetros en juego en el error que se produce al dimensionar los soportes prescindiendo de los efectos de segundo orden, con el fin de llegar a una definición del límite de esbeltez que incluya las variables más decisivas.

Hugo Corres et al. [12] destacan por un lado, la falta de homogeneidad encontrada en las distintas normas y autores en cuanto a la esbeltez límite inferior; por otra parte, resaltan el hecho de que la mayoría de métodos existentes en ese momento conducían a resultados muy conservadores para soportes con excentricidades distintas en los extremos, mientras que proponían límites peligrosos para soportes con excentricidad constante.

Emplean la propuesta del Método de la Columna Modelo, teniendo en cuenta para la definición de esbeltez límite el tipo de estado límite último con el que se agota el elemento. Define una excentricidad equivalente a partir de las excentricidades en los extremos, de forma que se puede considerar el soporte sometido a una excentricidad constante en toda su longitud, igual a dicha excentricidad equivalente.

Desde la década de los '60, J. G. MacGregor [7][8] ha publicado trabajos muy interesantes, en los que analiza todos los aspectos del comportamiento de estructuras esbeltas, y propone mejoras en los métodos de cálculo en el campo de la inestabilidad de dichas estructuras. En particular, señala los principales elementos que condicionan la resistencia de soportes esbeltos; en el caso de soportes articulados intraslacionales, serían:

- *La esbeltez geométrica (λ_g), la excentricidad relativa (η) y la relación de excentricidades en los extremos (α).* Constituyen variables enormemente significativas, cuyos efectos están fuertemente interrelacionados.
- *La relación entre la cuantía geométrica de armadura y la resistencia del hormigón: ρ/f_c .* Un incremento en este parámetro provoca un aumento de la inestabilidad del soporte, lo que implica que soportes con menores cuantías o con hormigones de alta resistencia resultan más sensibles a los efectos de segundo orden.
- *Las cargas permanentes.* Incrementan las deformaciones del elemento, a causa del comportamiento diferido de los materiales, y provocan un decremento en la capacidad resistente del soporte.

Enrique G. Goberna, María Collado y José Luis Bonet et Al. [13][28][14] destacan la falta de homogeneidad existente respecto a los límites de esbeltez, tanto entre los autores que han tratado el tema, como en las diversas normativas vigentes en el momento. Especialmente reseñable resulta la omisión sistemática de algunos parámetros determinantes, como puede ser el coeficiente de fluencia. Todo esto le lleva a un análisis pormenorizado de las variables

implicadas en el desarrollo de fenómenos de inestabilidad, que le permite proponer una nueva expresión para la esbeltez límite inferior.

Uno de los objetivos de Goberna et al. es ordenar los conceptos y suplir las carencias detectadas. Para ello plantea una amplia campaña de ensayos, que le permite discernir la importancia que tiene cada parámetro sobre los efectos de segundo orden. Los ensayos se llevan a cabo numéricamente, mediante un programa de elementos finitos. El procedimiento de obtención de datos empleado puede sistematizarse en varios puntos:

- Define el ensayo a realizar, caracterizando los soportes mediante un vector de parámetros.
- Para cada combinación de valores de los parámetros (excepto λ) se obtiene la familia de diagramas de interacción v - M correspondientes a la sección transversal ($\lambda=0$) y a los diversos soportes de longitud finita ($\lambda \neq 0$), mediante un programa de elementos finitos (Figura IV.2).
- En cada punto del diagrama de interacción se obtiene la pérdida de capacidad resistente, ε_M . A partir de la función v - ε , se identifica el nivel de axil reducido que provoca una pérdida del 10% en un determinado soporte, de esbeltez λ_i (Figura IV.3).

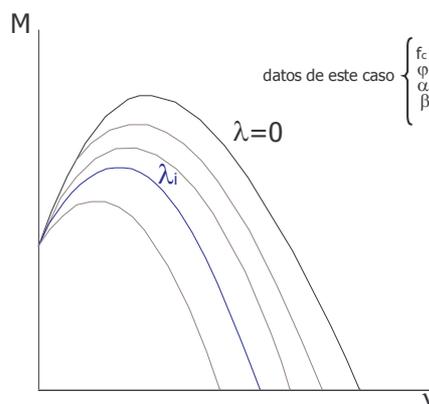


Figura IV.2.- Familia de diagramas de interacción.

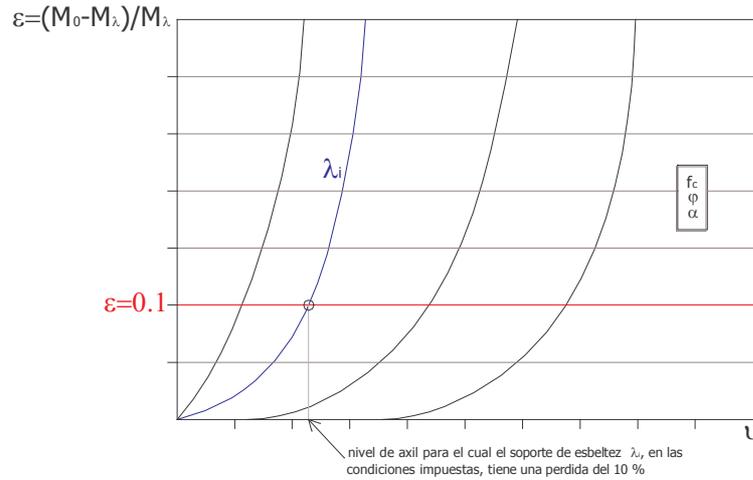


Figura IV.3.- Obtención del error del 10%.

Los soportes ensayados están armados con cuantías mínimas, por lo que la expresión final estará del lado de la seguridad en soportes más armados

Por último, el grupo de trabajo GT1/2 realizan un trabajo en el que se trata de un trabajo que linda con las normativas, en su modo de exposición. Dedicó el Artículo 43 al Estado Límite de Inestabilidad, y define una esbeltez mecánica límite inferior:

Para $v \geq v_b$

$$\lambda_{lim,m} = 35 \cdot \sqrt{\left[1.33 \cdot \frac{e_2}{h} + 0.4 \cdot \left(\frac{v - 0.7}{v} \right) \right] \cdot \left[1 + \frac{0.3}{e_2/h} + 3.4 \cdot \left(\frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \right]}$$

Para $v < v_b$

$$\lambda_{lim,m} = 35 \cdot \sqrt{\frac{e_2}{h} \cdot \left[1 - \frac{0.5 - v}{e_2/h} + 3.4 \cdot \left(\frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \right]}$$

donde:

$v = N_d / (A_c \cdot f_{cd})$: axil reducido de cálculo que solicita el soporte.

$v_b = 0.444$ axil reducido correspondiente al plano de rotura crítica, definido por las deformaciones de hormigón y acero $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$, $\varepsilon_s = \varepsilon_y$.

e_2 excentricidad de primer orden en el extremo del soporte con mayor momento, considerada positiva.

e_1 excentricidad de primer orden en el extremo del soporte con menor momento, positiva si tiene el mismo signo que e_2 .

h canto de la sección en el plano de flexión considerado.

En el cálculo de esta esbeltez límite se han tenido en cuenta los efectos de la fluencia, un cierto grado de fisuración del soporte, y se ha supuesto que la armadura del elemento sea la estrictamente necesaria para resistir los esfuerzos de primer orden que solicitan la sección.

A continuación se resume en un cuadro la información referente a las variables de estudio recogidas por cada autor, y el tipo de función de ajuste empleada.

Autor	Variables incluidas		Función de ajuste $f(v)$
	en el estudio	en la expresión	
Menegotto[5][6]	$v, \omega, c, f_c, (\varphi)$	v	$\frac{1}{\sqrt{v}}$
Río y Morán[9][10][11]	$v, \alpha, \eta, \omega, c$	v, α, η	Lineal
Corres et al.[12]	v, α, η, ω	v, α, η	$\frac{1}{\sqrt{P_3(v)}}$
MacGregor[7][8]	v, α, ω, f_c	v, α	$\frac{1}{\sqrt{v}}$
Goberna y Bonet et al.[13][14]	v, α, f_c, φ	v, α, f_c, φ	$\ln(v)$
Grupo de trabajo GT1/2[16]	—	v, α, η	$\sqrt{\frac{P_1(v)}{P_1'(v)}}$
Collado [28]	$v, \alpha, f_c, \varphi, \omega$	$v, \alpha, \varphi, \omega$	$\ln(v)$

Tabla III.1.- Resumen de las variables estudiadas en cada trabajo.

IV.3.2 Flexión esviada

En cuanto a las propuestas de expresiones para obtener una esbeltez en soportes sometidos a flexión esviada, la literatura está absolutamente vacía. No hay ninguna propuesta de esbeltez límite que permita distinguir cuándo es necesario y cuándo no es necesario tener en cuenta un cálculo a flexión esviada en soportes sometidos a flexocompresión recta. Tal y como se ha mencionado, el único criterio es el propuesto por la BS 8110 (08) [18].

Es por ello, que será éste el primer estudio que se realice para obtener dicha expresión de esbeltez, y debido a la comentada ausencia de autores o normativas que traten el tema en profundidad, mucho de los aspectos que se van a comentar están basados en criterios empleados para la obtención de la esbeltez límite inferior ya que, si bien analizando el problema en profundidad, existen diferencias fundamentales entre un aspecto y otro, constituyen un buen punto de partida para el presente trabajo.

V OBJETIVO. PLANTEAMIENTO. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS.

En los anteriores capítulos se ha analizado el tratamiento del problema que realizan los diversos autores y normativas, y se ha comprobado que, salvo la BS, no hay ninguna propuesta que persiga el objetivo buscado en el presente estudio que, por su parte, tiene un espíritu de continuación de la línea marcada por Goberna, Collado y Bonet et al.[13][28][14], en donde se analizan las carencias detectadas, la mayor de las cuales era la inclusión del comportamiento diferido del hormigón. Ésta ha demostrado ser una tendencia correcta, ya que posteriormente, en el último Eurocódigo 2 [22] se incluye el coeficiente de fluencia como variable en la expresión de la esbeltez límite. El presente trabajo amplía las variables de estudio analizadas por Goberna y Bonet et al.[13], observando la influencia de la cuantía de armadura ω sobre el límite de esbeltez.

El presente estudio nace con un doble objetivo; por una parte, intentar dar una respuesta clarificadora a estos problemas y, por otra, proponer una expresión para el cálculo de la esbeltez de esviaje que resulte al mismo tiempo suficientemente sencilla y completa, que incluya las variables que se destaquen como más importantes, y que se ajuste convenientemente al comportamiento observado.

Así pues, puede definirse como el objetivo general de este estudio el establecer un criterio que permita discernir claramente cuándo es necesario tener en cuenta un comportamiento biaxial de un soporte sometido a esfuerzos en su eje fuerte y cuando este efecto es despreciable. Para ello es necesario seguir una serie de pasos ordenados que permita alcanzar una conclusión.

El primero de ellos se recoge en el capítulo anterior y consiste en recorrer la bibliografía existente comprobando lo que diferentes autores y normativas plantean acerca del asunto en cuestión. En este caso la conclusión es muy clara. Hasta este momento, si bien se detectan señales en autores como Menegotto [5] y en normativas, como la propia norma española EHE-08 [19], de que es necesario considerar excentricidades accidentales en la dirección más desfavorable, en ningún caso se propone un criterio que permita evitar realizar un cálculo biaxial.

El inicio de la búsqueda de este criterio reside en la simulación numérica. Para llegar a este fin, será necesario plantear una amplia campaña de ensayos, que proporcionen datos suficientes en los intervalos de variación de cada uno de los parámetros. En este capítulo se presenta la metodología empleada en la adquisición de datos.

Una vez realizada una amplia campaña de ensayos, en el que se observe el comportamiento de los parámetros escogidos para el estudio, se analizará en profundidad la relación de cada una de las variables empleadas con el objetivo buscado para posteriormente, establecer una propuesta para la esbeltez de esviaje.

En el primer punto, se habla del criterio adoptado para la evaluación de la pérdida de capacidad resistente. En el segundo, se describen sistemáticamente los parámetros de mayor influencia en los efectos de la esbeltez y se establecen los rangos de variación de cada uno de ellos. En el tercer punto se expone la metodología de obtención de datos paso a paso, y se resumen las características y particularidades del programa de elementos finitos utilizado en los ensayos numéricos.

V.1 CRITERIO DE ERROR EMPLEADO. DEFINICIÓN DE ESBELTEZ DE ESVAJE.

La esbeltez límite inferior, para unas condiciones de carga determinadas, se define como la asociada a una pérdida de capacidad resistente del soporte sometido a flexocompresión recta respecto de otro en las mismas condiciones al que se le aplica un pequeño momento perpendicular al flector principal (teniendo en cuenta los efectos de segundo orden) del 10%, que es el mismo criterio empleado en el cálculo de la esbeltez límite inferior. Evidentemente, un primer paso imprescindible es establecer cómo se va a evaluar dicha pérdida de capacidad resistente. En el *Capítulo III* se describieron las distintas opciones clásicas de definición del error. En el presente estudio los efectos de la esbeltez se identificarán a través del error en cuanto a momentos, o comparación a axil constante, aunque también podría hacerse la comparación con respecto a axiles (Figura V.1):

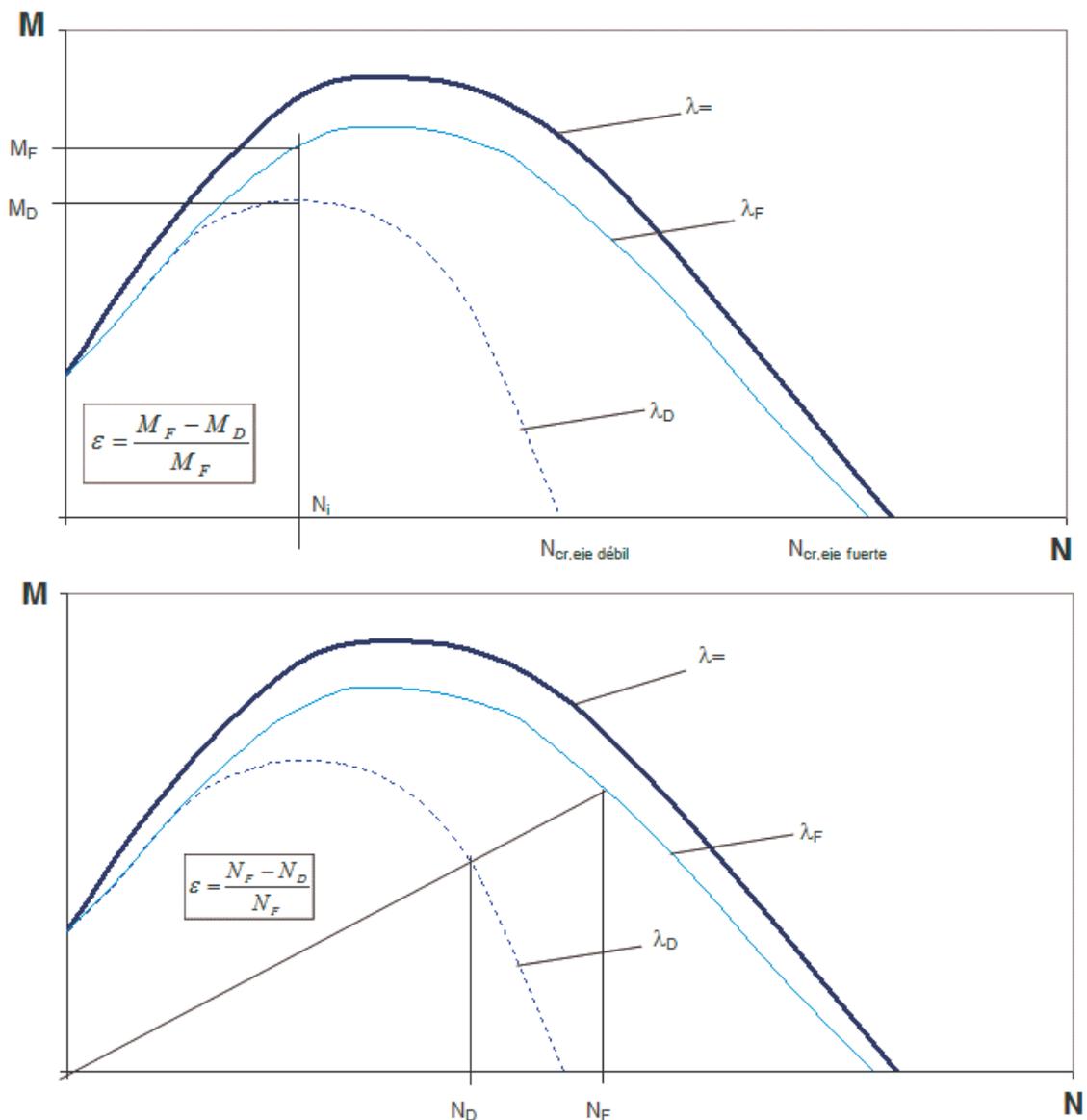


Figura V.1.-Criterios de comparación.

La figura anterior muestra dos gráficos de diagramas de interacción, en los que se pueden ver los criterios de error para axil constante y para excentricidad constante. Cada uno de los dos gráficos muestra 3 curvas, una para el cálculo a nivel de sección ($\lambda = 0$) y otras dos para cálculo de soportes con cierta esbeltez. La curva correspondiente a λ_F es la que se corresponde con un soporte sometido a axil y flexión sobre su eje fuerte y la curva λ_D tiene además una pequeña excentricidad sobre su eje débil.

El axil crítico para cada una de las curvas es diferente, siendo el menor de todos el axil crítico en el eje débil de la sección y el mayor el axil máximo a compresión simple. Entre uno y otro queda el axil crítico de eje fuerte.

Como se ha comentado anteriormente, el criterio de error empleado en este trabajo es el de axil constante, y su evaluación se realiza mediante la fórmula representada en la figura V.1.

V.2 PARÁMETROS DE ESTUDIO E INTERVALOS DE VARIACIÓN.

Los parámetros que intervienen en el comportamiento de los soportes frente a la inestabilidad son muchos, por lo que es necesario escoger los que tienen una mayor influencia. Aun así, se incluye un gran número de variables de estudio, por lo que resulta conveniente clasificarlas en tres grandes grupos. El primer grupo de parámetros caracterizan la geometría del problema, el segundo los materiales, y el tercero hace referencia a las cargas actuantes sobre el soporte. Las variables estudiadas se resumen en el siguiente esquema:

Parámetros:

- | | |
|------------|--|
| Geometría | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Forma de la sección transversal (relación canto-ancho h/b) ▪ Recubrimiento mecánico (c) ▪ Distribución de armaduras (ψ) ▪ Cuantía mecánica de armaduras (ω) ▪ Esbeltez geométrica (λ_g) |
| Materiales | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Resistencia a compresión del hormigón (f_c) ▪ Coeficiente de fluencia (ϕ) ▪ Límite elástico del acero (f_y) |
| Acciones | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Axil reducido (ν) |

El elemento estudiado es un soporte intraslacional, articulado, de hormigón armado, de longitud l_0 y sección rectangular constante. Los parámetros considerados en el análisis, así como el rango de variación considerado para cada uno de ellos y su importancia relativa se discuten a continuación.

V.2.1 Parámetros referentes a la geometría.

1. Forma de la sección transversal. Relación canto-ancho.

Los soportes ensayados son de sección transversal rectangular constante en toda su longitud. Se opta por esta forma de sección por ser la más común en edificación.

Se han considerado 4 soportes distintos, todos con el mismo ancho $b = 0,10$ m, pero diferentes cantos: 0,15, 0,20, 0,25 y 0,30 m, para obtener relaciones canto/ancho de 1,5, 2, 2,5 y 3. En todos los casos, el recubrimiento mecánico es de un 10% del lado del soporte.

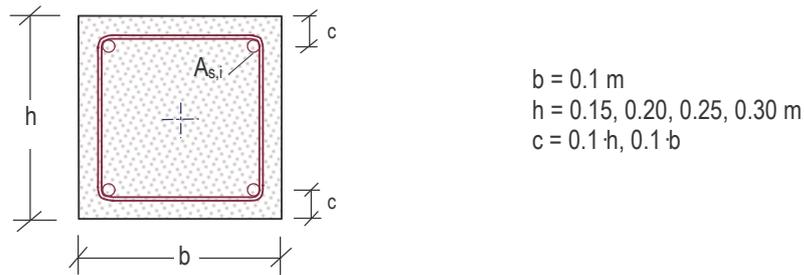


Figura V.2.- Sección transversal. Forma y características.

2. Distribución de armaduras.

Se han analizado tres posibles distribuciones de las armaduras, habituales en los esquemas de armado de soportes, y que podían suponerse como situaciones extremas. Una de las disposiciones consistía en armaduras en las cuatro esquinas del soporte. La otras alternativas concentran la armadura en dos de las caras: una de ellas reparte el acero en las caras paralelas al canto y la otra en las caras paralelas al ancho (Figura V.3). Los ensayos previos demostraron que la influencia de este parámetro es mayor de lo que transmiten los trabajos de Río y Morán[9][10][11], pero puede despreciarse, en el entorno del 10% de pérdida de capacidad, frente a la influencia del resto de variables.

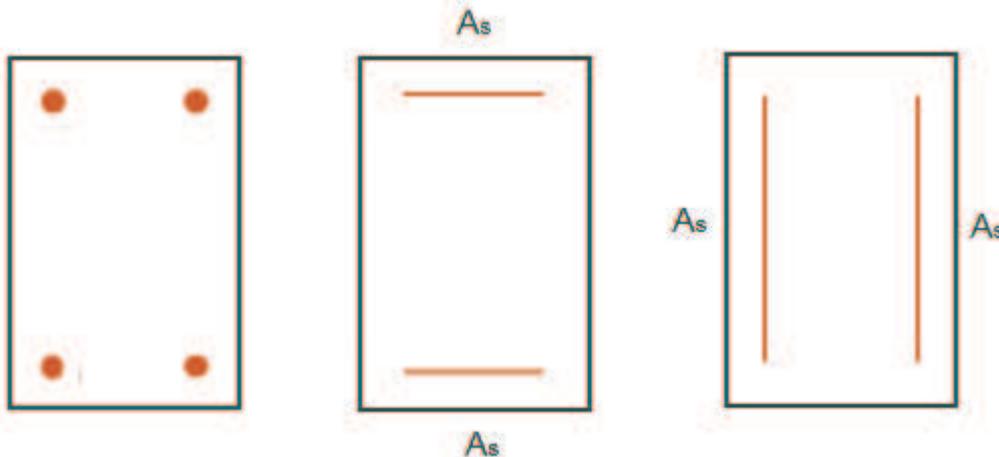


Figura V.3.-Disposiciones de armado empleadas en la simulación.

En todos los casos las armaduras se mantienen constantes a lo largo de toda la longitud del soporte.

La forma de representar numéricamente es mediante la relación entre los radios de giro respecto al canto y respecto al ancho de la sección transversal de la siguiente manera:

$$\psi^2 = \frac{\beta_b^2}{\beta_h^2}$$

donde:

$$\beta_b = \frac{\eta b}{i_b}$$

$$\beta_h = \frac{\alpha h}{i_h}$$

i_h es el radio de giro respecto al canto de la sección.

i_b es el radio de giro respecto al ancho de la sección.

αh es la distancia entre armaduras paralelas al canto.

ηb es la distancia entre armaduras paralelas al ancho.

De esta manera se obtiene el parámetro ψ dependiente de la disposición de armaduras en la sección pero independiente de la relación canto-ancho de la misma ya que, como se verá posteriormente, la esbeltez de esivaje no depende de ella.

3. Cuantía mecánica de armaduras.

La cuantía de armadura es un parámetro esencial en el comportamiento de los soportes frente a la inestabilidad. A mayor cuantía, menores efectos de segundo orden [4][7]. Uno de los objetivos de este trabajo es el de ampliar los trabajos de Goberna y Bonet et al.[13][14] para el caso de cuantía mínima, ecuación del lado de la seguridad, en el resto de situaciones de armado, e incluir la cuantía de armadura como una variable más del problema.

La cuantía de armadura puede definirse de dos maneras, como cuantía geométrica o mecánica:

Cuantía geométrica:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c}$$

donde A_s es al área total de armadura y A_c es el área bruta de la sección transversal.

Cuantía mecánica:

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$$

donde f_{yd} es la resistencia de cálculo de la armadura y f_{cd} la resistencia de cálculo del hormigón.

La instrucción española de hormigón estructural EHE-08[19] define valores mínimos de ambas cuantías, por lo que el proyectista debe tomar el mayor de ambos valores, en cada caso. Además, en cuanto a la cuantía mecánica, establece valores diferentes para

secciones sometidas a flexión simple o compuesta y secciones en compresión simple o compuesta. Y, por último, en el caso de compresión simple o compuesta, define un límite de armadura máxima. Teniendo en cuenta todas estas limitaciones, y una vez establecido el intervalo de variación de la resistencia del hormigón, se asume el valor de $\omega=0.0666$ como el límite inferior de estudio de la cuantía mecánica de armadura. El límite superior del intervalo de variación de la cuantía se establece en el valor de $\omega=0.3333$, que para soportes rectangulares supone un valor de $\rho = 0.02$, que es un valor razonable de cuantía máxima en soportes de edificación.

Los valores finalmente elegidos para la cuantía mecánica de armadura son:

$$\omega = 0.0666; 0.1; 0.25; 0.3333$$

Un comentario necesario en este punto es que en el cálculo de las armaduras mínimas, según la EHE-08[19], se han empleado los valores de cálculo de las resistencias, ya que es el modo en que un proyectista lo calcularía. Pero una vez establecidos los valores de las cuantías, se referirá todo el análisis a valores característicos, por tratarse de un estudio mediante ensayos numéricos. En este caso, la expresión de la cuantía mecánica implícita en el trabajo será:

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yk}}{A_c \cdot f_{ck}}$$

A partir de esta expresión se obtienen las armaduras longitudinales a disponer en la sección transversal de cada familia de soportes.

4. Esbeltez geométrica.

La esbeltez constituye el parámetro más importante del presente estudio. Resulta inmediato pensar que cuanto más esbelto es un soporte, mayor importancia tendrán sobre él los efectos de segundo orden, y mayor será la pérdida de capacidad mecánica. De hecho, en un comportamiento a flexión, las tensiones son función del cuadrado de la longitud, mientras que las flechas y deformaciones lo son de la longitud al cubo, lo que hace que al aumentar la longitud del soporte la esbeltez adquiera una mayor importancia relativa sobre el resto de variables implicadas en el fenómeno.

Tal y como se ha expuesto en el *Capítulo II*, la esbeltez puede plantearse en términos mecánicos o geométricos. A pesar de que la esbeltez mecánica posee la facultad de independizar el valor de la longitud de la forma de la sección, en este trabajo se empleará la esbeltez geométrica, porque las secciones de estudio son rectangulares, y la esbeltez geométrica se convierte en ese caso en un indicador sencillo y directo de la longitud del soporte. Además, dado que se va a estudiar la influencia del eje débil en secciones rectangulares cuyos esfuerzos principales actúan sobre su eje fuerte, la esbeltez considerada en este estudio será respecto al lado menor ($\lambda_g=l_p/b$).

El intervalo de esbelteces geométricas de estudio es distinto para cada combinación del resto de factores. Esto es así porque el objetivo de los ensayos es precisamente la

obtención de la esbeltez geométrica asociada a una pérdida de capacidad resistente del 10%, para cada combinación de variables. En cualquier caso, los soportes analizados tienen esbelteces geométricas de eje débil comprendidas entre los valores extremos $\lambda_g=0$ (cálculo de la sección) y $\lambda_g=50$.

V.2.2 Parámetros referentes a los materiales.

1. Resistencia a compresión del hormigón.

La resistencia a compresión del hormigón (f_c) es un parámetro sobre el que no existe un criterio uniforme entre los autores estudiados. Menegotto[5][6], Río y Morán[9][10][11] y Corres et al.[12] postulan que se trata de un factor de poca importancia relativa en el estudio de la esbeltez límite inferior. Sin embargo, en los estudios de MacGregor[7][8] se observan diferencias debidas a la resistencia del hormigón, aunque la propuesta final de esbeltez no las refleje. Goberna y Bonet et al.[13][14] son los únicos que incluyen esta variable en su expresión de esbeltez límite, basándose en los resultados que obtienen, y en el análisis teórico.

En realidad, la resistencia del hormigón influye en dos efectos contrapuestos. Por un lado, cuanto mayor sea la resistencia a compresión, el elemento poseerá mayor rigidez, y desarrollará menores deformaciones. Pero por otra parte, un soporte elaborado con un hormigón más competente será capaz de soportar mayores esfuerzos de primer orden, y un incremento de las solicitaciones provoca un aumento no lineal de las deformaciones. En general se observa que, al crecer la esbeltez, el efecto predominante es el segundo, y se concluye que los soportes con hormigones de alta resistencia son más sensibles a los efectos de segundo orden que los construidos con hormigones normales. Con todo esto, resulta necesario incluir la resistencia a compresión del hormigón entre los parámetros de estudio, para observar y contrastar su importancia relativa, y analizar su relación con el resto de variables.

La normativa española actual EHE-08[19] considera el empleo de hormigones cuyas resistencias características están entre los 25 MPa y los 100 MPa. De todos ellos, define como hormigones convencionales los de resistencia menor o igual a 50 MPa, y como hormigones de alta resistencia, con un comportamiento tenso-deformacional diferente, al resto.

En el programa de elementos finitos utilizado en los ensayos, la curva tensión-deformación de los hormigones normales es la propuesta en la ecuación del Código Modelo (CM-90)[3] (Figura V.4). Mediante dicha curva se tiene en cuenta la posibilidad del comportamiento diferido del hormigón, así como la existencia de una pequeña resistencia a tracción (rama de "tensión stiffening"). Este tema se tratará en profundidad en el capítulo dedicado a la simulación numérica.

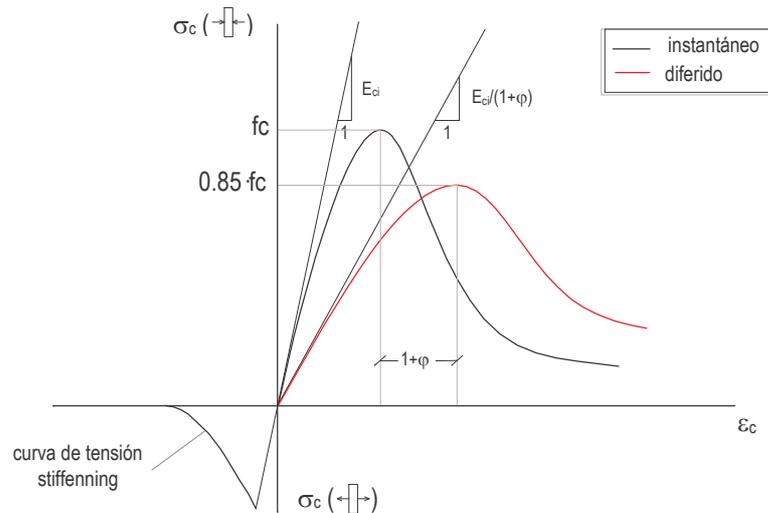


Figura V.4.- Comportamiento tenso-deformacional del hormigón. Hormigón normal.

El comportamiento del hormigón de alta resistencia se modeliza en el programa a través de la curva CEB-FIP (1995). La variación más importante en la respuesta respecto al hormigón normal es la fragilización; el hormigón de alta resistencia posee una mayor resistencia a compresión, pero su deformación última es menor.

Se han analizado soportes con las siguientes resistencias:

$$f_c = 30; 50; 60; 70; 90; 100 \text{ MPa.}$$

2. Coeficiente de fluencia.

La importancia de este factor es innegable (Bonet (2001)). El efecto de la fluencia es un incremento de las deformaciones en el elemento sometido a cargas sostenidas en el tiempo, aun cuando no haya un aumento de las solicitaciones. Este comportamiento se modeliza en la curva tensión-deformación del hormigón (Figura V.4) mediante un decremento en el módulo de elasticidad, y una menor tensión máxima de compresión.

Uno de los problemas que plantea el análisis del comportamiento diferido y su influencia en los efectos de segundo orden es que dicho análisis precisa una distinción entre el axil aplicado debido a las cargas totales y las cargas permanentes, ya que únicamente estas últimas producen deformaciones de fluencia. Para solucionar este problema, se emplea en el estudio un coeficiente de fluencia equivalente, φ_{eq} (EC-2 (2004)), que tiene en cuenta la proporción del axil que produce fluencia sobre el total:

$$\varphi \equiv \varphi_{eq} = \varphi_{EHE} \cdot \frac{N_{sg}}{N_{tot}}$$

donde:

φ, φ_{eq} : coeficiente de fluencia equivalente utilizado en el estudio.

φ_{EHE} : coeficiente de fluencia, según EHE-08[19].

N_{sg} : axil que provoca deformaciones de fluencia (debido a cargas prolongadas en el tiempo).

N_{tot} : axil total aplicado sobre la pieza.

Para la elección de los valores del coeficiente de fluencia φ_{EHE} que se incluirán en el estudio se recurre de nuevo a la EHE-08[19]. En ella se define el coeficiente de fluencia como función del espesor ficticio (relación entre área y perímetro) de la sección transversal, la humedad relativa, la resistencia del hormigón y la edad de puesta en carga. La deformación de fluencia es mayor cuanto menor es el espesor ficticio, lo que en sección rectangular es equivalente a decir que los efectos de la fluencia aumentan al disminuir la sección. Por tanto, si se considera un soporte de las dimensiones mínimas que permite la norma [19], esto es, de 25x25 cm², pueden obtenerse los distintos coeficientes de fluencia para distintas humedades relativas (Tabla V.1) y resistencias del hormigón. Suponiendo una situación extremadamente desfavorable, de sección mínima, edad de puesta en carga de siete días y muy baja humedad relativa, puede establecerse un valor máximo del coeficiente de fluencia de tres.

f_{ck} (MPa)	$\varphi_{EHE} (7, \infty)$			
	HR (%)			
	50	60	70	80
30	2,87	2,50	2,13	1,75
90	2,14	1,92	1,69	1,46

Tabla V.1.- Valores del coeficiente de fluencia para una edad de puesta en carga de 7 días.

A partir de aquí, cuando se hable del coeficiente de fluencia, se estará hablando del coeficiente equivalente, φ_{eq} , y se denotará simplemente como φ . En el presente estudio, se han considerado los siguientes casos:

Análisis con cargas instantáneas	$\varphi=0$
Análisis con cargas sostenidas	$\varphi=1$; $\varphi=3$

3. Límite elástico del acero.

Los soportes pueden armarse con acero de límite elástico de 400 MPa ó 500 MPa. Bonet[4] establece en su trabajo que, a igualdad de cuantía geométrica, los efectos de segundo orden son más acusados en elementos armados con acero de $f_y=500$ MPa. Los ensayos previos realizados sobre soportes con cuantía geométrica constante y acero de distinta tensión de plastificación confirmaron ese resultado, y evidenciaron que, además, la

influencia de dicho parámetro era muy pequeña, especialmente en el entorno del 10% de pérdida de capacidad mecánica.

Tras este pequeño análisis inicial, se escoge como acero para las armaduras el de 500 MPa de límite elástico, que, por otra parte, es el más empleado hoy en día en la edificación.

El comportamiento del acero está caracterizado a través del diagrama tensión-deformación de la Figura V.5.

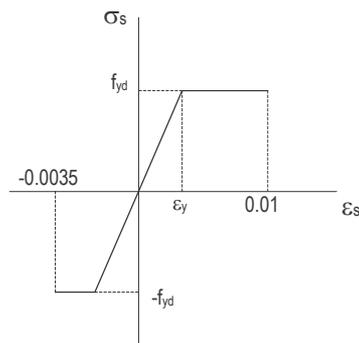


Figura V.5.- Diagrama bilineal del acero.

V.2.3 Parámetros referentes a las cargas.

1. Axil reducido.

El nivel de carga axil tiene una influencia innegable en el pandeo de una pieza, provocando o incrementando los efectos de segundo orden. Pero también modifica la capacidad resistente del soporte, a través del diagrama momento-curvatura (Figura V.6).

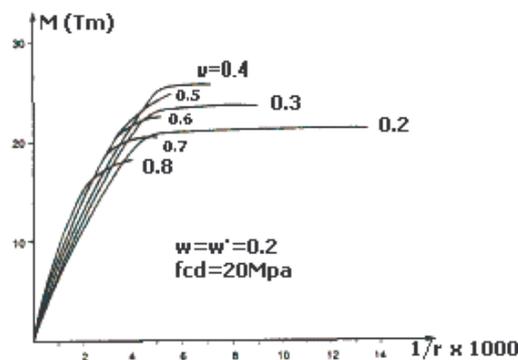


Figura V.6.- Ejemplo de la influencia del esfuerzo axil en la capacidad resistente a flexión.

El axil reducido adimensionaliza el valor de la carga axil, e incluye en su definición la resistencia del hormigón e, indirectamente, su rigidez. La definición del axil reducido es, como ya se ha visto en capítulos anteriores, la siguiente:

$$\nu = \frac{N}{A_c \cdot f_c}$$

donde:

N : axil aplicado.

A_c : área bruta de hormigón.

f_c : resistencia a compresión del hormigón.

En cada familia de soportes, este parámetro adopta un intervalo de variación que va desde el valor nulo hasta el axil reducido correspondiente al axil último, en compresión simple, de la sección, N_0 . Mediante un sencillo cálculo seccional, se obtienen los valores de los axiles N_0 de todas las secciones estudiadas.

El axil reducido adopta valores desde $\nu=0$ hasta $\nu=1+\omega$ en este trabajo. En la campaña de ensayos efectuada, los diagramas de interacción se construyen tomando escalones en los valores de axil de $0.1 \cdot N_{cr,D}$, excepto en el entorno del 10% de pérdida de capacidad resistente, en cuyo caso la variación se reduce hasta alcanzar unos valores del error muy cercanos al 10% buscado. En general, con tres ensayos adicionales se consigue una buena aproximación para la pérdida de capacidad. Además, para completar el diagrama de interacción en el caso en que no se aplica excentricidad adicional, se calculan un par de puntos con axil reducido entre $N_{cr,D}$ y $N_{cr,F}$, con el fin de obtener una cura con cierta continuidad.

A continuación, se presentan en forma de tabla los parámetros de análisis, y los intervalos de variación o valores adoptados para cada uno de ellos.

Parámetros	Geométricos	forma de la sección transversal	rectangular
		h/b	0.15; 0.20; 0.25; 0.30
		c	0.1 h, 0.1 b
		distribución de armaduras	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Armadura en las 4 esquinas, $\psi = 1$ ▪ Armadura repartida en las caras paralelas al canto, $\psi = \sqrt{3}$ ▪ Armadura repartida en las caras paralelas al ancho, $\psi = 1/\sqrt{3}$
		ω	0.0666; 0.1; 0.25; 0.3333
		λ_g	0 - 50
	Materiales	f_c	30; 50; 60; 70; 90; 100 MPa
		φ	0; 1; 3
		f_y	500 MPa
	Acciones	N/N_{uc}	0 - 1

Tabla V.2.- Resumen de parámetros y rangos de valores estudiados.

V.3 METODOLOGÍA.

Una vez definidos los parámetros de estudio y sus respectivos intervalos de variación, hay que efectuar el análisis que conduzca a una expresión de la esbeltez de esviaje. En este punto se expone el proceso completo de obtención de la esbeltez, y se describe el programa informático que posibilita la generación de datos, prestando especial atención a su calibración numérica.

V.3.1 Procedimiento empleado en la obtención de λ_{esv}

El proceso que lleva a cabo a la obtención y validación de una expresión de la esbeltez de esviaje se resume en los siguientes pasos:

1. Obtención de datos:

El procedimiento puede sistematizarse en varios puntos:

1. Definición del ensayo a realizar: se trata de caracterizar el vector de parámetros (h/b , f_c , φ , v , ψ , ω , λ) que identifica cada uno de los ensayos, dando valores a las variables en los rangos establecidos. Para ello es necesario:

- Definir las características de los **materiales** constitutivos: resistencia a compresión del hormigón y coeficiente de fluencia (el límite elástico del acero adopta un valor fijo).
 - Definir las **acciones** actuantes. El intervalo de valores del axil reducido, como se muestra en el punto anterior, depende de la combinación de los parámetros f_c , φ , ω .
 - Definir la **geometría** del problema, es decir, elegir la cuantía de armadura y la esbeltez geométrica, ya que el resto de factores geométricos (forma de la sección transversal, recubrimiento mecánico y distribución de armado) son fijos.
2. Cálculo del diagrama de interacción (v - M) de la sección transversal, $\lambda=0$. El comportamiento de la sección transversal es único, por lo que su diagrama momento-axil reducido puede calcularse con anterioridad.
 3. Cálculo de los diagramas de interacción de cada soporte, asociado a la combinación de parámetros elegida. Dados unos parámetros, se calculan 2 diagramas de interacción diferentes. Uno de ellos es para soportes calculados a flexión recta y el otro es para soportes a los que se le aplica una excentricidad transversal. Esta excentricidad se obtiene aplicando una fuerza horizontal en el soporte de manera que, además de los esfuerzos axil y flector en el eje fuerte, exista un pequeño esfuerzo flector en el eje débil, de manera que el soporte se encuentre sometido a flexión esviada. El valor de esta fuerza horizontal es de $N/100$, siendo N el axil aplicado en el soporte (EC-2 (2004) y CM-90).
 4. Representación gráfica de la familia completa de diagramas de interacción. Cada familia está formada por el diagrama correspondiente a la pieza corta, de esbeltez nula (sección transversal), y los diagramas de las piezas sometidas a flexocompresión recta y a flexocompresión esviada. (Figura V.8).

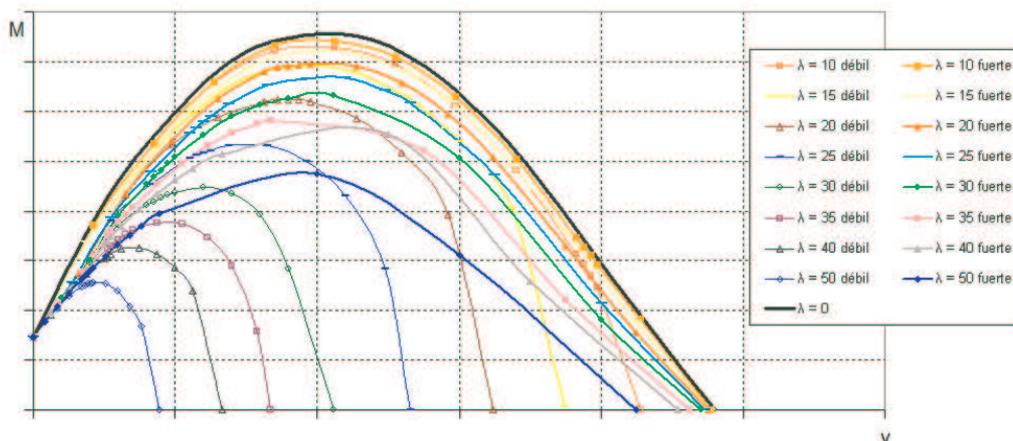
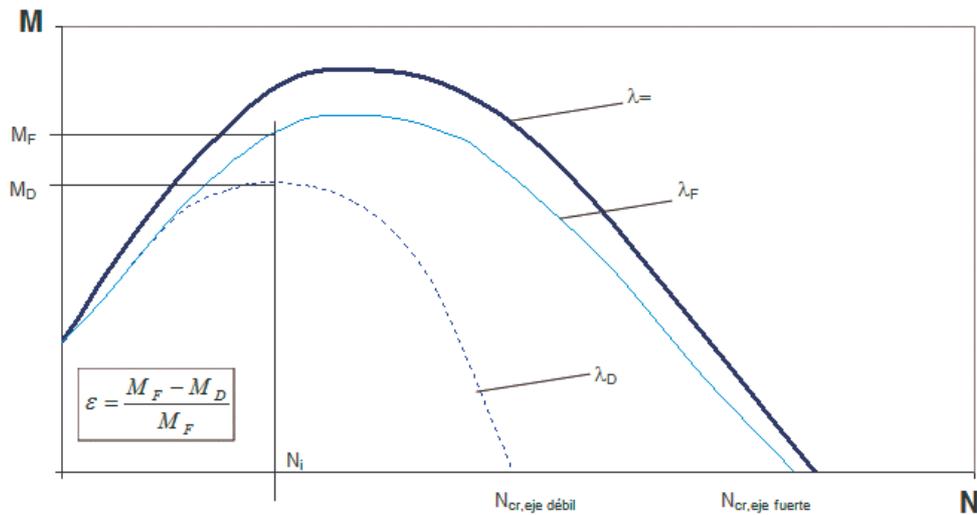


Figura V.8.- Familia de diagramas de interacción.

5. Obtención del error ε_M que se produce en todas y cada una de las piezas ensayadas, en cada punto del diagrama de interacción.

Figura V.9.- Obtención del error.



- Representación gráfica de la curva v - ε asociada a cada esbeltez geométrica y obtención del error del 10% (Figura V.10). A partir de las gráficas v - ε_M puede calcularse el axil reducido que hace que un soporte de esbeltez de eje débil λ_i , con unas condiciones determinadas (h/b , f_c , φ , ψ , ω), sufra una pérdida de capacidad resistente del 10%.

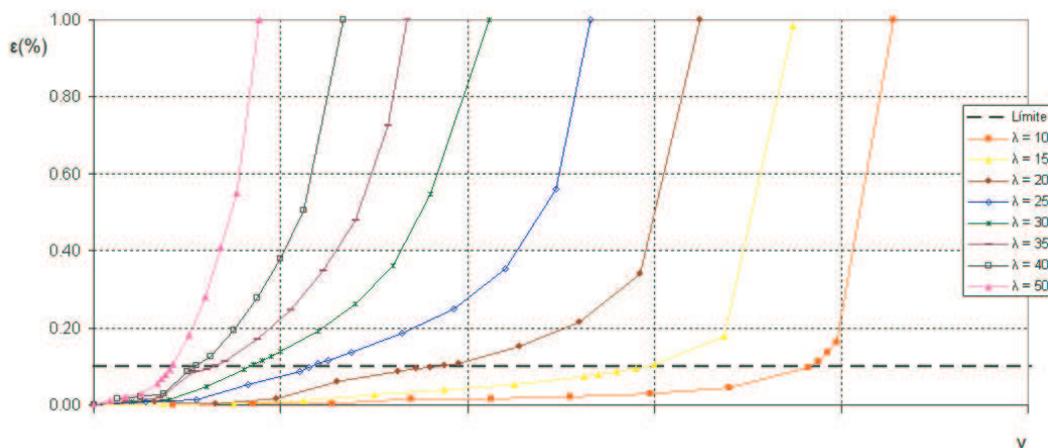


Figura V.10.- Obtención del error del 10%.

En la obtención de los puntos del 10% de error es necesario interpolar entre dos datos, uno con error menor del 10% y otro con error mayor de ese 10%. La interpolación realizada es lineal, porque la discretización del axil reducido es muy fina en el entorno del 10% de error, y los datos recogidos distan poco entre sí. Por otra parte, las curvas v - ε son cóncavas, por lo que la interpolación lineal nos deja del lado de la seguridad, ya que predice un axil asociado al 10% de error menor de lo que en realidad es.

- Representación de la esbeltez geométrica, λ_{esv} , frente al axil reducido. Las curvas obtenidas son de la forma representada en la Figura V.11.

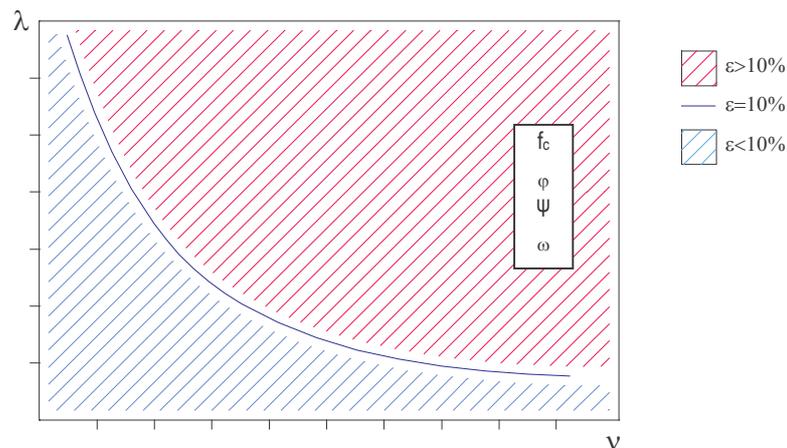


Figura V.11.- Esbeltez límite para un caso concreto de f_c ; φ ; ω .

2. Análisis de los resultados obtenidos:

La base para el análisis de resultados la conforman las curvas v - λ_{esv} obtenidas para cada combinación de los factores h/b , f_c , φ , ψ y ω . Sobre dicha colección de curvas se llevan a cabo dos análisis: por una parte, se estudia el tipo de función que mejor describe el comportamiento; por otro lado, se analiza la importancia real de cada parámetro sobre la esbeltez de esviaje, y su pauta de variación.

3. Ajuste experimental de la expresión de la esbeltez límite:

Con la función de ajuste escogida, y conocida la forma de variación de la esbeltez respecto a cada parámetro, se intentarán ajustar los coeficientes de la función, buscando una buena reproducción del fenómeno y una razonable sencillez en la expresión propuesta.

4. Verificación de la expresión.

V.3.2 Descripción y calibración del programa.

La herramienta empleada para efectuar los ensayos numéricos es un programa informático de elementos finitos desarrollado por Bonet[4]. El programa realiza una simulación numérica del comportamiento de soportes sometidos a solicitaciones normales. Emplea para ello un modelo teórico de referencia muy completo, que incluye la no-linealidad mecánica, mediante las curvas constitutivas de hormigón y acero, el efecto de la fisuración y la "tensión-stiffening", el comportamiento diferido de los materiales y las deformaciones históricas; y la no-linealidad geométrica, considerando, por una parte, los efectos producidos por las deformaciones de segundo orden, y por otra parte, los momentos adicionales debidos a los desplazamientos de la

estructura. Esto último obliga al programa a calcular el equilibrio de la estructura en la posición deformada, por medio de la actualización iterativa de las coordenadas de los puntos del soporte.

El programa contempla las dos formas de agotamiento de la estructura, definiendo los criterios de rotura e inestabilidad, que permiten evaluar la máxima capacidad portante de la misma.

El programa se subdivide en tres fases (Figura V.12):

- A. **Lectura de datos:** se proporcionan como entrada al programa dos tipos de datos; por una parte los que se refieren a los parámetros de estudio, y por otra, los valores de las variables que condicionan el funcionamiento interno del programa (número y tamaño de los elementos finitos, error para el control de convergencia, etc.).
- B. **Desarrollo del modelo:** se subdivide en dos procesos de convergencia. En el primero se calculan los desplazamientos nodales que cumplen la condición de equilibrio para una geometría definida. En el segundo proceso de convergencia se modifica la posición de los nodos, calculando la geometría deformada de la estructura, y se incorporan los efectos diferidos.
- C. **Salida de resultados:** el programa devuelve, en forma de archivos, información respecto a desplazamientos y esfuerzos en los nudos y los puntos de Gauss, deformaciones de los elementos, estado límite alcanzado, etc. Mediante una aplicación de un postproceso, la información se sintetiza en los momentos máximos de primer orden en los extremos y el estado límite que provoca el fallo del elemento. Estos dos datos son los que sirven de base en la construcción de los diagramas de interacción de la pieza.

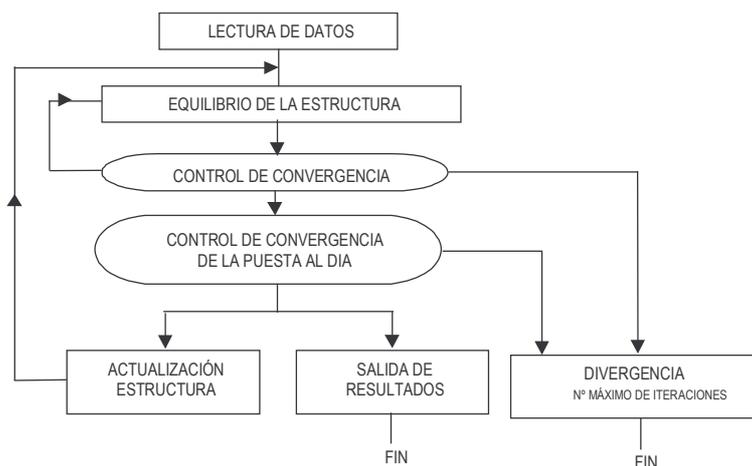


Figura V.12.- Estructura general del programa.

El comportamiento no lineal de la estructura comporta que las ecuaciones de equilibrio de la misma den lugar a sistemas de ecuaciones no lineales, en los que sólo es posible una resolución numérica, mediante la aplicación de algoritmos de resolución no lineales. Además, en cada elemento estructural es necesario realizar una doble integración, a nivel elemento, en la dirección de la directriz de la pieza, y a nivel de sección, transversalmente.

Entre los numerosos métodos de resolución existentes, los más apropiados para el problema en cuestión son el de Newton-Raphson, cuando el nivel de carga es conocido, y el de Chrisfield, cuando lo que se desea es obtener el nivel de carga máxima. El programa emplea ambos métodos, discriminando entre ellos según el objetivo perseguido, pero en el caso particular del presente estudio, al buscar el momento máximo que resiste la pieza, el método predominante será el de control de desplazamientos de Chrisfield, en el que la amplitud de paso escogida tiene una gran repercusión sobre la precisión de los resultados.

Calibración numérica:

El programa de elementos finitos empleado es capaz de proporcionar resultados con el nivel de precisión que se le exija, pero los tiempos de cálculo se incrementan exponencialmente al variar algunos de los factores numéricos internos. Por ello es necesario realizar un análisis previo para optimizar razonablemente el rendimiento del programa manteniendo la precisión requerida.

Se presentaron dos tipos básicos de problemas: los asociados a los elementos finitos, como el tamaño de la malla de discretización del soporte, o los problemas derivados de la posición de los puntos de Gauss, y los que tienen que ver con la magnitud del paso con el que se incrementa cada iteración.

El número de elementos finitos es uno de los datos de entrada en el programa. Algunos autores, como Bazant et al.[2] aconsejan una discretización del soporte tal que la longitud de los elementos finitos sea no menor que el canto de la sección transversal, y no mayor de 1m. Estas recomendaciones dejan un cierto intervalo en el que escoger el número de elementos finitos, por lo que es necesario averiguar si la elección del número de elementos finitos influye en los resultados de los ensayos, y cuál es la discretización adecuada, en cada caso.

Se llevó a cabo un análisis de sensibilidad, mediante una campaña de ensayos sobre soportes de idénticas características, en los que se variaba la discretización. Los soportes eran de hormigón de resistencia a compresión $f_c=30$ MPa, armados con una cuantía mecánica $\omega=0.33$, cargados con un axil reducido $\nu=0.2$ y sin considerar fluencia. Se consideraron soportes de esbelteces $\lambda=20; 25; 30; 40$ y 60 , y discretizaciones de $n = 6, 8, 10, 20$ y 30 elementos finitos. Los resultados obtenidos se presentan gráficamente en la siguiente figura:

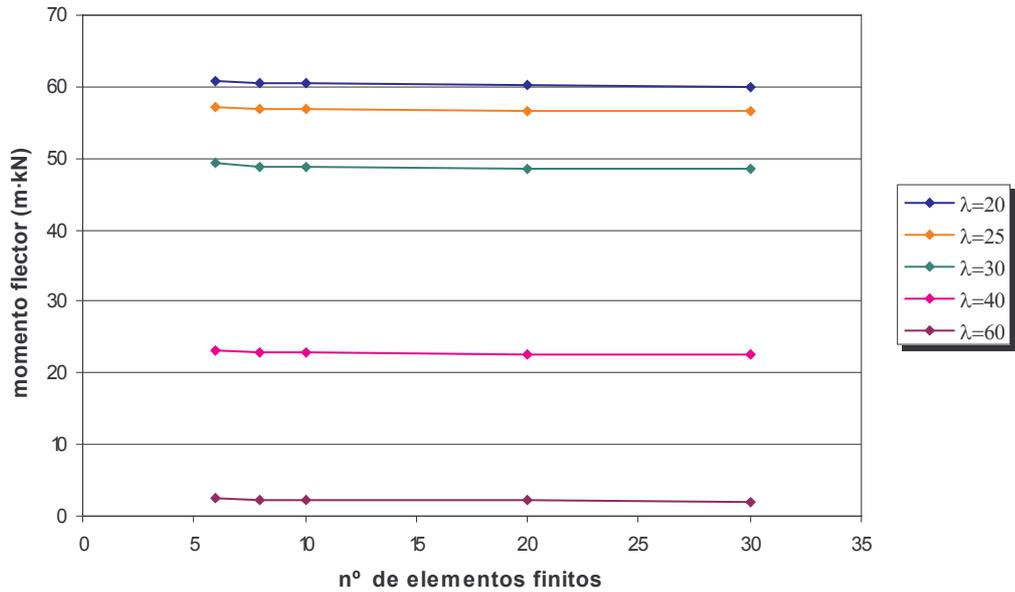


Figura V.13.- Sensibilidad de los resultados frente al número de elementos finitos.
Caso analizado: $f_c=30$ MPa, $\omega=0.33$, $\nu=0.2$, $\varphi=0$.

En las tablas que siguen se recogen los resultados de los ensayos, y su variación respecto al valor obtenido con el mayor número de elementos finitos:

	$\lambda_g=20$	$\lambda_g=25$	$\lambda_g=30$	$\lambda_g=40$	$\lambda_g=60$
n=6	60.8345	57.1630	49.3978	23.2338	2.4674
n=8	60.5548	56.9701	48.8780	22.8850	2.2319
n=10	60.3830	56.8216	48.7631	22.8131	2.1311
n=20	60.1124	56.6719	48.4787	22.5762	2.1298
n=30	60.0636	56.6685	48.4425	22.5761	2.0793

Tabla V.3.- Momentos máximos resistidos, en m kN.
Caso analizado: $f_c=30$ MPa, $\omega=0.33$, $\nu=0.2$, $\varphi=0$.

	$\lambda_g=20$	$\lambda_g=25$	$\lambda_g=30$	$\lambda_g=40$	$\lambda_g=60$
n=6	0.012835	0.008726	0.019720	0.029132	0.186649
n=8	0.008178	0.005322	0.008990	0.013683	0.073390
n=10	0.005318	0.002702	0.006618	0.010498	0.024912
n=20	0.000812	0.000059	0.000747	0.000004	0.024287
n=30	0	0	0	0	0

Tabla V.4.- Diferencias relativas al resultado de 30 elementos finitos.
Caso analizado: $f_c=30$ MPa, $\omega=0.33$, $\nu=0.2$, $\varphi=0$.

Los resultados evidencian que, en todas las esbelteces, las diferencias relativas decrecen al aumentar el número de elementos finitos, haciéndose muy pequeñas a partir de 10 elementos finitos. Sólo se detectan diferencias importantes, superiores al 1%, en el caso de esbelteces extremadamente elevadas. De hecho, se ha incorporado el caso de $\lambda_g=60$ para observar el comportamiento de los resultados cuando los elementos finitos son de longitud mayor de 1 m. Y la discretización de 20 elementos finitos no mejora apreciablemente los resultados obtenidos con 10 elementos finitos, por lo que no se justifica el empleo de un tamaño de malla menor. En los casos de esbelteces muy grandes, las diferencias relativas aumentan no sólo por la influencia del número de elementos finitos, sino porque los momentos máximos que se pueden alcanzar son pequeños, y el paso utilizado tiene un gran impacto sobre el resultado final, como se verá a continuación. Por otra parte, si lo que se analizan son las diferencias absolutas, y no las relativas, se observa que la variación entre los valores obtenidos con 10 y 20 elementos finitos, en el caso de $\lambda_g=60$, es del orden de la centésima.

Tras este análisis, se establece que el número de elementos finitos que formarán la malla de cada soporte será el máximo posible, siempre que los elementos sean de longitud menor que el canto de la pieza, y estableciendo como límite superior el valor de 10 elementos finitos. Esto implica que el número de elementos finitos dependerá de la esbeltez del soporte, del modo que se resume en la siguiente tabla:

λ_g	n
50	10
47.5	10
45	10
42.5	10
40	10
37.5	10
35	10
32.5	10
30	10
27.5	10
25	10
22.5	10
20	10
17.5	10
15	10
12.5	10
10	10
8.75	8
7.5	8
6.25	6
5	6
3.75	4
2.5	2
1	2

Tabla V.5.-Número de elementos finitos en la discretización según la esbeltez del soporte de ensayo.

Otro de los problemas referente a los elementos finitos tiene que ver con la posición de los puntos de Gauss:

Los elementos finitos utilizados por el programa son unidimensionales, con dos nodos extremos en los que se compatibilizan desplazamientos y giros, y un nodo intermedio necesario para reproducir el desplazamiento longitudinal del punto central de la sección en fisuración. En ese caso, la integración numérica a nivel elemento, llevada a cabo mediante el método de Gauss-Legendre, se optimiza tomando dos puntos de Gauss.

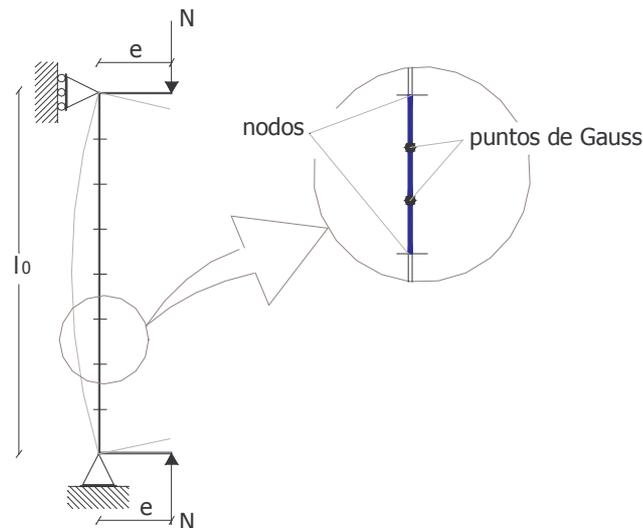


Figura V.14.- Puntos nodales y puntos de Gauss en un elemento finito.

Es en dichos puntos en los que se obtienen las verdaderas características mecánicas de la sección, extendiéndose posteriormente por interpolación al resto de secciones del elemento. De esta forma, el agotamiento de la pieza está vinculado al fallo seccional en algún punto de Gauss y, por tanto, a los esfuerzos que solicitan dichos puntos (Figura V.14). Como consecuencia del proceso de interpolación pueden darse situaciones en las que los momentos de primer orden en los extremos superen la resistencia de la sección, dando lugar a pérdidas de capacidad negativas. Estos errores, debidos únicamente al método numérico, son siempre pequeños y no afectan al resultado, por lo que se optó por despreciarlos.

El tercer problema de tipo numérico que se planteó en las fases previas fue la elección del paso. El programa obtiene el diagrama momento-curvatura de la sección para intervalos constantes de curvatura, hasta dar con un punto de agotamiento (el momento máximo de la curva) o de inestabilidad del soporte (Figura V.15).

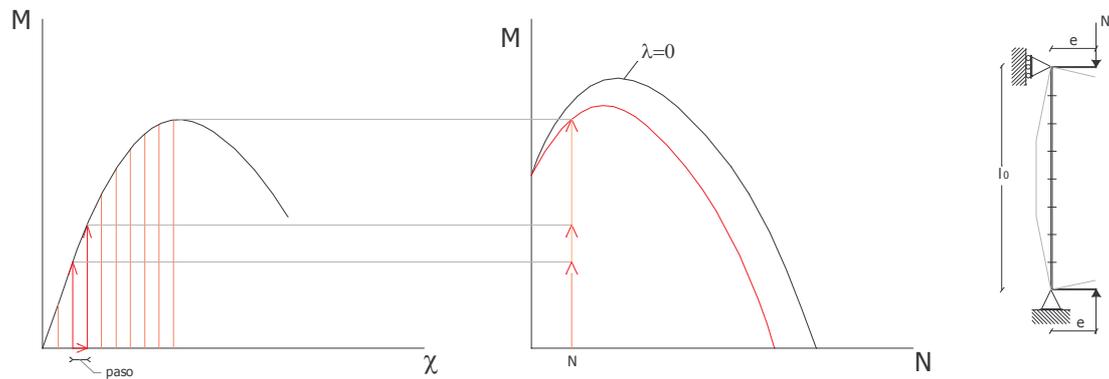


Figura V.15.- Proceso seguido por el programa para calcular el momento máximo.

La adecuada calibración del paso es muy importante. Si éste es demasiado grande, el programa puede no encontrar el máximo en el diagrama momento-curvatura. Por el contrario, cuanto más pequeño sea el paso, más despacio recorrerá el programa la curva, de manera que se incrementa exponencialmente el tiempo de cálculo. Un paso pequeño conlleva también la posibilidad de que el programa detecte el máximo relativo correspondiente al momento de fisuración y lo identifique como momento de agotamiento. Por tanto, es importante establecer la amplitud del paso, para optimizar los resultados obtenidos en cuanto a precisión de los valores y tiempo de cálculo invertido.

Se detectó que el paso adecuado dependía del nivel de axil aplicado, lo cual es lógico, ya que el diagrama momento-curvatura varía a su vez con el axil, de forma que con axiles bajos la rama de plastificación era amplia y el paso debía ser más grande. Por el contrario, con axiles mayores se dan caídas bruscas en el diagrama momento-curvatura, y es necesario un menor paso para detectar adecuadamente los cambios de comportamiento.

Tras unos análisis previos se estableció que el paso idóneo para axiles relativos menores de 0.2 era del orden de la milésima (0.001). Para el resto de axiles reducidos el paso adoptado es del orden de la diezmilésima (0.0001).

V.3.3 Programa de ensayos.

Cada curva λ_{esv} ensayada está formada por 10 puntos. Cada punto proviene del diagrama de interacción para unas características concretas, formado por una curva de esbeltez nula y 8 pares de curvas axil reducido-momento flector con esbelteces diferentes en flexión simple y esviada, que se pueden consultar en los anejos. Si a estos diagramas se les añaden los necesarios para obtener cada axil crítico, se tiene que para la realización del presente trabajo han sido necesarios cerca de 11.000 ensayos. El programa completo se muestra en el anejo A.

VI RESULTADOS OBTENIDOS.

Los resultados obtenidos a través de los ensayos se emplean para confeccionar tres tipos de gráficas (Figura VI.1), para cada combinación de parámetros (h/b , f_c , φ , ψ , ω), siguiendo el procedimiento expuesto en el anterior capítulo. El primer grupo de lo constituyen los diagramas de interacción del soporte de esbeltez geométrica nula junto con los soportes de diversas esbelteces calculados en flexocompresión recta y esviada. Estas curvas son la base para la evaluación de las pérdidas de capacidad mecánica de cada esbeltez. El segundo tipo de gráficas presentan las pérdidas de capacidad en cuanto a momentos como error, en tanto por cien, en función del nivel de axil, para cada esbeltez geométrica, y sirven de base para el cálculo del axil para el cual una determinada esbeltez es el límite inferior. El tercer y último grupo de gráficas muestran el comportamiento de la esbeltez límite, en función del axil reducido, para la combinación de parámetros elegida.

Por tanto, a cada valor concreto del vector de parámetros se asocian tres gráficas diferentes. A continuación se muestran un ejemplo de la forma de los resultados obtenidos, el correspondiente al caso $f_c=30$ MPa, $\varphi=0$, $h/b=3$, $\omega=0.0666$. El resto de casos se han extraído de este capítulo para aportar mayor claridad al estudio, y se muestran en el anejo B.

Las pequeñas irregularidades y los cruces entre curvas que se observan en algunas de ellas se deben a dos causas básicas. La primera son las pequeñas desviaciones numéricas por la situación de los puntos de Gauss, y la segunda se debe a que la discretización del axil reducido es más fina en el entorno del 10% de error, y dicho entorno se sitúa en un nivel de axil distinto para cada esbeltez.

$N_{uc} = 953.75 \text{ kN}$	$v_c = 1.06$	$f_c = 30 \text{ MPa}$	$\omega = 0.0666$	$\alpha = 1$	$\varphi = 0$
------------------------------	--------------	------------------------	-------------------	--------------	---------------

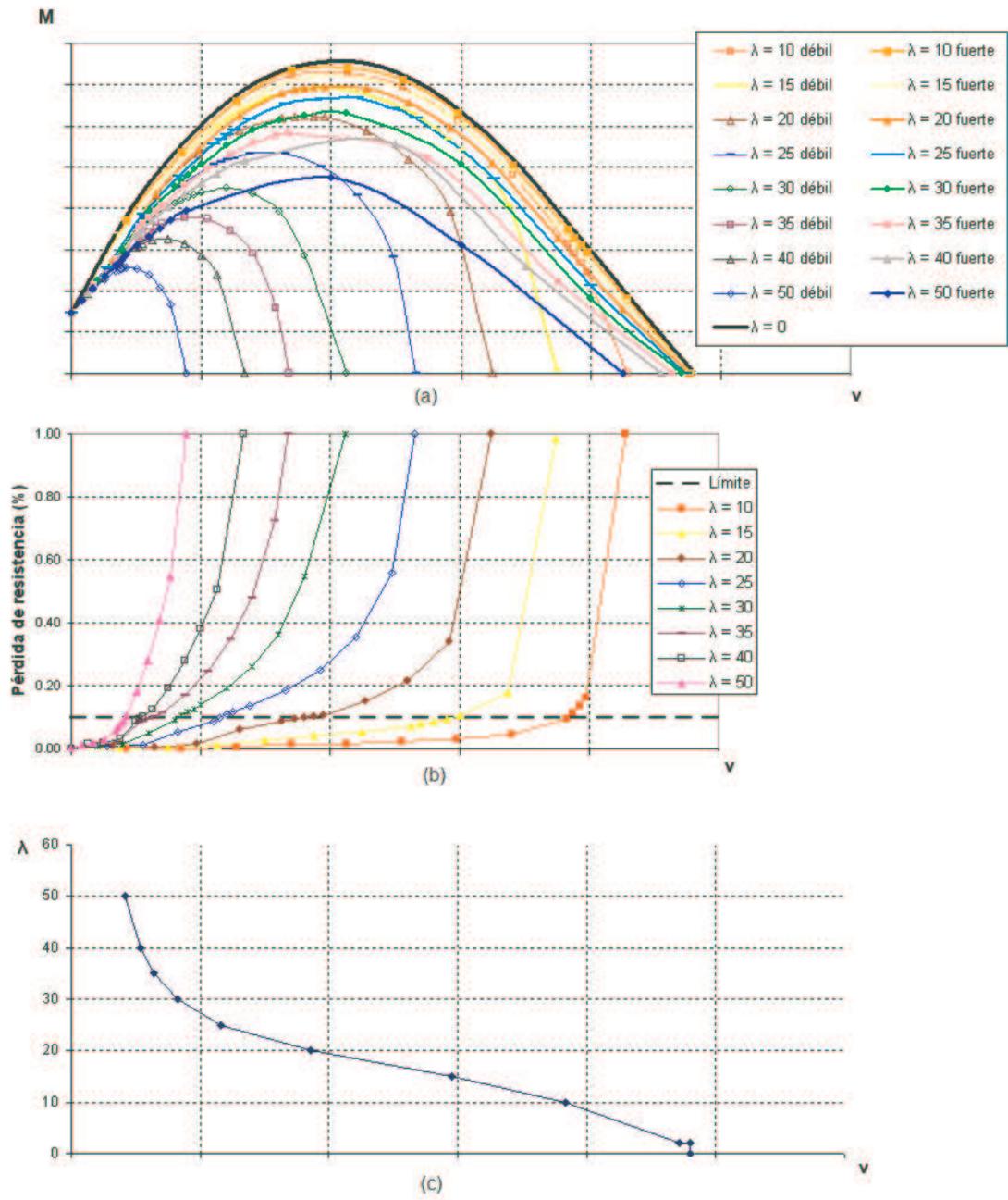


Figura VI.1.- Diagrama de interacción, curvas v- ϵ_m y esbeltez límite en función del axil reducido.

VII ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Una vez obtenidos y ordenados todos los resultados necesarios para el ajuste, es conveniente realizar un análisis paramétrico de los mismos. En el presente capítulo se lleva a cabo dicho proceso, mediante un análisis cualitativo de la influencia que tiene cada factor en el comportamiento del límite de esbeltez inferior. Pero no sólo se estudia cómo varía dicho límite con cada variable, sino que se analizan las posibles interacciones entre parámetros y el comportamiento de los soportes en cada situación.

VII.1 PARÁMETROS GEOMÉTRICOS.

1. Esbeltez (λ_g).

Éste es el parámetro más importante junto con el axil reducido ya que la respuesta de los soportes sometidos a solicitaciones de flexocompresión depende enormemente de su ella. Como era de esperar, los resultados muestran que los elementos más esbeltos sufren mayores pérdidas de capacidad resistente.

La Figura VII.1 representa un soporte sometido a flexión esviada con diferentes esbelteces geométricas. Se comprueba cómo, para un mismo axil de 400 kN, el soporte de esbeltez 30 resiste un momento de 5 m·kN, mientras que el de esbeltez 20 resiste 31 m·kN, y el de esbeltez 10 alcanza los 37 kN·m. Este comportamiento se traduce en pérdidas de capacidad mecánica crecientes con la esbeltez de la pieza.

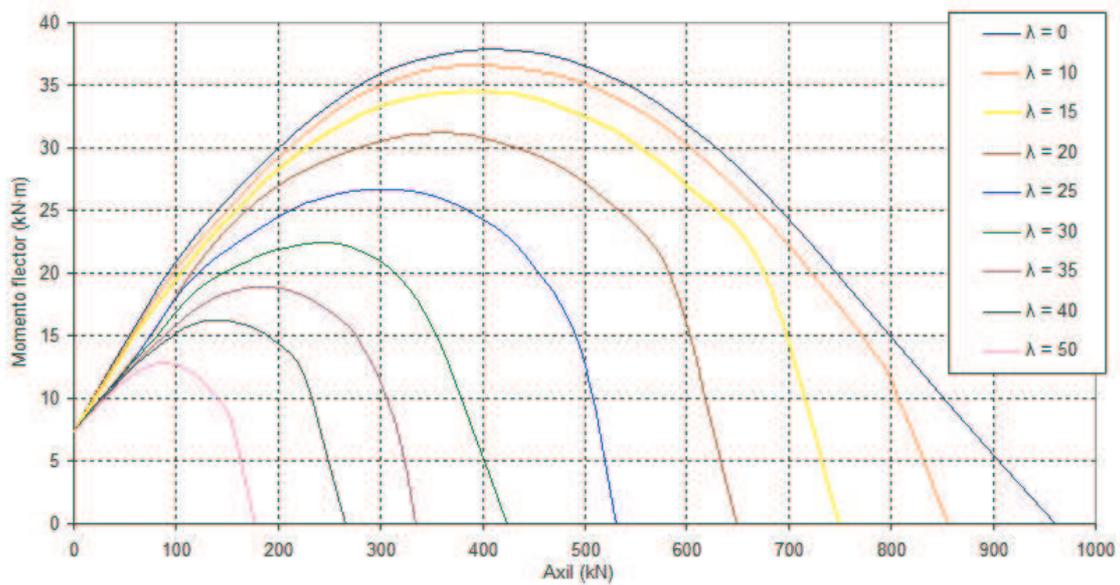


Figura VII.1.- Diagramas de interacción. Caso $f_c=30$ MPa; $\omega=0.3333$; $\varphi=0$.

También se observa una mayor separación entre los diferentes diagramas de interacción cuanto mayor es el nivel de axil, lo que lleva al aumento del error con el incremento del axil. Todo esto hace que la esbeltez límite decrezca cuanto mayor sea el axil aplicado, y que las curvas $v-\lambda_{esv}$ tengan la forma que se representa en la Figura VII.2.

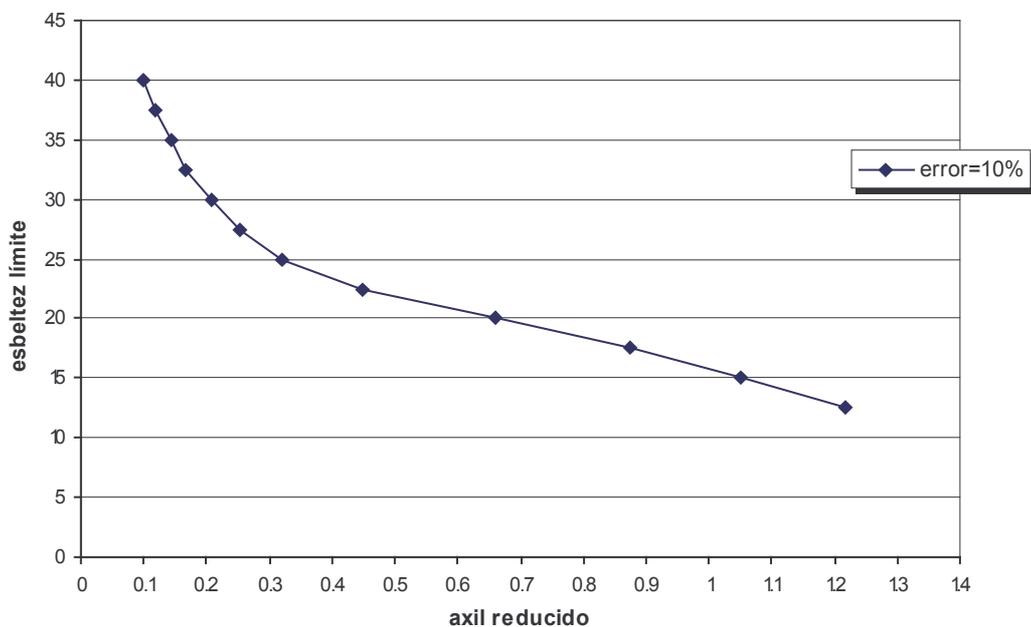


Figura VII.2.- Esbeltez de esvaje. Caso $f_c=30$ MPa; $\omega=0.33$; $\varphi=0$.

2. Cuantía mecánica de armadura (ω).

El efecto que tiene la cuantía mecánica de armadura es el aumento de la capacidad resistente de los elementos. A mayor cuantía de armadura, más resisten tanto el soporte de esbeltez nula como los de diferentes alturas, tanto sometidos a flexocompresión recta como esviada, tal y como se ve en la Figura VII.3.

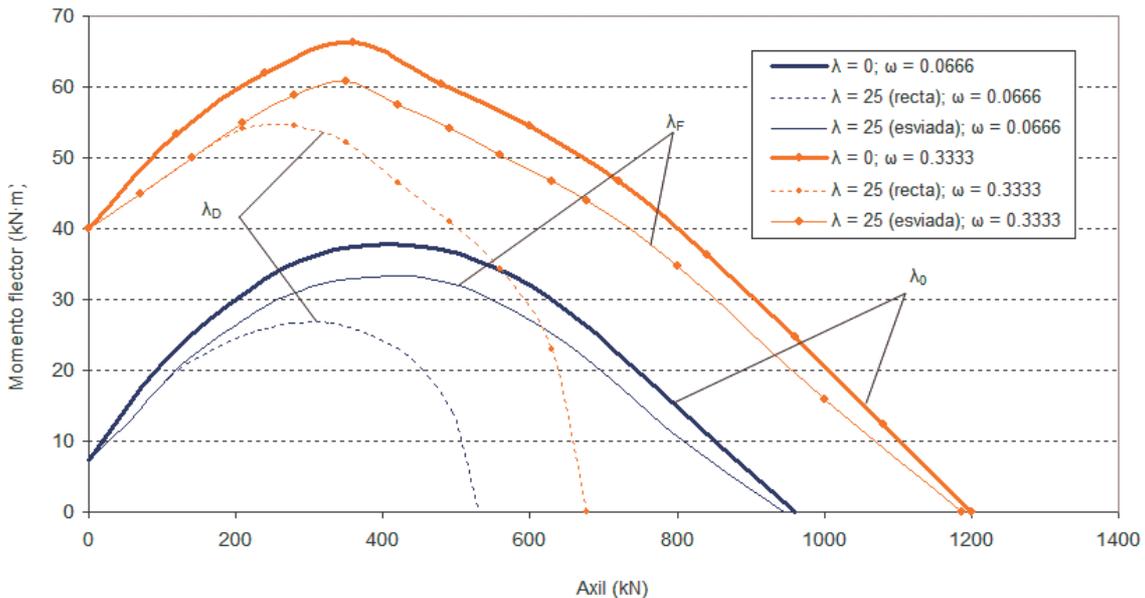


Figura VII.3.- Influencia del armado en el comportamiento de los soportes.

Sin embargo, lo que interesa conocer es si la diferencia relativa entre cada par de curvas (λ_D , λ_F) cambia con la cuantía. Es decir, si la esbeltez de esviaje varía o se mantiene constante con el incremento de armadura. La observación de la gráfica de la Figura VII.4 ayuda a responder a esta cuestión. En dicha figura se han representado las esbelteces en función del axil reducido, correspondientes a soportes armados con cuantías diferentes, sometidos a solicitaciones instantáneas. Se observa que la esbeltez límite aumenta, para un nivel de axil determinado, cuando se da un incremento en la cuantía de armadura. La magnitud de los incrementos detectados en el límite de esbeltez depende del nivel de axil.

Por otra parte, para una esbeltez geométrica determinada, cuanto más armado está el soporte, mayor es el nivel de axil que soporta la pieza con una pérdida mecánica del 10%.

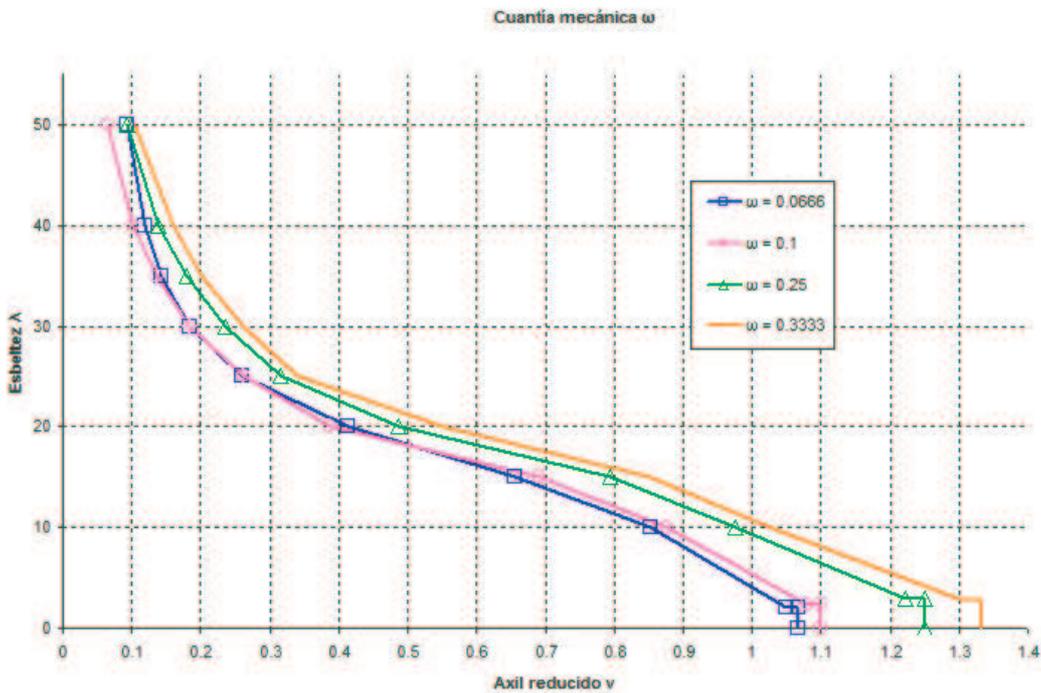


Figura VII.4.- Influencia de la cuantía de armadura en la esbeltez límite. Caso $\varphi=0$.

En las situaciones de deformaciones diferidas, no parece haber interacción entre la cuantía de armadura y el coeficiente de fluencia.

En general, como se irá constatando a lo largo de este capítulo, se observa un comportamiento del límite de esbeltez bastante homogéneo en soportes con cuantías mecánicas superiores a 0.25, y una respuesta algo diferente en soportes armados con cuantía $\omega=0.07$. Esta observación está recogida también en el trabajo de Bonet[4], que señala como límite de la desviación en el comportamiento el valor de la cuantía mecánica $\omega=0.25$. Con armados menores, la respuesta de los soportes está condicionada casi exclusivamente por el hormigón, que modifica la influencia del resto de variables.

Un aspecto que puede llamar la atención de la figura anterior, es el final de las curvas, cuando la esbeltez es cercana a 0. Los 3 puntos que provocan esa forma se corresponden con, por un lado, para un valor de esbeltez igual a 0, el axil considerado es el correspondiente a la máxima resistencia a compresión simple que puede resistir la sección; el siguiente punto es, para el mismo axil que el punto anterior, la esbeltez que debe tener un soporte para que la diferencia entre el axil crítico respecto al eje débil y el axil crítico respecto al eje fuerte sea del 1%; por último, el tercer punto que da esa forma rectangular al final de la curva se corresponde con el axil crítico de eje débil y la esbeltez del punto anterior.

3. Relación canto-ancho (h/b).

Si se representa en una gráfica (figura VII.5) la esbeltez geométrica de eje débil en función del axil reducido, para distintas relaciones canto-ancho, se obtiene el siguiente resultado:

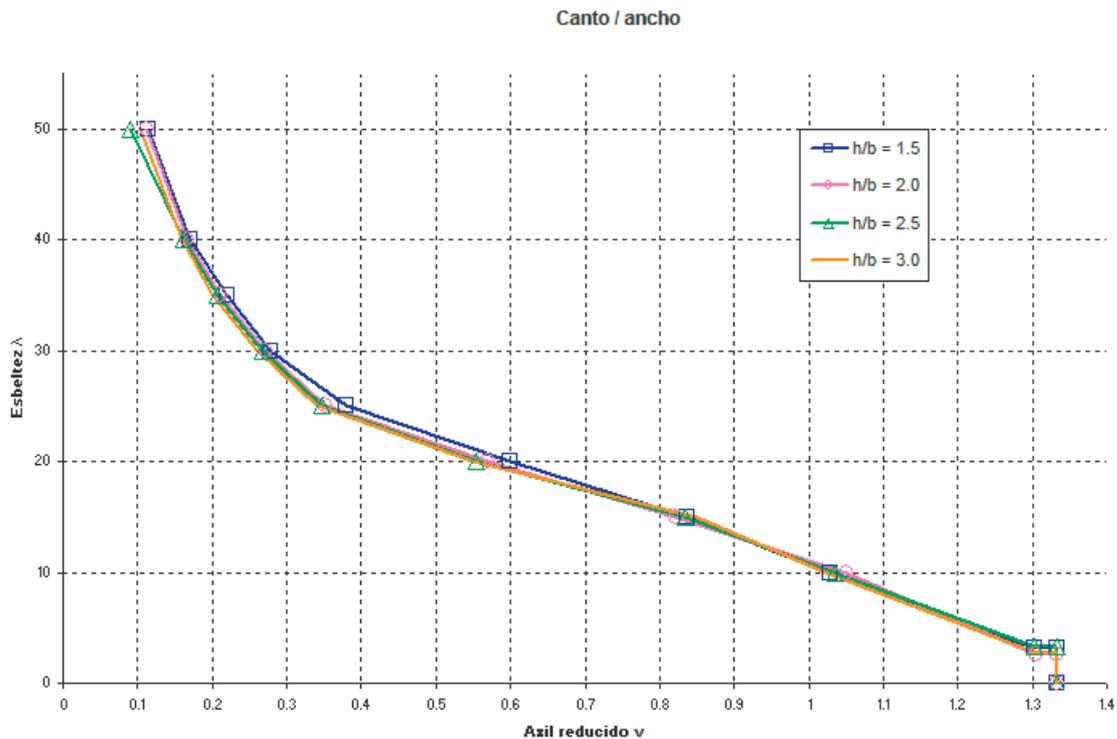


Figura VII.5.- Influencia de la relación canto-ancho en la esbeltez de esviaje. Caso $\varphi=0$, $\omega=0.3333$.

A la vista del resultado, la esbeltez geométrica de eje débil es independiente de la relación canto-ancho del soporte. Esta es la razón por la que la expresión buscada, y el trabajo realizado en este estudio, se basa en la esbeltez geométrica respecto del ancho en lugar del canto, que es el criterio habitual.

4. Disposición de la armadura (ψ).

Se han analizado tres disposiciones de armado para observar la influencia de este parámetro. La primera de ellas, tiene armadura en las 4 esquinas; la segunda, responde a una armadura lógica para los esfuerzos a los que está sometido el soporte. Está la armadura dispuesta en las caras paralelas al canto, que es donde se debe colocar teniendo en cuenta que los esfuerzos principales son un axil y un flector de eje fuerte. Por último, se propone un armado ilógico para resistir los esfuerzos de eje fuerte, pero que es el que mejor debe resistir en el caso de existir una excentricidad accidental sobre el eje débil. El resultado de este análisis se muestra en la figura VII.6.

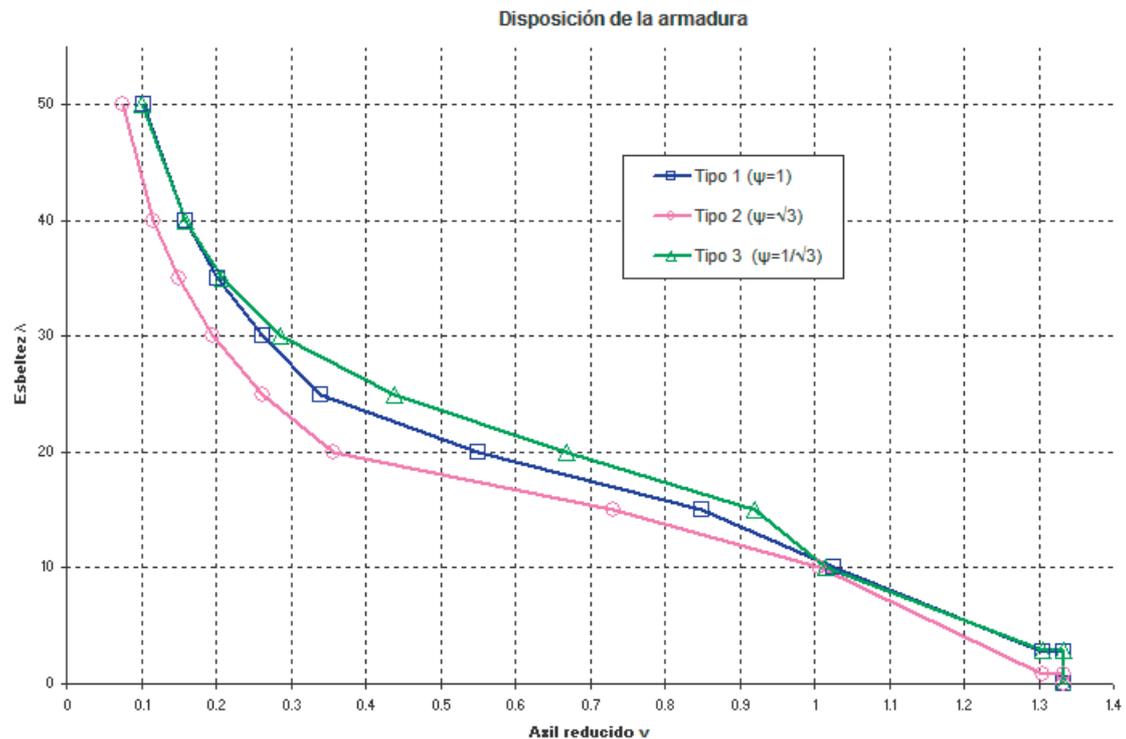


Figura VII.6.- Influencia de la disposición de la armadura en la esbeltez de esviaje. Caso $\varphi=0$, $\omega=0.3333$.

La gráfica muestra el resultado esperado según lo comentado en el párrafo anterior. Si el armado se sitúa para resistir los esfuerzos sobre el eje fuerte ($\psi > 1$), la capacidad de paliar los efectos de una excentricidad accidental sobre el eje débil se reduce, lo que se traduce que dado un axil, la esbeltez geométrica de eje débil es menor. En caso contrario ($\psi < 1$), la esbeltez de esviaje es mayor para un axil dado.

5. Recubrimiento mecánico (c).

Este parámetro no ha sido incluido dentro de las variables a estudiar en aras de conseguir una mayor claridad en la expresión buscada. Se ha considerado en esta fase del estudio un recubrimiento mecánico constante del 10% del lado ($0.1 b$ y $0.1 h$).

En la fase de comprobación se variará el valor del recubrimiento para comprobar que su influencia no es importante en el cálculo de la esbeltez de esviaje.

VII.2 PARÁMETROS REFERENTES A LOS MATERIALES.

1. Resistencia a compresión del hormigón (f_c).

Como se expone en el capítulo referente al planteamiento del problema, no existe uniformidad de criterio respecto a esta variable entre los autores analizados. Por ello, uno de los

objetivos del presente trabajo era la observación del comportamiento del límite de esbeltez cuando la resistencia del hormigón varía.

El resultado de los ensayos se presenta, para facilitar la comparación, en dos gráficas que recorren el campo habitual de los soportes, en cuanto a cuantías de armado (Figura VII.7). Cada una de las gráficas contiene los resultados obtenidos para hormigón normal y hormigón de alta resistencia.

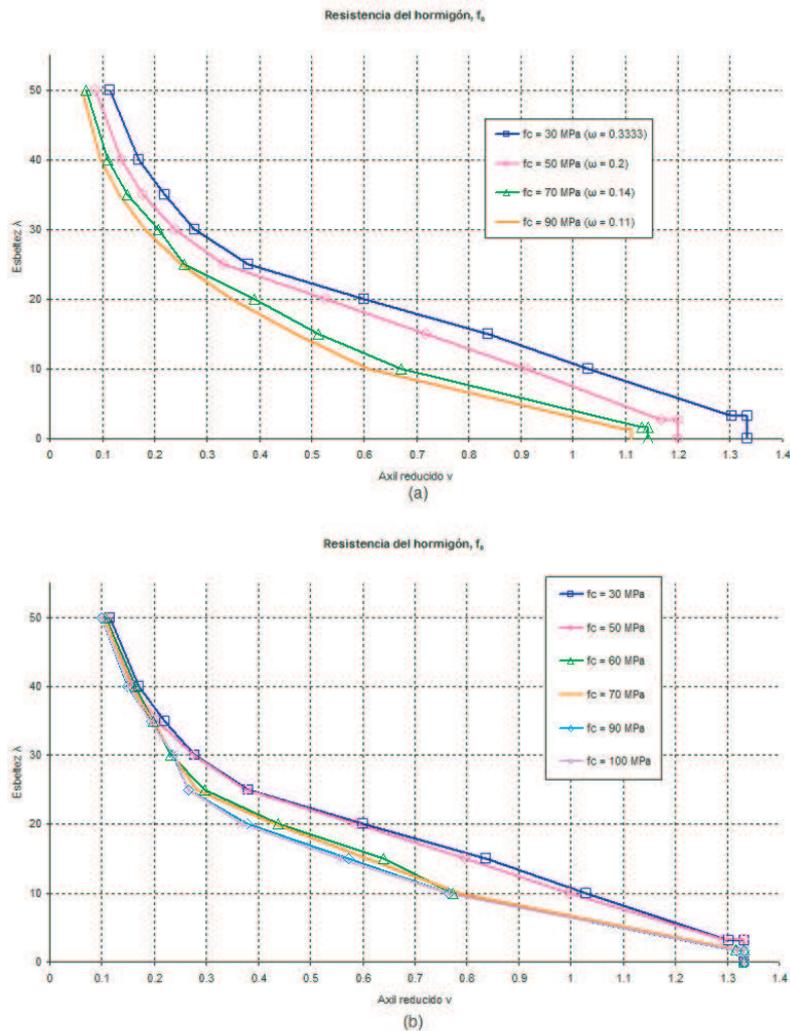


Figura VII.7.- Influencia de f_c en la esbeltez de esviaje.

(a) $\rho = A_s/A_c = 0.02$

(b) $\omega = (A_s f_y)/(A_c f_c) = 0.3333$

De la observación de dichas gráficas pueden extraerse varias conclusiones:

- En general, los hormigones de mejor calidad sufren mayores pérdidas de capacidad mecánica, y son más sensibles a los efectos de segundo orden.
- La cuantía mecánica también modifica la importancia relativa que tiene la resistencia del hormigón sobre el límite de esbeltez; las diferencias son máximas para cuantía mínima, y apenas apreciables con cuantías elevadas. Esto es debido a que en un

soporte con cuantía mínima el acero no ejerce apenas influencia (básicamente sirve para absorber el salto de tensiones en el momento de la fisuración), y la resistencia a compresión del hormigón adquiere una mayor importancia, modificando el comportamiento del elemento.

- Dada una cuantía, las mayores diferencias se dan para valores medios de axil, tendiendo a unirse todas las curvas para axiles pequeños. Fijada la cuantía mecánica, todas las curvas se unen cuando la esbeltez tiende a cero ya que el axil reducido máximo capaz de resistir una sección es único.

2. Coeficiente de fluencia (φ).

La fluencia modifica el comportamiento tenso-deformacional del hormigón, haciéndolo menos rígido y menos resistente. Esto provoca que, en análisis diferido, los soportes admitan menores cargas y sufran mayores deformaciones que en análisis instantáneo.

La influencia de φ es más apreciable en los soportes esbeltos que a nivel sección, ya que en las piezas esbeltas la disminución de rigidez magnifica las deformaciones y los esfuerzos de segundo orden, causando mayores pérdidas de capacidad resistente.

Por otro lado, las pérdidas de capacidad mecánica son más acusadas cuanto mayor es el coeficiente de fluencia adoptado (Figura VII.8).

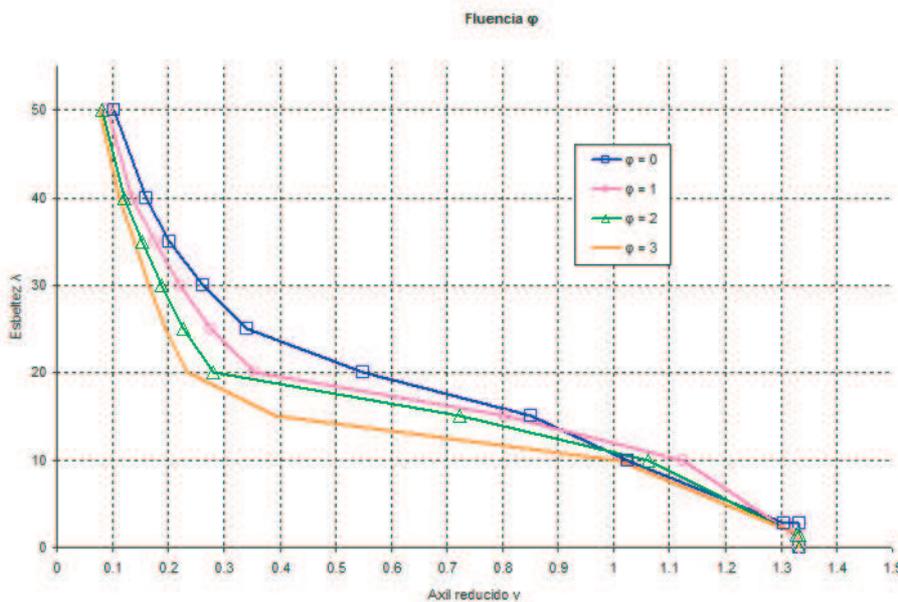


Figura VII.8.- Influencia de φ en la esbeltez de esviaje. Caso $f_c=30$ MPa; $\omega=0.3333$.

Observando la gráfica de la Figura VII.6, que representan la esbeltez límite de los soportes de hormigón de 30 MPa y 0.3333 de cuantía mecánica, se descubre que, en todos los casos, cuando el axil tiende a cero, las curvas se aproximan entre sí, lo que evidencia que la importancia de la fluencia depende, hasta cierto punto, del nivel de carga.

Sin embargo, en el rango de axiles medios y altos, a partir de $\nu=0.4$, aproximadamente, la separación entre las curvas correspondientes a coeficientes de fluencia diferentes se mantiene constante.

Respecto a la posible interacción del coeficiente de fluencia con la cuantía de armadura, o con la resistencia a compresión del hormigón, la simple ordenación y observación de los resultados no permite concluir nada.

VII.3 PARÁMETROS REFERENTES A LAS ACCIONES.

1. Axil reducido (ν).

El axil reducido es un parámetro clave en lo que se refiere a la esbeltez de esviaje, y se encuentra recogido en la mayor parte de expresiones propuestas al respecto por los autores y normas que tratan el fenómeno de la inestabilidad.

Es habitual la representación del límite esbeltez frente al nivel de axil que solicita la pieza. Y como ya se ha comentado, la forma general que adquieren los resultados dispuestos en curvas de ese tipo es la de esbeltez límite decreciente conforme aumenta el axil reducido.

VIII PROPUESTA DE CÁLCULO DE LA ESBELTEZ DE ESVAJE.

Tras el análisis del comportamiento de los resultados, en este capítulo se propone una expresión para la esbeltez de esviaje. El procedimiento empleado para el ajuste experimental pasa por varias fases, que se desarrollarán ampliamente en el presente capítulo:

- Elección del tipo de función que mejor se ciñe, en un ajuste por mínimos cuadrados, a las curvas $v-\lambda_{esv}$ experimentales.
- Obtención de los coeficientes de las funciones que se ajustan a cada una de las curvas de resultados.
- Detección y análisis del comportamiento de los coeficientes en función de cada uno de los parámetros de estudio, y obtención de las correspondientes funciones de ajuste de dichos coeficientes.

En el comienzo del proceso del ajuste se presentaron dos problemas importantes, que ya habían sido detectados durante la fase de obtención de datos. El primer problema tiene que ver con el tipo de error adoptado para la definición de esbeltez límite inferior. El criterio de error, como ya se ha comentado, es el de pérdida de capacidad en cuanto a momentos, por coherencia con la EHE-08[19].

Los diagramas de interacción de los soportes pueden ser de dos tipos, según encuentren el axil crítico o alcancen el axil último de la sección (N_0). Ambas situaciones se muestran en la Figura VIII.1.

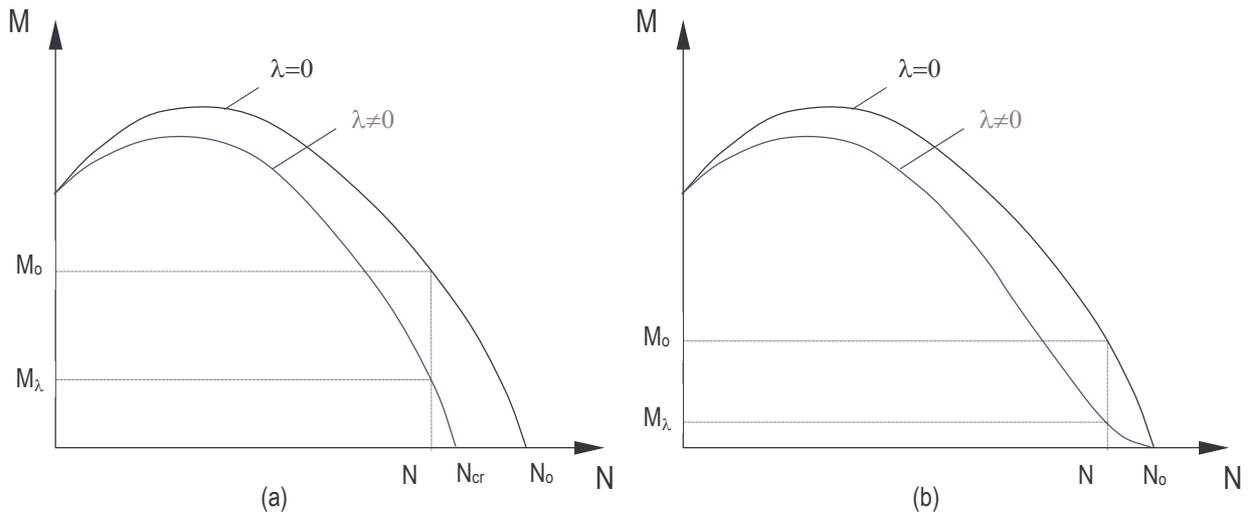


Figura VIII.1.- Diagramas de interacción de la sección transversal y el soporte esbelto.

- (a) El soporte alcanza el axil crítico.
 (b) El soporte alcanza el axil último de la sección transversal.

En el primer caso, al acercarse el nivel de carga al axil crítico del soporte, la pérdida de capacidad mecánica tiende a infinito, porque M_λ se anula. En el segundo caso, al aproximarse al axil de compresión simple de la sección transversal, el error se hace matemáticamente indeterminado (con una indeterminación del tipo 0/0). Este segundo caso no se da en los ensayos realizados, siempre se da el primero porque el axil crítico que provoca una pérdida de capacidad mecánica infinita es el axil crítico del eje débil, y siempre queda lejos del axil último de la sección transversal. Aun así, cuando los axiles solicitantes se encuentran cercanos al axil crítico de eje débil, hay una enorme sensibilidad del valor del flector resistido (y, por tanto, del valor del error) frente a las condiciones de ensayo. El resultado numérico de los ensayos realizados en esas zonas delicadas depende mucho, no sólo del paso adoptado, sino incluso de los escalones de carga que aplique el propio programa.

Esta situación hace que los resultados correspondientes a los mayores axiles sean menos fiables que el resto, y que sea muy difícil “detectar” las esbelteces límite en la zona de axiles superiores al 85% del axil de compresión de la sección transversal.

El segundo problema que se presentó tiene que ver con la forma que adoptan las curvas $v-\lambda_{esv}$, que hace muy sensibles las posibles funciones de ajuste frente al número de datos tomados para efectuar el ajuste.

Las gráficas $v-\lambda_{esv}$ presentan una rama asintótica con la vertical en la zona de pequeños axiles, del orden de $v=0.03$. Esto resulta bastante lógico, puesto que refleja el comportamiento de un soporte sometido a carga axil casi nula, que por tanto no sufrirá esfuerzos de segundo orden apreciables más que con esbelteces elevadísimas (Figura VIII.2).

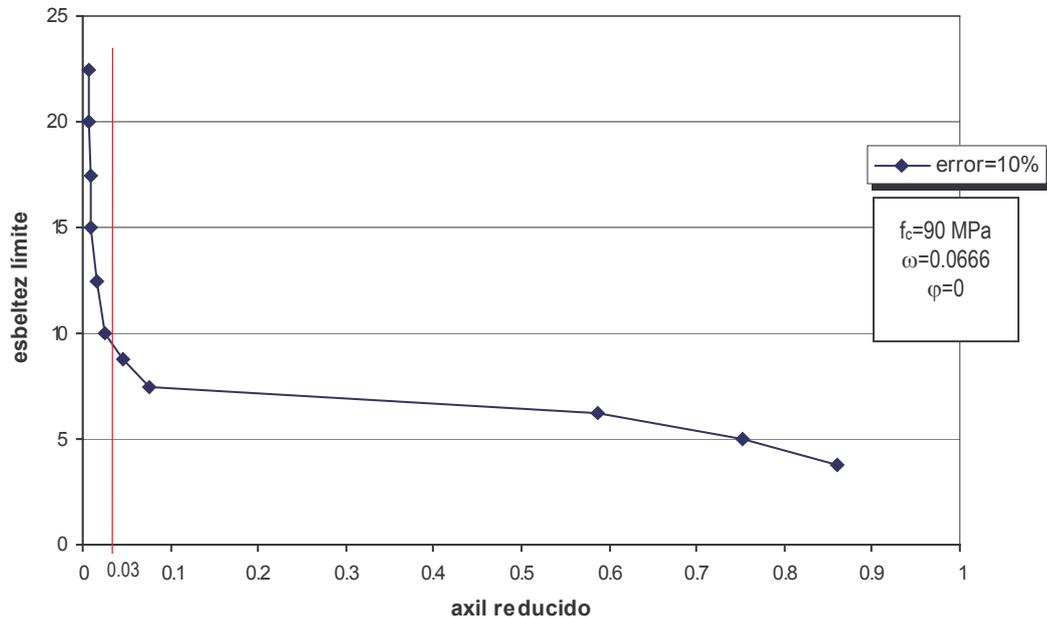


Figura VIII.2.- Curva $v-\lambda_{esv}$. Caso $f_c=90$ MPa; $\omega=0.0666$; $\varphi=0$.

Como ya se ha comentado, los datos que se pueden obtener están limitados por la derecha, en la zona de axiles altos, por el axil último que alcanza el soporte. De tal forma que, si lo que se desea es incrementar el número de resultados para un tipo de soporte dado, no queda otra opción que obtenerlos en la rama izquierda, de esbelteces crecientes, que no está limitada. Pero llegados a este punto cabe preguntarse si, en la situación descrita, un incremento en el número de datos lleva a una mejora en el ajuste. Se intentará dar respuesta a este interrogante en base a dos observaciones:

- Por una parte, los coeficientes de la función ajustada por mínimos cuadrados a la curva $v-\lambda_{esv}$ experimental son muy sensibles frente al número de datos empleado en el ajuste. Pero no sólo los coeficientes, sino que el tipo de función que mejor se adapta a los valores dados también varía según se prolongue más o menos la rama cuasi vertical de la curva. Por ejemplo, si se analiza la gráfica asociada a los soportes de $f_c=90$ MPa, cuantía $\omega=0.3333$ y coeficiente de fluencia $\varphi=3$, se obtienen las siguientes conclusiones, según el número de datos incluidos:

- En la Figura VIII.3 se muestra la gráfica obtenida con los resultados extendidos hasta un axil reducido $\nu=0.02$. Entre las funciones de ajuste que se barajan (potencial: $\lambda = A \cdot \nu^B$; logarítmica: $\lambda = A \cdot \ln \nu + B$; y exponencial: $\lambda = A \cdot e^B$), el coeficiente de correlación R^2 toma el valor de 0.99 para la función potencial, 0.92 para la logarítmica y 0.84 para la exponencial.

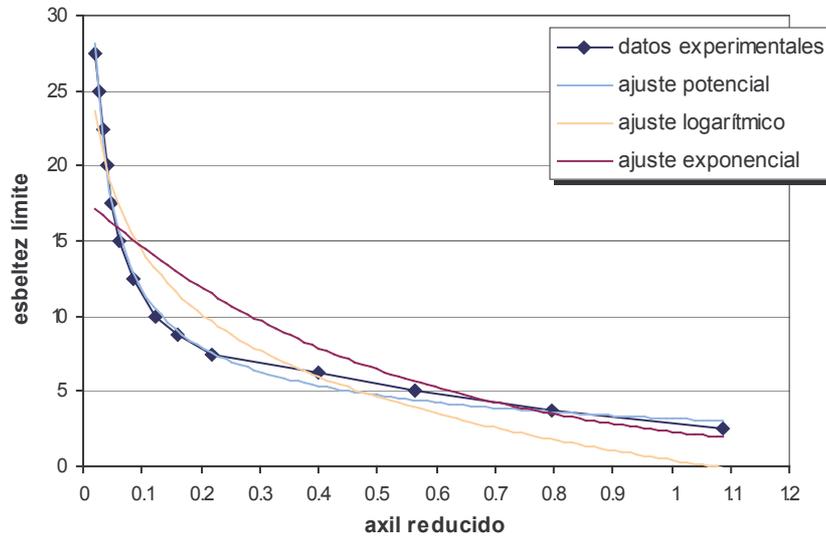


Figura VIII.3.- Curva $\nu-\lambda_{lim}$. Caso $f_c=90$ MPa; $\omega=0.3333$; $\varphi=3$. Axil límite $\nu=0.02$.

Resulta obvio que la función que mejor se adapta a los resultados experimentales en este caso es la potencial. Sin embargo, es un ajuste inseguro en los axiles altos, porque lo que prevalece en el ajuste por mínimos cuadrados en esta situación es la rama cuasi vertical ya que la densidad de puntos analizados es mayor.

- Si se limita el axil reducido menor a un valor alrededor de 0.05, como en la Figura VIII.4, los coeficientes de correlación disminuyen hasta 0.97 en el caso de la función potencial, y aumentan a 0.97 en el caso de la logarítmica y 0.94 en la exponencial.

En esta situación ya no resulta inmediata la elección de la función de ajuste más acertada. Seguramente la escogida sería la función logarítmica, que se adapta mejor a los datos en el tramo de axiles medios y altos, frente a la potencial, con buen ajuste para cargas bajas, pero del lado de la inseguridad para solicitaciones fuertes.

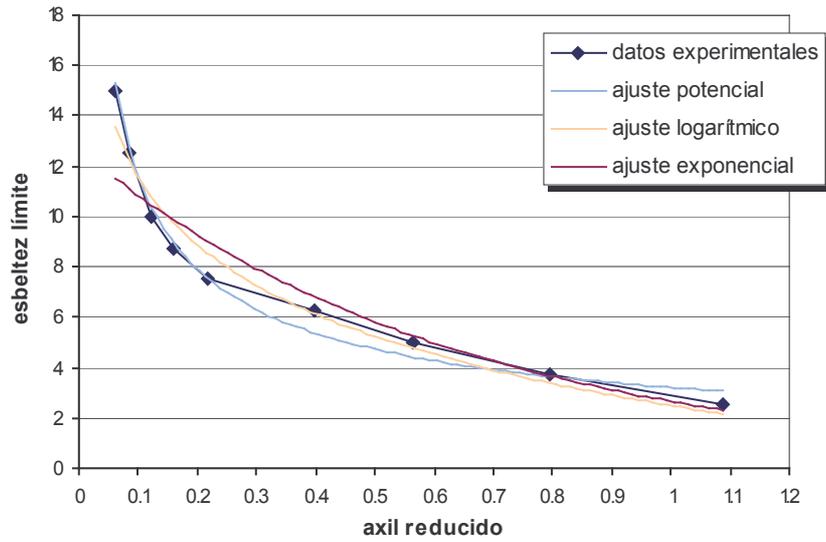


Figura VIII.4.- Curva $v-\lambda_{lim}$. Caso $f_c=90$ MPa; $\omega=0.3333$; $\varphi=3$. Axil límite $v=0.05$.

3. Si se continúa reduciendo el número de datos, hasta $v=0.2$, la curva de resultados pasa a ser casi lineal (Figura VIII.5), y se pierde mucha información sobre el comportamiento de los soportes. En ese caso el ajuste potencial pierde sentido ($R^2=0.92$), el logarítmico se mantiene con una correlación de 0.98, y mejora el ajuste exponencial ($R^2=0.998$), por su menor curvatura.

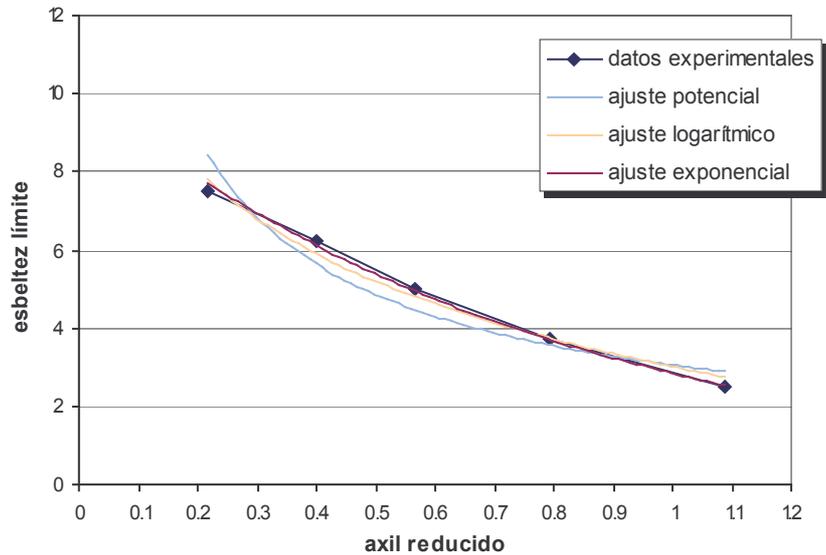


Figura VIII.5.- Curva $v-\lambda_{lim}$. Caso $f_c=90$ MPa; $\omega=0.3333$; $\varphi=3$. Axil límite $v=0.2$.

Con este ejemplo se ha intentado poner de manifiesto que el tipo de función de ajuste empleada dependerá de dónde se sitúe el límite de los axiles por la izquierda.

De hecho, en el ejemplo expuesto, la función escogida pasa de ser potencial, a logarítmica y a exponencial conforme se va reduciendo el número de datos.

También parece claro que no es aceptable la situación presentada en la Figura VIII.5, en la que la eliminación de datos conlleva una pérdida inaceptable de información. Pero es necesario un criterio adicional, que permita decidir entre las situaciones planteadas en la Figura VIII.3 y la Figura VIII.4, u otro caso intermedio.

- La segunda reflexión, que se convertirá, además, en el criterio buscado, se refiere a la importancia de los datos situados en la zona de axiles pequeños.

A lo largo de todo el razonamiento planteado hasta el momento, se ha considerado para realizar el ajuste de la curva en cuestión el tramo desde axil casi nulo hasta axiles muy elevados, pero nunca se llega hasta el máximo axil capaz de resistir la sección. En este punto de máxima carga, el momento resistido es nulo, y ninguna de las curvas propuestas para el análisis es capaz de representar esa situación, salvo la recta, cuyo ajuste se ha visto que es poco apropiado para axiles medios-bajos.

Así pues, si ninguna curva por sí sola es capaz de representar el comportamiento de los ensayos numéricos, se abre la posibilidad, que más adelante se verá como la más adecuada, de crear una función por tramos para tratar de imitar el comportamiento frente a los esfuerzos de flexión recta y esviada de los soportes ensayados.

VIII.1 Elección de la función de ajuste.

Se han analizado 2 tipos de funciones en la búsqueda de la expresión de la esbeltez de esviaje.

La primera función de ajuste a comprobar es la logarítmica. Las expresiones que proporciona esta función son de la forma:

$$\lambda_{esv} = A \cdot \ln v + B$$

Mediante una expresión de este tipo, los ajustes conseguidos son bastante buenos, porque el parámetro A permite tomar una curvatura distinta y adaptarse a cada uno de los casos. Se ciñe especialmente bien a los resultados experimentales en la zona de pequeños axiles, pero se despega de los datos en el resto de la curva, y queda del lado de la inseguridad cuando los axiles son grandes.

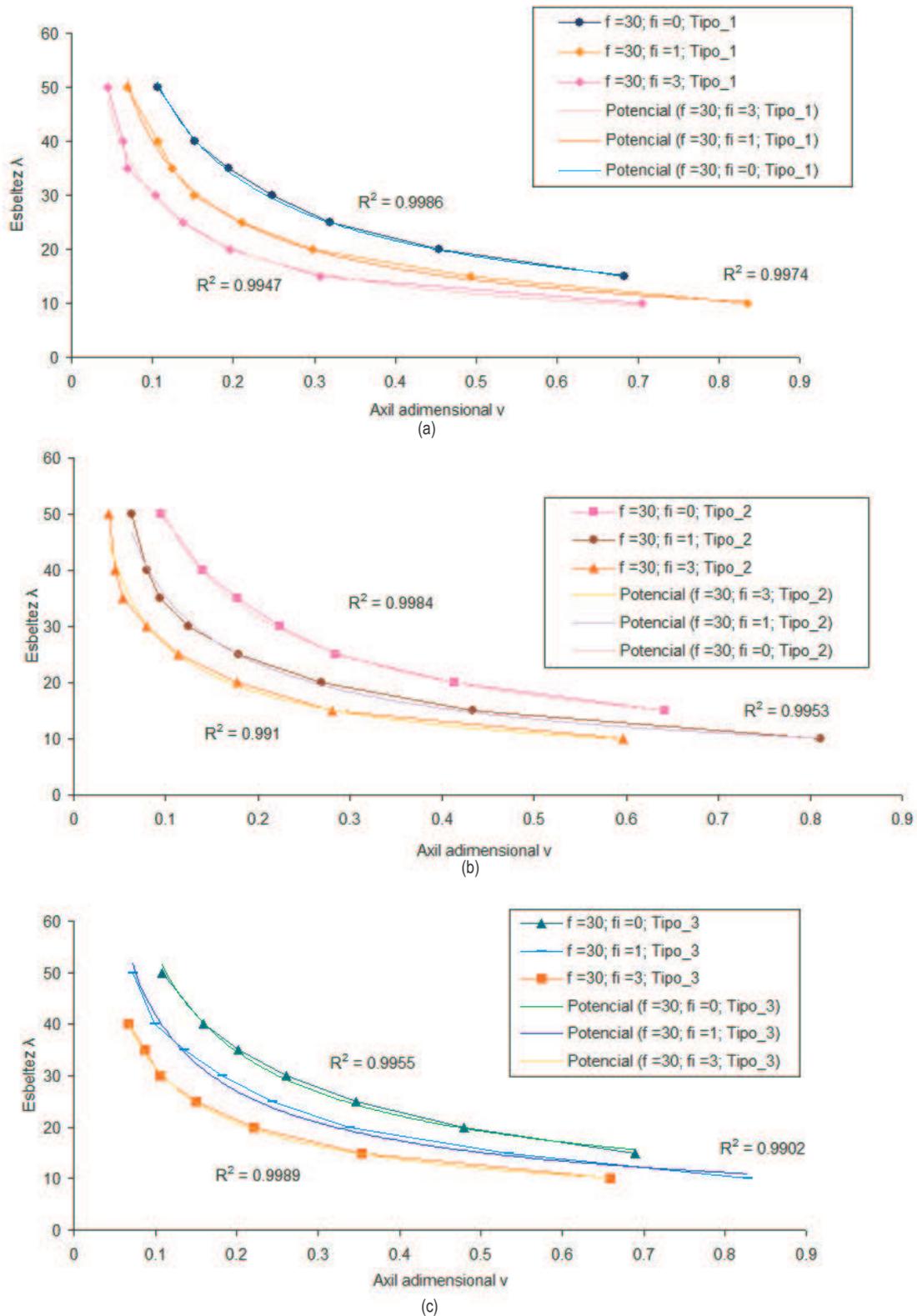
El análisis de los resultados mediante funciones de tipo logarítmica llevó a ajustes excesivamente complejos.

La otra función a analizar es la potencial:

$$\lambda_{lim,g} = A \cdot v^B \quad (13)$$

Los ajustes mediante funciones de este tipo son los que mejor se adaptan a los resultados experimentales, especialmente en la zona más delicada, la de axiles altos, en la que el resto de funciones resultan excesivamente inseguras. Por ello la función potencial es la escogida finalmente como herramienta de análisis y ajuste. Además, en la parte cercana al axil último, a esta función se le dará continuidad mediante una recta de manera que, por un lado, se obtengan resultados del lado de la seguridad; por otra parte, se podrá representar la función de manera bastante fiable desde axiles muy pequeños hasta el axil último a compresión simple.

La gráfica que a continuación se muestra recoge la mayor parte de los datos experimentales que se emplearán en la búsqueda de la expresión de la esbeltez de esviaje.

Figura VIII.6.- Curvas de esbeltez. Ajuste potencial. Caso $\omega = 0.0666$; $f_c = 30$ MPa.

(a) Armadura en las 4 esquinas (tipo1).

(b) Armadura en las caras paralelas al canto (tipo2).

(c) Armadura en las caras paralelas al ancho (tipo3).

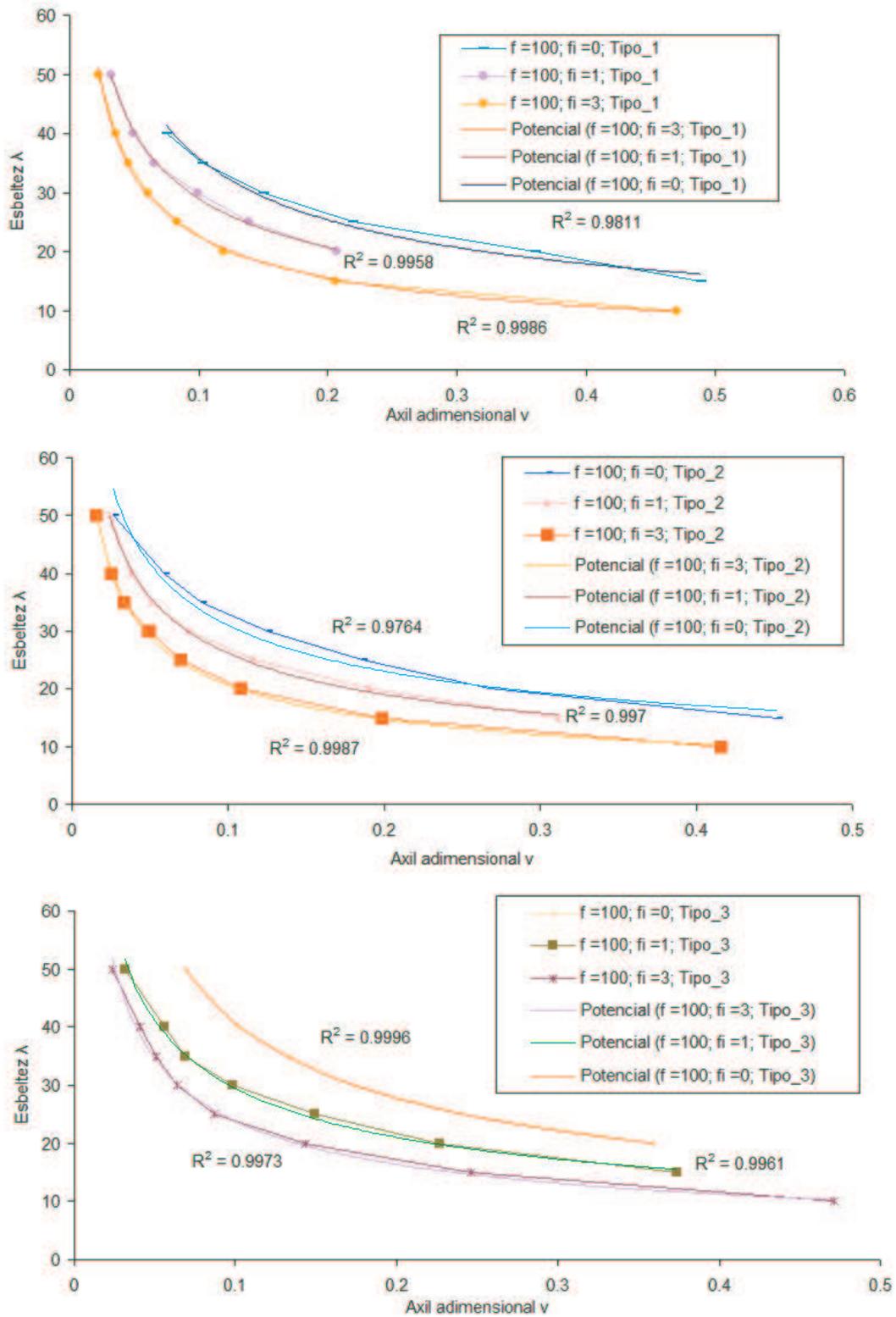
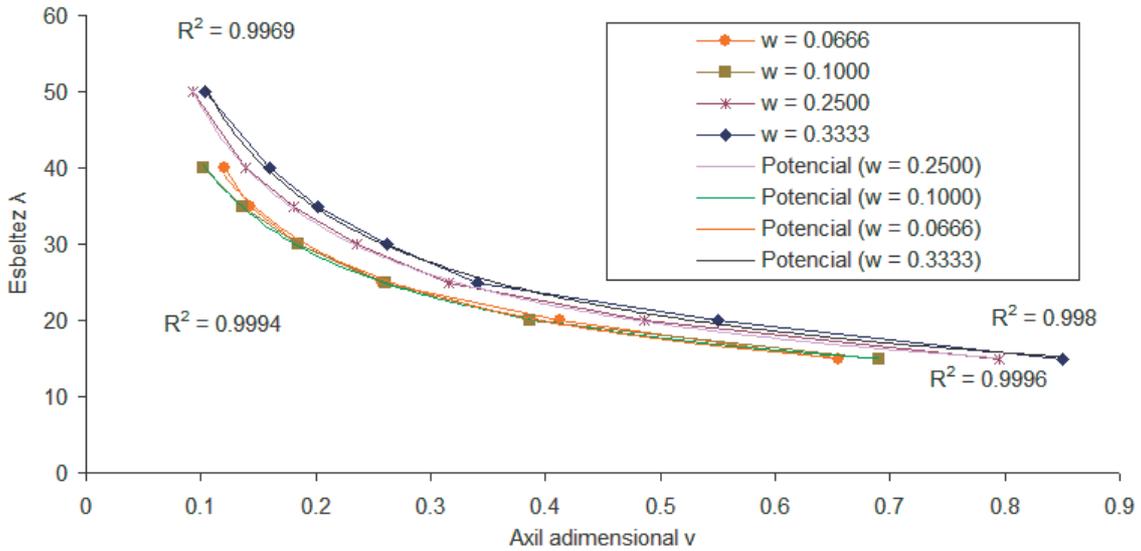


Figura VIII.7.- Curvas de esbeltez. Ajuste potencial. Caso $\omega=0.0666$; $f_c = 100$ MPa.

- Armadura en las 4 esquinas (tipo1).
- Armadura en las caras paralelas al canto (tipo2).
- Armadura en las caras paralelas al ancho (tipo3).

Figura VIII.8.- Curvas de esbeltez. Ajuste potencial. Caso $\varphi=0$; $f_c = 30$ MPa. Tipo 1.

VIII.2 Obtención de los coeficientes de las funciones de ajuste.

Se realizó una primera campaña de ensayos en soportes cuantía mínima, que se empleó para estudiar el comportamiento de la esbeltez de esviaje cuando varían la disposición de armadura con la existencia de fluencia (Tablas VIII.1 a VIII.6). Posteriormente se amplió el estudio con una segunda campaña de ensayos con diferentes valores cuantías mecánicas en los soportes (Tabla VIII.7). Para que el ajuste resultase equilibrado y suficientemente amplio, se llevó a cabo a partir únicamente de los datos correspondientes a soportes de hormigón normal ($f_c=30$ MPa) y hormigón de alta resistencia ($f_c=100$ MPa).

A continuación se presentan ordenados en tablas los valores de A y B obtenidos en los ajustes por mínimos cuadrados de la ecuación $\lambda_{esv} = A \cdot \nu^B$. En esta fase de diseño se ha optado por tomar valores con cuantía mínima (opción del lado de la seguridad).

Armadura en las 4 esquinas (tipo 1); $\omega=0.0666$			
f_c	$\varphi=0$	$\varphi=1$	$\varphi=3$
30	11.95	9.1918	7.8587
100	11.333	9.5941	6.4816

Tabla VIII.1.- Valores del coeficiente A. Armadura en las 4 esquinas; $\omega=0.0666$

Armadura en las caras paralelas al canto (tipo 2); $\omega=0.0666$			
f_c	$\varphi=0$	$\varphi=1$	$\varphi=3$
30	11.405	8.9092	7.5088
100	11.587	9.9041	6.7075

Tabla VIII.2.- Valores del coeficiente A. Armadura en las caras paralelas al canto; $\omega=0.0666$

Armadura en las caras paralelas al ancho (tipo 3); $\omega=0.0666$

f_c	$\varphi=0$	$\varphi=1$	$\varphi=3$
30	12.32	9.7127	7.926
100	11.375	9.6481	6.8637

Tabla VIII.3.- Valores del coeficiente A. Armadura en las caras paralelas al ancho; $\omega=0.0666$ **Armadura en las 4 esquinas (tipo 1); $\omega=0.0666$**

f_c	$\varphi=0$	$\varphi=1$	$\varphi=3$
30	-0.6459	-0.6396	-0.5818
100	-0.4999	-0.4795	-0.5412

Tabla VIII.4.- Valores del coeficiente B. Armadura en las 4 esquinas; $\omega=0.0666$ **Armadura en las caras paralelas al canto (tipo 2); $\omega=0.0666$**

f_c	$\varphi=0$	$\varphi=1$	$\varphi=3$
30	-0.6354	-0.5981	-0.5503
100	-0.4271	-0.4584	-0.4884

Tabla VIII.5.- Valores del coeficiente B. Armadura en las caras paralelas al canto; $\omega=0.0666$ **Armadura en las caras paralelas al ancho (tipo 3); $\omega=0.0666$**

f_c	$\varphi=0$	$\varphi=1$	$\varphi=3$
30	-0.6436	-0.6346	-0.6014
100	-0.5537	-0.4843	-0.5396

Tabla VIII.6.- Valores del coeficiente B. Armadura en las caras paralelas al ancho; $\omega=0.0666$ **Armadura en las 4 esquinas (tipo 1); $\varphi=0$; $f_c=30$**

	$\omega=0.0666$	$\omega=0.1$	$\omega=0.25$	$\omega=0.3333$
A	11.53	12.43	13.251	13.876
B	-0.5899	-0.5147	-0.5607	-0.5703

Tabla VIII.7.- Valores de los coeficientes A y B. Armadura en las 4 esquinas; $\varphi=0$; $f_c=30$ **VIII.3 Análisis del comportamiento de los coeficientes de ajuste.**

Una vez recogidos los valores que adoptan los coeficientes A y B en cada una de las situaciones estudiadas, se puede analizar el comportamiento de estos parámetros respecto a las

diversas variables que intervienen en el fenómeno. Dicho análisis se facilita mediante la representación gráfica de los valores de los parámetros.

Se muestran grupos de gráficas, que corresponden a las variables más importantes. El primero representa el valor de los parámetros frente a f_c , discriminando el coeficiente de fluencia y la relación de excentricidades en los extremos.

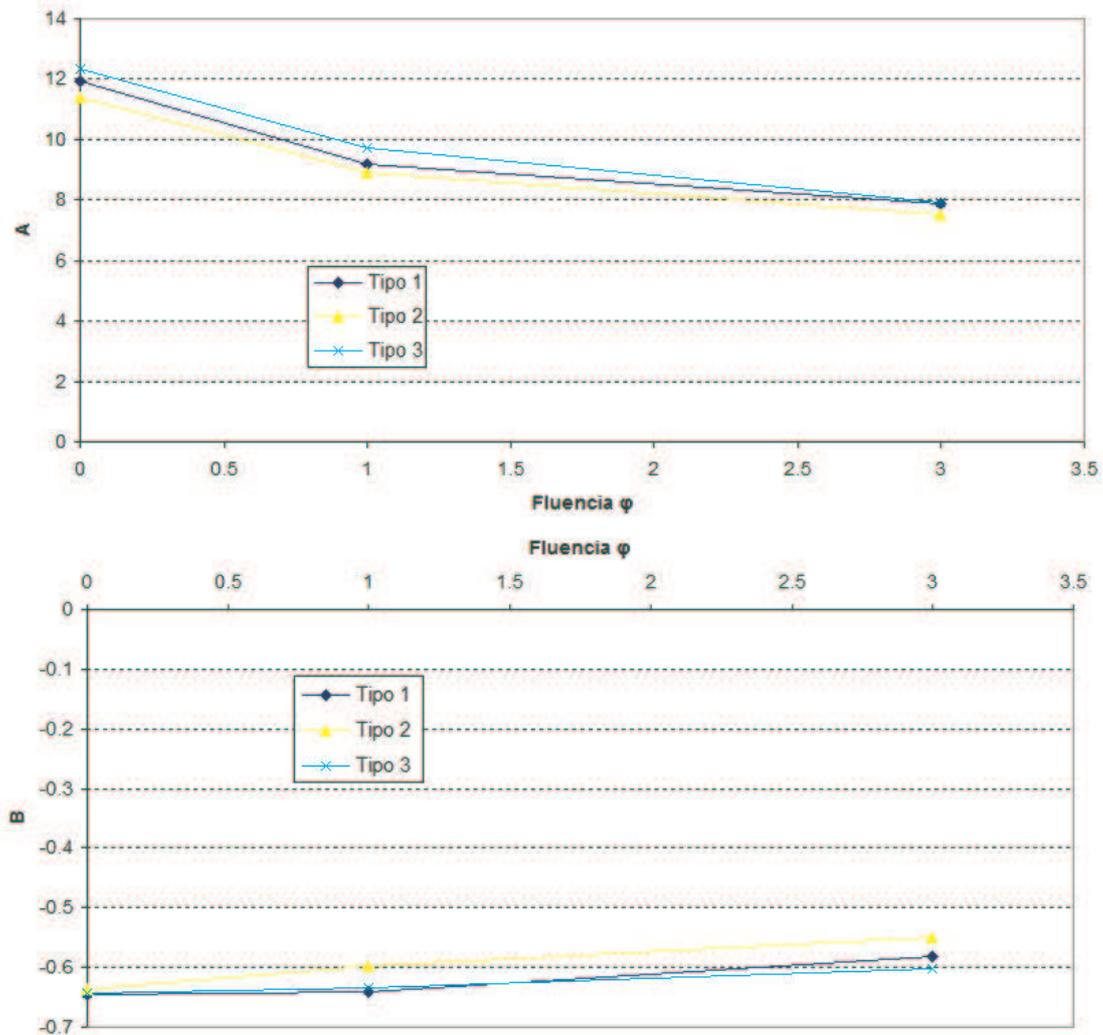


Figura VIII.9.- Influencia de la fluencia para las distintas disposiciones de armado. $f_c=30$.

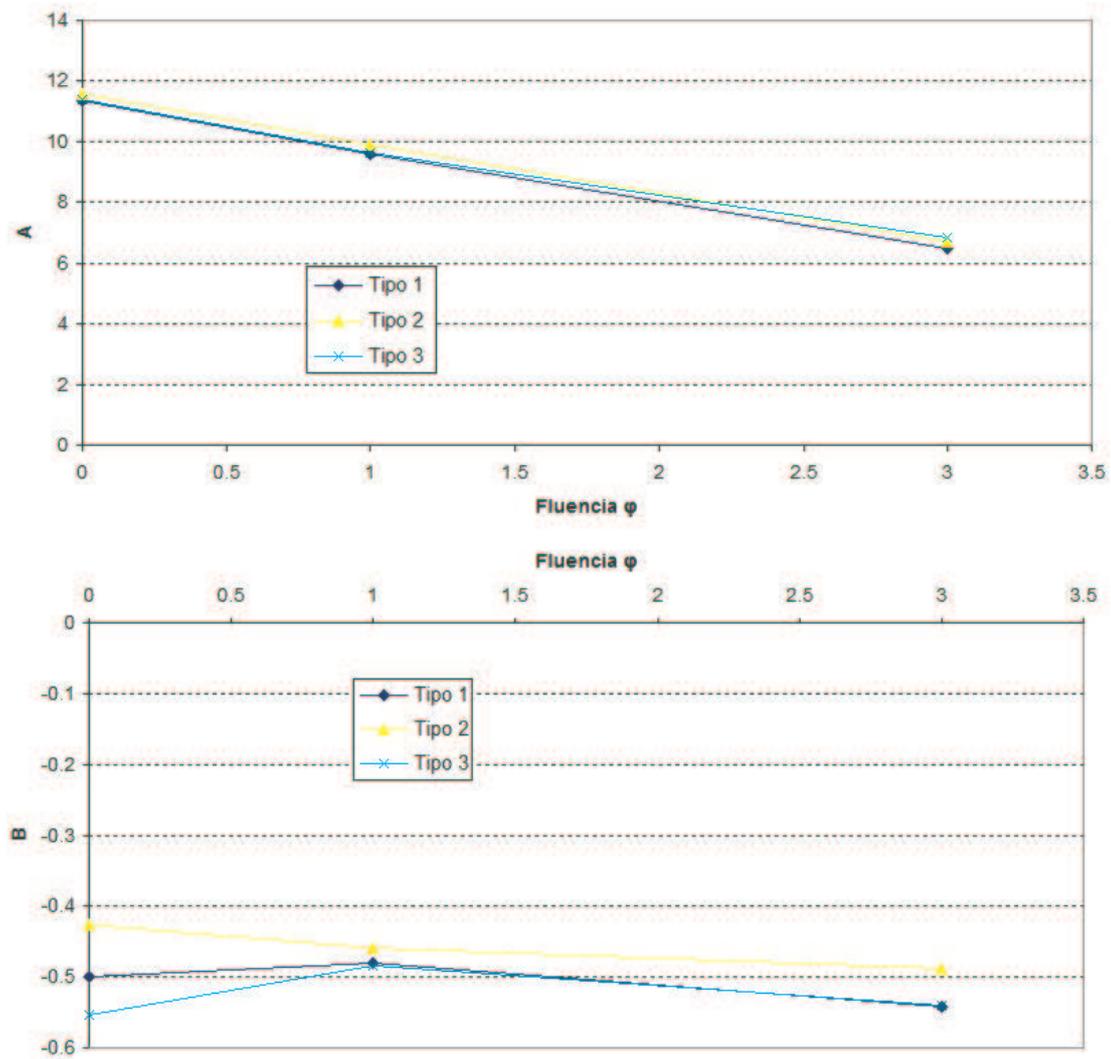


Figura VIII.10.- Influencia de la fluencia para las distintas disposiciones de armado. $f_c=100$.

De las figuras VIII.9 y VIII.10 se puede destacar lo siguiente:

- El parámetro A muestra una dependencia claramente lineal cuando se trata de hormigón de alta resistencia.
- En el hormigón convencional, la dependencia del parámetro A con respecto a la fluencia tiene una tendencia similar, aunque el ajuste con una recta sea menos preciso.
- En cuanto al parámetro B, hay una cierta tendencia a aumentar para hormigón convencional, pero es bastante independiente en el caso de hormigones de alta resistencia.

Basándonos en las gráficas anteriores, se podría hacer un primer ajuste de la expresión buscada de la siguiente forma:

$$\lambda_{esv} = A \cdot v^B$$

siendo A una función lineal de la fluencia ($A_1 \cdot \varphi + A_2$) y B una constante. Ambos términos son distintos según se trate de hormigón convencional o de alta resistencia, tal y como queda reflejado en las siguientes tablas:

Términos para $f_c=30$			
	A₁	A₂	B
Tipo 1	-1.2642	11.352	-0.5818
Tipo 2	-1.2132	10.892	-0.5503
Tipo 3	-1.3831	11.830	-0.6014

Tabla VIII.8.- Coeficientes A₁, A₂ y B. $f_c=30$.

Términos para $f_c=100$			
	A₁	A₂	B
Tipo 1	-1.4878	11.279	-0.4795
Tipo 2	-1.6084	11.281	-0.4271
Tipo 3	-1.6225	11.563	-0.4843

Tabla VIII.9.- Coeficientes A₁, A₂ y B. $f_c=100$.

Si ordenamos los términos de la tabla anterior, y los colocamos en una gráfica en función de la disposición de armado, ψ , podemos introducir esta variable en la expresión.

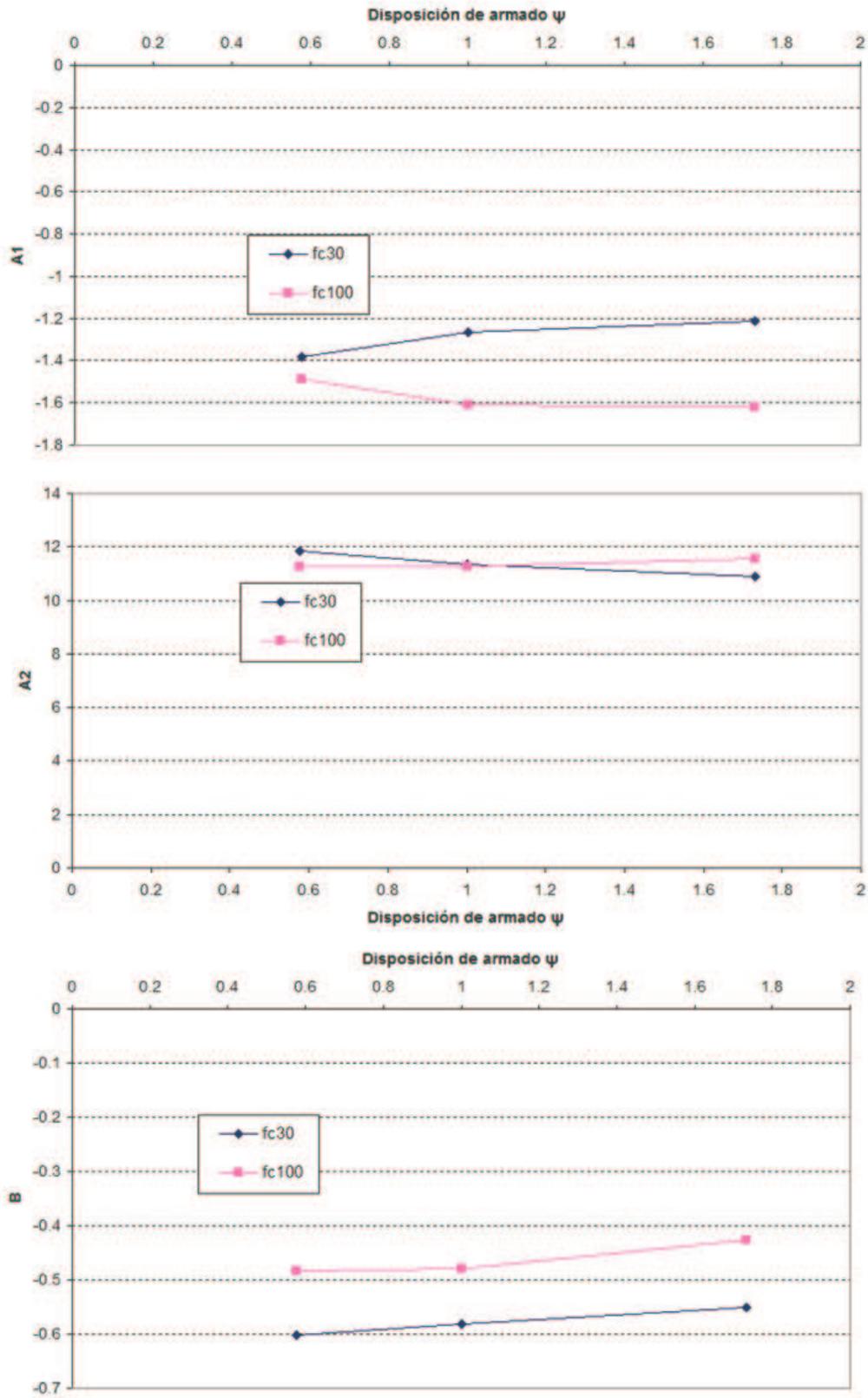


Figura VIII.11.- Coeficientes A1, A2 y B.

La dependencia entre A_1 , A_2 y B con respecto a ψ es la siguiente:

$$f_c = 30 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.1386 \cdot \psi - 1.4397 \\ A_2 &= -0.7920 \cdot \psi + 12.232 \\ B &= 0.0441 \cdot \psi - 0.6265 \end{aligned}$$

$$f_c = 100 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -0.1059 \cdot \psi - 1.4561 \\ A_2 &= 0.2614 \cdot \psi + 11.086 \\ B &= 0.0520 \cdot \psi - 0.5210 \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión de la esbeltez para el caso de $f_c = 30 \text{ MPa}$, se obtiene:

$$\lambda = (0.1386 \cdot \psi \cdot \varphi - 1.4397 \cdot \varphi - 0.792 \cdot \psi + 12.232) \cdot \sqrt{(0.0441 \cdot \psi - 0.6265)}$$

En la expresión anterior, los términos que acompañan tanto a $\psi \cdot \varphi$ como a ψ son despreciables frente al resto, por lo que para simplificar la ecuación, se eliminan:

$$\lambda = (-1.4397 \cdot \varphi + 12.232) \cdot \sqrt{(0.0441 \cdot \psi - 0.6265)} \quad (1)$$

Realizando la misma operación para el hormigón de alta resistencia:

$$\lambda = (-1.4561 \cdot \varphi + 11.086) \cdot \sqrt{(0.0520 \cdot \psi - 0.5210)} \quad (2)$$

El ajuste realizado hasta ahora es válido para soportes armados con cuantía mínima. Para introducir la cuantía en la ecuación, procedemos de forma análoga a como se actuó con la fluencia: se obtienen relaciones lineales tanto para el exponente como para el coeficiente que multiplica a v . En este caso no se tiene en cuenta el efecto de la fluencia ($\varphi=0$) y el armado de la sección es igual en las 4 esquinas ($\psi=1$).

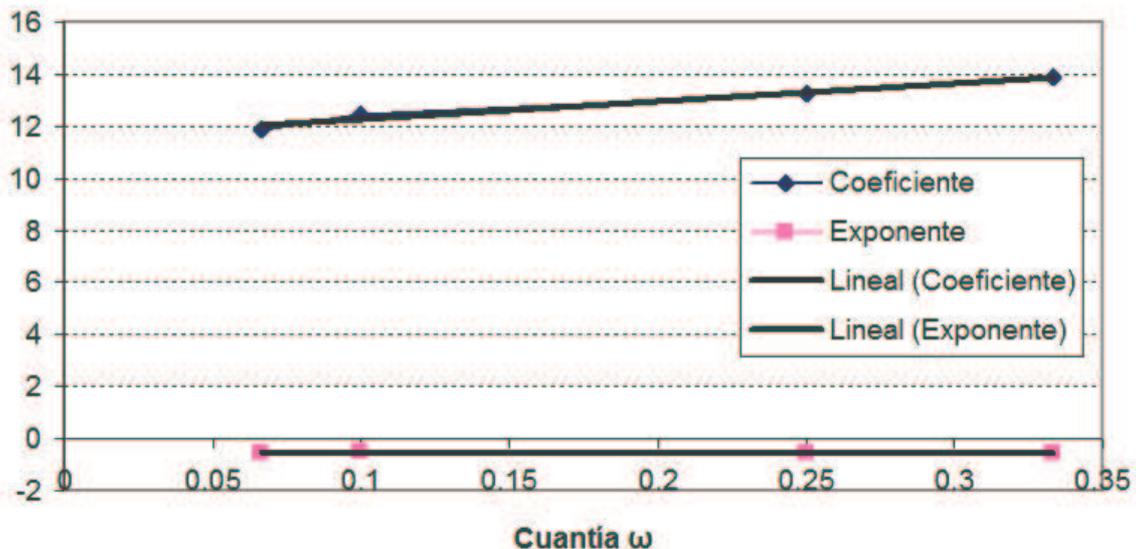


Figura VIII.12.- Coeficientes A y B en función de la cuantía mecánica.

La recta que define el exponente es la siguiente:

$$B = 0.1622 \cdot \omega - 0.5667$$

Por su parte, para definir el coeficiente de la expresión de la esbeltez tenemos la siguiente recta:

$$A = 6.8803 \cdot \omega + 11.574$$

Los términos independientes de la ecuación (1) deben ser corregidos para introducir el efecto de la cuantía. La corrección se realiza teniendo en cuenta que los cálculos se han realizado con cuantía mínima:

$$\begin{aligned} 12.232 - 6.8803 \cdot 0.0666 &= 11.775 \\ -0.6265 - 0.1622 \cdot 0.0666 &= -0.6373 \end{aligned}$$

La expresión de la esbeltez de esviaje queda de la siguiente manera:

$$\lambda = (6.8803 \cdot \omega - 1.4397 \cdot \varphi + 11.774) \cdot \sqrt{(0.1622 \cdot \omega + 0.0441 \cdot \psi - 0.6373)} \quad (3)$$

Actuando de manera análoga para la expresión (2):

$$\begin{aligned} 11.086 - 6.8803 \cdot 0.0666 &= 10.6278 \\ -0.5210 - 0.1622 \cdot 0.0666 &= -0.5318 \end{aligned}$$

$$\lambda = (6.8803 \cdot \omega - 1.4561 \cdot \varphi + 10.6278) \cdot \sqrt{(0.1622 \cdot \omega + 0.0520 \cdot \psi - 0.5318)} \quad (4)$$

Estamos ya en disposición de escribir la ecuación de la esbeltez de esviaje para hormigones tanto convencionales como de alta resistencia:

$$\lambda_{esv} = A \cdot v^B$$

$$\begin{aligned} A &= (6.8803 \cdot \omega - 1.4397 \cdot \varphi + 11.774) && \text{si } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ A &= (6.8803 \cdot \omega - 1.4561 \cdot \varphi + 10.6278) && \text{si } f_c > 50 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (0.1622 \cdot \omega + 0.0441 \cdot \psi - 0.6373) && \text{si } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ B &= (0.1622 \cdot \omega + 0.0520 \cdot \psi - 0.5318) && \text{si } f_c > 50 \text{ MPa} \end{aligned}$$

La expresión así expuesta queda muy engorrosa, por lo que se redondean los coeficientes de la ecuación, para dar mayor claridad a la expresión y estar en todo momento del lado de la seguridad:

$$\begin{aligned} A &= (8 \cdot \omega - 1.3 \cdot \varphi + 10.5) && \text{si } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ A &= (8 \cdot \omega - 1.3 \cdot \varphi + 8) && \text{si } f_c > 50 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$B = (0.25 \cdot \omega + 0.045 \cdot \psi - 0.65)$$

La gráfica de la expresión propuesta es asintótica, de manera que cuando el axil reducido tiende a infinito, la esbeltez tiende a cero. Sin embargo, la realidad es que el cálculo de la sección del soporte (esbeltez nula), tiene un axil reducido finito, y de valor conocido. Así pues, hay que matizar la expresión propuesta para reflejar este hecho.

Para ello, se propone realizar una función por tramos, de manera que entre un axil reducido nulo, y uno que se definirá a continuación, la esbeltez venga dada por la expresión propuesta, mientras que entre ese axil y el último capaz de resistir la sección a compresión simple, la esbeltez de esviaje venga dada por una recta.

Existen dos maneras de realizar el tramo recto. Una de ellas es más elegante, puesto que consiste en dar continuidad y derivabilidad a la función curva, pero complica la expresión de tal manera que no es la que se va a emplear.

La otra forma de hacerlo es a partir de un valor de la esbeltez fijado de antemano. Este valor de esbeltez no puede ser ni muy alto ni muy bajo, puesto que en ambos casos proporcionaría soluciones del lado de la inseguridad. Valores entre 10 y 15 son apropiados para terminar con la resolución del problema.

Tenemos una ecuación de la forma $\lambda = A \cdot v^B$, y queremos darle continuidad (que no derivabilidad) mediante otra ecuación de la forma $\lambda = C + D \cdot v$. De la primera ecuación conocemos todos los parámetros. De la segunda sabemos que cuando v sea igual al axil reducido máximo en compresión simple la esbeltez debe ser nula:

$$0 = C + D \cdot \left(1 + \frac{\sigma_s \cdot A_s}{f_c \cdot A_c}\right) \quad \rightarrow \quad C = -D \cdot \left(1 + \frac{\sigma_s \cdot A_s}{f_c \cdot A_c}\right)$$

En el caso general de un soporte sometido a compresión simple, donde la deformación de las armaduras, ε_s , sea superior a 0.002, el término $\frac{\sigma_s \cdot A_s}{f_c \cdot A_c}$ se corresponde con la cuantía mecánica de armadura. En el desarrollo siguiente se utilizará el símbolo de cuantía mecánica con el fin de desarrollar la expresión de manera más clara.

Para un valor prefijado de la esbeltez, λ_0 , la función potencial y la recta, coinciden:

$$\lambda_0 = A \cdot v_0^B = C + D \cdot v_0 = -C \cdot (1 + \omega) + D \cdot v_0 = D (v_0 - (1 + \omega))$$

$$D = \frac{\lambda_0}{v_0 - (1 + \omega)}$$

$$C = \frac{-\lambda_0}{v_0 - (1 + \omega)} \cdot (1 + \omega)$$

$$\lambda = C + D \cdot \nu = \frac{-\lambda_0}{\nu_0 - (1 + \omega)} \cdot (1 + \omega) + \frac{\lambda_0}{\nu_0 - (1 + \omega)} \cdot \nu = \frac{\lambda_0}{\nu_0 - (1 + \omega)} \cdot (\nu - (1 + \omega))$$

Si redefinimos los valores de D y C de la siguiente manera:

$$D = -(1 + \omega)$$

$$C = \frac{\lambda_0}{\nu_0 - (1 + \omega)}$$

La ecuación de la recta que define la esbeltez de esviaje es:

$$\lambda = C \cdot (D + \nu)$$

Esta es la ecuación a aplicar cuando la esbeltez de esviaje sea menor que una determinada esbeltez límite definida previamente, y que no debe ser superior a 15 ni inferior a 10. Para realizar los ensayos de verificación de la propuesta se emplea una esbeltez geométrica de eje débil de 15.

VIII.4 Representación gráfica de la propuesta.

Para terminar este capítulo, se incluye la comparación entre la expresión de ajuste obtenida y los resultados de los ensayos numéricos (Figuras VIII.13 a VIII.15). Se ha optado por una representación reducida, que recoge únicamente dos casos, porque en el capítulo siguiente se desarrollan ampliamente los contrastes a que se ha sometido la propuesta. Las situaciones mostradas son comparaciones entre cuantías altas y mínimas, entre comportamiento instantáneo y diferido, y entre hormigones convencionales y de alta resistencia.

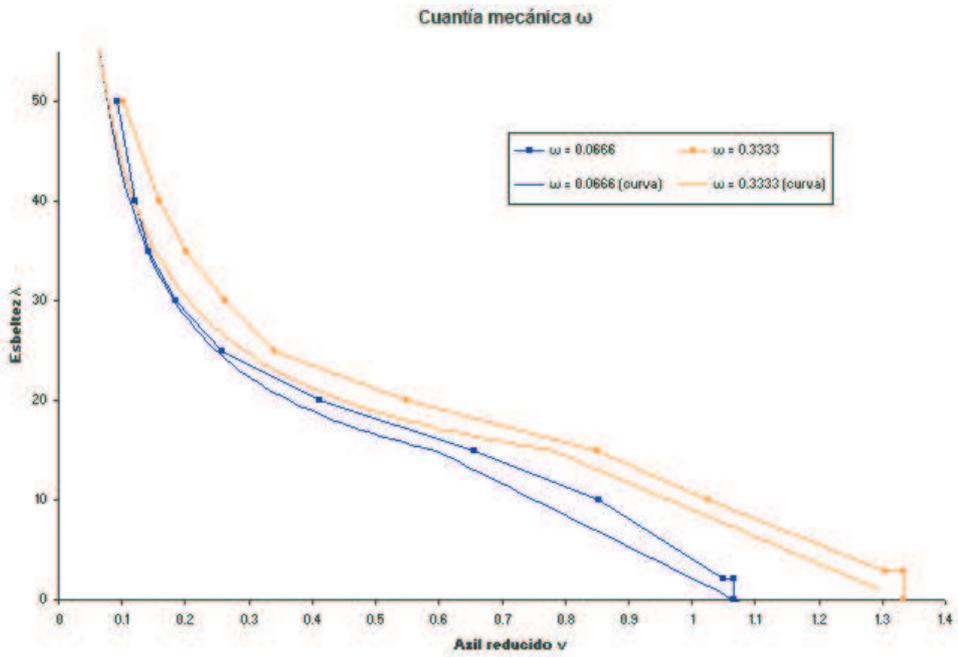


Figura VIII.13.- Comparación de la curva de ajuste con los datos experimentales.
 $\omega = 0.0666$ y $\omega = 0.3333$

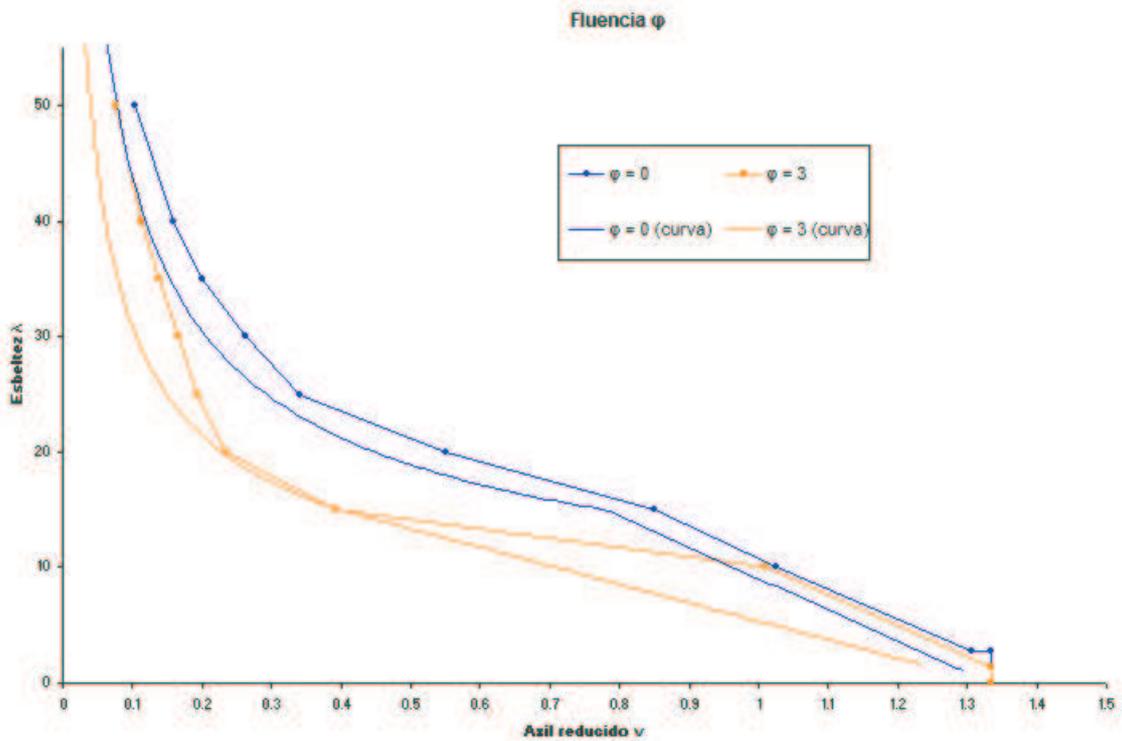


Figura VIII.14.- Comparación de la curva de ajuste con los datos experimentales.
 $\phi = 0$ y $\phi = 3$

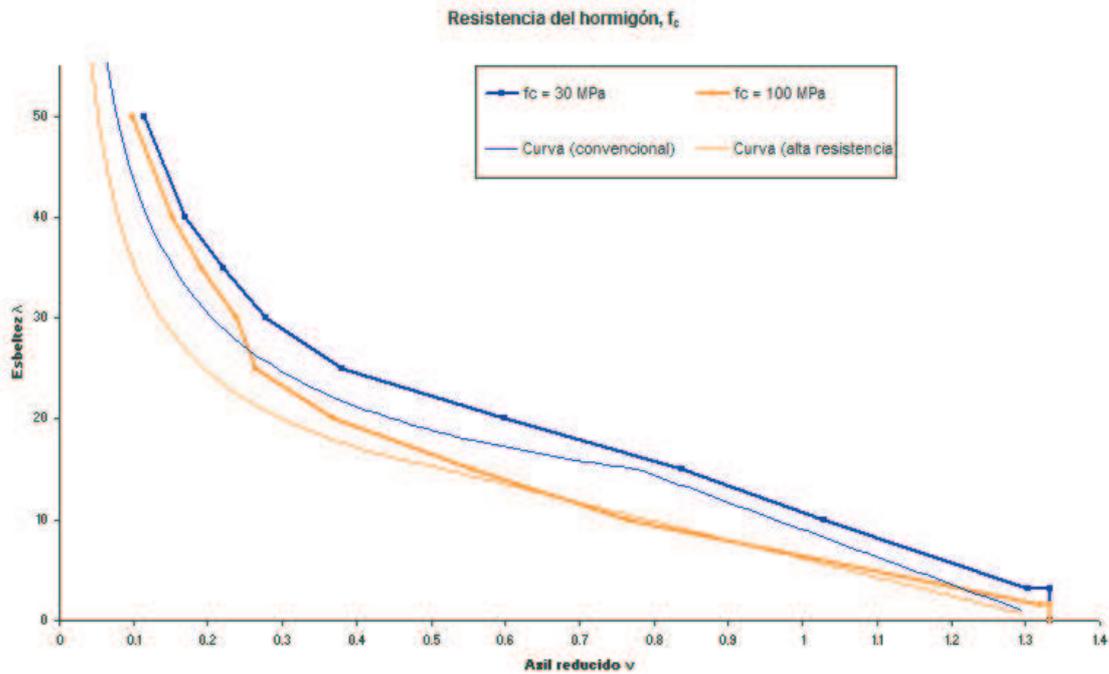


Figura VIII.15.- Comparación de la curva de ajuste con los datos experimentales.
 $f_c = 30$ MPa y $f_c = 100$ MPa

Como puede observarse en las gráficas anteriores, la expresión propuesta se adapta adecuadamente a los resultados numéricos, tanto en comportamiento instantáneo como diferido, con diferentes cuantías de armadura y con hormigones tanto convencionales como de alta resistencia.

IX VALIDACIÓN DEL AJUSTE.

Una vez obtenida la expresión para el cálculo de la esbeltez de esviaje, es necesario comprobar su calidad, desde varios puntos de vista. En el presente capítulo se analiza, por un lado, si los valores de esbeltez que predice la fórmula propuesta son similares a los datos experimentales y se mantienen del lado de la seguridad. Por otra parte, se plantea un contraste exhaustivo de la expresión, realizando para ello una nueva campaña de ensayos.

IX.1 BONDAD DEL AJUSTE.

En este punto se pretende evaluar la bondad del ajuste obtenido o, lo que es lo mismo, analizar hasta qué punto la fórmula propuesta en el capítulo anterior se ciñe a los datos experimentales, y verificar que la expresión reproduce el comportamiento observado, manteniéndose siempre del lado de la seguridad. Para llevar a cabo este doble propósito es necesario establecer una forma de medida de la desviación entre los valores de esbeltez obtenidos a partir de los ensayos y los predichos por la fórmula. Además, dicha forma de medida debe proporcionar un criterio sencillo y válido para discernir si las predicciones resultan seguras.

El modo de evaluar la bondad del ajuste empleado en este estudio es mediante un ratio de error, ξ , cuya definición y procedimiento de obtención se exponen a continuación (Figura IX.1).

Dada una combinación del vector de parámetros $(h/b, f_c, \varphi, \psi, \omega)$, se representan en una gráfica conjunta la curva de ajuste y las parejas de valores experimentales (v, λ_{esv}) asociadas, tal y como se muestra en la Figura IX.1.

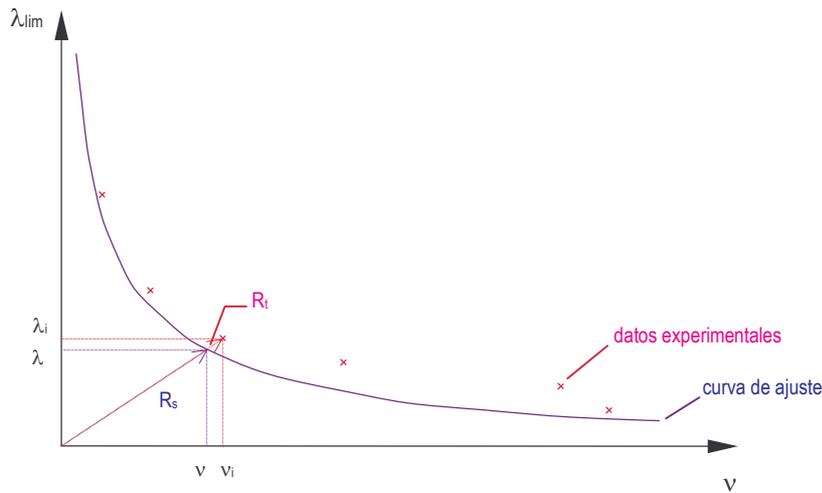


Figura IX.1.- Medida del ajuste de la expresión propuesta a los datos experimentales.

Seguidamente, para cada uno de los puntos obtenidos experimentalmente en los ensayos y definido por el par (v_i, λ_i) , se traza la recta que lo une con el origen:

$$\lambda = \frac{\lambda_i}{v_i} \cdot v$$

A continuación, se halla la intersección de dicha recta con la curva de ajuste, con lo que queda determinado el punto de corte (v, λ) sobre la curva propuesta asociado al dato experimental (v_i, λ_i) . A partir de las coordenadas de estos puntos se calculan las longitudes de los segmentos que los unen con el origen:

$$\text{test: } R_t = \sqrt{v_i^2 + \lambda_i^2} \text{ longitud del segmento que une } (v_i, \lambda_i) \text{ con el origen.}$$

$$\text{ajuste: } R_s = \sqrt{v^2 + \lambda^2} \text{ longitud del segmento que une } (v, \lambda) \text{ con el origen.}$$

Y, finalmente, se define el ratio de error, ξ , como el cociente entre el segmento asociado a la curva de ajuste y el segmento asociado a los datos experimentales:

$$\xi = \frac{R_s}{R_t}$$

Al establecer esta forma de medir la desviación entre los valores experimentales y los que propone la expresión de ajuste, se obtiene el criterio buscado para evaluar la seguridad o inseguridad del ajuste, ya que un valor menor que la unidad del ratio ξ indica que la esbeltez límite del test (valor experimental) es superior a la que predice la fórmula y que, por lo tanto, la expresión queda del lado de la seguridad en ese punto. El ajuste será tanto mejor cuanto más se acerque el valor de ξ a la unidad, sin sobrepasarla.

Las gráficas que se incluyen a continuación (Figura IX.2 a Figura IX.8) muestran los valores obtenidos de ξ tras aplicar el proceso descrito a todos los datos experimentales de los que se disponía. En dichas gráficas se puede observar la forma que tienen de distribuirse los valores de ξ según cada una de las variables de estudio. Cada gráfica incluye, además, una recta que muestra la tendencia de los ratios de error. Dicha recta permite confirmar que la influencia de los parámetros de análisis sobre el límite de esbeltez está correctamente reproducido en la fórmula de ajuste.

El primer parámetro analizado es la propia esbeltez de esviaje, cuya gráfica que refleja los ratios es la siguiente:

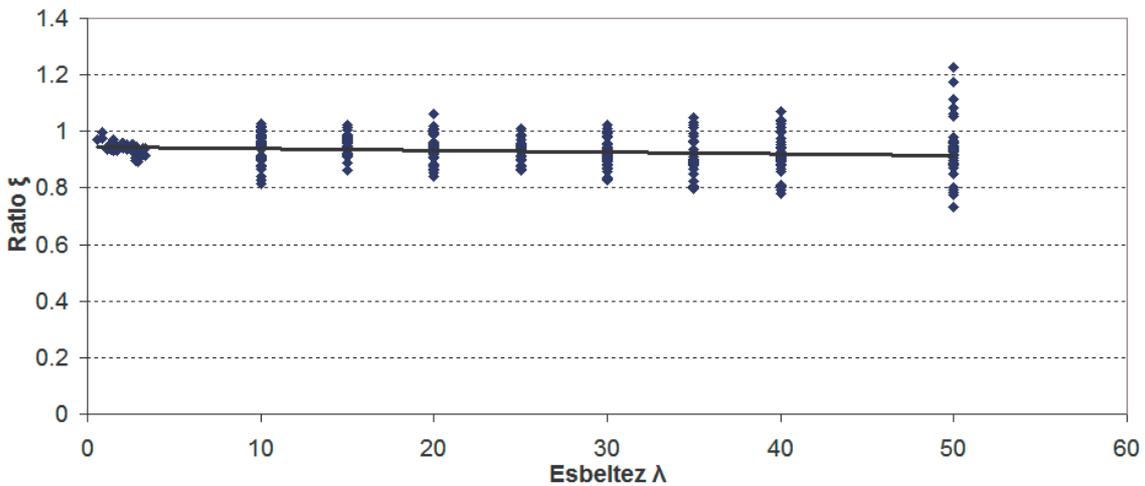


Figura IX.2.- Distribución de ξ en función de la esbeltez.

La figura muestra como, tal y como era de esperar, la mayor dispersión se produce para esbelteces muy altas, ya que las curvas que representan la esbeltez de esviaje tienen una asíntota cuando los axiles tienden a cero. Numéricamente, la interpretación de la gráfica se encuentra en la siguiente tabla:

λ	Media	CV	Percentiles				Máximo	Mínimo	$\xi > 1$
			1%	5%	95%	99.5%			
<5	0.941	0.017	0.895	0.916	0.967	0.988	0.996	0.892	0
10	0.942	0.056	0.821	0.842	1.02	1.026	1.028	0.816	7
15	0.949	0.033	0.873	0.909	1.002	1.02	1.021	0.862	3
20	0.929	0.052	0.845	0.863	1.012	1.051	1.06	0.839	4
25	0.928	0.043	0.861	0.865	0.99	1.009	1.009	0.861	2
30	0.917	0.056	0.828	0.831	1.001	1.019	1.022	0.828	3
35	0.918	0.072	0.798	0.803	1.025	1.044	1.048	0.797	6
40	0.919	0.075	0.785	0.803	1.036	1.064	1.07	0.78	6
50	0.925	0.106	0.751	0.787	1.109	1.215	1.226	0.732	6

Tabla IX.1.- Distribución de ξ en función de la esbeltez.

La Figura IX.3 permite analizar la posible influencia de la calidad del hormigón sobre el ratio de error. A primera vista, destaca la menor dispersión de los valores de ξ correspondientes a resistencias a compresión iguales a 50, 60, 70 y 90 MPa frente a los hormigones de 30 y 100 MPa. Entre los grupos de errores asociados a $f_c=30$ MPa y $f_c=100$ MPa, en los que el rango de ensayos es mucho mayor que en el resto de casos, no se aprecian diferencias muy apreciables. Algunos puntos se sitúan por encima del límite de $\xi=1$, pero la gran mayoría quedan por debajo.

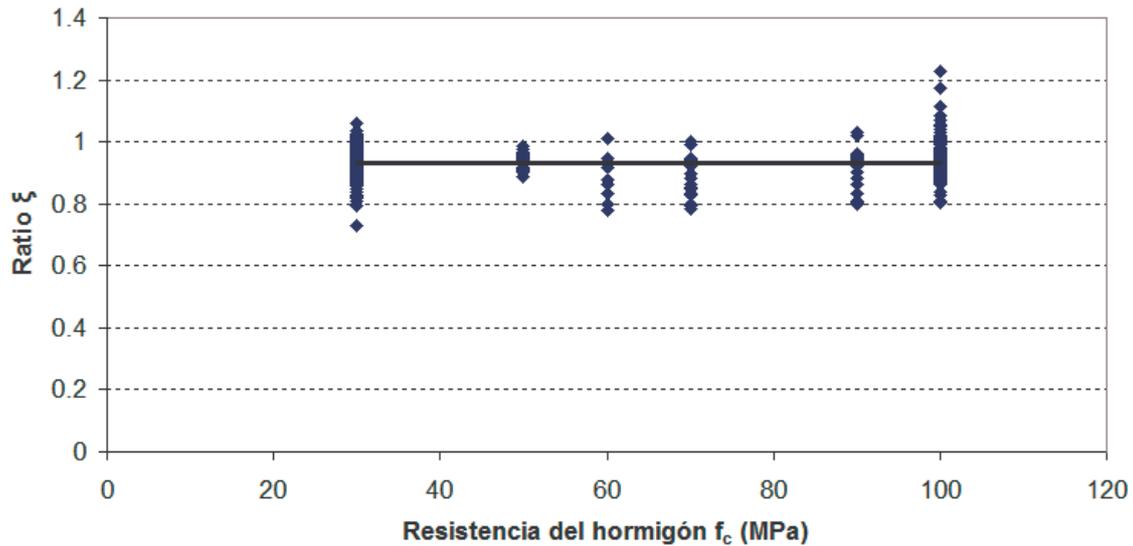


Figura IX.3.- Distribución de ξ en función de la resistencia del hormigón.

f_c	Media	CV	Percentiles				Máximo	Mínimo	$\xi > 1$
			1%	5%	95%	99.5%			
30	0.934	0.047	0.813	0.869	1.007	1.053	1.061	0.732	17
50	0.933	0.029	0.892	0.902	0.976	0.985	0.986	0.889	0
60	0.874	0.09	0.777	0.778	0.982	1.01	1.013	0.777	1
70	0.887	0.071	0.787	0.792	0.991	1.001	1.002	0.786	1
90	0.906	0.073	0.801	0.802	1.02	1.027	1.028	0.801	2
100	0.943	0.073	0.803	0.862	1.056	1.2	1.226	0.802	16

Tabla IX.2.- Distribución de ξ en función de la resistencia a compresión del hormigón.

Llama la atención de la tabla anterior que la mayoría de los valores del ratio superiores a la unidad se dan para hormigones de 30 y 100 MPa. La explicación está en que para $f_c = 30$ MPa el número de valores obtenidos es de 260 y para $f_c = 100$ MPa es de 100. Del resto de casos no se tienen más de 20 ratios, por lo que es lógico que el número de valores mayores que la unidad se concentre en esos dos casos.

La media se sitúa siempre por debajo de la unidad. El valor máximo obtenido se da para el hormigón de mayor resistencia, y según se vio en la tabla IX.1, se trata de un caso donde la esbeltez es máxima.

En cuanto a la influencia de φ sobre el ratio de error (Figura IX.4), parece que los resultados son menos dispersos cuanto más alto es el valor del coeficiente de fluencia, a pesar que hay que pensar que en el caso instantáneo el número de ensayos es mayor y abarca un rango más amplio de cuantías y resistencias del hormigón. Esta mayor homogeneidad de los resultados de ξ con el incremento de φ no implica necesariamente un mejor ajuste medio de la expresión propuesta a los datos experimentales, sino que puede deberse a que, con el coeficiente de fluencia, el comportamiento de los soportes se homogeneiza y desaparecen los puntos “extraños” en las series de resultados. En los casos de $\varphi=2$ y $\varphi=3$, se observa que el grueso de los puntos se encuentra entre las líneas de $\xi=0.8$ y $\xi=1.0$.

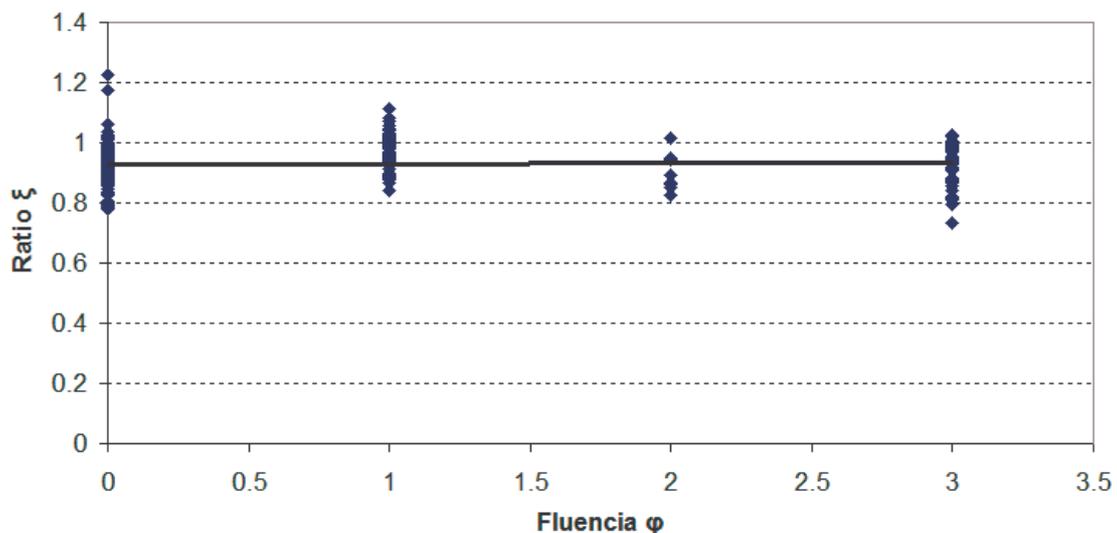


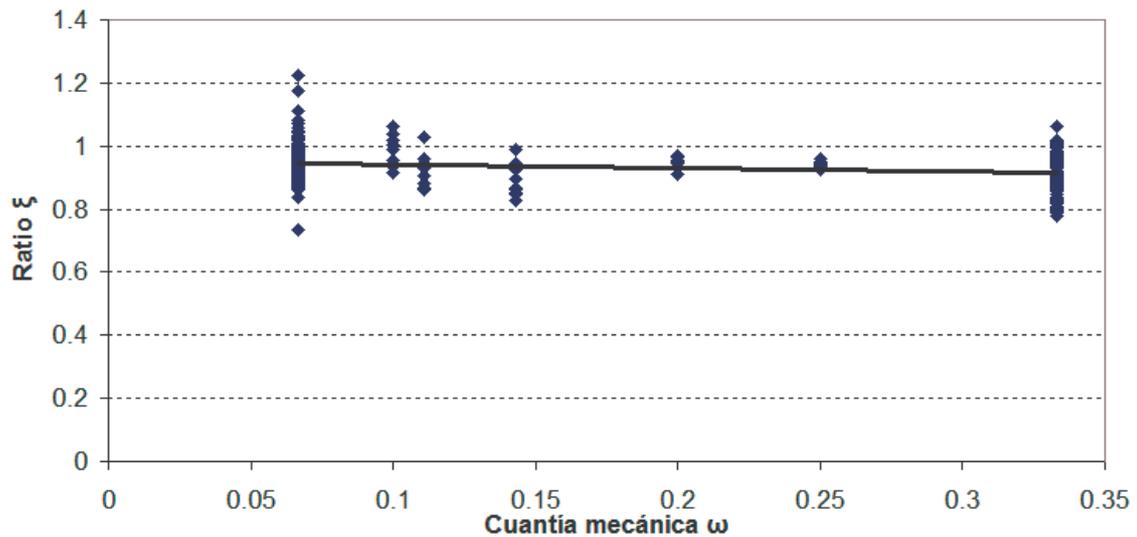
Figura IX.4.- Distribución de ξ en función del coeficiente de fluencia.

φ	Media	CV	Percentiles				Máximo	Mínimo	$\xi > 1$
			1%	5%	95%	99.5%			
0	0.925	0.056	0.791	0.831	1.002	1.129	1.226	0.777	15
1	0.968	0.053	0.86	0.882	1.052	1.102	1.112	0.839	17
2	0.901	0.067	0.83	0.837	0.986	1.014	1.017	0.828	1
3	0.923	0.06	0.775	0.819	0.998	1.023	1.025	0.732	4

Tabla IX.3.- Distribución de ξ en función de la fluencia.

Al igual que ocurría con la resistencia a compresión del hormigón, el grueso de puntos se han analizado en situación instantánea y para un coeficiente $\varphi = 1$, por lo que es en estos casos donde el número de valores de ratio que superan a la unidad es mayor.

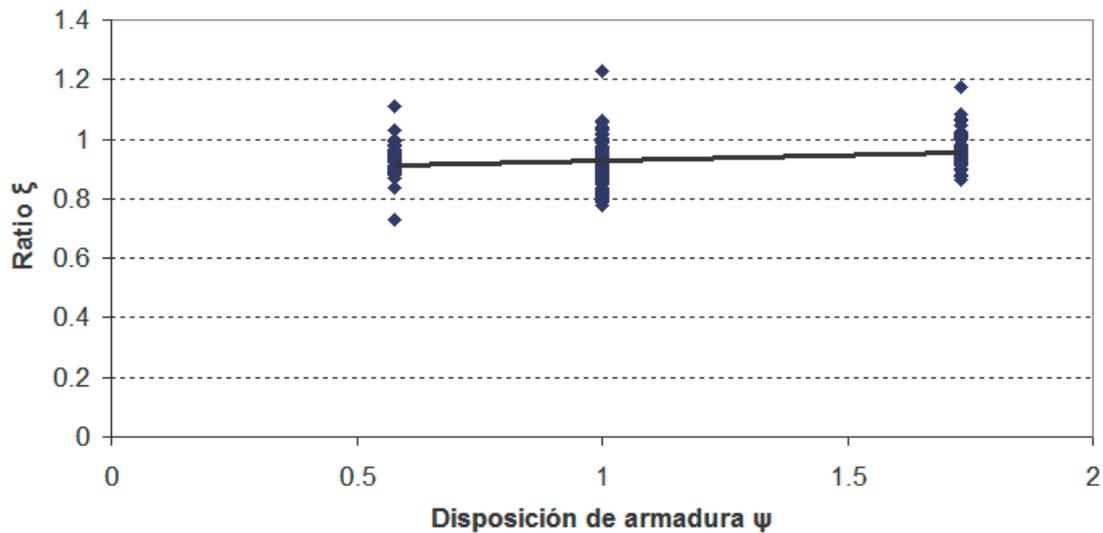
Por lo que a la cuantía mecánica se refiere, en el grupo de cuantías igual a 0.0666 y 0.3333, se observa una menor dispersión en los valores de ξ , lo cual implica que la fórmula propuesta tiene un ajuste más homogéneo en cuantías medias. También parece que el ajuste queda más del lado de la seguridad para cuantías mayores. Esto puede deberse a que en el comportamiento de los soportes armados con cuantía mínima tiene mucho protagonismo el hormigón, y su respuesta es más variable.

Figura IX.5.- Distribución de ξ en función de la cuantía mecánica.

ω	Media	CV	Percentiles				Máximo	Mínimo	$\xi > 1$
			1%	5%	95%	99.5%			
0.0666	0.945	0.058	0.86	0.876	1.027	1.177	1.226	0.732	22
0.1	0.983	0.049	0.918	0.924	1.05	1.06	1.061	0.916	4
0.1111	0.92	0.057	0.861	0.863	0.996	1.025	1.028	0.861	1
0.1486	0.895	0.058	0.831	0.838	0.971	0.988	0.99	0.829	0
0.25	0.941	0.01	0.924	0.929	0.954	0.957	0.957	0.923	0
0.3333	0.916	0.057	0.785	0.802	0.999	1.022	1.06	0.777	10

Tabla IX.4.- Distribución de ξ en función de la cuantía mecánica.

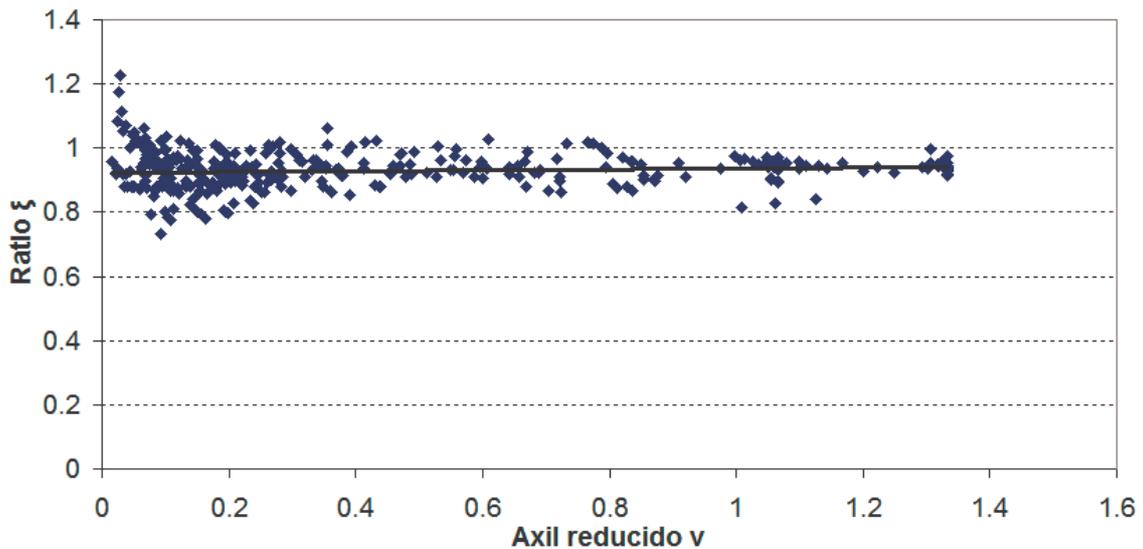
En la Figura IX.6 se aprecia un mejor ajuste cuanto mejor distribuida está la armadura para resistir el esfuerzo de flexocompresión recta que es el principal, lo que se traduce en un menor valor del parámetro Ψ . De hecho, el número de ensayos que tienen un ratio mayor que 1 es claramente mayor para la disposición de armado que tiene el acero distribuido en las caras paralelas al ancho, lo que resulta un armado ilógico puesto que el principal esfuerzo de flexión requiere armadura en las caras paralelas al canto.

Figura IX.6.- Distribución de ξ en función de la disposición de la armadura.

ψ	Media	CV	Percentiles				Máximo	Mínimo	$\xi > 1$
			1%	5%	95%	99.5%			
1	0.924	0.057	0.791	0.819	1.002	1.058	1.226	0.777	16
$\sqrt{3}$	0.964	0.057	0.873	0.88	1.055	1.143	1.174	0.865	18
$1/\sqrt{3}$	0.929	0.053	0.806	0.878	0.997	1.084	1.112	0.732	3

Tabla IX.5.- Distribución de ξ en función de la disposición de la armadura.

El comportamiento de ξ en función del axil reducido es bastante homogéneo. Esta comprobación tiene sentido porque ν es la variable mediante la que se introduce el nivel de carga en la expresión propuesta. Sin embargo, los puntos por encima de $\nu=0.95$ corresponden únicamente a soportes con cuantía mecánica $\omega > 0.0666$, por lo que la comprobación más útil resulta de comparar los valores de ξ obtenidos en función de la fracción de carga sobre el axil último que agota la sección transversal, tal y como se muestra en la Figura IX.7.

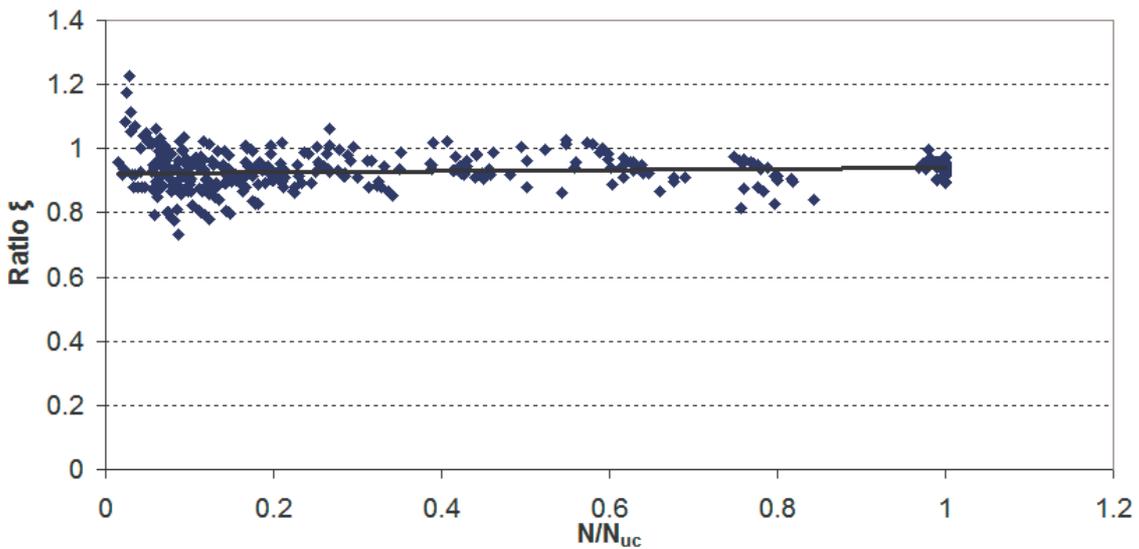
Figura IX.7.- Distribución de ξ en función del axil reducido.

v	Media	CV	Percentiles				Máximo	Mínimo	$\xi > 1$
			1%	5%	95%	99.5%			
[0, 0.2[0.925	0.081	0.779	0.801	1.043	1.185	1.226	0.732	22
[0.2, 0.4[0.923	0.05	0.829	0.844	1.006	1.041	1.06	0.828	6
[0.4, 0.6[0.944	0.039	0.879	0.882	1.011	1.021	1.021	0.878	3
[0.6, 0.8[0.945	0.053	0.864	0.872	1.02	1.027	1.028	0.862	6
[0.8, 1[0.928	0.036	0.871	0.877	0.969	0.974	0.975	0.869	0
[1, 1.2[0.94	0.033	0.823	0.887	0.967	0.972	0.973	0.816	0
>1.2	0.94	0.016	0.916	0.919	0.959	0.992	0.996	0.915	0

Tabla IX.6.- Distribución de ξ en función del axil reducido.

Tanto en la gráfica de la figura IX.7 como en la tabla IX.6 se confirma lo que ya se comentó al analizar los ratios en función de la esbeltez: con axiles muy pequeños, la asintota a la que tiende la curva propuesta provoca errores numéricos que son los que provocan la gran mayoría de ratios superiores a la unidad. De hecho, el tramo final del ajuste, que se ha realizado mediante una recta, proporciona resultados del lado de la seguridad, y es por eso por lo que para axiles reducidos superiores a 0.8, no hay ningún valor del ratio que sobrepase la unidad.

Con tal de homogeneizar resultados, se muestra la gráfica siguiente, en la que en lugar de representar el axil reducido, se comparan los valores de ξ obtenidos en función de la fracción de carga sobre el axil último que agota la sección transversal.

Figura IX.8.- Distribución de ξ en función de la fracción de N_0 de la sección.

N/N_{uc}	Media	CV	Percentiles				Máximo	Mínimo	$\xi > 1$
			1%	5%	95%	99.5%			
[0, 0.05[0.988	0.103	0.878	0.878	1.171	1.221	1.226	0.878	10
[0.05, 0.1[0.922	0.077	0.76	0.796	1.027	1.053	1.061	0.732	8
[0.1, 0.15[0.903	0.066	0.787	0.799	0.992	1.02	1.022	0.78	2
[0.6, 0.8[0.916	0.051	0.828	0.831	1.001	1.009	1.009	0.828	3
[0.2, 0.4[0.931	0.048	0.859	0.864	1.011	1.047	1.06	0.854	6
[0.4, 0.6[0.953	0.045	0.869	0.905	1.02	1.027	1.028	0.862	8
[0.6, 0.8[0.931	0.04	0.821	0.869	0.967	0.974	0.975	0.816	0
[0.8, 1]	0.939	0.022	0.886	0.901	0.965	0.987	0.996	0.839	0

Tabla IX.7.- Distribución de ξ en función de la fracción de N_0 de la sección.

Al homogeneizar la escala de comparación (Figura IX.8), se detecta la zona en la que el ajuste, aunque aceptable, queda con algo más de frecuencia del lado de la inseguridad. Se trata de la zona de axiles inferiores al 10% de N_0 . Es una zona de cargas pequeñas, en la que, como ya se ha comentado ampliamente, las esbelteces límite pueden llegar a ser muy grandes, y en la que los resultados experimentales son muy sensibles a la discretización de axiles empleada en la obtención de λ_{esv} . A pesar de ello, y teniendo en cuenta que gran parte de los puntos se concentran en esta zona, en la que las curvas $v-\lambda_{esv}$ empiezan su rama cuasi-vertical, el ajuste puede considerarse bueno en este intervalo de cargas, ya que los puntos se concentran en la banda limitada por $\xi=0.8$ y $\xi=1.0$.

A la vista de todas estas gráficas, puede concluirse que la expresión propuesta en el capítulo anterior se ajusta de forma más que aceptable a los datos experimentales de los que se disponía. El análisis del ajuste muestra que éste reproduce correctamente el comportamiento real general y la influencia de cada una de las variables de estudio. Las observaciones y comentarios realizados en este punto se confirman mediante un análisis estadístico de los valores de los ratios de error, ξ . Estadísticamente, los ratios de error recogidos en las gráficas

tienen una media de $\xi=0.93$, con un coeficiente de variación de 0.06, lo cual corrobora que la mayoría de puntos de error se sitúan entre los límites de $\xi=0.8$ y $\xi=1.0$.

IX.2 CONTRASTE.

Una vez comprobada la adecuación del ajuste a los datos experimentales, se propone una nueva forma de testear la expresión. El nuevo contraste servirá para evaluar si los valores de esbeltez que proporciona la fórmula de ajuste responden al concepto de esbeltez manejado en el estudio, es decir, que corresponden a soportes con una pérdida de capacidad resistente en cuanto a momentos del 10% o, puesto que se ha buscado una formulación del lado de la seguridad, menor al 10%.

Para efectuar el contraste es necesario realizar una nueva campaña de ensayos. Se ensayan soportes con las esbelteces que proporciona la fórmula y se obtiene para cada uno de ellos la pérdida mecánica por comparación del momento último resistido por el soporte esbelto sometido a flexocompresión recta con el momento resistido por el mismo soporte sometido a flexocompresión esviada. Evidentemente, para que el contraste sea válido y representativo debe tener una extensión adecuada y abarcar un intervalo suficientemente amplio de valores de cada una de las variables que intervienen en la fórmula. En este caso, la campaña de ensayos costa de 1280 (640 en flexión recta y otros tantos en flexión esviada) y se ha llevado a cabo con valores de las distintas variables variando entre los siguientes:

- Resistencia del hormigón, f_c , de 25 MPa y 85 MPa.
- Cuantía mecánica de armadura, ω , de 0.08 y $6/f_c$.
- Coeficiente de fluencia, φ , de 0 y 1.5.
- Disposición de armadura:

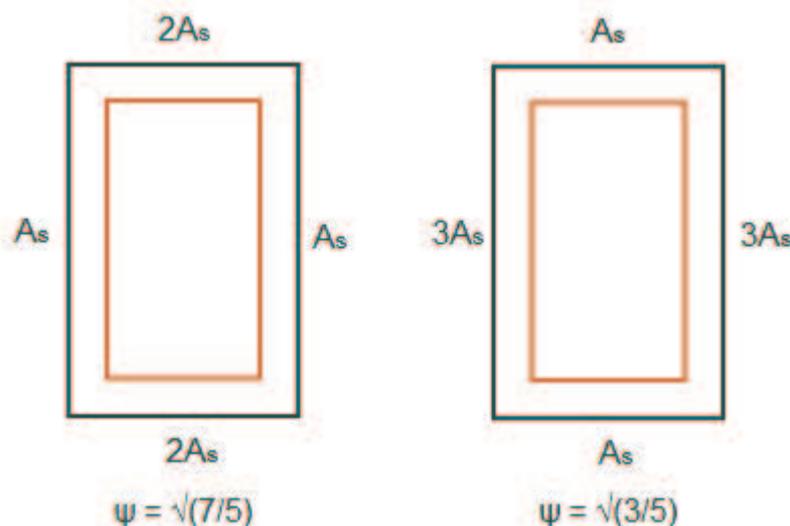


Figura IX.9.- Disposiciones de armado ensayadas.

- Relación canto-ancho, h/b , de 1.35 y 2.3
- Recubrimiento mecánico, c , de $0.05 h$ y $0.15 h$.
- Axil reducido entre 0 y 1.3.

Para los valores de axil reducido se ha creado una función aleatoria con el fin de que los diferentes ensayos estén repartidos a lo largo de todo el eje de abscisas, como puede observarse en las gráficas siguientes, que muestran los resultados obtenidos en el contraste (Figura IX.10 a Figura IX.17).

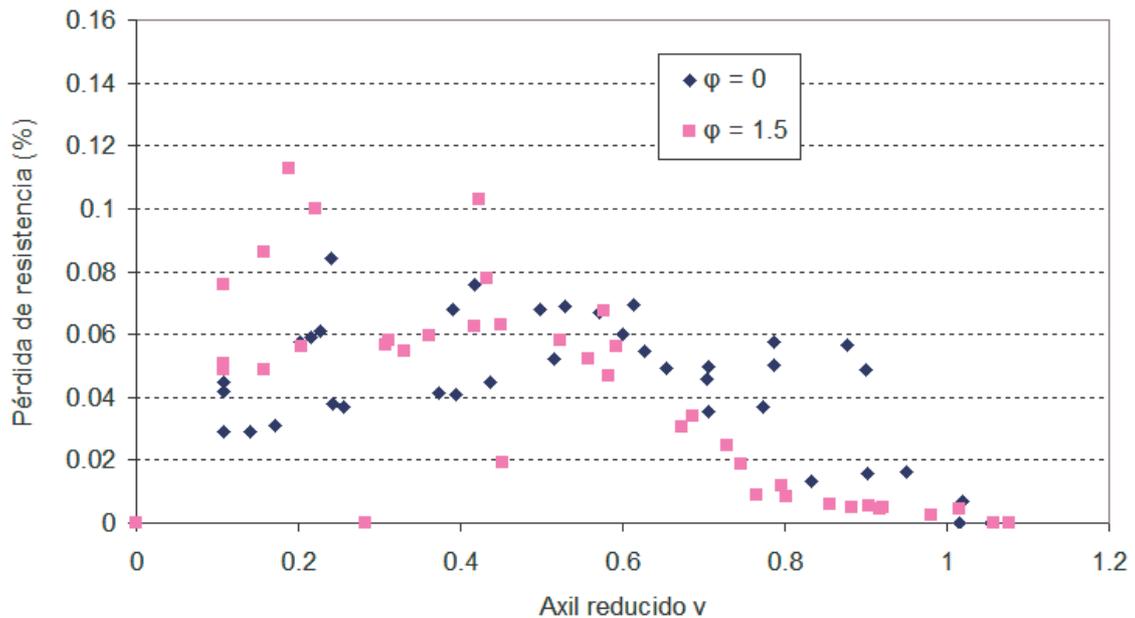


Figura IX.10.- Contraste. Caso $f_c = 25$ MPa; $\omega = 0.08$; $\Psi = \sqrt{(7/5)}$.

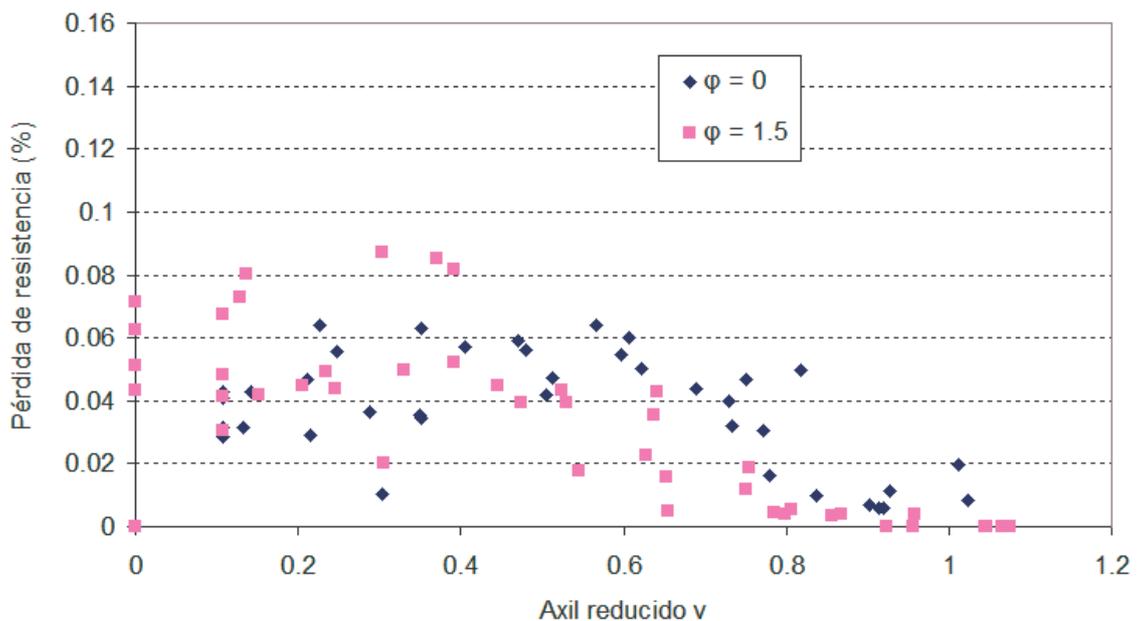


Figura IX.11.- Contraste. Caso $f_c = 25$ MPa; $\omega = 0.08$; $\Psi = \sqrt{(3/5)}$.

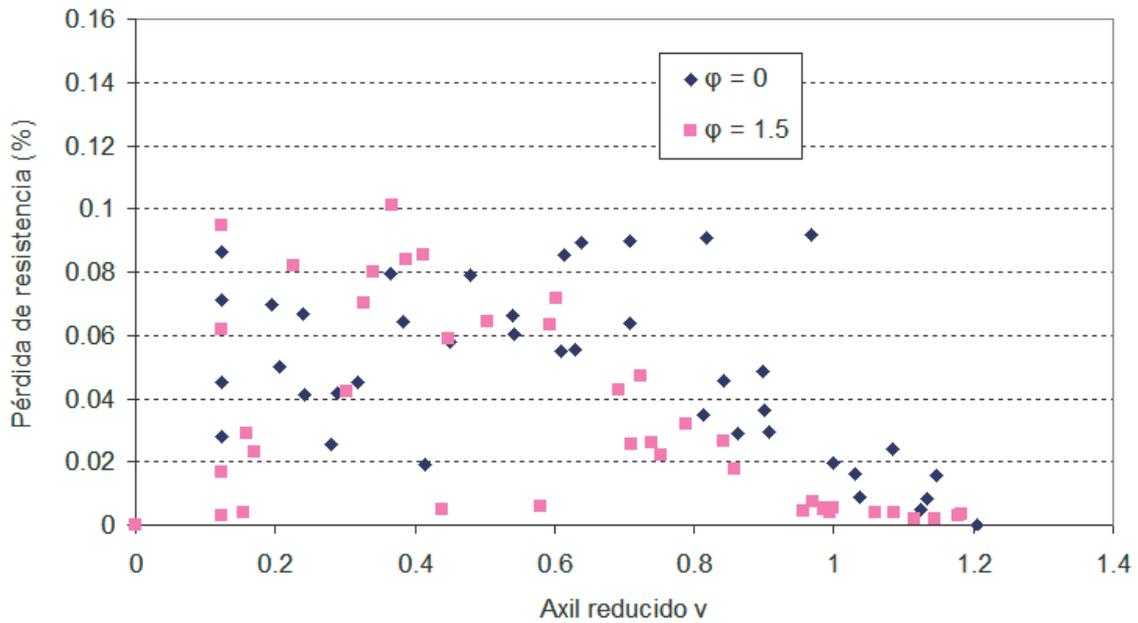


Figura IX.12.- Contraste. Caso $f_c = 25$ MPa; $\omega = 0.24$; $\Psi = \sqrt{(7/5)}$.

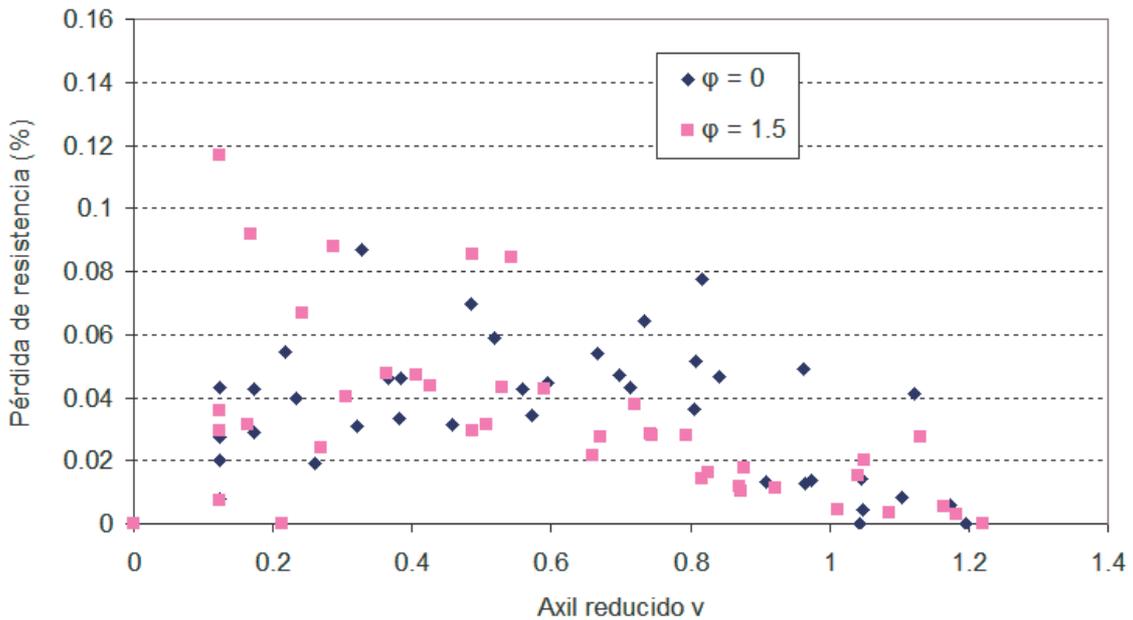


Figura IX.13.- Contraste. Caso $f_c = 25$ MPa; $\omega = 0.24$; $\Psi = \sqrt{(3/5)}$.

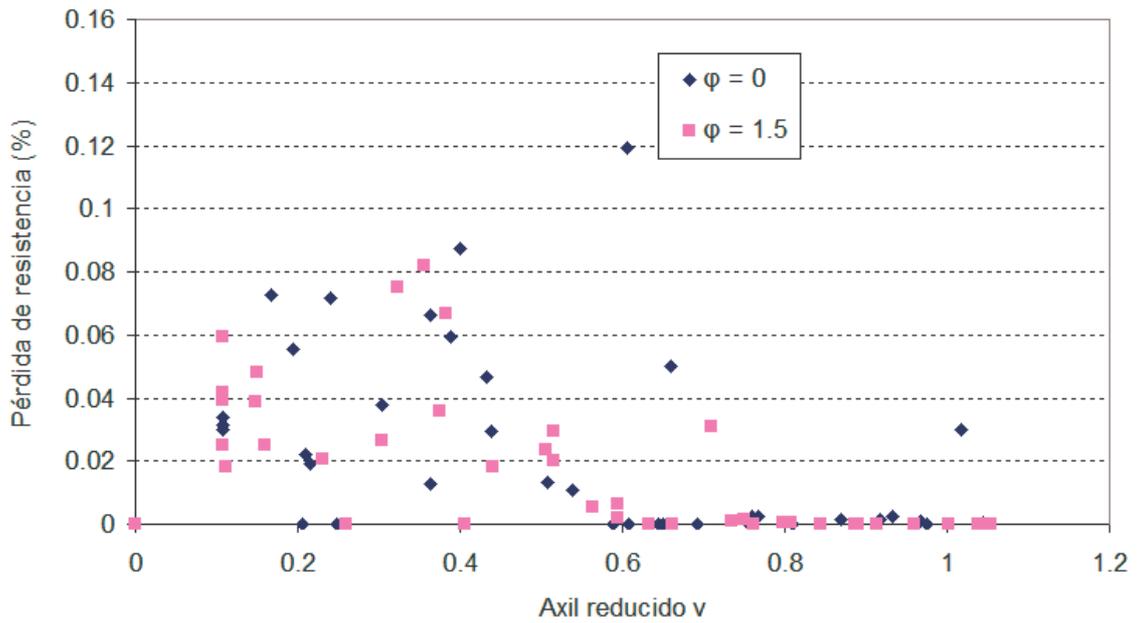


Figura IX.14.- Contraste. Caso $f_c = 85$ MPa; $\omega = 0.08$; $\Psi = \sqrt{(7/5)}$.

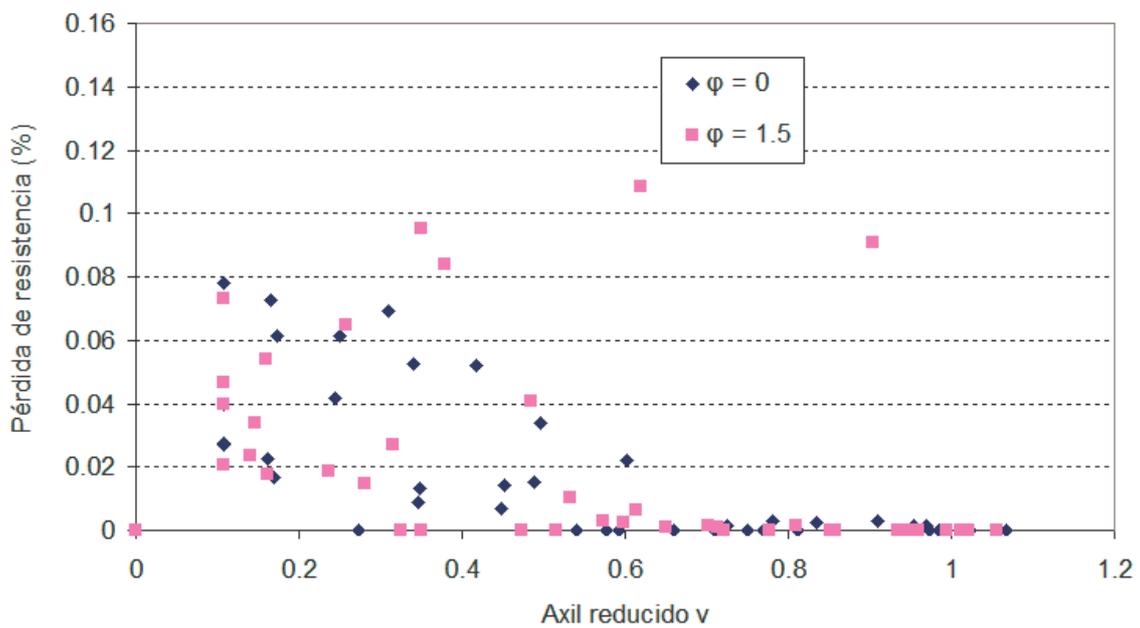


Figura IX.15.- Contraste. Caso $f_c = 85$ MPa; $\omega = 0.08$; $\Psi = \sqrt{(3/5)}$.

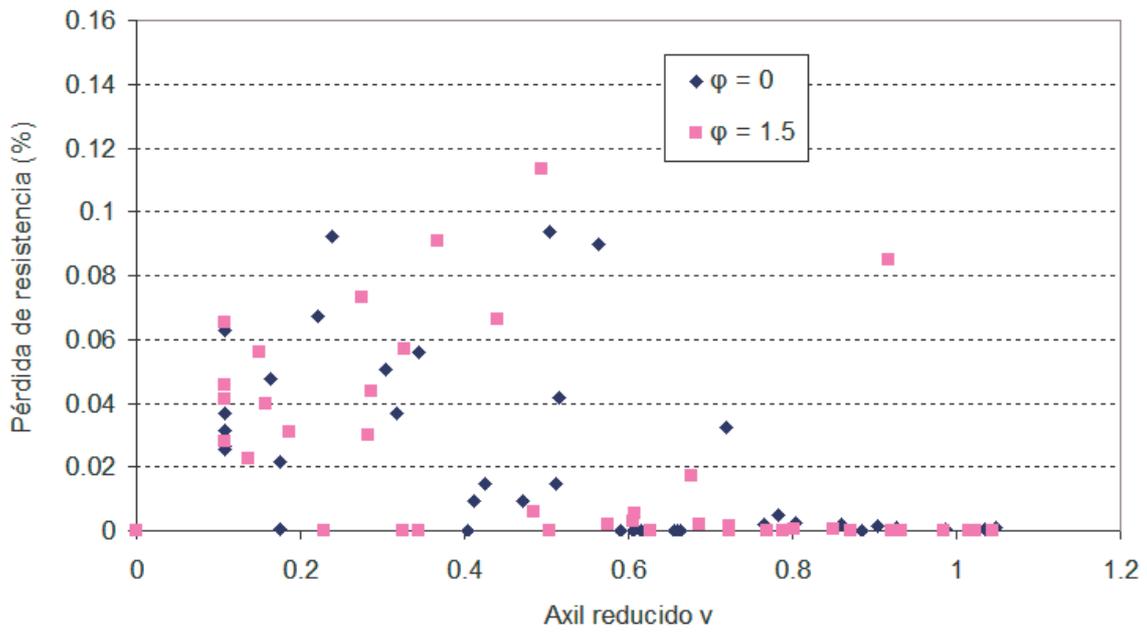


Figura IX.16.- Contraste. Caso $f_c = 85$ MPa; $\omega = 0.24$; $\Psi = \sqrt{(7/5)}$.

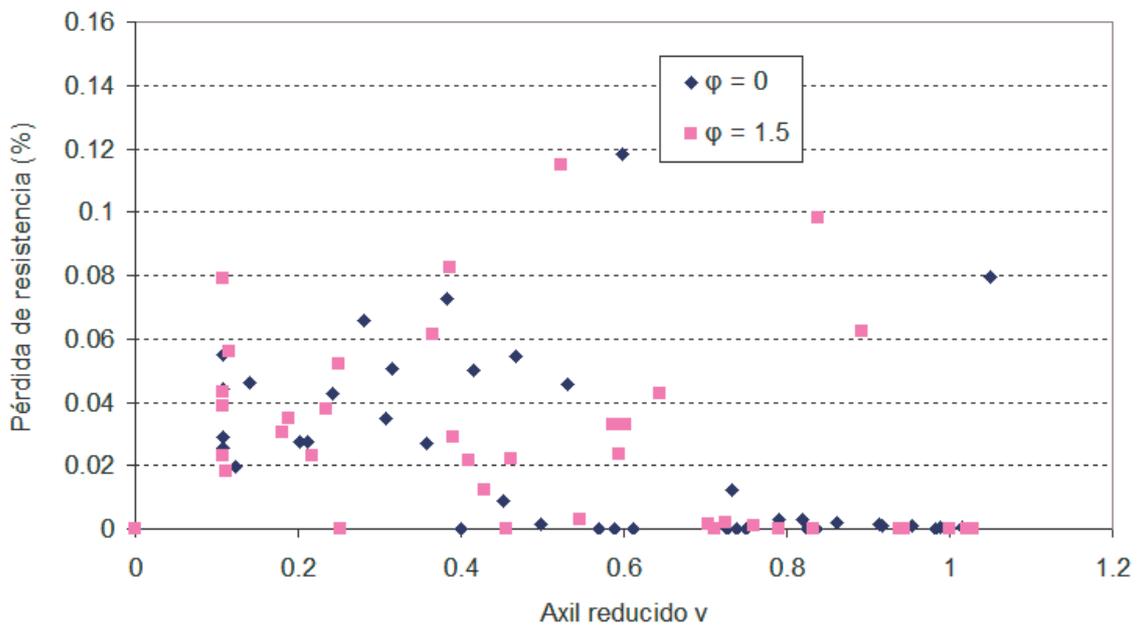


Figura IX.17.- Contraste. Caso $f_c = 85$ MPa; $\omega = 0.24$; $\Psi = \sqrt{(3/5)}$.

De la observación de las gráficas anteriores pueden extraerse varias conclusiones referentes al contraste realizado:

- Los resultados de los ensayos de contraste son muy satisfactorios, en todos los casos comprobados. De hecho, las pérdidas de capacidad mecánica se mantienen por debajo del 10%, incluso para niveles de axil altos, casi en la totalidad de los soportes ensayados. Únicamente algunos puntos superan dicho valor de error, pero en ningún caso se alcanza el 13%.
- Las series de puntos obtenidas no presentan una tendencia definida, pero se observa que los errores son mayores en las zonas de axiles muy altos y muy bajos, como era de esperar. Esto puede significar que el ajuste de la fórmula es menos acertado en esas zonas que en el resto, pero también puede ser simplemente una consecuencia de la forma de medir el error, ya que en esos niveles de axil el momento resistido es menor y su valor muy sensible a los parámetros del procedimiento numérico de cálculo.

Respecto a un posible comportamiento distinto de la expresión respecto de cada variable, no se aprecian diferencias entre los contrastes efectuados para diferentes valores del coeficiente de fluencia. Tampoco se observa una respuesta distinta con la variación de la cuantía de armadura, ni siquiera para valores altos de la misma. En cuanto a la resistencia del hormigón, se constata, como era de esperar, que los soportes con hormigón de alta resistencia sufren mayores pérdidas. A pesar de ello, los resultados del contraste son buenos.

X CONCLUSIONES.

X.1 CONCLUSIONES GENERALES.

A lo largo de este trabajo se ha comentado, por un lado, la situación actual del tema de la esbeltez límite inferior, tratada en las diferentes normativas y por diversos autores, analizando las distintas propuestas de los autores más interesantes como el tratamiento que recibe en la normativa internacional vigente. Por otro lado, a partir de las conclusiones obtenidas en el análisis de los efectos de segundo orden, se ha buscado la expresión que diferencie la necesidad o no de incluir un cálculo a flexión esviada en una situación que aparentemente se debería calcular en flexión recta (influencia del eje débil). En el proceso de análisis se ha constatado la inexistencia de propuestas dentro de la literatura técnica.

Posteriormente, se ha llevado a cabo una amplia campaña de ensayos que ha proporcionado los datos necesarios para proponer una expresión de ajuste y para establecer conclusiones válidas sobre la importancia relativa de los parámetros de cálculo y las posibles interacciones entre ellos. En ese punto se ha podido establecer, por ejemplo, que la calidad del hormigón, representada habitualmente a través de la resistencia a compresión, f_c , adquiere una importancia relativa, especialmente apreciable en los casos de armadura mínima, razón por la cual aparece como variable en la formulación de Goberna y Bonet et al.[13][14], y no en las propuestas de otros autores como Río y Morán[9][10][11] o Corres et al.[12].

En todo el proceso de estudio, observación, análisis y ajuste, se han podido establecer conclusiones particulares, referidas a cada uno de los problemas comentados. A continuación se resumen las más importantes:

- En lo que se refiere a tener en cuenta los efectos de segundo orden, destaca, en primer lugar, la falta de homogeneidad en el tratamiento del problema entre los diversos autores y normas, tanto en lo que a la forma de evaluación de las pérdidas mecánicas se refiere,

como en cuanto a las variables de estudio consideradas e incluidas en las respectivas formulaciones, o el tipo de función empleada.

- El estudio desarrollado emplea el criterio de pérdidas en cuanto a momentos para obtener la esbeltez de esviaje de soportes de hormigón armado, intraslacionales y de sección rectangular, sometidos a solicitaciones de flexocompresión recta, en las que se evalúa la influencia del eje débil.
- Los resultados de los ensayos previos realizados permiten afirmar que la influencia de parámetros como el recubrimiento mecánico de las armaduras, la relación canto ancho de la sección transversal o el límite elástico del acero empleado puede despreciarse en el entorno del 10% de error.
- Las variables de estudio finalmente consideradas son:
 - Esbeltez geométrica, λ_g .
 - Axil reducido, v .
 - Resistencia a compresión del hormigón, f_c .
 - Coeficiente de fluencia, φ .
 - Cuantía mecánica de armadura, ω .
 - Disposición de la armadura en la sección, ψ .
 - Relación canto-ancho, h/b .
- De dichas variables, las que muestran una mayor importancia en el comportamiento de la esbeltez límite inferior son:
 - Axil reducido, v .
 - Coeficiente de fluencia, φ .
 - Cuantía mecánica de armadura, ω .
 - Disposición de la armadura en la sección, ψ .

La resistencia a compresión del hormigón, f_c sólo tiene una importancia relativa. Por ello, se ha optado por tenerla en cuenta en el proceso de obtención de la fórmula experimental, pero sin incluirla como variable en la expresión final. Únicamente se diferencia el caso entre hormigón convencional y hormigón de alta resistencia.

- Se realiza un ajuste teórico que sirva de punto de partida, y que incluye todas las variables determinantes. Posteriormente se pasa a un análisis experimental.

- Uno de los principales problemas que se plantea durante el proceso de ajuste experimental es la elección del tipo de función que mejor se ajusta a los datos numéricos. En el desarrollo de este problema se incluye el análisis de los ajustes realizados con varios tipos de función: la inversa de la raíz cuadrada del axil reducido (función que se obtiene en los ajustes teóricos), la función potencial, la exponencial y la logarítmica. La función de ajuste escogida es la potencial, porque presenta el mejor comportamiento en un intervalo de axiles suficientemente amplio.
- La expresión para el cálculo de la esbeltez de esviaje obtenida a partir del ajuste experimental puede expresarse como:

$$\begin{aligned}\lambda_{esv} &= A \cdot \nu^B & \text{si} & \quad \nu \leq \nu_0 \\ \lambda_{esv} &= C \cdot (D + \nu) & \text{si} & \quad \nu > \nu_0\end{aligned}$$

con:

$$\nu_0 = \left(\frac{15}{A} \right)^{\frac{1}{B}}$$

$$A = (8 \cdot \omega - 1.3 \cdot \varphi + 10.5) \quad \text{si} \quad f_c \leq 50 \text{ MPa}$$

$$A = (8 \cdot \omega - 1.3 \cdot \varphi + 8) \quad \text{si} \quad f_c > 50 \text{ MPa}$$

$$B = (0.25 \cdot \omega + 0.045 \cdot \psi - 0.65)$$

$$C = \frac{15}{\nu_0 - (1 + \omega^*)}$$

$$D = -(1 + \omega^*)$$

$$\omega^* = \frac{\sigma_s \cdot A_s}{f_c \cdot A_c}, \text{ que en general se corresponderá con la cuantía mecánica.}$$

- En fase de diseño, cuando no se conoce todavía la cuantía de armadura del elemento en cuestión, se pueden emplear los coeficientes siguientes:

$$A = (11 - 1.3 \cdot \varphi) \quad \text{si} \quad f_c \leq 50 \text{ MPa}$$

$$A = (8.5 - 1.3 \cdot \varphi) \quad \text{si} \quad f_c > 50 \text{ MPa}$$

$$B = (0.25 \cdot \omega + 0.045 \cdot \psi - 0.65)$$

$$C = \frac{15}{\nu_0 - (1.06)}$$

$$D = -1.06$$

- La expresión propuesta ha sido sometida a varios tipos de contraste:
 - En primer lugar, se ha evaluado la bondad del ajuste obtenido, por comparación de la fórmula con todos los datos numéricos de los que se disponía. El análisis

de dicha comparación permite afirmar que la expresión de cálculo propuesta presenta un comportamiento adecuado no sólo en general, sino también respecto a cada una de las variables implicadas, lo que significa que se ha reproducido correctamente en la fórmula la influencia de los parámetros de estudio. La media de los ratios de error, ξ , es de 0.93, con un coeficiente de dispersión de 0.06.

- Posteriormente se ha realizado un contraste en flexión recta, para comprobar si los soportes de esbelteces proporcionadas por la fórmula sufren pérdidas de capacidad resistente menores o iguales al 10%. Los resultados del contraste son buenos en la práctica totalidad de los casos ensayados.

X.2 RECOMENDACIONES FUTURAS.

El estudio que se ha desarrollado en este trabajo trata un problema muy específico dentro del marco más amplio de la inestabilidad de elementos comprimidos: la determinación y cálculo de la esbeltez de esviaje, definida como la esbeltez de un soporte sometido a flexocompresión recta en el que se debe tener en cuenta la influencia del eje débil porque podría dar lugar a fallo del mismo por inestabilidad. Sin embargo, a pesar de la especificidad del fenómeno analizado, el estudio no abarca todas las situaciones que pueden darse, sino que se centra únicamente en soportes intraslacionales, articulados y de sección rectangular. Por tanto, cabe plantearse posibles vías de extensión del análisis. Algunas de las más interesantes son:

- Los soportes de estudio en este trabajo son intraslacionales. Esta hipótesis no es asumible en todos los soportes, por lo que puede plantearse un análisis similar al llevado a cabo en el presente estudio, pero esta vez sobre elementos traslacionales comprimidos, para llegar a obtener un límite inferior de esbeltez que se adapte al comportamiento de dichos elementos.
- La expresión obtenida para el cálculo de la esbeltez límite inferior incluye las variables que han mostrado una mayor influencia en el fenómeno (ν , ϕ , ω , ψ). Sin embargo, para aplicar la fórmula propuesta es necesario dimensionar el soporte (para conocer la cuantía de armadura del mismo). Este cálculo previo podría eliminarse de dos maneras distintas:
 - Expresando la esbeltez límite como función directa de los esfuerzos adimensionales que solicitan el soporte, ν y η , en lugar de la forma indirecta, con ν y ω , empleada en el estudio.
 - Mediante la obtención de una función de ajuste genérica que relacione el armado de un soporte con los esfuerzos que lo solicitan: $\omega=f(\nu; \eta)$.
- Queda pendiente la verificación de la expresión propuesta en caso de diferentes formas de la sección transversal del elemento, ya que en este trabajo el análisis únicamente se ha realizado para sección rectangular. Especialmente interesante es la verificación para

los tipos de sección transversal más habituales en edificación y en pilas de puentes, tales como secciones ovaladas o secciones irregulares.

- Por último, se puede estudiar el obtener una expresión de excentricidad accidental en flexión recta que tenga en cuenta la disminución de la capacidad portante debido al efecto del eje débil, que se deba aplicar para soportes cuya esbeltez sea superior a la esbeltez de esviaje, y que de esta manera, evite tener que realizar un cálculo en flexión esviada.

XI BIBLIOGRAFÍA.

Bibliografía	Referencia
▪ ACI Comitee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08)" American Concrete Institute, Detroit, 2008.	1
▪ Bazant, Z.P.; Pijaudier-Cabot, G.; Pan, J.: "Ductility, Snapback, size effect, and redistribution in softening beams or frames", ASCE, Journal of Structural Engineering, V.113, N°12, 1987, pp 2348-2363.	2
▪ Recomendaciones y manuales técnicos: "Código Modelo CEB/FIP 1990 para hormigón estructural", C.I.C.C.P, GEHO-CEB, ATEP. Madrid 1995, pp 275-289.	3
▪ Bonet Senach, J.L.: "Método simplificado de cálculo de soportes esbeltos de hormigón armado de sección rectangular sometidos a compresión y flexión biaxial", Tesis Doctoral, Dpto. Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería, U.P.V., mayo 2001.	4
▪ Menegotto, M.: "Observations on Slenderness Bounds for R/C Columns", C.E.B.. Bulletin, N° 155, 1983, pp 5-50.	5
▪ Comité Euro-internacional du beton: "Structural Concrete, Textbook on behaviour, Design and Performance Updated knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990", FIB 1999.	6
▪ MacGregor, J.G.; Breen, J.E.; Pfrang, E.O.: "Design of slender concrete columns", ACI, Journal of the American Concrete, V.67, N°1, 1970, pp 6-28.	7
▪ MacGregor, J.G: "Design of slender concrete columns-revisited", ACI Structural Journal, V.90, N°3, 1993, pp 302-309.	8
▪ Río, O.; Morán Cabré, F.: "Límites de esbeltez para soportes de hormigón armado", Informes de la Construcción, V.38, N°388, 1987, pp 65-71.	9
▪ Río, O.; Morán Cabré, F.: "Límites de esbeltez para soportes de hormigón armado:1. Límite de esbeltez inferior", Hormigón y acero, N°160, 1987, pp 31-38.	10
▪ Río, O.; Morán Cabré, F.: "Nueva definición de límites de esbeltez (una forma de simplificar el pandeo de soportes de hormigón)", Monografías del Instituto Eduardo Torroja, N°388, 1987, pp 5-16.	11

Bibliografía	Referencia
▪ Corres Peiretti, H.; León, F.J.: "Límites de esbeltez de soportes esbeltos de hormigón armado", Hormigón y Acero, N°101, 1986, pp 35-52.	12
▪ Goberna Pérez, E. G.: "Estudio del límite inferior de la esbeltez en soportes de hormigón armado de sección rectangular para la consideración de los efectos de segundo orden", Ejercicio Final de Carrera, E.T.S.I.C.C.P, U.P.V., abril 2001.	13
▪ Bonet Senach, J.L.; Goberna Pérez, E. G.: "Esbeltez límite inferior en soportes de hormigón", Hormigón y Acero, N°219, 2001, pp 79-89.	14
▪ Marí, A.; Hellesland, J.: "Lower slenderness limits for rectangular reinforced concrete columns", Journal of Structural Engineering. ASCE. (en revisión), 2003.	15
▪ Grupo de trabajo GT1/2 (Hormigón de alta resistencia): "Recomendaciones para el proyecto de estructuras de hormigón de alta resistencia", Asociación Científico-Técnica del Hormigón Estructural. Borrador Mayo 2003.	16
▪ Mirmiran, A.; Yuan, W.; Chen, X.: "Design for Slenderness in Concrete Columns Internally Reinforced with Fiber-Reinforced Polymer Bars", ACI Structural Journal, V.98, N°1, 2001, pp 116-125.	17
▪ British Standard Institution; "Structural use of concrete: Part 1. Code of practice for design and construction", BS 8110, 2008.	18
▪ Comisión Permanente del Hormigón: "Instrucción de Hormigón Estructural. EHE-08", Ministerio de Fomento, 2008.	19
▪ Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo n°2, Proyecto de Estructuras de Hormigón"; Madrid AENOR 1991.	20
▪ Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo n°2, Proyecto de Estructuras de Hormigón"; Final Draft; Madrid AENOR, octubre 2001.	21
▪ Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo n°2, Proyecto de Estructuras de Hormigón", Draft for Stage 49; Madrid AENOR, diciembre 2004.	22

Bibliografía	Referencia
▪ Garrido Hernández, A.: "La EHE explicada por sus autores", Leynfor Siglo XXI, 2000.	23
▪ Specification for Design Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, American Institute of Steel Construction, New York, 1963, pp 97.	24
▪ Paez, A.: "Hormigón armado Tomo II", Editorial Reverte S.A. 1987.	25
▪ López Agüí, J.C.: "Estabilidad de pilares esbeltos de hormigón. Estado Límite Último de Inestabilidad.", IECA. LOEMCO, Madrid 1997, pp 559.	26
▪ Furlong, Richard W: "Concrete Columns Under Biaxially Eccentric Thrust", Journal Proceedings, V.76, N°10, Farmington Hills, ACI, October 1, 1979, pages 1518 – 1528.	27
▪ Collado Escuder, María: "Nueva propuesta para el cálculo de la esbeltez límite inferior en soportes intraslacionales de hormigón armado." (2004)	28
▪ Pallarés Rubio, Luis: "Estudio del comportamiento de soportes esbeltos de sección rectangular de hormigón armado sometidos a flexión biaxial" (2009)	29
▪ Mavichack, V. and Furlong, W.: "Strength and stiffness of reinforced concrete columns under biaxial bending" (1976)	30
▪ Jin-Keun Kim and Sang-Soon Lee: "The behaviour of reinforced concrete columns subjected to axial force and biaxial bending" (2000)	31
▪ Comité Euro-internacional du beton: "Structural Concrete: Textbook on Behaviour, Design and Performance Updated knowledge of the CEB/FIB Model Code 1990, Volume 2, (2000)	32
▪ Bonet, J. L.: "Biaxial bending moment magnifier method" (2004)	33

Anejo A

El presente anejo muestra el programa completo de ensayos realizados. Hay dos tipos de tablas. En el primero se muestran los ensayos realizados durante la fase de búsqueda de la propuesta y en el segundo los ensayos realizados en la fase de validación de la misma.

En esta primera fase hay 43 tablas, en las que se muestran los parámetros h/b , ϕ , f_c , ω y ψ empleados en cada simulación. Junto a ellos las dos columnas para eje fuerte y eje débil marcan los axiles críticos para cada esbeltez considerada.

A la hora de realizar los ensayos, se empieza por obtener 10 puntos (10 ensayos) de un soporte con esbeltez nula y se calculan los axiles críticos (15 ensayos en eje fuerte y 15 ensayos en eje débil). Acto seguido, para cada esbeltez, se calculan 10 puntos correspondientes a axiles entre 0 y el axil crítico del eje débil (11 ensayos en eje débil y otros 11 en eje fuerte, para cada una de las 8 esbelteces consideradas entre 10 y 50 hacen un total de $88 + 88 = 176$ ensayos). Una vez grafiados los diagramas de interacción, se afina la búsqueda del axil para el que hay una diferencia del 10 % en momentos (4 ensayos en eje débil y 4 ensayos en eje fuerte). Por tanto, el número total de ensayos para cada una de las tablas mostradas es de 10 (esbeltez nula) + 30 (axiles críticos) + 176 (diagramas de interacción) + 8 (búsqueda fina) = 224 ensayos por tabla. En total para las 43 tablas el número de ensayos realizados es de 9632 aproximadamente.

En la fase de validación, se han realizado 640 en flexión recta y otros tantos en flexión esviada, haciendo un total de 1280 ensayos.

Por tanto, el número total de ensayos realizados en el presente trabajo es de, aproximadamente, 10912.

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31511829	1	1.31879417
2	1.31016085	2	1.31729044
3	1.30446403	3	1.31606613
4	1.29676094	4	1.31728783
6	1.26895484	6	1.31586342
8	1.24471159	8	1.31890212
10	1.20817776	10	1.31878527
15	1.07830077	15	1.31637067
20	0.9316731	20	1.28109594
25	0.74982078	25	1.20254473
30	0.5945827	30	1.08961126
35	0.46929359	35	0.96764473
40	0.37588937	40	0.84876931
50	0.24601459	50	0.64923618

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31511829	1	1.31875273
2	1.31016085	2	1.31877632
3	1.3020835	3	1.31885121
4	1.29676094	4	1.31887159
6	1.27532482	6	1.31841053
8	1.24705874	8	1.31890305
10	1.21344265	10	1.31881984
15	1.07990355	15	1.2992945
20	0.91971187	20	1.32303911
25	0.75070162	25	1.30804341
30	0.59536091	30	1.27829225
35	0.46953261	35	1.20618508
40	0.37339135	40	1.15486887
50	0.21279574	50	1.01157458

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2.5	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31066481	1	1.29793213
2	1.30911501	2	1.31729112
3	1.30378676	3	1.31589756
4	1.29674056	4	1.31729077
6	1.28007668	6	1.31729011
8	1.24755063	8	1.31754999
10	1.21344259	10	1.31365157
15	1.08552067	15	1.31862447
20	0.92106932	20	1.3174432
25	0.75159512	25	1.31679644
30	0.59587296	30	1.30402775
35	0.47007391	35	1.27307917
40	0.37371655	40	1.22720958
50	0.24836575	50	1.08905925

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31511977	1	1.31875267
2	1.31016008	2	1.31877317
3	1.30441263	3	1.31883346
4	1.29736039	4	1.31896776
6	1.27924643	6	1.31591707
8	1.25701613	8	1.3172902
10	1.21375803	10	1.31842576
15	1.07591496	15	1.31586583
20	0.92445766	20	1.31982353
25	0.75329557	25	1.3178545
30	0.59681165	30	1.31782431
35	0.47059164	35	1.30710861
40	0.37401198	40	1.27962422
50	0.24095629	50	1.20414886

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31511977	1	1.31875267
2	1.31016008	2	1.31877317
3	1.30441263	3	1.31883346
4	1.29736039	4	1.31896776
6	1.27924643	6	1.31591707
8	1.25701613	8	1.3172902
10	1.21375803	10	1.31842576
15	1.07591496	15	1.31586583
20	0.92445766	20	1.31982353
25	0.75329557	25	1.3178545
30	0.59681165	30	1.31782431
35	0.47059164	35	1.30710861
40	0.37401198	40	1.27962422
50	0.24095629	50	1.20414886

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	1	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.33757701	0	1.33757701
1	1.32880851	1	1.33756808
2	1.31827787	2	1.33755343
3	1.30552876	3	1.33751719
4	1.28997043	4	1.33745617
6	1.25565224	6	1.33758822
8	1.21481243	8	1.33773929
10	1.15363589	10	1.33544133
15	0.99419737	15	1.32959521
20	0.80432673	20	1.30912142
25	0.62545716	25	1.27426792
30	0.4619438	30	1.23119141
35	0.34767372	35	1.17511315
40	0.26921013	40	1.17120296
50	0.13915362	50	1.16270204

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	2	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.34250819	0	1.34250819
1	1.33382156	1	1.34250218
2	1.32236783	2	1.34249116
3	1.30729996	3	1.34245908
4	1.27187403	4	1.34237906
6	1.23090913	6	1.34256894
8	1.16620633	8	1.3411706
10	1.07552457	10	1.33813571
15	0.87849406	15	1.33086232
20	0.69625214	20	1.28588678
25	0.53799266	25	1.22176251
30	0.39711856	30	1.14555409
35	0.29504291	35	1.08675185
40	0.22709207	40	1.01750717
50	0.11455804	50	0.97985479

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	3	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.34744896	0	1.34744896
1	1.33884581	1	1.34744884
2	1.32643936	2	1.34744063
3	1.302111	3	1.34740497
4	1.28452832	4	1.34731461
6	1.21143546	6	1.34683817
8	1.1222942	8	1.34547565
10	1.00929999	10	1.34100396
15	0.79183397	15	1.32469632
20	0.62088988	20	1.25585661
25	0.48040013	25	1.16254247
30	0.35982065	30	1.0633987
35	0.26593067	35	0.98745598
40	0.20432293	40	0.89736076
50	0.10217205	50	0.86149887

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31511829	1	1.31879417
2	1.31016085	2	1.31729044
3	1.30446403	3	1.31606613
4	1.29676094	4	1.31728783
6	1.26895484	6	1.31586342
8	1.24471159	8	1.31890212
10	1.20817776	10	1.31878527
15	1.07830077	15	1.31637067
20	0.9316731	20	1.28109594
25	0.74982078	25	1.20254473
30	0.5945827	30	1.08961126
35	0.46929359	35	0.96764473
40	0.37588937	40	0.84876931
50	0.24601459	50	0.64923618

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	50	0.2	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.17871479	0	1.17871479
1	1.17768521	1	1.17524327
2	1.1725097	2	1.1793415
3	1.16615003	3	1.18062693
4	1.15885946	4	1.18025434
6	1.14776597	6	1.18071515
8	1.10847529	8	1.18009894
10	1.07588068	10	1.17601588
15	0.96287493	15	1.17609633
20	0.81167062	20	1.15336654
25	0.65081688	25	1.09861341
30	0.49835572	30	1.00233934
35	0.37846546	35	0.88211235
40	0.29407434	40	0.75661246
50	0.18738633	50	0.54731984

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	70	0.14	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.14203925	0	1.14203925
1	1.13554704	1	1.14203206
2	1.12746761	2	1.14270759
3	1.11930633	3	1.14266266
4	1.11039337	4	1.1427108
6	1.09710116	6	1.14235546
8	1.05204287	8	1.14029701
10	1.01649335	10	1.13903211
15	0.8912877	15	1.13680355
20	0.72969745	20	1.13896352
25	0.56665316	25	1.08307159
30	0.41716421	30	0.96350785
35	0.30997412	35	0.84928866
40	0.23851961	40	0.74109292
50	0.14974259	50	0.5370612

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	90	0.11	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.10931595	0	1.10931595
1	1.10274576	1	1.11057235
2	1.09333443	2	1.11115724
3	1.08523746	3	1.11125755
4	1.07787624	4	1.10905885
6	1.05995817	6	1.11042186
8	1.01528411	8	1.11166739
10	0.97140287	10	1.10886422
15	0.8485424	15	1.09751686
20	0.68466247	20	1.09213209
25	0.51267505	25	1.03724641
30	0.36655881	30	0.93752178
35	0.25057365	35	0.83608354
40	0.20420887	40	0.71993826
50	0.12699307	50	0.5143481

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31511829	1	1.31879417
2	1.31016085	2	1.31729044
3	1.30446403	3	1.31606613
4	1.29676094	4	1.31728783
6	1.26895484	6	1.31586342
8	1.24471159	8	1.31890212
10	1.20817776	10	1.31878527
15	1.07830077	15	1.31637067
20	0.9316731	20	1.28109594
25	0.74982078	25	1.20254473
30	0.5945827	30	1.08961126
35	0.46929359	35	0.96764473
40	0.37588937	40	0.84876931
50	0.24601459	50	0.64923618

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	50	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.30592221	0	1.30592221
1	1.28808419	1	1.29209087
2	1.29973728	2	1.30587935
3	1.29448575	3	1.30492361
4	1.2876792	4	1.30587794
6	1.27685095	6	1.30587474
8	1.23805139	8	1.30587395
10	1.2055553	10	1.29973962
15	1.08399613	15	1.30884455
20	0.91882666	20	1.2952804
25	0.73908312	25	1.2670747
30	0.56841246	30	1.17251805
35	0.40488408	35	1.07717122
40	0.33652445	40	0.93304456
50	0.2147214	50	0.76464065

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	60	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.33275539	0	1.33275539
1	1.32413189	1	1.33105233
2	1.31506826	2	1.33105191
3	1.30626419	3	1.33264088
4	1.29664105	4	1.33366742
6	1.28068133	6	1.3327244
8	1.23134003	8	1.33316609
10	1.1974063	10	1.33547285
15	1.06581191	15	1.33253099
20	0.89235281	20	1.33292538
25	0.71442717	25	1.27457422
30	0.53973941	30	1.15929506
35	0.4065075	35	1.02790694
40	0.31454392	40	0.900036
50	0.19878539	50	0.6278123

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	70	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.33358139	0	1.33358139
1	1.32577941	1	1.3325717
2	1.31790267	2	1.33372015
3	1.30958945	3	1.3332253
4	1.30026364	4	1.33026513
6	1.2894205	6	1.33216202
8	1.2415482	8	1.33125523
10	1.20668994	10	1.33316932
15	1.0732456	15	1.32866626
20	0.89042032	20	1.33182543
25	0.70311309	25	1.29604997
30	0.52315847	30	1.18497484
35	0.39023773	35	1.00714572
40	0.30020946	40	0.88259683
50	0.18871746	50	0.60458268

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	90	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.33189804	0	1.33189804
1	1.32376315	1	1.33166312
2	1.31452334	2	1.33166312
3	1.30505699	3	1.33362494
4	1.30568201	4	1.33402181
6	1.27952809	6	1.33248621
8	1.25532286	8	1.33142786
10	1.19962483	10	1.33269713
15	1.0690478	15	1.31461493
20	0.88239076	20	1.31548712
25	0.68205507	25	1.27506968
30	0.49508801	30	1.18322072
35	0.36420926	35	1.06288309
40	0.27604709	40	0.89743682
50	0.17359941	50	0.65711669

h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	100	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.33312958	0	1.33312958
1	1.32407977	1	1.33253653
2	1.31259952	2	1.3337416
3	1.30326239	3	1.33406286
4	1.29294732	4	1.33367856
6	1.26349258	6	1.332938
8	1.22795511	8	1.33064201
10	1.19165541	10	1.28823888
15	1.04943716	15	1.31607597
20	0.86997261	20	1.30142701
25	0.67122284	25	1.27563648
30	0.48301866	30	1.18128752
35	0.35339772	35	1.05138394
40	0.23776308	40	0.90399901
50	0.16772763	50	0.63416093

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31511977	1	1.31875267
2	1.31016008	2	1.31877317
3	1.30441263	3	1.31883346
4	1.29736039	4	1.31896776
6	1.27924643	6	1.31591707
8	1.25701613	8	1.3172902
10	1.21375803	10	1.31842576
15	1.07591496	15	1.31586583
20	0.92445766	20	1.31982353
25	0.75329557	25	1.3178545
30	0.59681165	30	1.31782431
35	0.47059164	35	1.30710861
40	0.37401198	40	1.27962422
50	0.24095629	50	1.20414886

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1.73205081

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31920369	0	1.31920369
1	1.30368777	1	1.31919192
2	1.29110389	2	1.31961738
3	1.2782606	3	1.31878567
4	1.26457063	4	1.31653575
6	1.23346046	6	1.3236187
8	1.19630869	8	1.32241217
10	1.13746683	10	1.3122779
15	0.96964107	15	1.31575827
20	0.82096804	20	1.28607965
25	0.65311865	25	1.21855692
30	0.50960629	30	1.14055344
35	0.39798805	35	1.01535155
40	0.31444922	40	0.9045384
50	0.20739943	50	0.76728245

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	0.57735027

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.3190962	0	1.3190962
1	1.31512647	1	1.31881312
2	1.31122527	2	1.3188163
3	1.30439087	3	1.3187506
4	1.29735938	4	1.31924736
6	1.27924642	6	1.31593423
8	1.25701617	8	1.31713446
10	1.21375802	10	1.31724193
15	1.07591496	15	1.31495066
20	0.92445766	20	1.303329
25	0.75329557	25	1.288103
30	0.59681164	30	1.27136634
35	0.47059163	35	1.23906476
40	0.37401198	40	1.19936492
50	0.24095629	50	1.10211364

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.0666	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	2.11944817	0	2.11944817
1	2.11094597	1	2.11898628
2	2.09865309	2	2.11954066
3	2.0844364	3	2.11949726
4	2.06828972	4	2.11953703
6	2.02944031	6	2.11882401
8	1.98071414	8	2.11911943
10	1.90202144	10	2.11938107
15	1.66307212	15	2.11671294
20	1.4405367	20	2.11445453
25	1.1806972	25	2.10267728
30	0.94062068	30	2.09069618
35	0.74404587	35	2.05480472
40	0.59233448	40	2.01873394
50	0.39392324	50	1.88869047

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.1	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.63574482	0	1.63574482
1	1.6307308	1	1.63574446
2	1.62237259	2	1.63574227
3	1.61233262	3	1.63573943
4	1.60068131	4	1.63573729
6	1.57205511	6	1.63499045
8	1.53786031	8	1.63564215
10	1.47716037	10	1.63571906
15	1.34509241	15	1.6353346
20	1.11744906	20	1.63353189
25	0.91504624	25	1.6260901
30	0.72861695	30	1.61732834
35	0.57613319	35	1.59081117
40	0.45858982	40	1.56247897
50	0.30466455	50	1.46264622

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.25	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.48249703	0	1.48249703
1	1.47955977	1	1.48250091
2	1.47419352	2	1.48253209
3	1.46726757	3	1.48265984
4	1.45894071	4	1.48282188
6	1.43703702	6	1.47966344
8	1.40924111	8	1.48236086
10	1.36041574	10	1.48279011
15	1.2176095	15	1.48166124
20	1.03104353	20	1.48242653
25	0.84125756	25	1.48190946
30	0.66785237	30	1.47698803
35	0.52717036	35	1.45977951
40	0.41925492	40	1.43051307
50	0.27420299	50	1.34367638

h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.31874997	0	1.31874997
1	1.31511977	1	1.31875267
2	1.31016008	2	1.31877317
3	1.30441263	3	1.31883346
4	1.29736039	4	1.31896776
6	1.27924643	6	1.31591707
8	1.25701613	8	1.3172902
10	1.21375803	10	1.31842576
15	1.07591496	15	1.31586583
20	0.92445766	20	1.31982353
25	0.75329557	25	1.3178545
30	0.59681165	30	1.31782431
35	0.47059164	35	1.30710861
40	0.37401198	40	1.27962422
50	0.24095629	50	1.20414886

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	30	0.0666	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.05677888	0	1.05677888
1	1.05547847	1	1.05677848
2	1.04932641	2	1.05952432
3	1.04343598	3	1.05971783
4	1.03410206	4	1.05953198
6	1.01472015	6	1.05975913
8	0.98313433	8	1.05967673
10	0.9508369	10	1.05929377
15	0.84134098	15	1.05494772
20	0.71727444	20	1.04891031
25	0.58845258	25	1.03220385
30	0.4692099	30	1.00231552
35	0.37124591	35	0.97055224
40	0.27134818	40	0.92030576
50	0.19883365	50	0.80317484

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	30	0.0666	1.73205081

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.05677767	0	1.05677767
1	1.05156994	1	1.05677727
2	1.04348039	2	1.05955031
3	1.03464274	3	1.05971802
4	1.02529883	4	1.05841044
6	1.0033425	6	1.05839216
8	0.96904501	8	1.0571134
10	0.93458026	10	1.05125041
15	0.82344039	15	1.04489551
20	0.69843218	20	1.04931968
25	0.56992684	25	1.03110655
30	0.45266139	30	1.00148627
35	0.35724341	35	0.98665924
40	0.25961253	40	0.92130808
50	0.16340674	50	0.77447531

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	30	0.0666	0.57735027

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.05677855	0	1.05677855
1	1.05547844	1	1.05677836
2	1.0493264	2	1.05952138
3	1.04343598	3	1.0594046
4	1.03410206	4	1.05974947
6	1.01472015	6	1.06015138
8	0.98313433	8	1.05782975
10	0.9508369	10	1.05647658
15	0.84134098	15	1.05066214
20	0.71727444	20	1.05088435
25	0.58845258	25	1.02853273
30	0.4692099	30	0.98151136
35	0.3712459	35	1.00005924
40	0.27134818	40	0.90348639
50	0.19883365	50	0.79313194

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	30	0.0666	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06699921	0	1.06699921
1	1.06013526	1	1.0669938
2	1.05168899	2	1.0676659
3	1.04170671	3	1.06749744
4	1.02976902	4	1.06735629
6	0.99960086	6	1.06641023
8	0.95206376	8	1.06380248
10	0.90063649	10	1.05968496
15	0.73409194	15	1.03826459
20	0.56928982	20	1.01385464
25	0.42286682	25	0.96516123
30	0.31298719	30	0.90529328
35	0.21083757	35	0.84117646
40	0.15538708	40	0.77586561
50	0.09482185	50	0.60672143

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	30	0.0666	1.73205081

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06699384	0	1.06699384
1	1.05997108	1	1.06698852
2	1.05145727	2	1.067682
3	1.0414175	3	1.06726906
4	1.02941936	4	1.06738124
6	0.99843542	6	1.06622872
8	0.94746244	8	1.05861128
10	0.89206568	10	1.05205041
15	0.71584632	15	1.04811115
20	0.54142474	20	1.02258714
25	0.39549967	25	0.98771309
30	0.29191386	30	0.9155593
35	0.19375043	35	0.80049288
40	0.1425312	40	0.73509379
50	0.11372928	50	0.55655281

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	30	0.0666	0.57735027

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06699767	0	1.06699767
1	1.06013525	1	1.06699764
2	1.05168898	2	1.06759725
3	1.04170671	3	1.06748428
4	1.02976902	4	1.06724051
6	0.99960086	6	1.06629633
8	0.95206376	8	1.06408087
10	0.90063649	10	1.06112784
15	0.73409194	15	1.04930105
20	0.56928982	20	1.01544236
25	0.42286681	25	0.98171885
30	0.31298719	30	0.9015304
35	0.21083757	35	0.82933903
40	0.15538708	40	0.75274309
50	0.09482185	50	0.60200669

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	30	0.0666	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06932055	0	1.06932055
1	1.06188532	1	1.06945182
2	1.05194827	2	1.06947318
3	1.03844552	3	1.06914736
4	1.02025764	4	1.0686371
6	0.96687468	6	1.06640642
8	0.87305661	8	1.05826291
10	0.78401587	10	1.04292189
15	0.55886046	15	0.97595346
20	0.39303528	20	0.90775738
25	0.18884423	25	0.78132594
30	0.13693576	30	0.67004151
35	0.12635908	35	0.58903983
40	0.09142824	40	0.57450927
50	0.05417998	50	0.39560283

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	30	0.0666	1.73205081

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06945727	0	1.06945727
1	1.06156413	1	1.06956731
2	1.05146208	2	1.0694654
3	1.0378009	3	1.069505
4	1.01941047	4	1.06819016
6	0.96571883	6	1.06378748
8	0.87105095	8	1.03197029
10	0.77534868	10	1.04641063
15	0.53614521	15	0.98283624
20	0.36249117	20	0.84657044
25	0.24829041	25	0.72607129
30	0.17739326	30	0.61999384
35	0.13278819	35	0.52441881
40	0.080992	40	0.4475742
50	0.05186	50	0.32438004

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	30	0.0666	0.57735027

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06933707	0	1.06933707
1	1.06188531	1	1.0693227
2	1.05194827	2	1.06940503
3	1.03844551	3	1.0695301
4	1.02021237	4	1.06863147
6	0.96679297	6	1.0665843
8	0.87300711	8	1.05996521
10	0.78391505	10	1.05545491
15	0.55888114	15	1.01054803
20	0.39304752	20	0.93825523
25	0.28015167	25	0.82890489
30	0.200454	30	0.70916048
35	0.14973692	35	0.60746698
40	0.0969972	40	0.55022794
50	0.059446	50	0.38663228

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	100	0.0666	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06581909	0	1.06581909
1	1.06358721	1	1.06682185
2	1.04940181	2	1.06675141
3	1.05776517	3	1.06648452
4	1.04242702	4	1.06678822
6	1.01232465	6	1.06440435
8	0.96969985	8	1.06546446
10	0.93454051	10	1.06508175
15	0.80224042	15	1.05974033
20	0.63253215	20	1.05345833
25	0.46450374	25	1.0404592
30	0.32734563	30	1.01671977
35	0.23746877	35	0.9727988
40	0.17870274	40	0.89053012
50	0.09761851	50	0.68793793

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	100	0.0666	1.73205081

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06581531	0	1.06581531
1	1.05797412	1	1.06581164
2	1.04929816	2	1.06581164
3	1.03656469	3	1.06647078
4	1.04791868	4	1.06650741
6	1.00957822	6	1.06440128
8	0.96461512	8	1.06540446
10	0.92539546	10	1.06409711
15	0.78015872	15	1.03379168
20	0.60396051	20	1.05293969
25	0.43285789	25	1.04433259
30	0.30267416	30	0.98679127
35	0.21888077	35	0.89186009
40	0.16448698	40	0.76457282
50	0.09049229	50	0.57451589

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	100	0.0666	0.57735027

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06581844	0	1.06581844
1	1.03532641	1	1.0658179
2	1.03898121	2	1.06672963
3	1.05780847	3	1.06650734
4	1.04232362	4	1.06654446
6	1.01232444	6	1.06441472
8	0.96969964	8	1.06548816
10	0.93888056	10	1.06500582
15	0.8022402	15	1.05974242
20	0.63253196	20	1.05338414
25	0.46450357	25	1.04026898
30	0.32734551	30	1.01354553
35	0.23746868	35	0.95083091
40	0.17870267	40	0.85816401
50	0.09761848	50	0.65715757

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	100	0.0666	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06709117	0	1.06709117
1	1.06226691	1	1.06806626
2	1.04986537	2	1.06798488
3	1.0385455	3	1.06790691
4	1.02484068	4	1.06784069
6	0.99369657	6	1.06684094
8	0.9191924	8	1.06604258
10	0.84295117	10	1.06353386
15	0.61970685	15	1.0518901
20	0.42045785	20	1.01168992
25	0.28467882	25	0.91478944
30	0.19536371	30	0.78416801
35	0.14151941	35	0.66884961
40	0.08262964	40	0.59629563
50	0.05481763	50	0.42746789

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	100	0.0666	1.73205081

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06708834	0	1.06708834
1	1.06003177	1	1.06804178
2	1.04967055	2	1.06796042
3	1.0383019	3	1.06787647
4	1.02669396	4	1.06762163
6	0.99319933	6	1.06734336
8	0.91897636	8	1.0631264
10	0.84248826	10	1.04099402
15	0.59971335	15	1.01452542
20	0.38483981	20	0.94593653
25	0.24814117	25	0.75325606
30	0.16970014	30	0.6293752
35	0.12291201	35	0.53528393
40	0.07792621	40	0.42759919
50	0.04675358	50	0.31214738

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	100	0.0666	0.57735027

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06709025	0	1.06709025
1	1.06226277	1	1.06808325
2	1.04986512	2	1.06800163
3	1.03890179	3	1.06806001
4	1.02484049	4	1.06781979
6	0.99369616	6	1.06562782
8	0.91919225	8	1.06649369
10	0.84295104	10	1.06347021
15	0.61970667	15	1.04244061
20	0.42045766	20	1.01171296
25	0.28467863	25	0.91458723
30	0.19536358	30	0.78197713
35	0.14151931	35	0.65958503
40	0.0826296	40	0.5965254
50	0.0548176	50	0.38795906

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	100	0.0666	1

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.06963531	0	1.06963531
1	1.06173704	1	1.07064645
2	1.05085552	2	1.0706057
3	1.03436803	3	1.07047058
4	1.01945995	4	1.06621659
6	0.96031588	6	1.06575796
8	0.82511218	8	1.06482918
10	0.68227041	10	1.05999293
15	0.40035245	15	0.98887886
20	0.25326798	20	0.81869361
25	0.17608677	25	0.62742811
30	0.12401654	30	0.47467256
35	0.06622702	35	0.39537463
40	0.05626771	40	0.35418416
50	0.03419419	50	0.27152235

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	100	0.0666	1.73205081

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.0696313	0	1.0696313
1	1.06153943	1	1.08120926
2	1.05051539	2	1.07047229
3	1.03398369	3	1.06983422
4	1.01869106	4	1.06617984
6	0.95900633	6	1.0657499
8	0.82305256	8	1.06011205
10	0.67460051	10	1.025375
15	0.36545574	15	0.7857783
20	0.22015876	20	0.56470629
25	0.14282827	25	0.43177555
30	0.09879191	30	0.35142495
35	0.05823249	35	0.29125285
40	0.04318818	40	0.22510908
50	0.0258511	50	0.19110268

h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	100	0.0666	0.57735027

λ eje débil	v	λ eje fuerte	v
0	1.05563405	0	1.05563405
1	1.0617369	1	1.07066357
2	1.0508553	2	1.07060119
3	1.03436782	3	1.07044652
4	1.01945857	4	1.06622118
6	0.96048527	6	1.06873327
8	0.82511205	8	1.06315399
10	0.68227029	10	1.0511269
15	0.40035224	15	0.96494361
20	0.2532678	20	0.8172532
25	0.17608763	25	0.62757379
30	0.12401231	30	0.48213739
35	0.06622695	35	0.38768581
40	0.05626766	40	0.33742252
50	0.03419416	50	0.23387609

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	ϕ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	40.21269179	0.108
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	30.88418203	0.170674418
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	25.24427961	0.242106251
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	19.68152377	0.372770246
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	16.33694476	0.514858262
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	14.07456325	0.626803356
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	13.24998808	0.653354425
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	7.690344067	0.832373267
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	4.056668583	0.949376509
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.05	0.086461377	1.07721597
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	38.08310015	0.124
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	26.60647502	0.241869865
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	24.14013456	0.28992863
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	20.79541672	0.382793412
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	16.19364536	0.610006063
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	15.91781026	0.629846761
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	10.53632572	0.863176479
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	9.471676208	0.901252843
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	4.347515063	1.084514494
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.05	2.950831705	1.134465792
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	33.17366585	0.108
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	23.01406119	0.203590505
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	18.12859811	0.307916846
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	15.21602356	0.417171302
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	12.80101792	0.523277789
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	11.45587084	0.58177886
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	9.36200652	0.672841991
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	6.50941905	0.796902344
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	3.762417595	0.916370713
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	1.475462338	1.015831458
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	32.10386945	0.124
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	27.1002905	0.170024317
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	19.90049275	0.302248677
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	16.13206182	0.446915804
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	15.12274368	0.50408232
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	10.90685023	0.7105046
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	10.05084115	0.752061315
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	5.192752465	0.987907188
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	3.169414011	1.0861343
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	1.277542747	1.177979069
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	40.21269179	0.108
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	34.57605138	0.140327331
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	24.47898011	0.255379967
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	19.03440909	0.395016634
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	17.956892	0.437014394
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	14.88350223	0.600755768
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	11.67389461	0.704104154
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	9.547301672	0.772579798
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	6.283561026	0.877671252
1.35	0	25	0.08	1.183215957	0.15	1.902552524	1.018738389
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	38.08310015	0.124
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	29.86481823	0.195032955
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	23.00808877	0.317068175
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	19.08053346	0.449365529
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	17.24781806	0.542383126
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	15.80281997	0.638412133
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	11.13495711	0.841766891
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	9.584604254	0.897214059
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	5.642555368	1.038198382
1.35	0	25	0.24	1.183215957	0.15	3.248793379	1.123809423

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	φ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	33.17366585	0.108
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	26.59471038	0.158441537
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	17.97589108	0.312466319
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	16.53705223	0.361097255
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	14.46959369	0.450710654
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	11.99379083	0.55838447
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	8.057390031	0.729580368
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	5.161122332	0.855540394
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	4.515025299	0.883639454
1.35	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	0.087814574	1.076180903
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	32.10386945	0.124
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	28.61898262	0.153600859
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	18.64249723	0.341350014
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	17.40029467	0.388144537
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	13.33024885	0.592855747
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	11.2675603	0.69299319
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	8.201325412	0.841849848
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	5.579244071	0.969144161
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	4.954003344	0.999497753
1.35	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	1.182369813	1.182599434
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	41.89251382	0.108
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	27.85282915	0.214427264
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	22.63552244	0.303834103
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	20.75011262	0.351641683
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	16.74483184	0.504196649
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	14.53557576	0.621252857
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	10.98222789	0.733397585
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	9.747803237	0.772356398
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	5.106917479	0.918824148
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.05	2.175497583	1.011340642
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	39.57330636	0.124
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	28.95962248	0.217620605
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	26.236153	0.259994586
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	19.18435659	0.456942284
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	16.93752808	0.571884946
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	14.94092302	0.713859097
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	12.35833414	0.804804325
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	7.827523611	0.964355695
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	5.501645087	1.046260931
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.05	0.619650015	1.218179178
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	34.55944363	0.108
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	23.5515298	0.205716153
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	21.2338903	0.244829024
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	17.7672949	0.330315933
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	14.87188631	0.444489955
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	12.49905959	0.54588632
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	7.596821879	0.755370258
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	6.598342792	0.798037575
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	2.902682762	0.955961663
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	0.132528638	1.074336745
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	33.36010608	0.124
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	24.75887324	0.212172274
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	21.66527987	0.26983978
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	15.60794252	0.487135722
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	15.27727631	0.506292991
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	12.16349938	0.658808684
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	8.872414131	0.816061964
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	7.739500712	0.870194366
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	3.219777234	1.086153931
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	1.222934773	1.181566235

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	ϕ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	41.89251382	0.108
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	37.06352183	0.132677344
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	23.39307406	0.287484284
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	20.80007779	0.35022352
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	16.59641789	0.511795652
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	15.14683053	0.596747749
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	11.12155621	0.729000341
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	7.666872711	0.838031191
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	5.640762956	0.901975825
1.35	0	25	0.08	0.774596669	0.15	1.767224796	1.024225854
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	39.57330636	0.124
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	32.83875679	0.173523441
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	23.31234735	0.321660987
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	21.19674977	0.381789303
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	16.56377686	0.595339647
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	15.56613671	0.665828279
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	12.26781583	0.807991905
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	7.874728804	0.962693376
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	5.557890359	1.044280268
1.35	0	25	0.24	0.774596669	0.15	1.903586271	1.172965681
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	34.55944363	0.108
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	28.13117261	0.152617478
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	21.78451982	0.234520587
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	16.04836767	0.39190546
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	12.8823762	0.529506316
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	10.57191789	0.628237535
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	7.687923229	0.751477287
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	6.40681472	0.806222012
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	4.961633035	0.867977963
1.35	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	0.772200052	1.047002109
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	33.36010608	0.124
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	28.64866113	0.163129187
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	20.19808241	0.306171098
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	16.82181091	0.425654982
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	14.88602308	0.528722179
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	10.39957676	0.743091708
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	10.34078674	0.745900789
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	7.605996094	0.876573429
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	3.993568446	1.049180958
1.35	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	2.265096427	1.131770096
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	40.21269179	0.108
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	28.04139042	0.201780696
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	25.29010491	0.241346135
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	18.44036105	0.417340269
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	16.64976746	0.498202028
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	15.39504843	0.570693569
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	11.62501543	0.705678049
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	9.101567489	0.786932303
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	5.612882203	0.899266905
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.05	0.819972058	1.05359715
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	38.08310015	0.124
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	29.02843962	0.205632088
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	21.36434667	0.364020503
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	18.43399241	0.479172211
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	17.27875393	0.540575353
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	14.90427102	0.706960301
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	11.91042855	0.814032757
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	9.304193661	0.907242727
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	6.743204555	0.998834517
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.05	2.612679114	1.146559557

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	φ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	33.17366585	0.108
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	26.70109216	0.157348638
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	21.89001185	0.222056632
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	15.07534741	0.423943962
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	14.86187029	0.433650363
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	11.21185457	0.592391241
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	7.676002704	0.74616708
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	7.244764491	0.76492183
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	3.648409448	0.92132898
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.05	0.508614522	1.057880118
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	32.10386945	0.124
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	23.21371953	0.226862223
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	19.05233477	0.327797093
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	16.84178126	0.412467944
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	13.11158081	0.603471435
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	10.29963956	0.739982886
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	7.877524053	0.857569448
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	5.833578518	0.956796974
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	5.05371679	0.99465696
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.05	1.954770845	1.145101643
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	40.21269179	0.108
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	27.00176972	0.215440444
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	26.17103098	0.227435281
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	19.15909463	0.390570055
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	16.08700802	0.528806401
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	14.48636574	0.613543442
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	11.6399757	0.705196333
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	9.087419685	0.787387858
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	5.533033317	0.901838015
2.3	0	25	0.08	1.183215957	0.15	2.029284602	1.014657655
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	38.08310015	0.124
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	26.72727578	0.23983717
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	24.59464634	0.280026259
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	19.90380275	0.415356633
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	16.1310957	0.61442019
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	14.85015299	0.708895791
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	11.83780715	0.816630005
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	7.6048238	0.968019372
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	5.82979776	1.031501803
2.3	0	25	0.24	1.183215957	0.15	0.996766164	1.204351431
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	33.17366585	0.108
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	24.01433678	0.189112756
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	19.03453949	0.282952784
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	17.37288485	0.331509563
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	14.44425328	0.451812721
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	11.58183634	0.576300562
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	9.043240784	0.686705261
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	6.393007117	0.801965153
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	4.031795589	0.904655339
2.3	1.5	25	0.08	1.183215957	0.15	2.260865739	0.9816739
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	32.10386945	0.124
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	28.1157826	0.158762007
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	17.92693113	0.367170892
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	16.28077766	0.439340231
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	13.57716112	0.580868884
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	10.65723168	0.722622844
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	9.304971904	0.788271066
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	5.22419746	0.986380626
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	3.714745591	1.059660061
2.3	1.5	25	0.24	1.183215957	0.15	2.544922932	1.1164515

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	ϕ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	41.89251382	0.108
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	28.17211023	0.210359714
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	26.94058559	0.226767346
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	20.79062908	0.350491003
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	17.24219724	0.479999398
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	14.99508866	0.606750492
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	12.41050221	0.688320818
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	8.278565555	0.818725981
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	4.821570689	0.927829779
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.05	0.455936921	1.065610494
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	39.57330636	0.124
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	27.88041885	0.233029312
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	21.71175974	0.365631381
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	21.14089612	0.383608193
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	17.15823609	0.558702283
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	15.16034522	0.698275373
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	11.34505286	0.840486774
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	7.552546729	0.974038938
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	5.484626099	1.046860251
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.05	1.285486032	1.194731928
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	34.55944363	0.108
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	30.11405975	0.136112958
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	18.67729395	0.303724669
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	16.58908533	0.370680389
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	14.18402134	0.473884013
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	10.36876744	0.636918623
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	9.937271152	0.655357456
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	5.237720505	0.856180108
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	2.864397876	0.957597664
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.05	0.840427845	1.044086577
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	33.36010608	0.124
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	23.05666747	0.241219164
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	18.35552418	0.363745618
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	17.29191259	0.40503747
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	13.59848794	0.590242652
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	11.90516722	0.671152205
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	8.660056082	0.826208769
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	7.705059723	0.871840011
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	4.180095753	1.040268387
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.05	0.424634426	1.219710293
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	41.89251382	0.108
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	35.5594911	0.14224163
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	25.58250895	0.247357957
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	19.08574672	0.404681238
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	17.43373273	0.471171643
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	15.61868244	0.566767845
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	10.43028308	0.750817129
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	9.528591136	0.779274798
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	5.247642568	0.914382822
2.3	0	25	0.08	0.774596669	0.15	0.391035832	1.067658792
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	39.57330636	0.124
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	32.88341841	0.17309914
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	23.06938758	0.327788993
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	18.57725981	0.484192517
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	17.88929621	0.518249757
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	14.4047678	0.732739671
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	12.0033163	0.81730619
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	9.390466502	0.909317049
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	3.848160372	1.104487986
2.3	0	25	0.24	0.774596669	0.15	3.376662321	1.121091673

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	ϕ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	34.55944363	0.108
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	31.01255703	0.129552369
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	18.59857096	0.305887912
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	16.03305545	0.392534564
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	12.99356723	0.524754867
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	10.24520927	0.642198549
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	9.983329191	0.65338929
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	6.89420224	0.785394818
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	3.678795301	0.922796582
2.3	1.5	25	0.08	0.774596669	0.15	0.331803349	1.065821277
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	33.36010608	0.124
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	28.21958794	0.167624319
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	20.89693893	0.287974396
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	15.60457179	0.487325285
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	14.56793644	0.543920863
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	10.86796035	0.720711596
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	9.321881906	0.79458568
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	6.64082673	0.922690753
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	4.780919746	1.011560063
2.3	1.5	25	0.24	0.774596669	0.15	1.595412731	1.163768646
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	31.18829956	0.108
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	21.26565513	0.209789317
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	20.89839318	0.216222737
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	15.48261655	0.363718885
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	13.95510475	0.432713762
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	9.377291876	0.645048626
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	8.376886747	0.691450891
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	5.81322492	0.810362433
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	3.155482274	0.93363777
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.05	1.358120062	1.017005673
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	31.23676589	0.107058824
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	23.48397255	0.175211503
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	19.63457514	0.238682656
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	14.31944682	0.411291707
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	13.03464805	0.470446462
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	11.00871506	0.563724547
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	7.617200208	0.719876806
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	6.134335115	0.788150939
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	3.619815982	0.903924527
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	1.841041381	0.985822936
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	24.14927362	0.108
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	23.69268429	0.111634114
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	15.61703399	0.229958136
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	12.54238263	0.383150215
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	11.51347513	0.440315906
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	8.727681945	0.595093466
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	6.676318773	0.709066387
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	5.067757535	0.798437409
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	3.49367666	0.885892716
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	1.393438307	1.002581122
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	24.12482366	0.107058824
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	20.93804878	0.136731469
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	15.52980038	0.229063018
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	13.16439961	0.344461162
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	11.43849647	0.439659198
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	8.993388521	0.574527414
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	6.955981947	0.686907478
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	4.015723517	0.849087396
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	2.510485959	0.932113874
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	0.86845575	1.022685615

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	ϕ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	31.18829956	0.108
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	21.44803887	0.206705901
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	17.1902711	0.303377312
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	14.89362204	0.389182069
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	11.68484323	0.538016378
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	10.60623532	0.588045959
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	9.055213718	0.65998773
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	6.978411935	0.756317011
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	4.554741912	0.868735247
1.35	0	85	0.08	1.183215957	0.15	0.757721074	1.044854264
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	31.23676589	0.107058824
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	31.173576	0.107433834
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	17.05493453	0.304404659
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	15.8892577	0.343988595
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	12.04899706	0.515827843
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	10.07945123	0.606509749
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	9.007580067	0.655860883
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	6.249808156	0.782834324
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	4.578027346	0.859806522
1.35	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	0.781742044	1.034595238
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	24.14927362	0.108
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	19.28154478	0.159561318
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	14.7688069	0.259450969
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	13.03815202	0.355605464
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	10.16102034	0.515457755
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	8.035397795	0.633556498
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	7.529672872	0.661654373
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	4.911194193	0.807136006
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	2.16836162	0.959526692
1.35	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	0.484718383	1.05306924
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	24.12482366	0.107058824
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	17.45432348	0.187215771
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	14.27202663	0.28336624
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	13.46546607	0.327854821
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	10.26029483	0.504646903
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	8.41359185	0.606508064
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	6.285033674	0.723915904
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	4.85814653	0.8026207
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	3.607853581	0.871584844
1.35	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	0.988522126	1.016062947
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	32.49114178	0.108
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	24.82971212	0.169694507
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	18.67609862	0.273837308
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	16.25892559	0.345648916
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	13.86665631	0.447470117
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	10.49622375	0.601212971
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	7.778261738	0.725193269
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	5.865008124	0.812466658
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	2.76627539	0.953815878
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.05	2.073702919	0.985407689
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	32.54687056	0.107058824
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	29.95429977	0.123014894
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	17.32847669	0.307455691
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	15.19687867	0.382992857
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	13.31467905	0.467748387
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	11.05916262	0.569869901
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	7.101864161	0.749041866
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	5.189477918	0.835627703
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	2.597814531	0.952968718
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	1.926879145	0.983346213

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	φ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	25.15807158	0.108
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	19.79782292	0.161537107
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	14.57369913	0.280882033
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	13.31357201	0.349978439
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	9.992707129	0.53207104
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	8.780483309	0.59854077
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	6.904271556	0.701418873
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	4.042852511	0.858318734
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	2.200520104	0.959339134
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	1.258574063	1.010988753
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	25.13664556	0.107058824
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	24.50066671	0.111750437
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	15.0646362	0.252206672
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	12.49154057	0.390582048
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	11.30719354	0.455054744
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	8.755112392	0.593983243
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	6.353797711	0.724704416
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	5.142655355	0.790635779
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	2.326405255	0.943944931
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	0.782734836	1.027978236
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	32.49114178	0.108
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	25.48210832	0.162458259
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	20.02207522	0.243618348
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	16.39914187	0.340697549
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	12.7925512	0.496465604
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	10.67621181	0.593002785
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	9.233043871	0.658833135
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	6.814849152	0.769139498
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	3.726385581	0.910020289
1.35	0	85	0.08	0.774596669	0.15	1.230532019	1.023869073
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	32.54687056	0.107058824
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	21.66891732	0.21149972
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	17.04691248	0.316002112
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	14.79435819	0.400753941
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	13.67908428	0.451249454
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	10.15892293	0.610629453
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	7.60335685	0.726336115
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	5.409372142	0.825671698
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	3.465721673	0.913673065
1.35	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	0.474140366	1.049120898
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	25.15807158	0.108
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	21.48792112	0.140764604
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	13.93749475	0.315766955
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	13.76277646	0.325347263
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	10.30318969	0.515046386
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	9.228049816	0.573999407
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	6.535758421	0.721625511
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	4.927449709	0.809813717
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	2.480798362	0.943970669
1.35	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	1.075216298	1.021042789
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	25.13664556	0.107058824
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	18.37273738	0.180909917
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	16.47457532	0.217133027
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	12.96248234	0.364945232
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	11.7801834	0.429306436
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	9.626053744	0.546571516
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	7.842023381	0.643689376
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	5.720397722	0.759185024
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	3.265218549	0.892838437
1.35	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	0.907032315	1.021211813

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	ϕ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	31.18829956	0.108
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	24.1973593	0.167700282
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	19.32118056	0.247736058
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	14.64085904	0.400906095
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	12.34505495	0.507393464
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	10.20043202	0.606868526
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	8.372099241	0.691672952
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	6.733785037	0.767663657
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	3.503637877	0.917489104
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.05	0.680381536	1.048441541
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	31.23676589	0.107058824
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	23.49415408	0.175080407
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	16.63134266	0.317916167
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	14.48770354	0.403544824
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	12.15215398	0.511078288
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	10.41194431	0.591201089
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	8.861185894	0.662601169
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	6.616947809	0.765930466
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	3.114691002	0.927181511
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.05	0.501595793	1.047493742
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	24.14927362	0.108
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	20.17993863	0.147446935
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	13.95579907	0.30462136
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	12.67485574	0.375790061
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	10.1463215	0.516274417
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	9.307382491	0.562885534
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	5.929849674	0.750539913
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	5.715500244	0.762449082
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	3.400637751	0.89106192
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.05	0.739125703	1.03893447
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	24.12482366	0.107058824
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	19.34593474	0.156739247
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	14.2159611	0.286458724
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	13.53301163	0.324129117
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	10.60684825	0.485531575
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	8.391710949	0.607714979
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	7.150657364	0.676169496
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	5.120597023	0.788144353
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	2.78613237	0.916909662
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.05	1.546084352	0.985308713
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	31.18829956	0.108
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	22.17334339	0.195123702
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	19.66822701	0.240206063
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	15.47933274	0.363852678
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	13.8488048	0.437644323
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	10.23503929	0.605263321
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	9.281789765	0.649478346
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	6.891091024	0.760367259
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	2.428387582	0.967362948
2.3	0	85	0.08	1.183215957	0.15	2.278220524	0.974328218
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	31.23676589	0.107058824
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	24.41019434	0.163890227
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	20.54165114	0.220775979
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	14.03467481	0.42440319
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	12.29222378	0.504629188
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	9.897658749	0.614879845
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	8.929425709	0.659459269
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	5.807660811	0.80319169
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	4.045085765	0.884344239
2.3	0	85	0.070588235	1.183215957	0.15	0.774654843	1.034921547

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

h/b	φ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	24.14927362	0.108
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	19.92088849	0.150787225
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	13.6257119	0.322960871
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	12.12418767	0.40638496
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	10.31962472	0.506645759
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	8.726623421	0.595152277
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	6.201849631	0.735427704
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	4.246737553	0.844052952
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	3.001218165	0.913253514
2.3	1.5	85	0.08	1.183215957	0.15	0.587352601	1.047366923
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	24.12482366	0.107058824
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	19.90427099	0.14922464
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	14.44028429	0.274085418
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	12.7361422	0.368083151
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	10.44413068	0.494506814
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	8.052161793	0.626443964
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	6.301063503	0.723031724
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	5.448880875	0.770036745
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	2.723014458	0.920391145
2.3	1.5	85	0.070588235	1.183215957	0.15	0.488606199	1.043637505
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	32.49114178	0.108
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	24.50988644	0.173431643
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	17.34561382	0.310043988
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	14.51018552	0.418115423
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	12.98671467	0.487608804
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	11.01299652	0.577640293
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	8.132931676	0.70901494
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	5.380262135	0.834578429
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	2.4162478	0.969782446
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.05	0.268940612	1.067732228
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	32.54687056	0.107058824
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	27.6430437	0.140709511
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	18.32060968	0.280100851
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	14.45602105	0.416072606
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	11.93580361	0.530178811
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	10.44652652	0.597607817
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	7.340472835	0.73823854
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	6.200964739	0.789831288
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	3.394586919	0.916893786
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.05	1.833656424	0.987566996
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	25.15807158	0.108
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	20.94168146	0.146988599
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	15.00713259	0.257301116
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	13.3275847	0.349210083
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	10.86845905	0.484051036
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	8.393635336	0.61975276
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	7.831896735	0.650554508
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	5.517611323	0.777453454
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	2.659242292	0.934186074
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.05	0.43690437	1.056043273
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	25.13664556	0.107058824
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	17.95221657	0.188058192
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	15.72241136	0.234797116
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	12.14578903	0.40940384
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	11.20106064	0.460832337
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	8.908883939	0.585612329
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	6.588502441	0.711927716
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	4.26767222	0.83826753
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	2.374276468	0.94133895
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.05	0.834597191	1.025154988

Ensayos realizados durante la verificación de la expresión propuesta

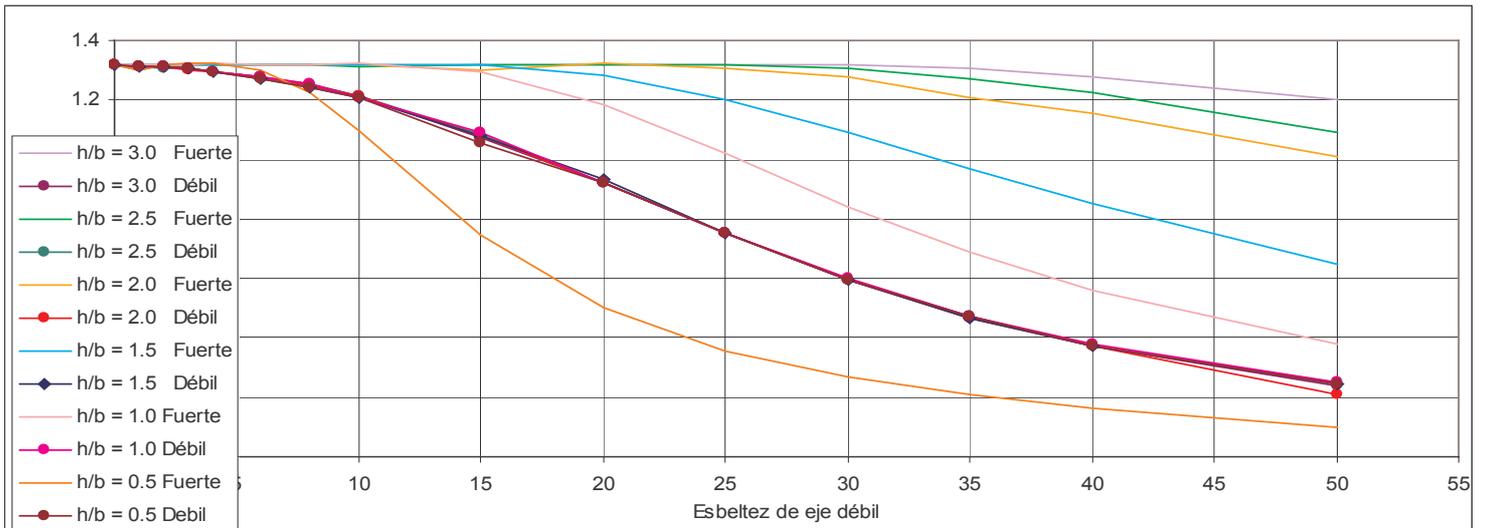
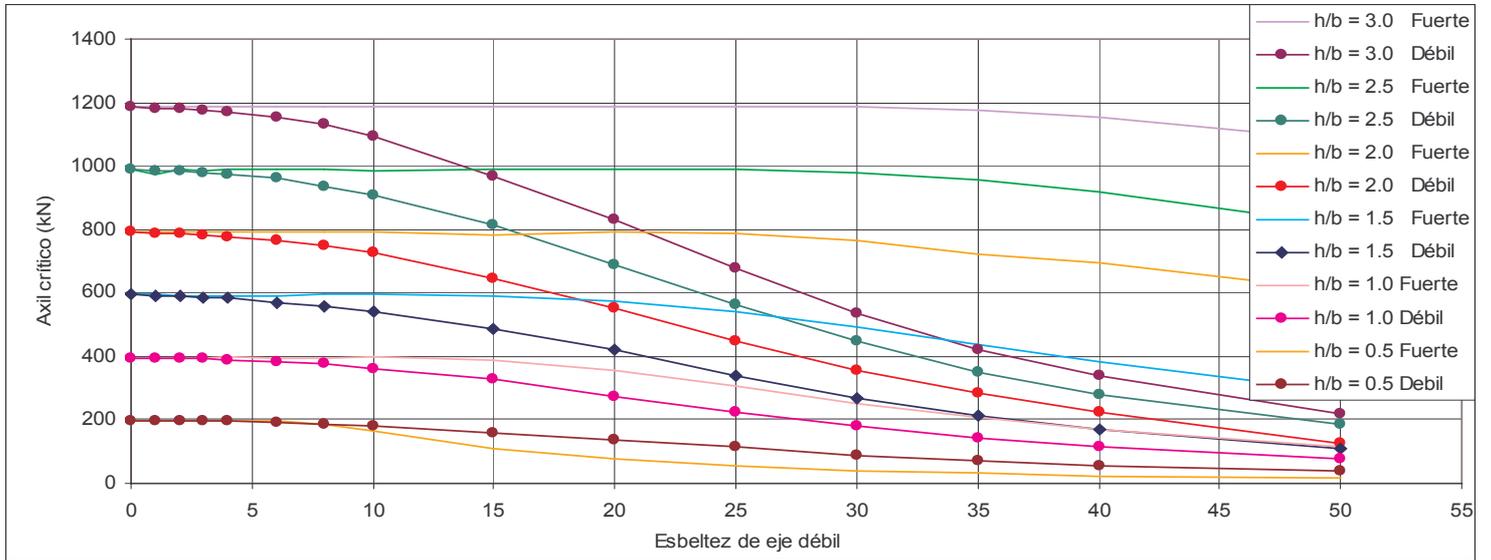
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ	Recubrimiento	λ	ν
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	32.49114178	0.108
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	25.12766093	0.166327231
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	19.75086683	0.249265458
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	16.21364445	0.347272455
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	13.75249656	0.452677533
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	11.82824559	0.540452568
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	7.23337522	0.750048361
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	6.56305147	0.780625292
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	2.413928884	0.969888224
2.3	0	85	0.08	0.774596669	0.15	2.326929884	0.973856698
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	32.54687056	0.107058824
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	22.26280038	0.20214212
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	19.94976392	0.242880671
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	15.82053411	0.358061344
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	12.63214847	0.498650869
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	10.63331699	0.58915063
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	7.458070118	0.732914166
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	5.55435219	0.819107533
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	4.603670279	0.862150925
2.3	0	85	0.070588235	0.774596669	0.15	1.218560101	1.015416302
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	25.15807158	0.108
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	19.96623992	0.159254182
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	15.75318635	0.237157717
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	12.77803359	0.379343555
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	11.06305327	0.473380874
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	8.523350412	0.612640108
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	6.689672627	0.713185951
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	4.149358361	0.852478711
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	3.20062997	0.904500225
2.3	1.5	85	0.08	0.774596669	0.15	1.574481374	0.993666644
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	25.13664556	0.107058824
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	24.01245616	0.115579057
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	15.1387888	0.250142532
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	12.54903141	0.387452399
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	10.06030825	0.522931857
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	8.609730123	0.601897466
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	6.728021781	0.704332655
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	4.385922968	0.831830274
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	2.444520964	0.937515027
2.3	1.5	85	0.070588235	0.774596669	0.15	1.302193007	0.999700317

Anejo B

En este segundo anejo se muestran las gráficas correspondientes a los ensayos mencionados en el anejo anterior. En primer lugar se encuentra la gráfica correspondiente a los axiles críticos, a continuación todos los diagramas de interacción y finalmente, la gráfica que relaciona la esbeltez de esviaje con el axil reducido.

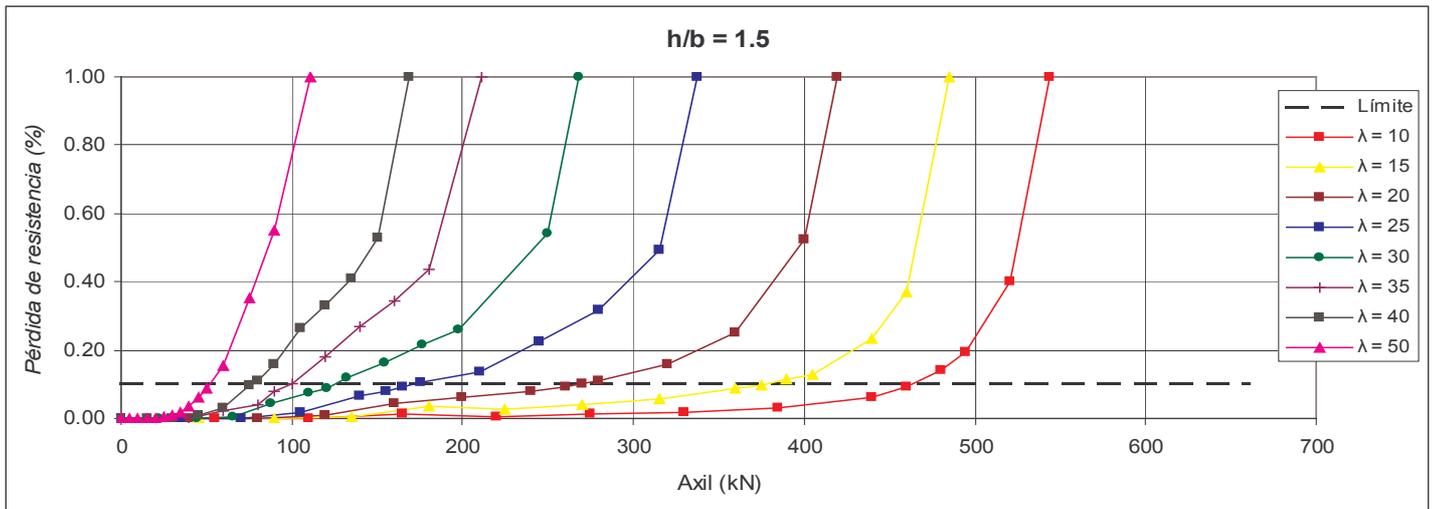
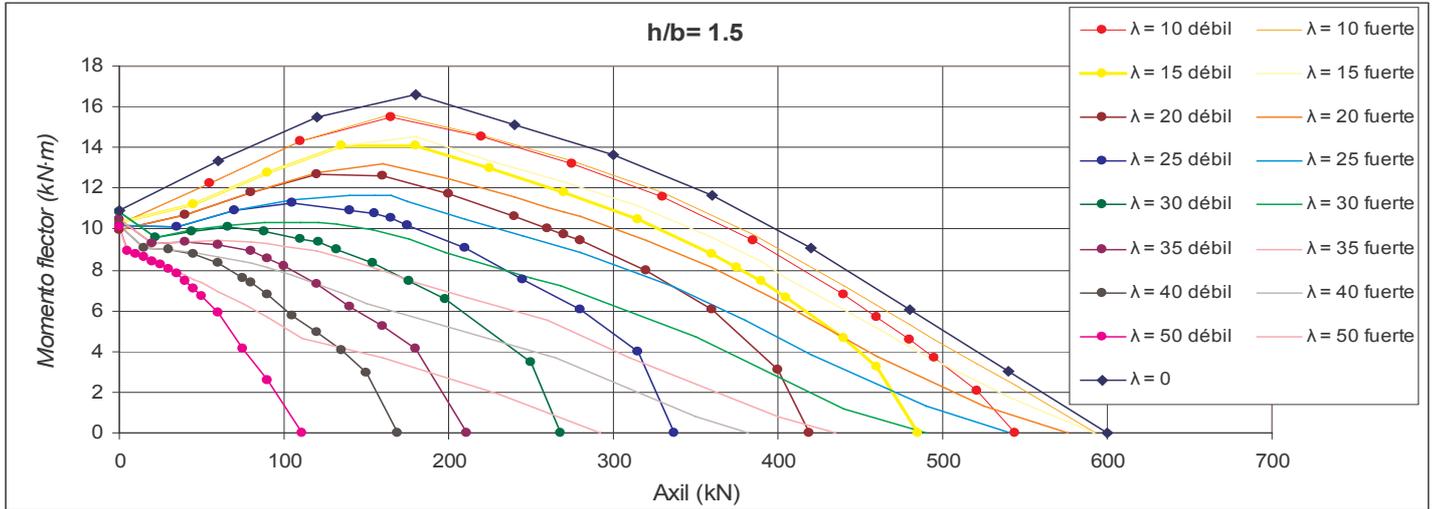
h/b	φ	f_c	ω	ψ
variable	0	30	0.3333	1

Axiles críticos



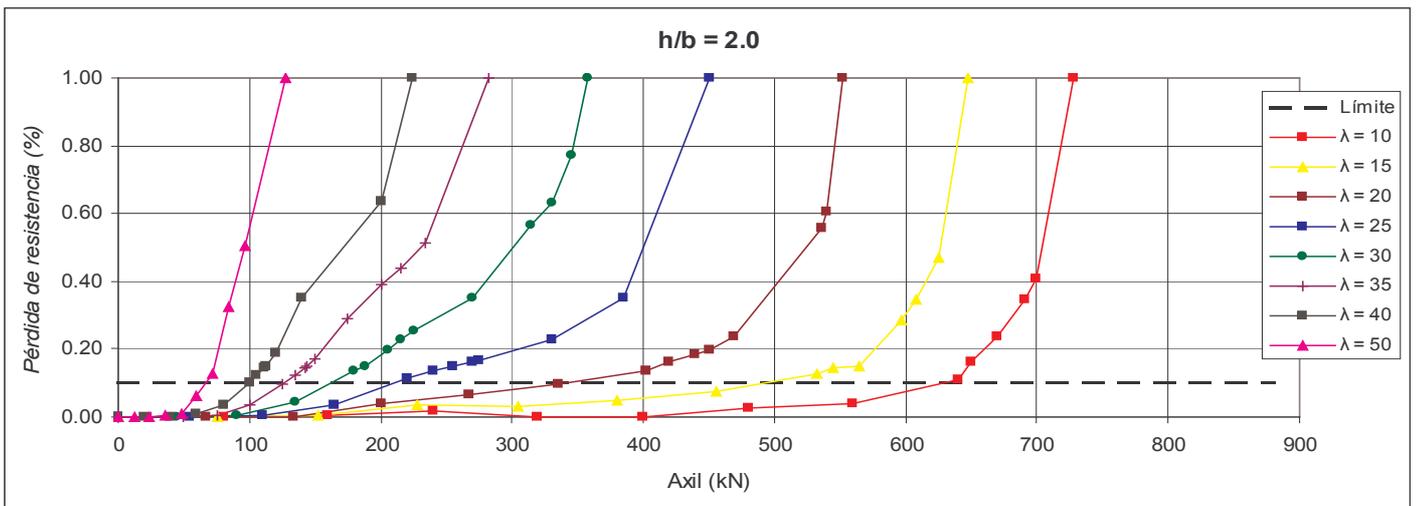
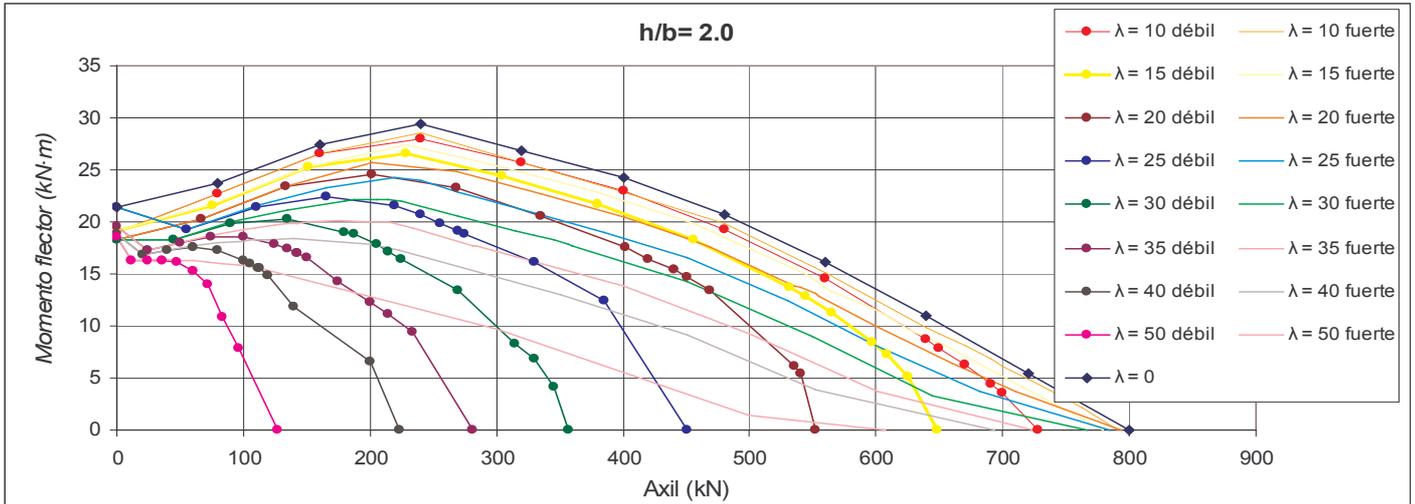
h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



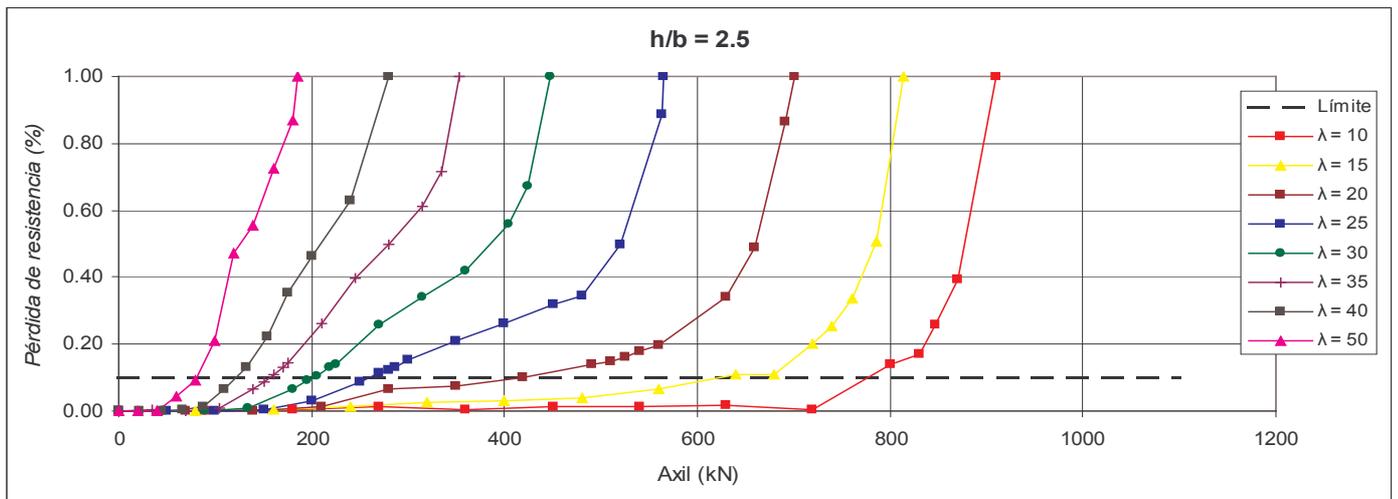
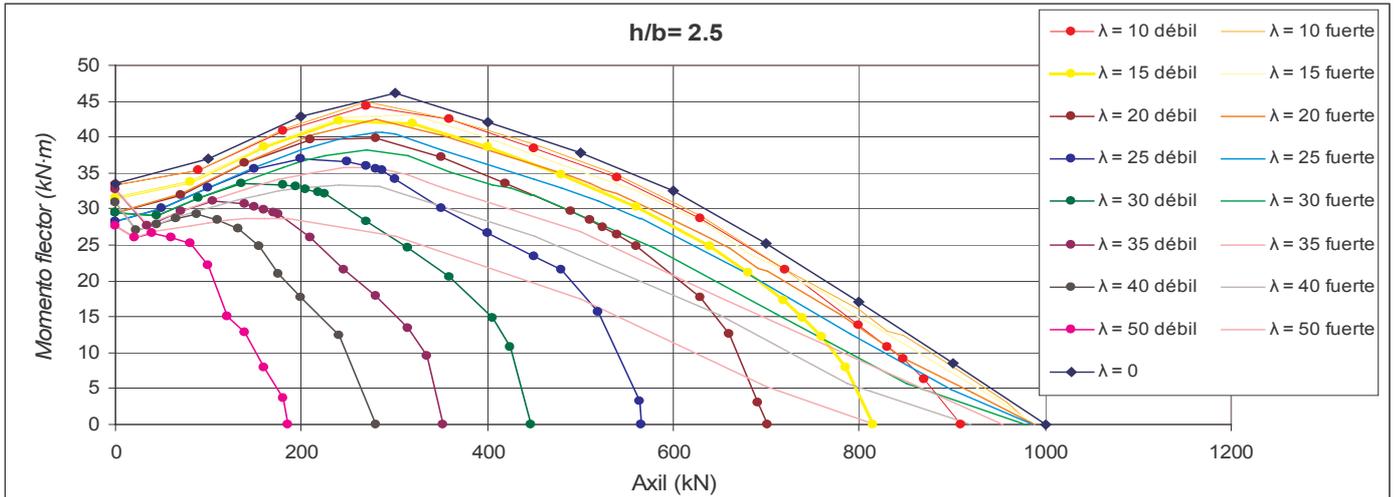
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
2	0	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



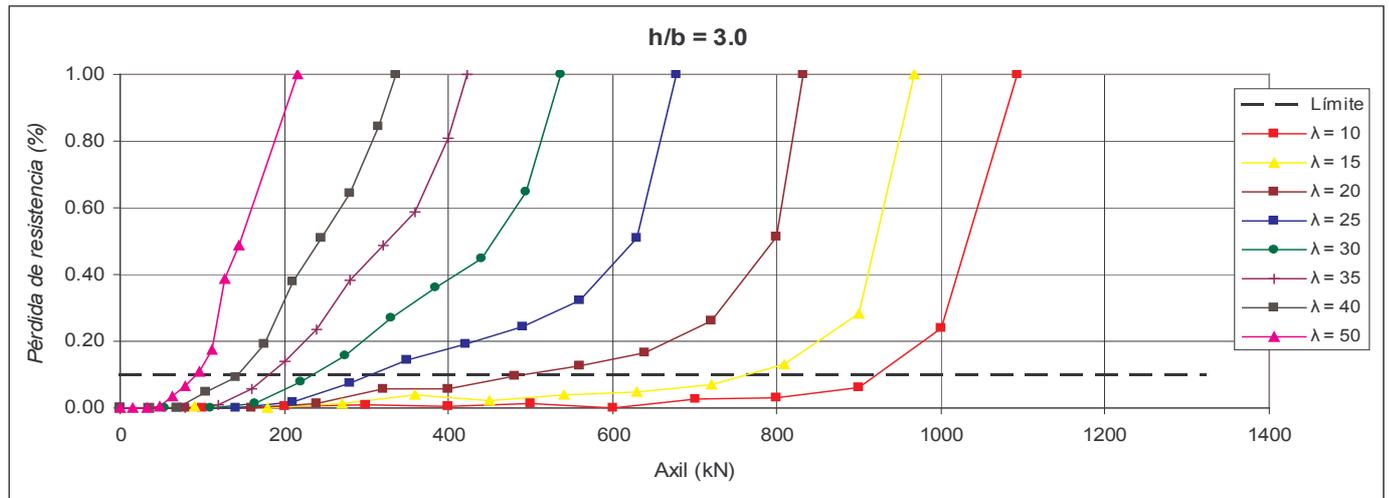
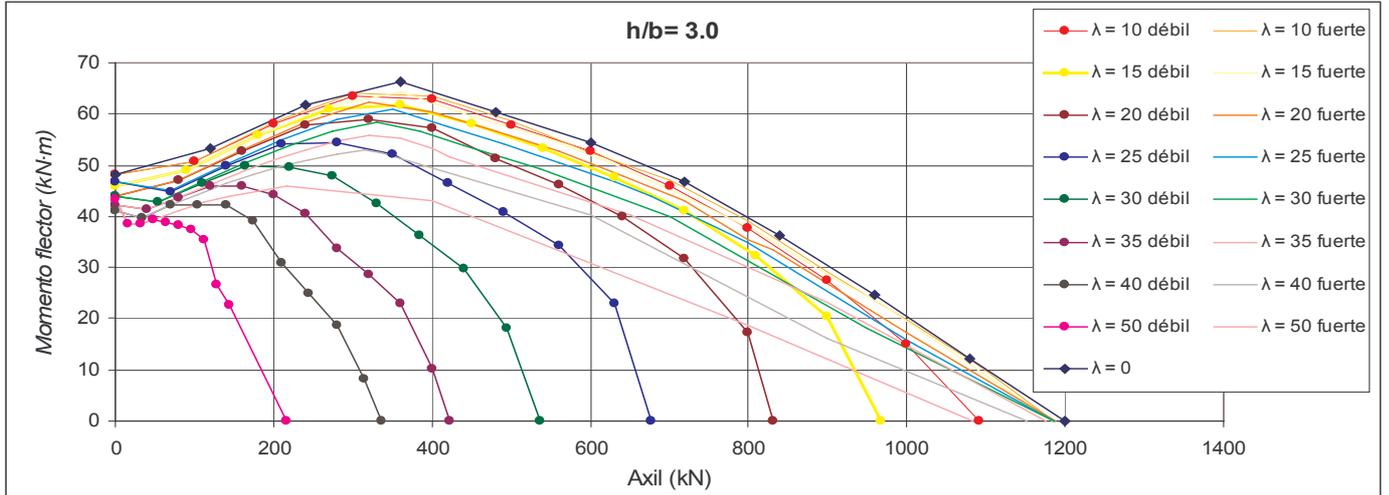
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
2.5	0	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



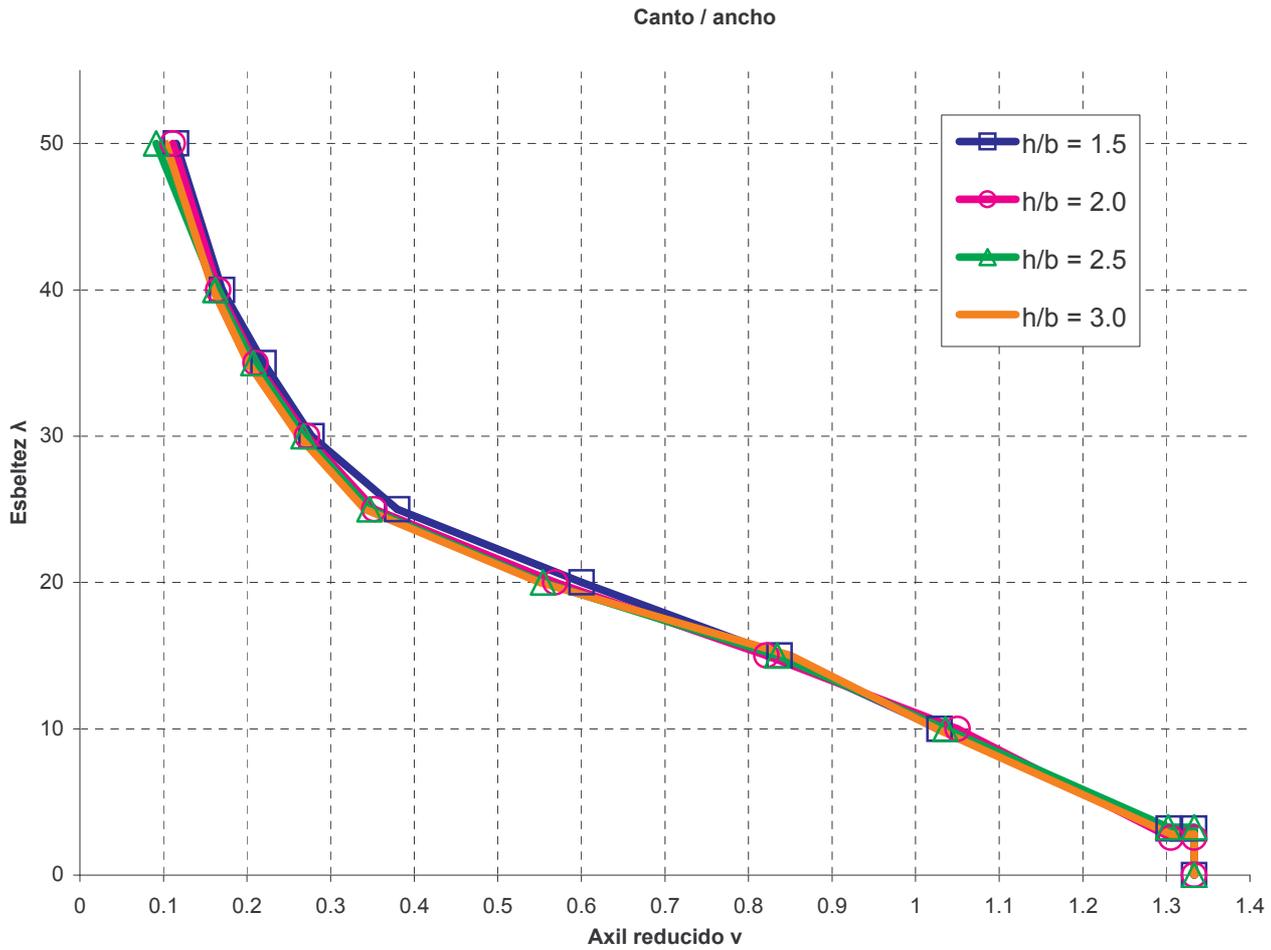
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



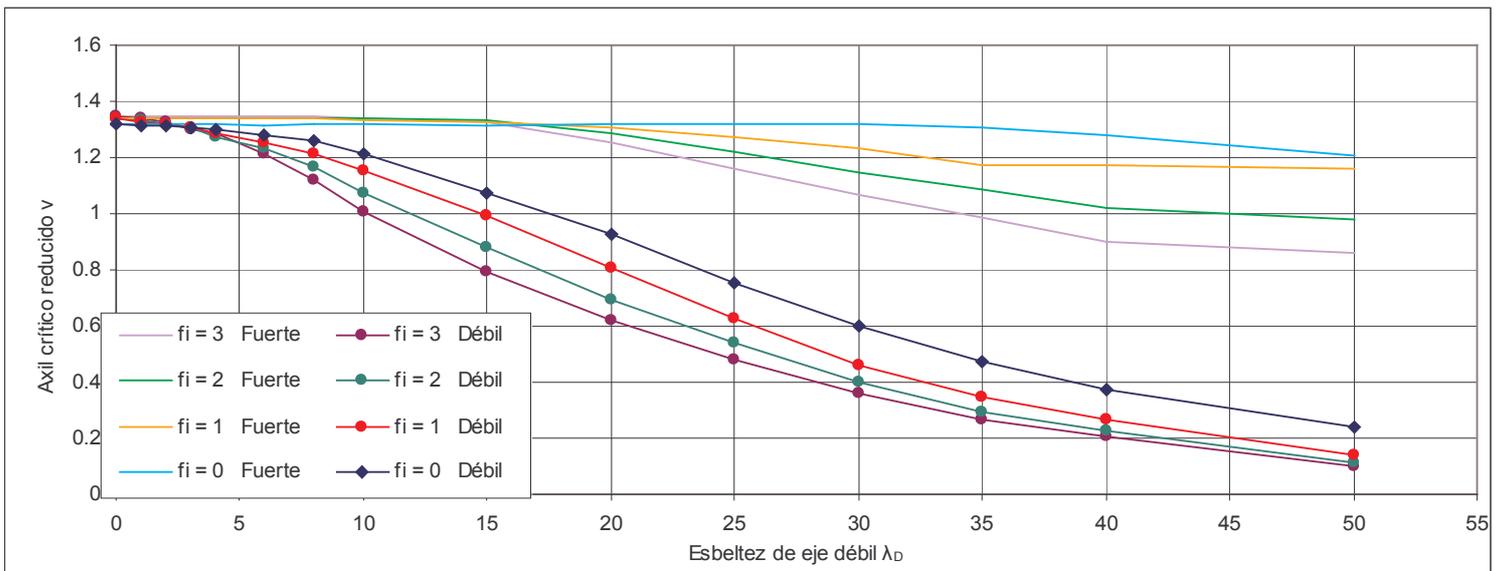
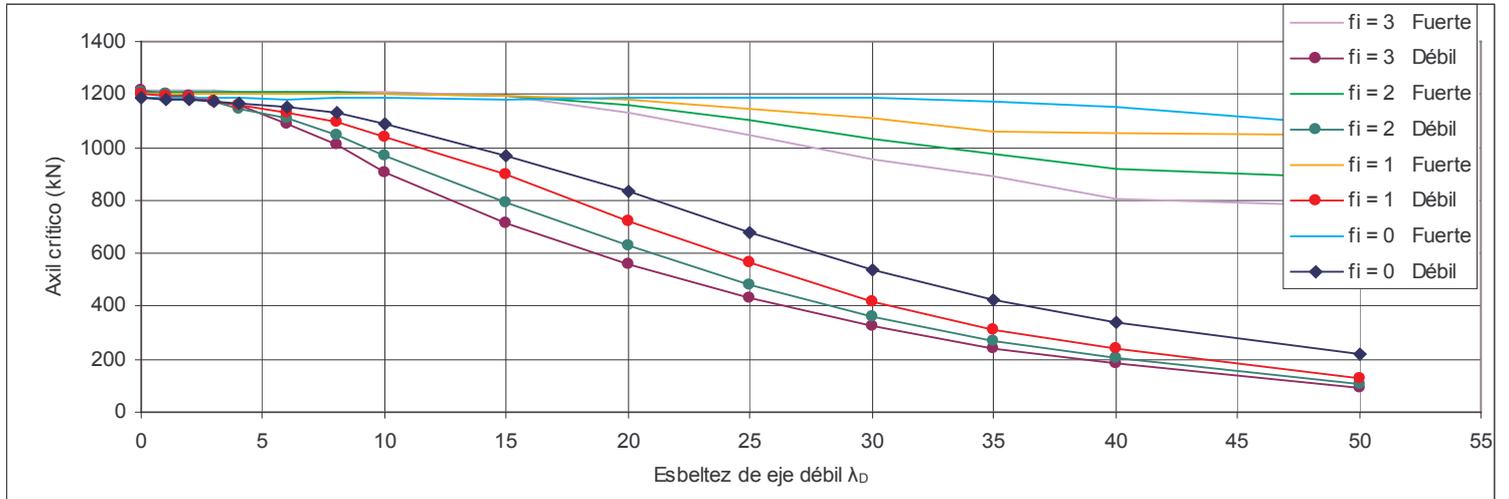
h/b	φ	f_c	ω	ψ
variable	0	30	0.3333	1

Variación de la esbeltez en función del axil reducido para la variable considerada



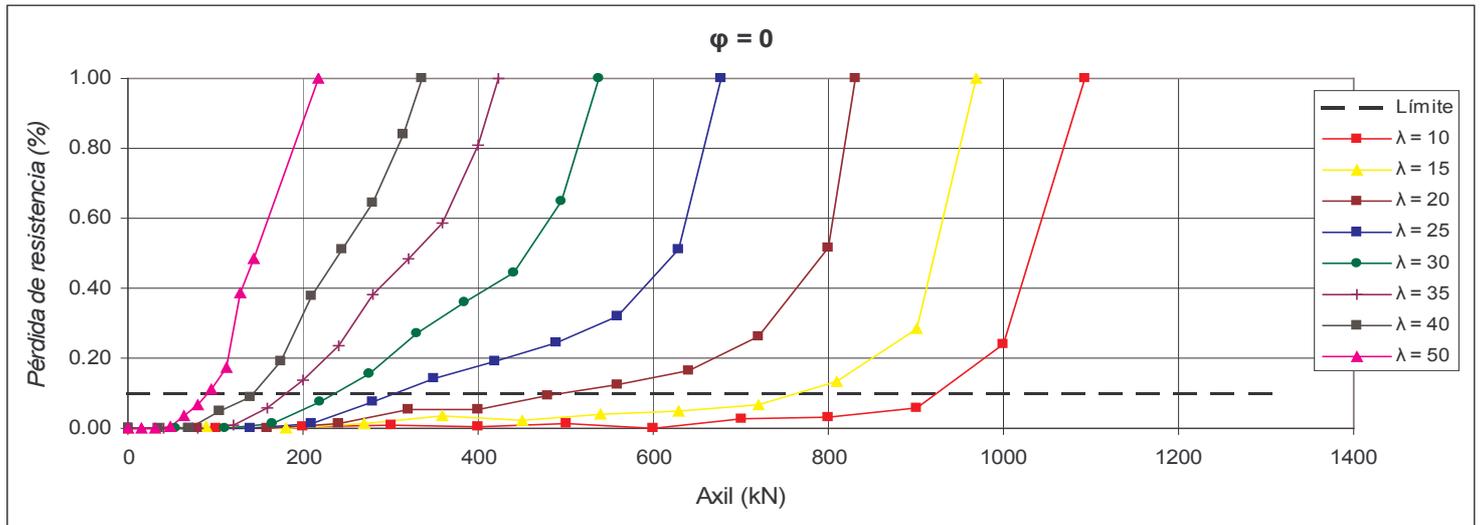
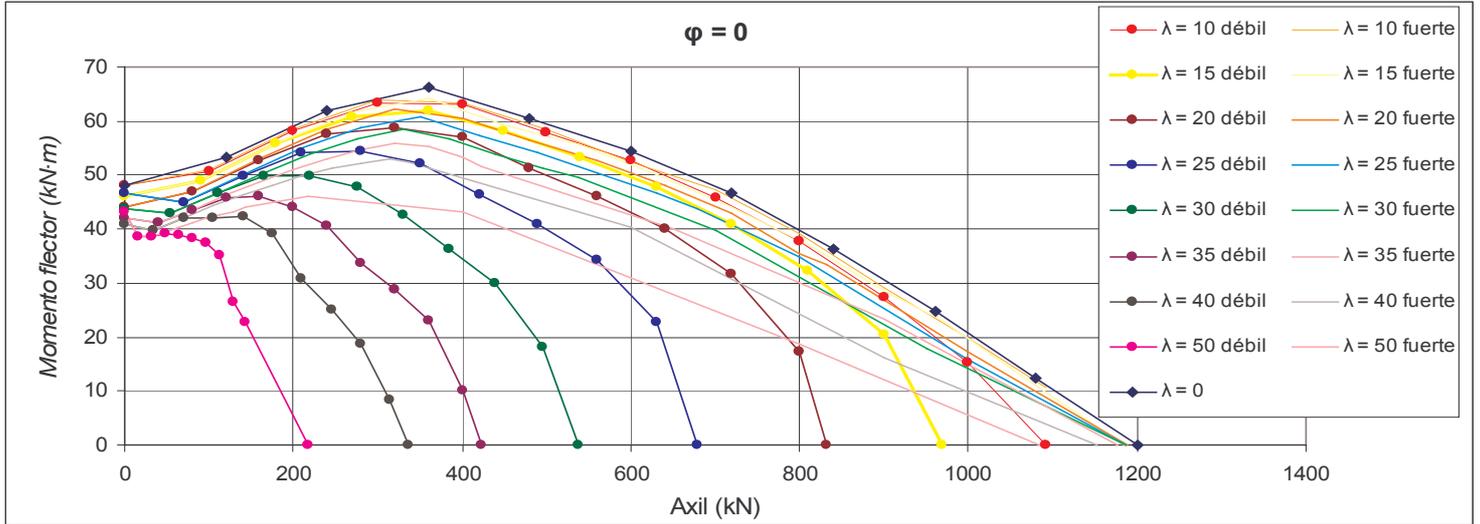
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	variable	30	0.3333	1

Axiles críticos



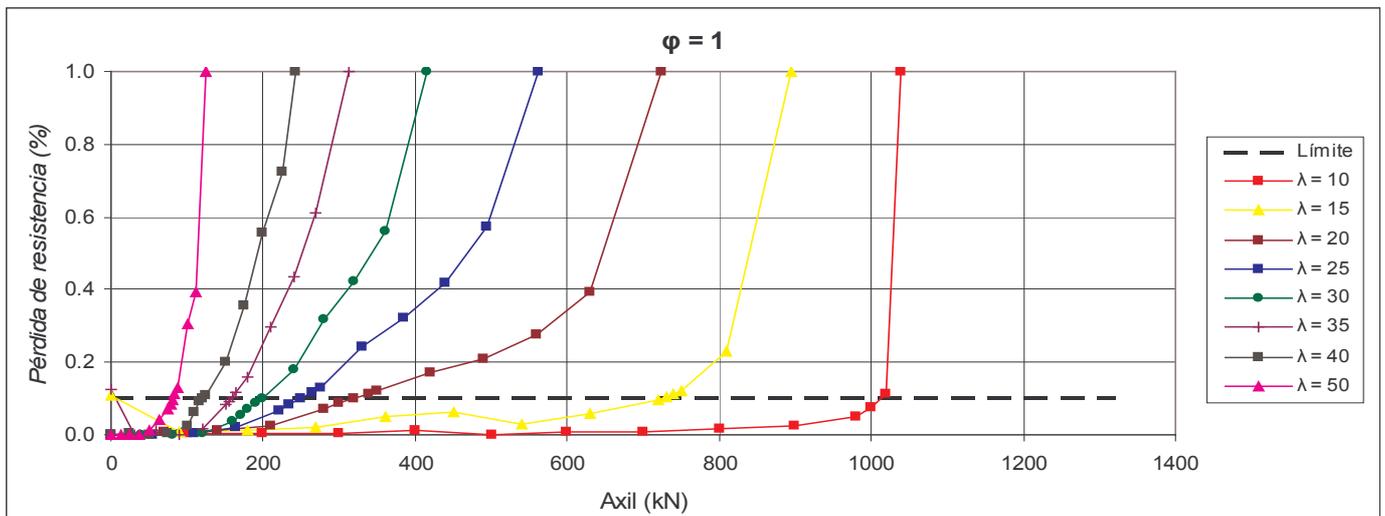
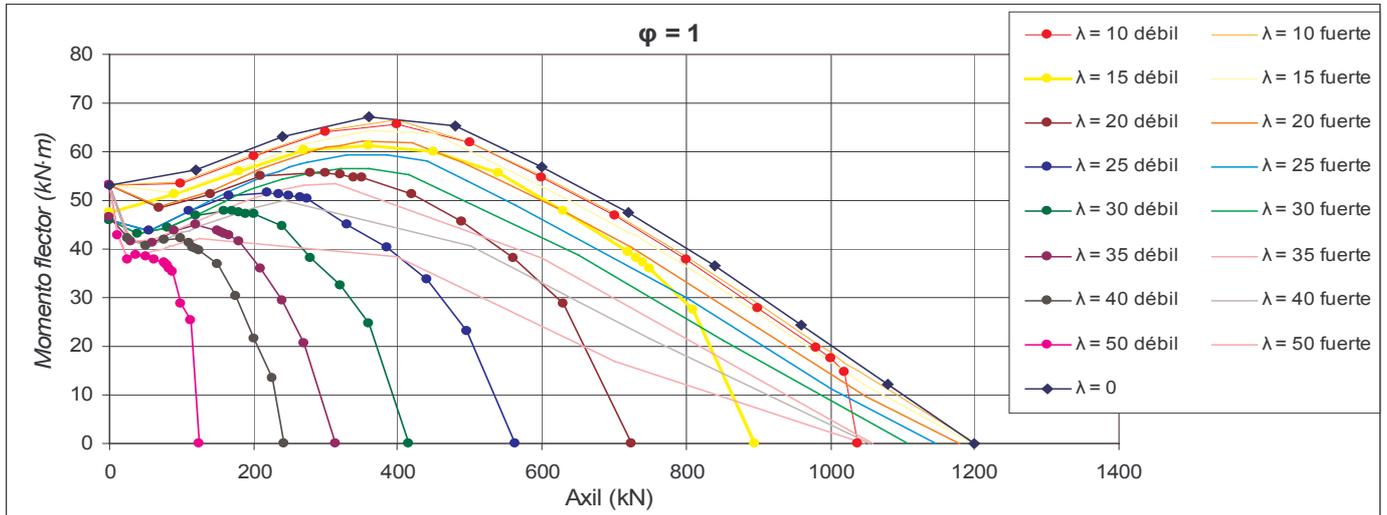
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



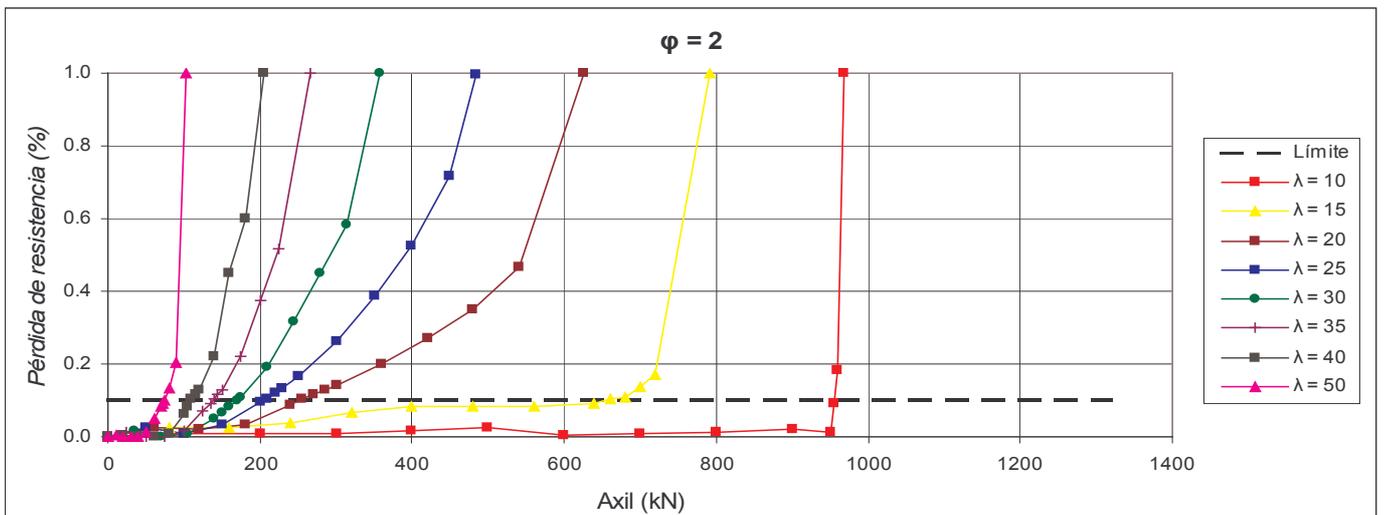
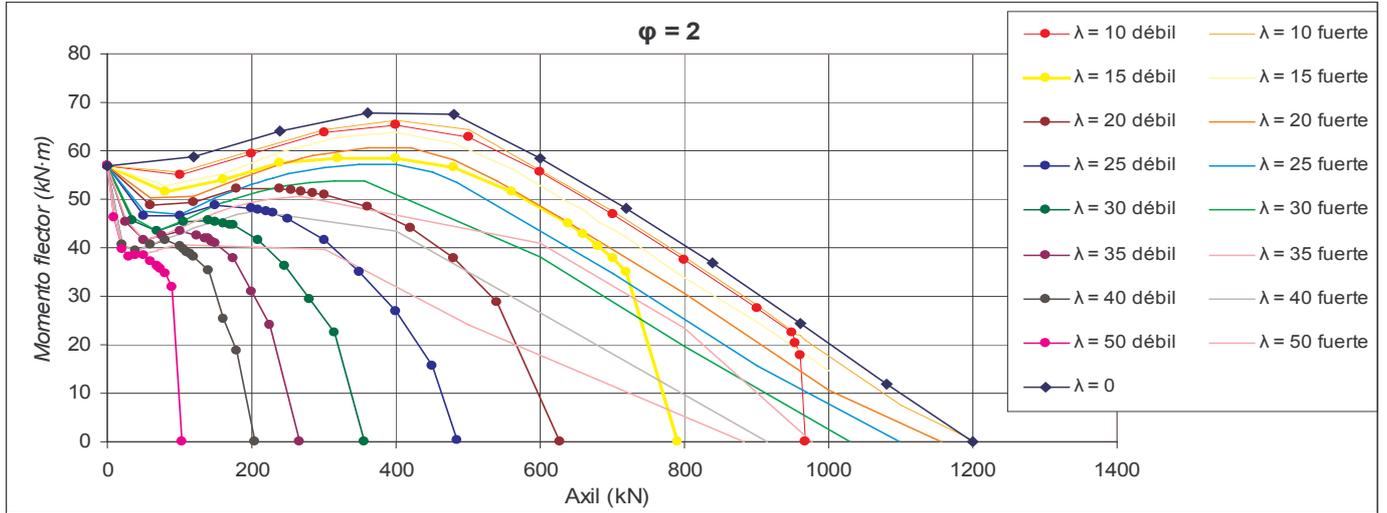
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	1	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



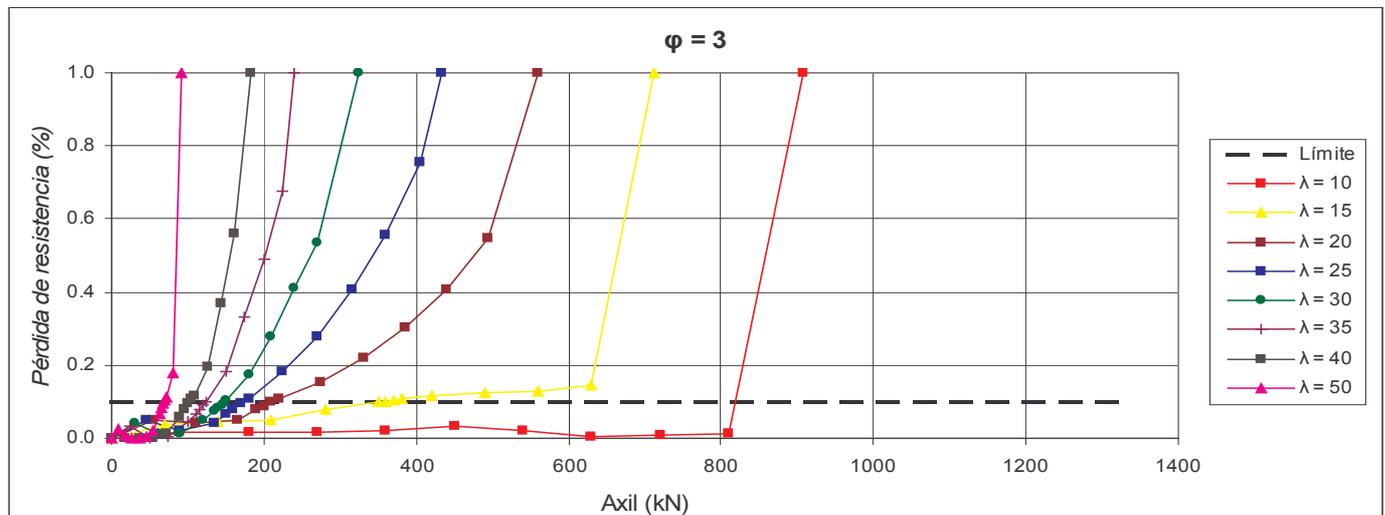
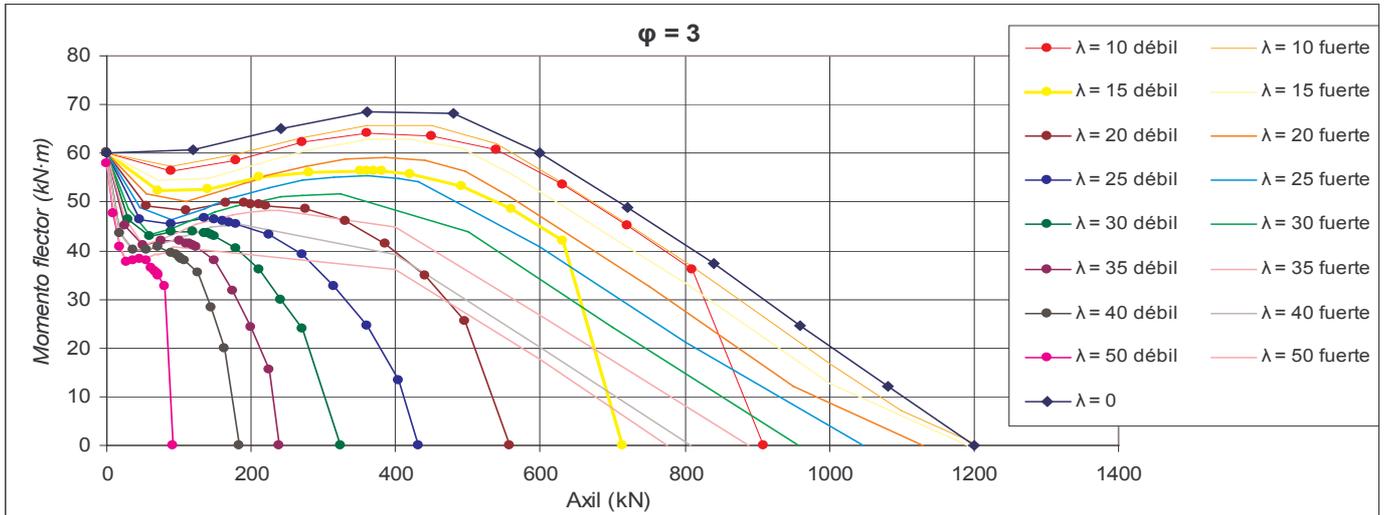
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	2	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



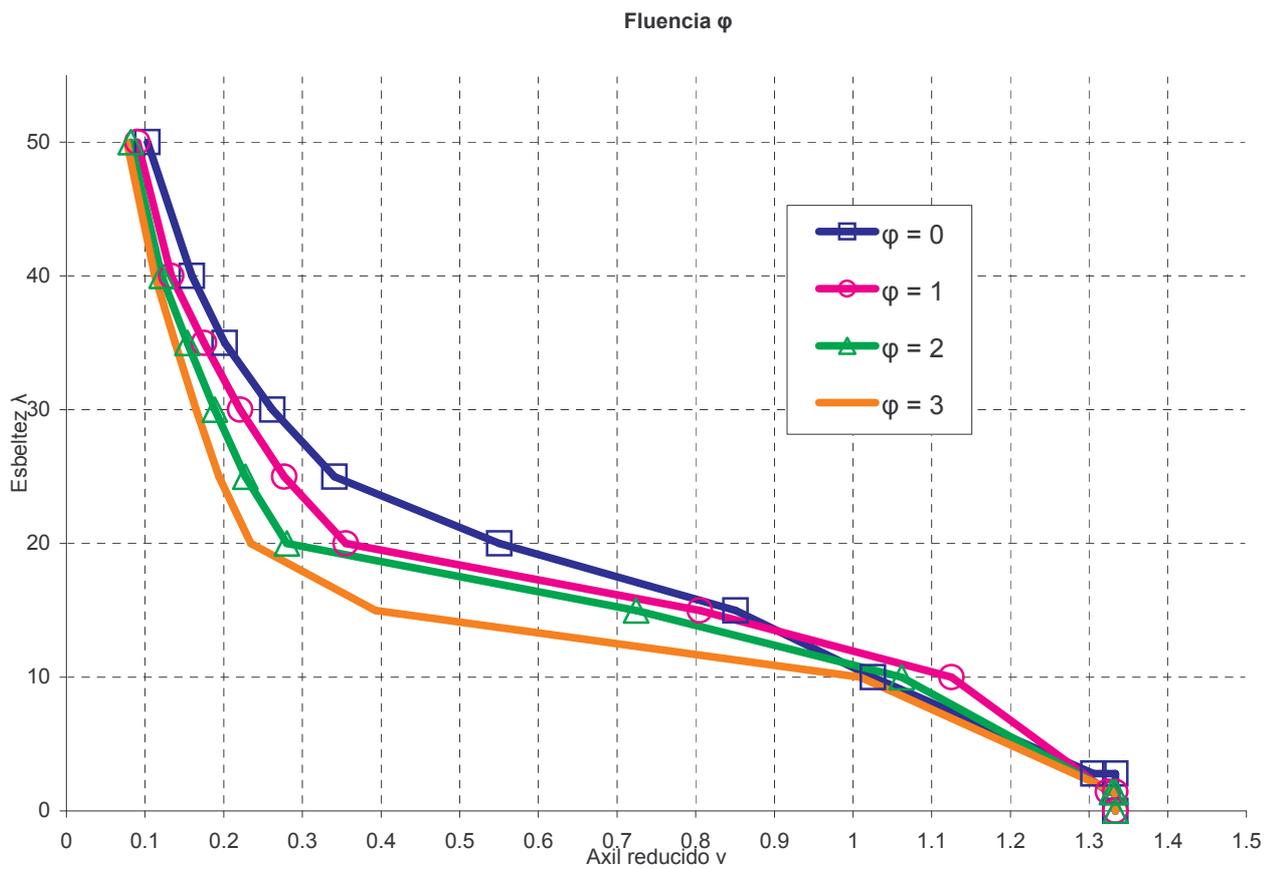
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	3	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



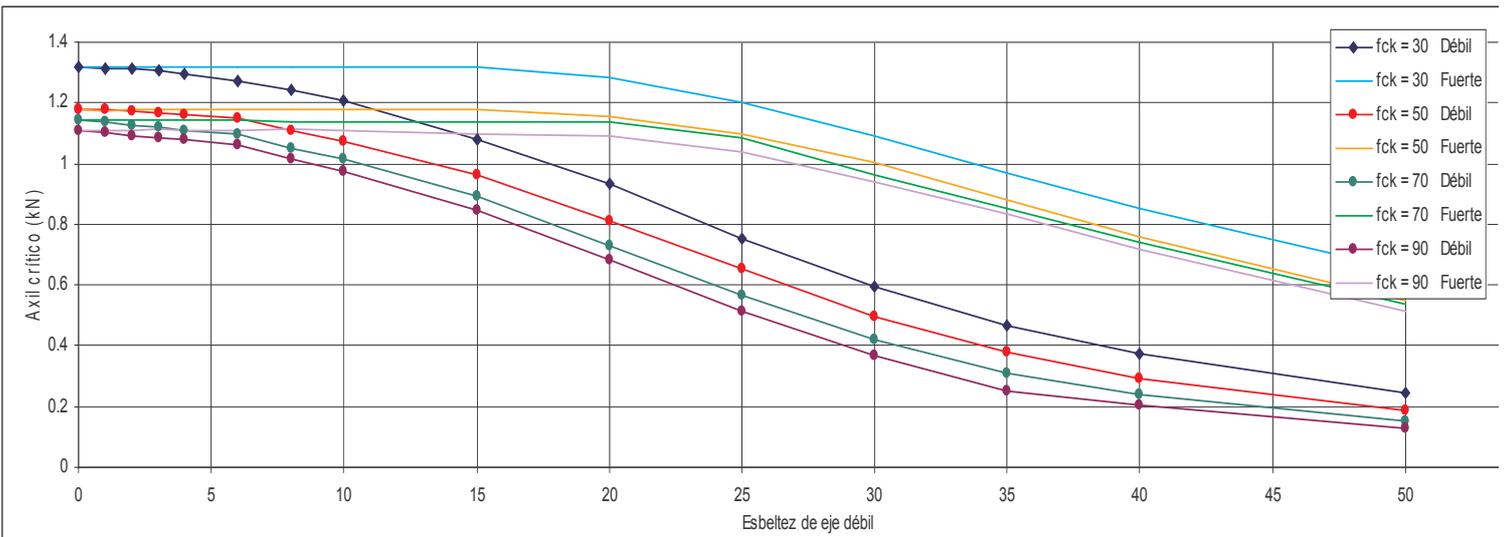
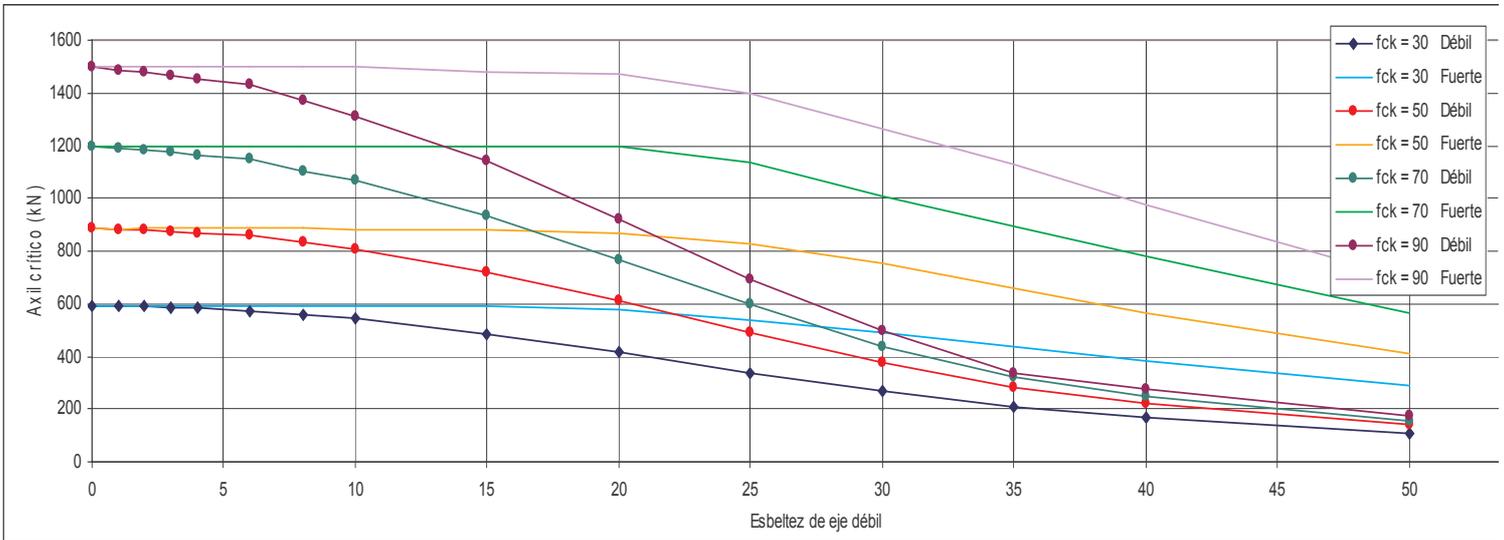
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	variable	30	0.3333	1

Variación de la esbeltez en función del axil reducido para la variable considerada



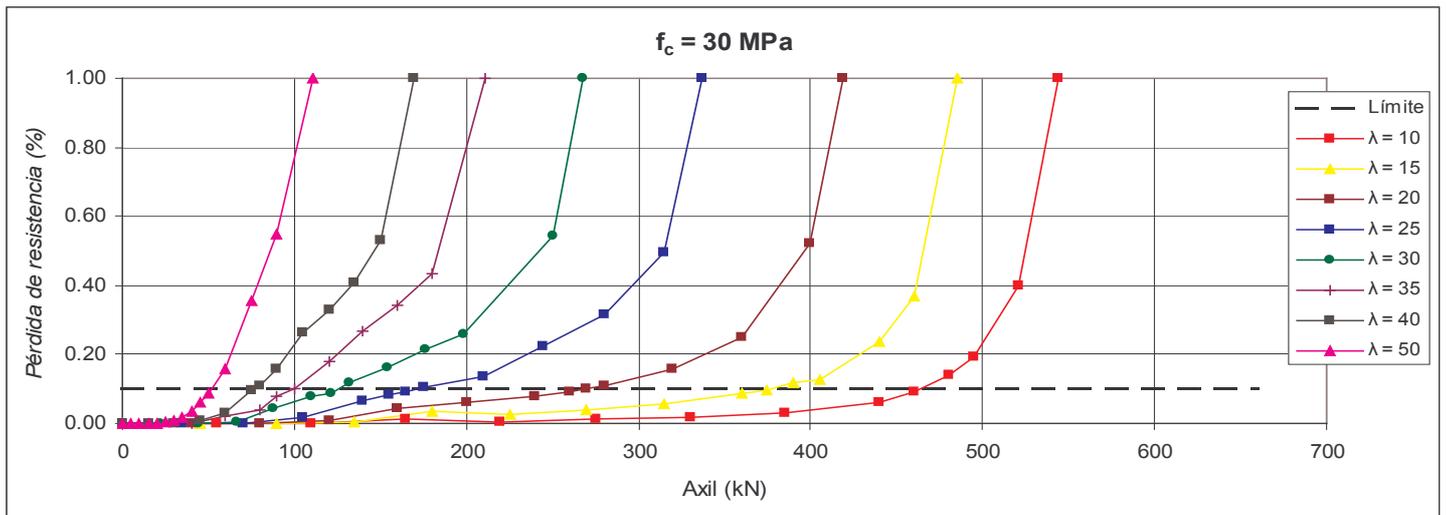
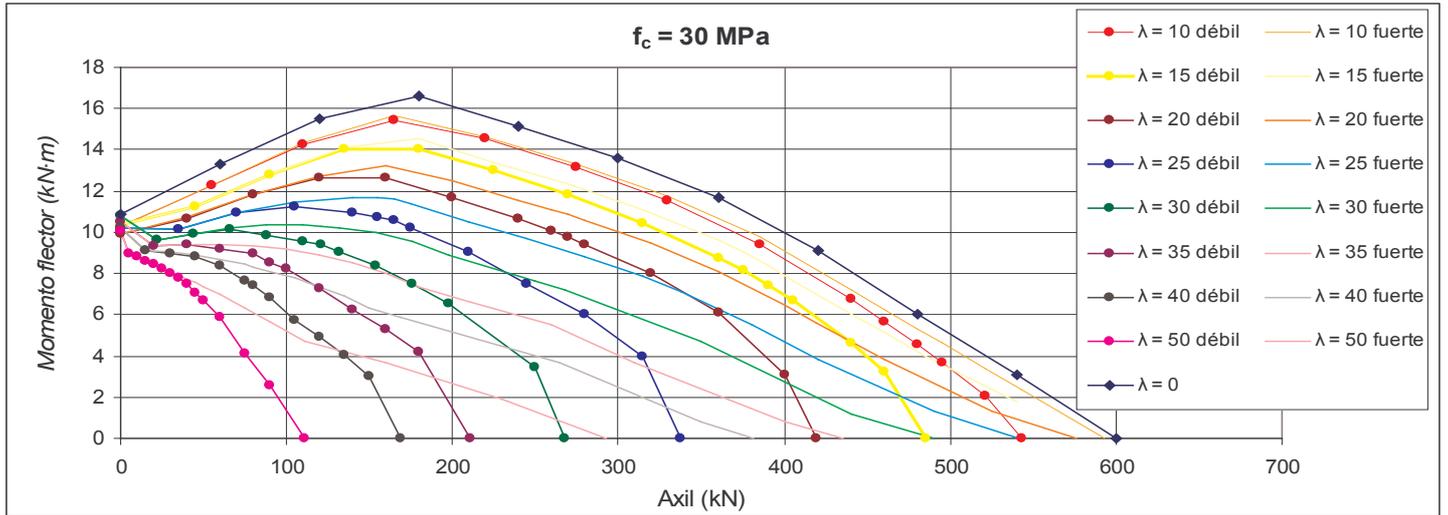
h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	variable	variable	1

Axiles críticos



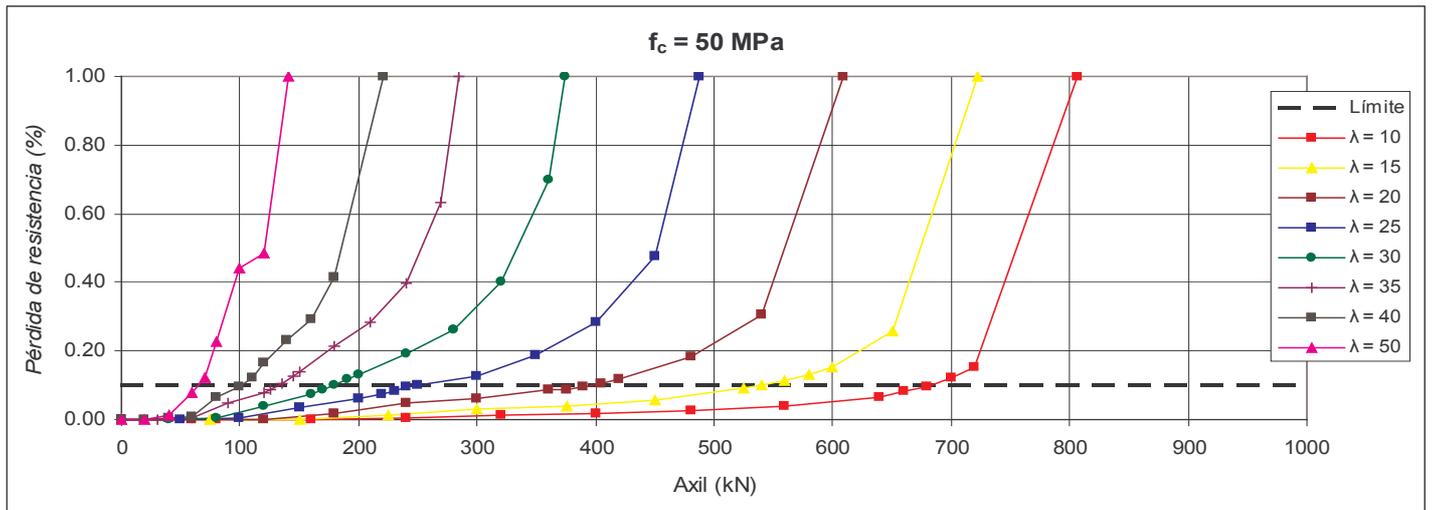
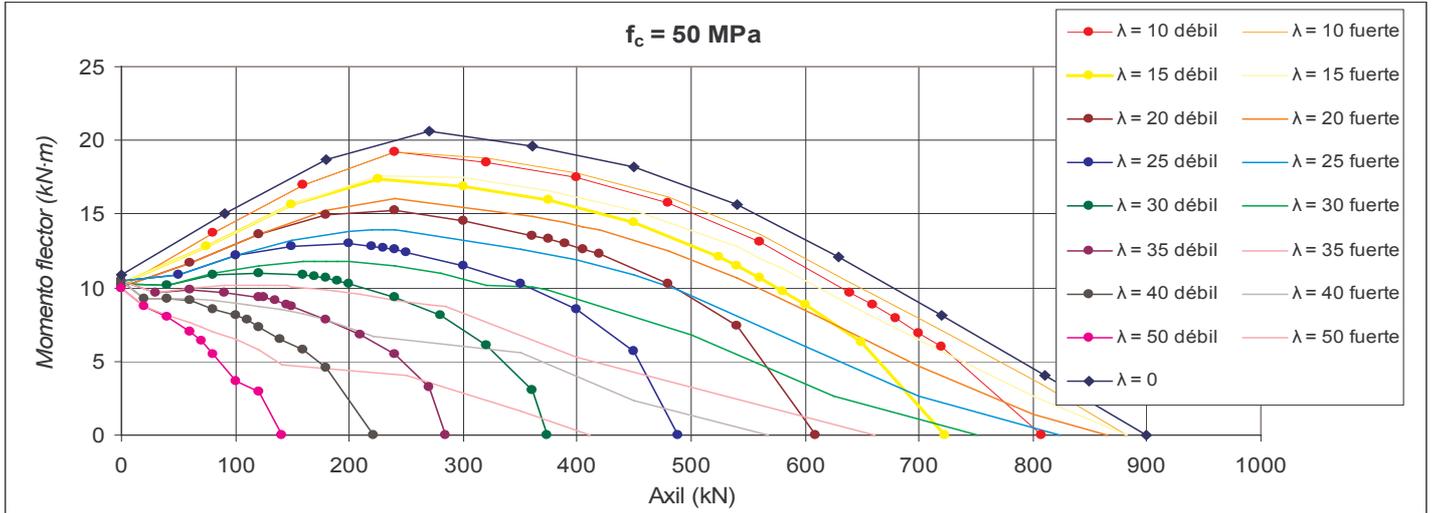
h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



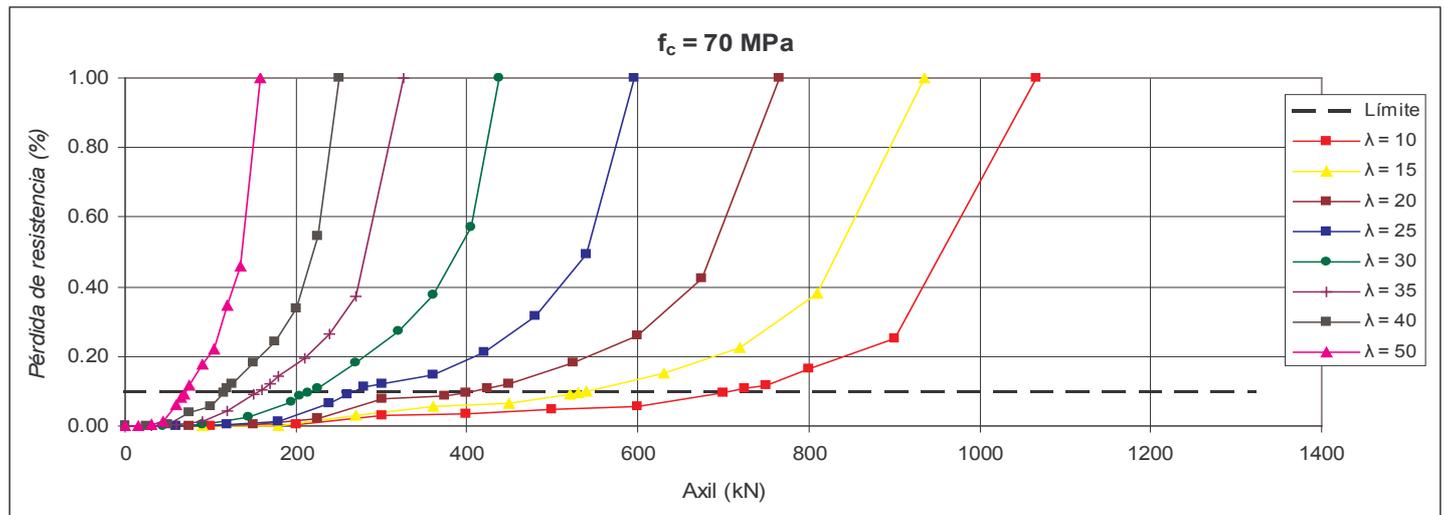
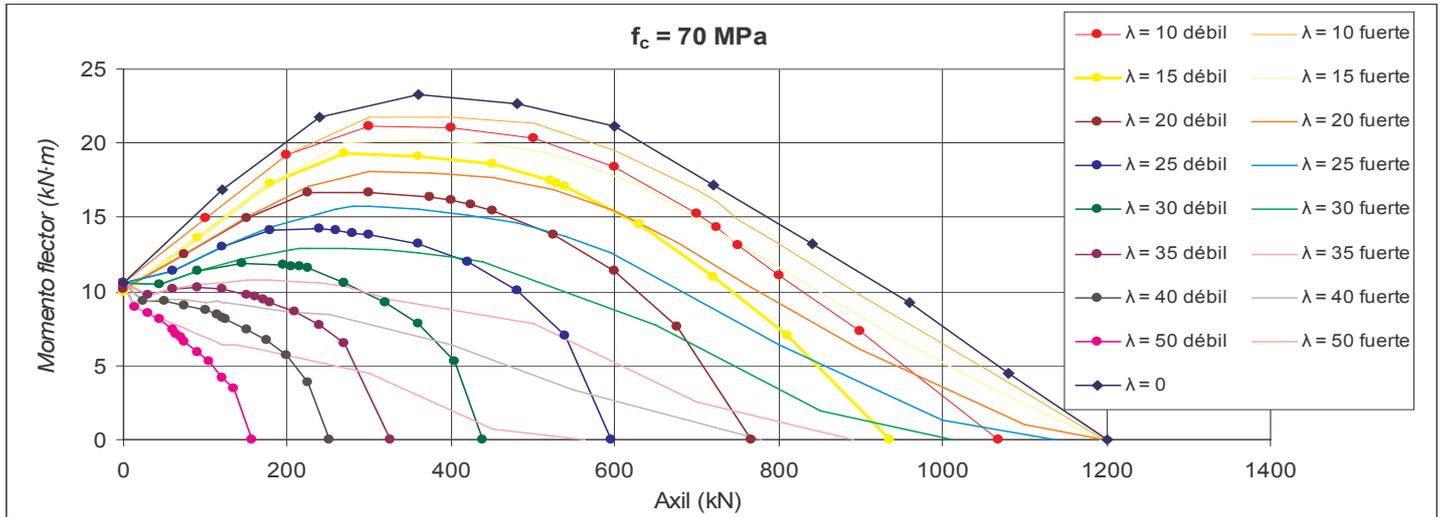
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
1.5	0	50	0.2	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



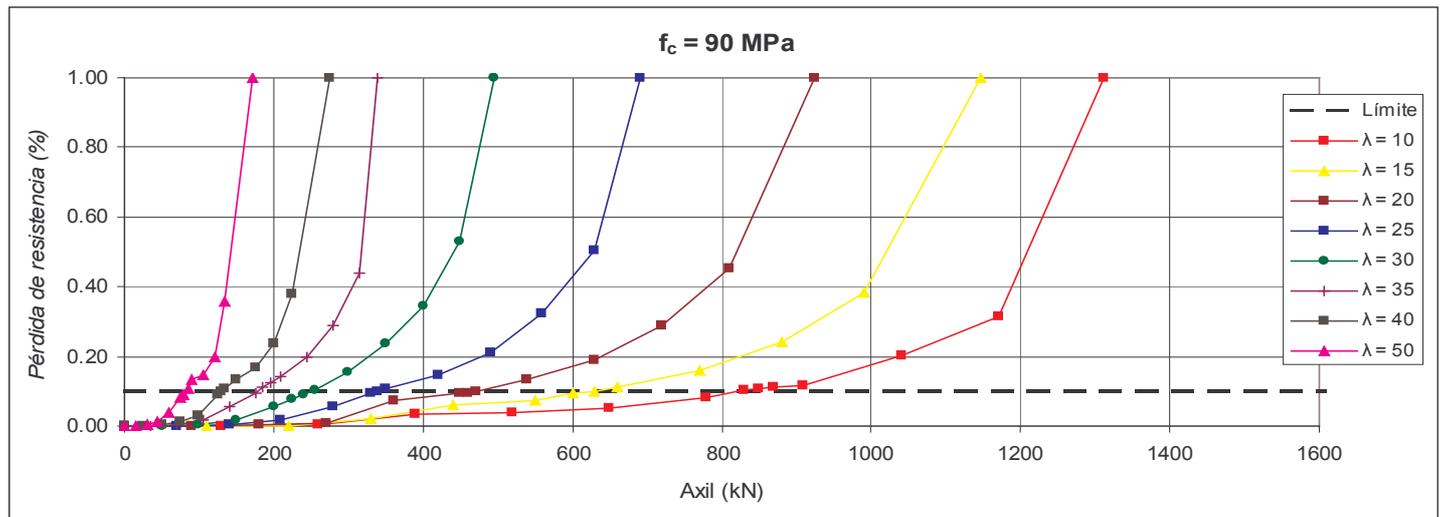
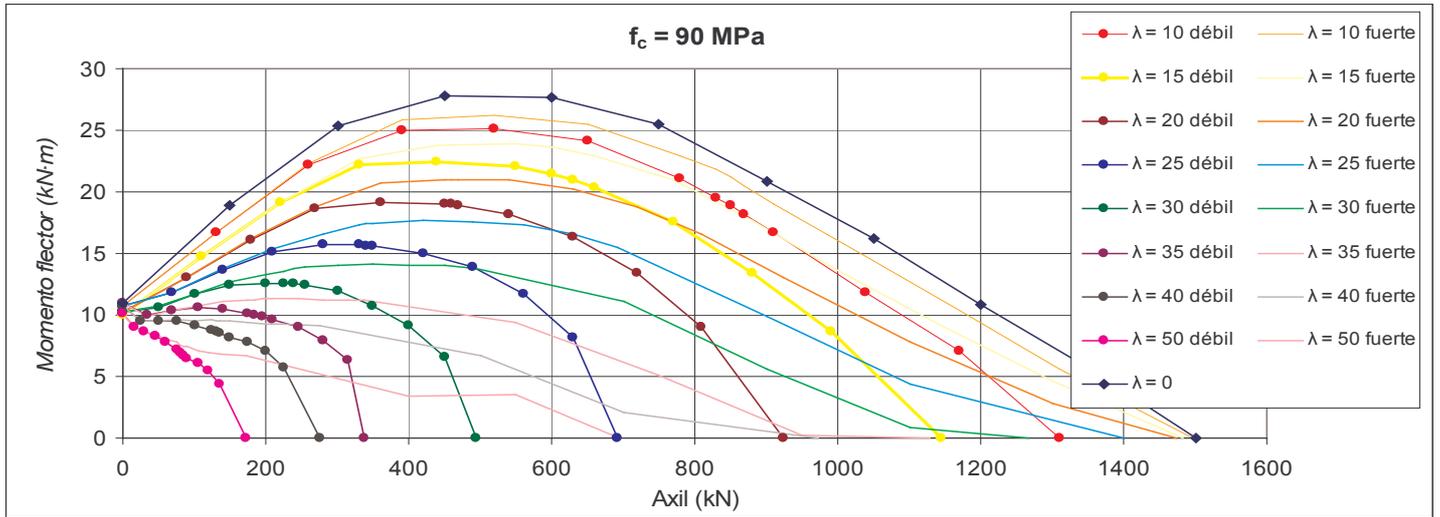
h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	70	0.14	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



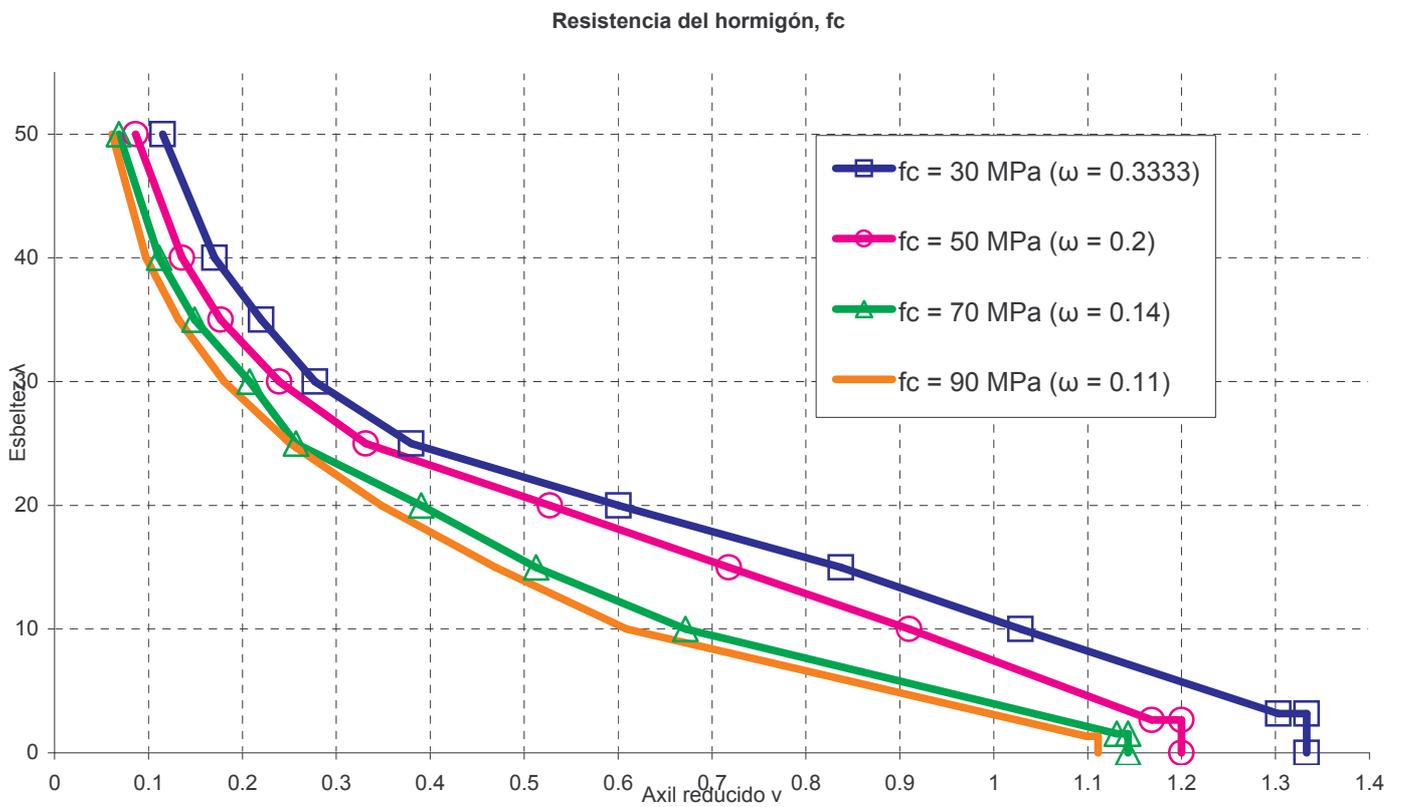
h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	90	0.11	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



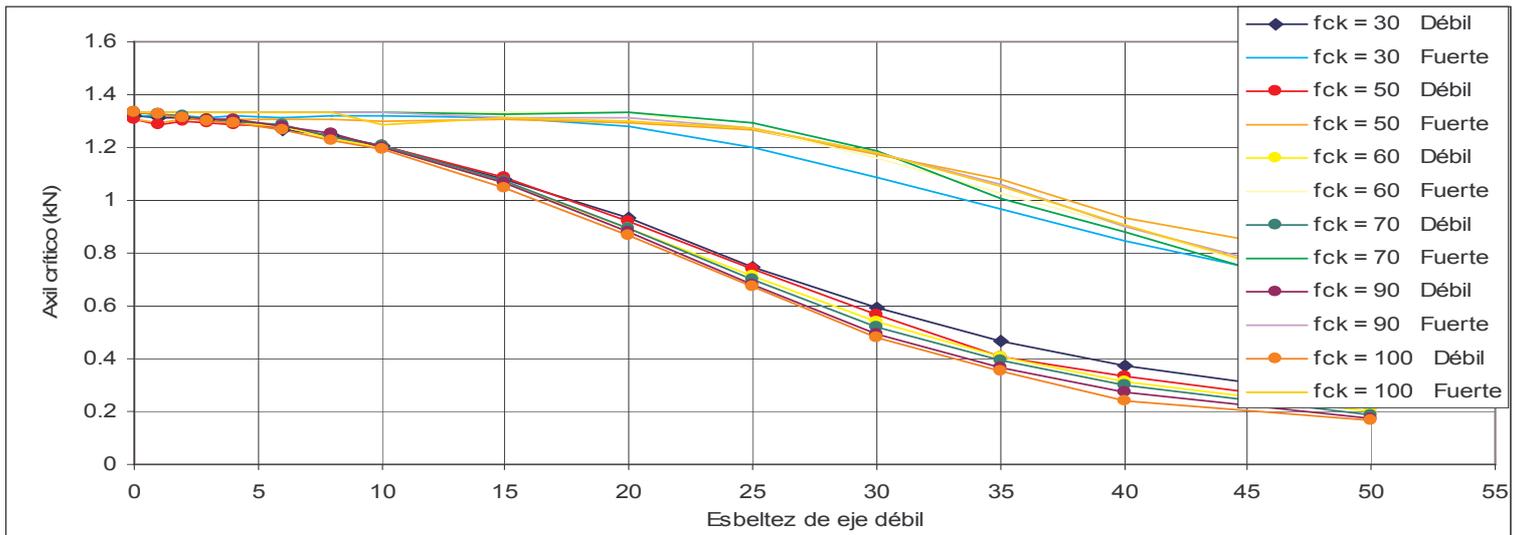
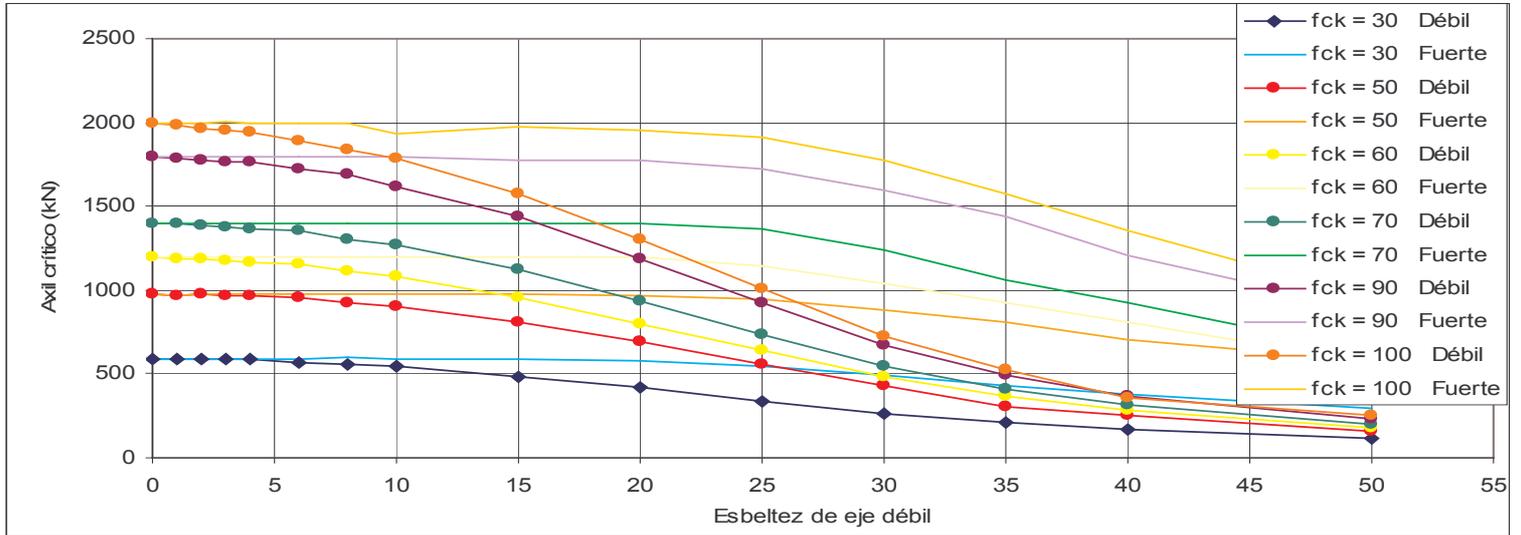
h/b	φ	f_c	ω	ψ
1.5	0	variable	variable	1

Variación de la esbeltez en función del axil reducido para la variable considerada



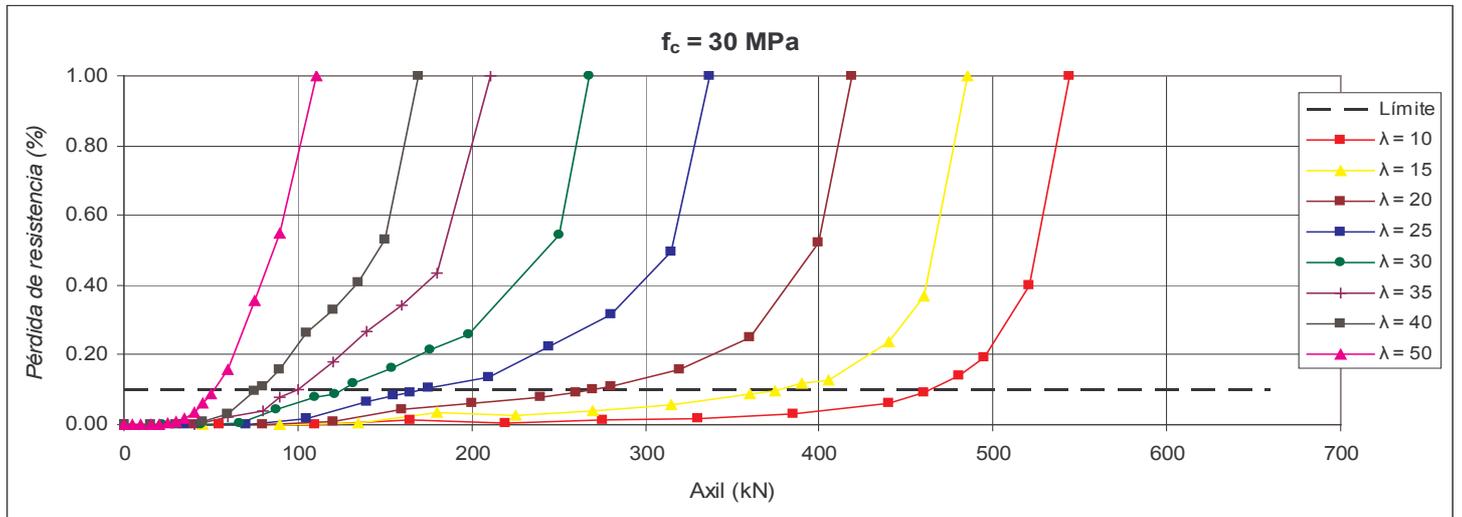
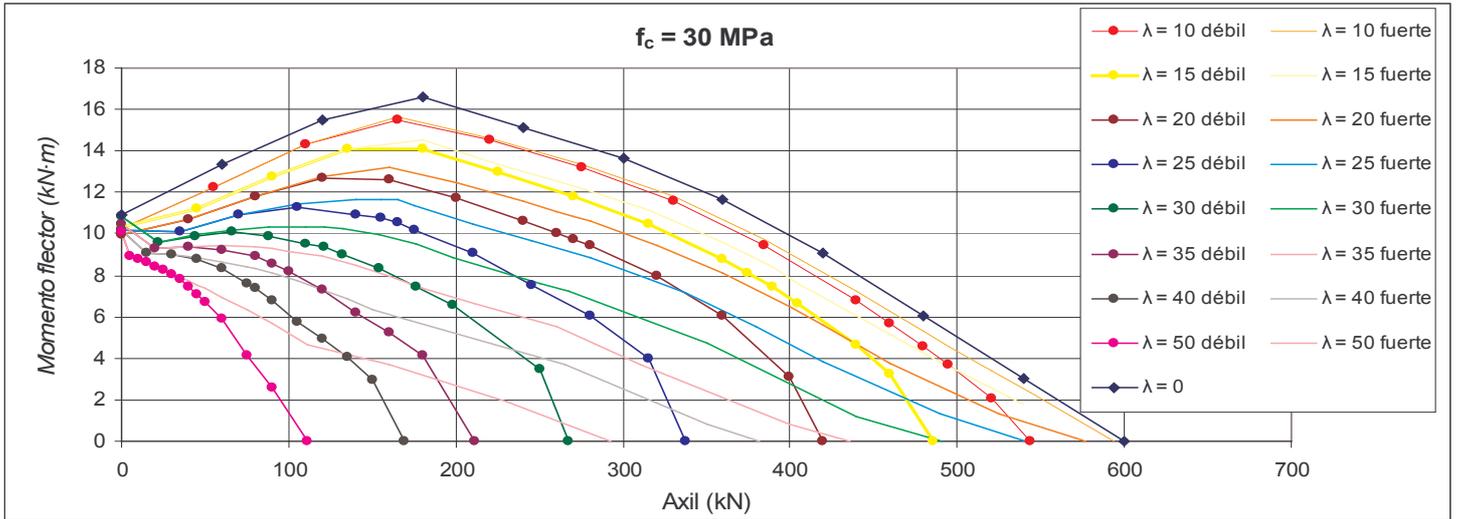
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	variable	0.3333	1

Axiles críticos



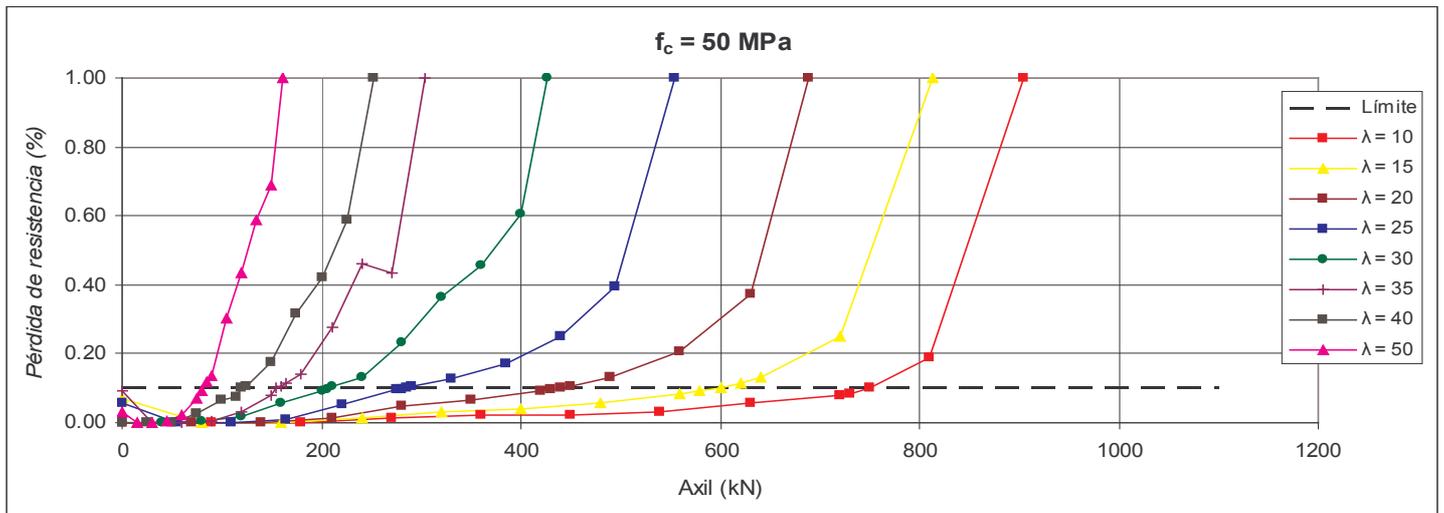
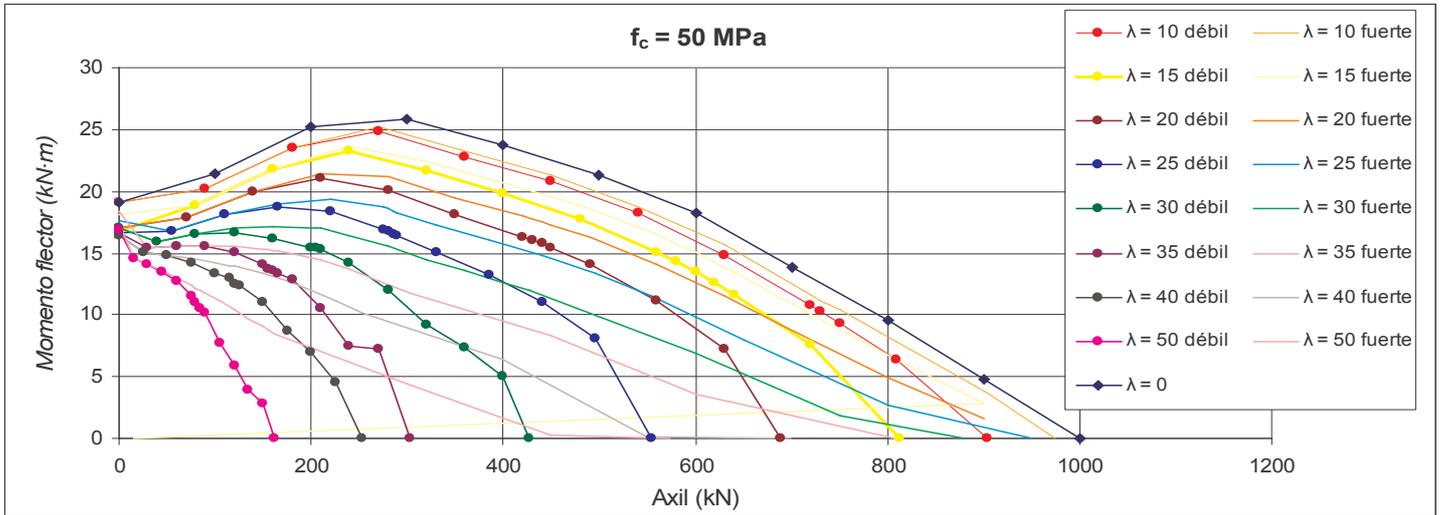
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



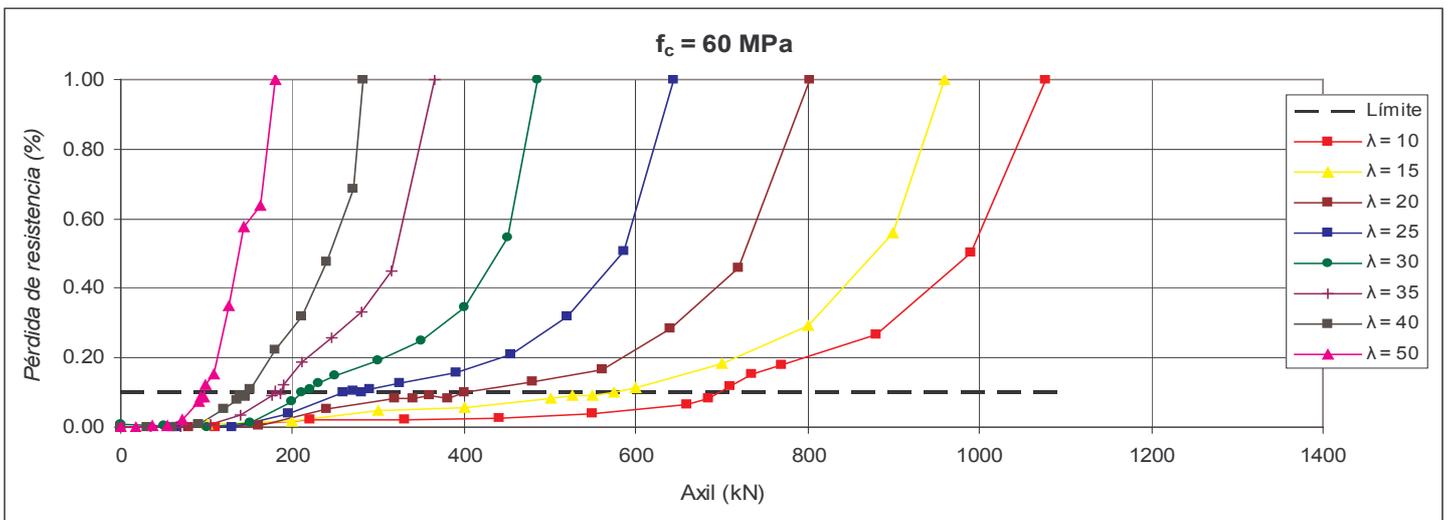
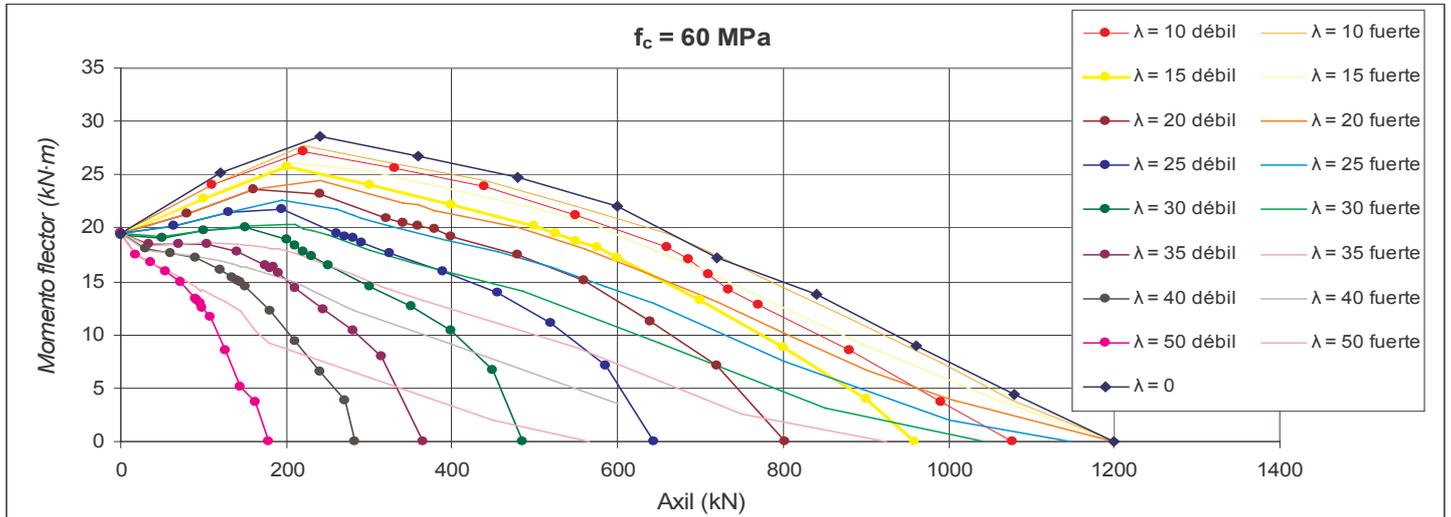
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	50	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



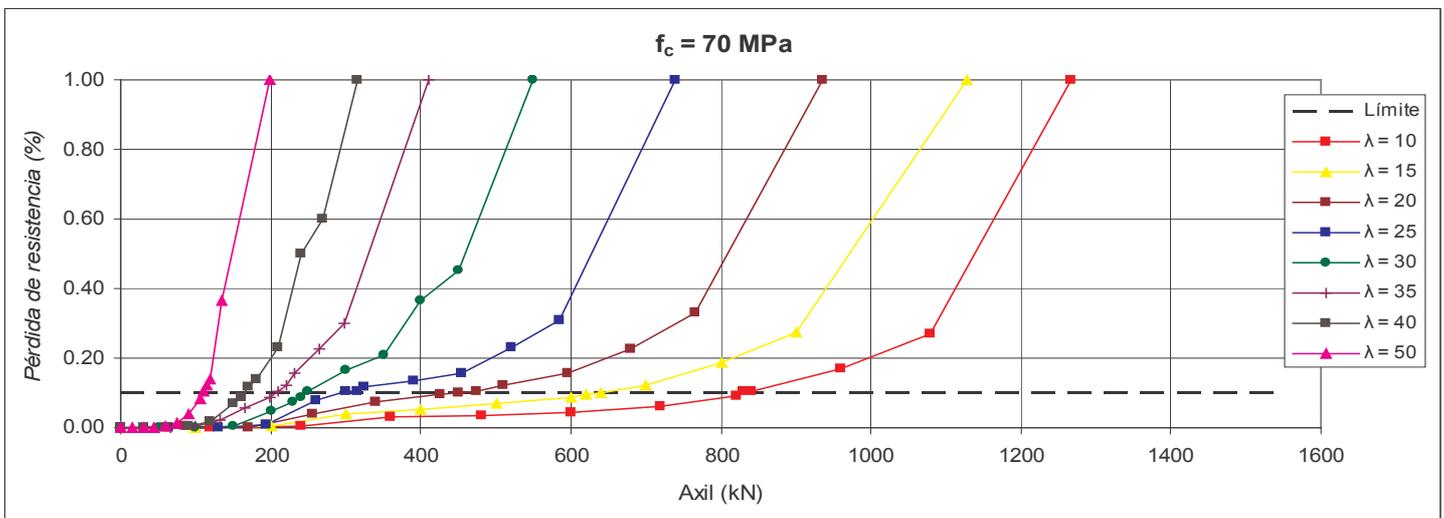
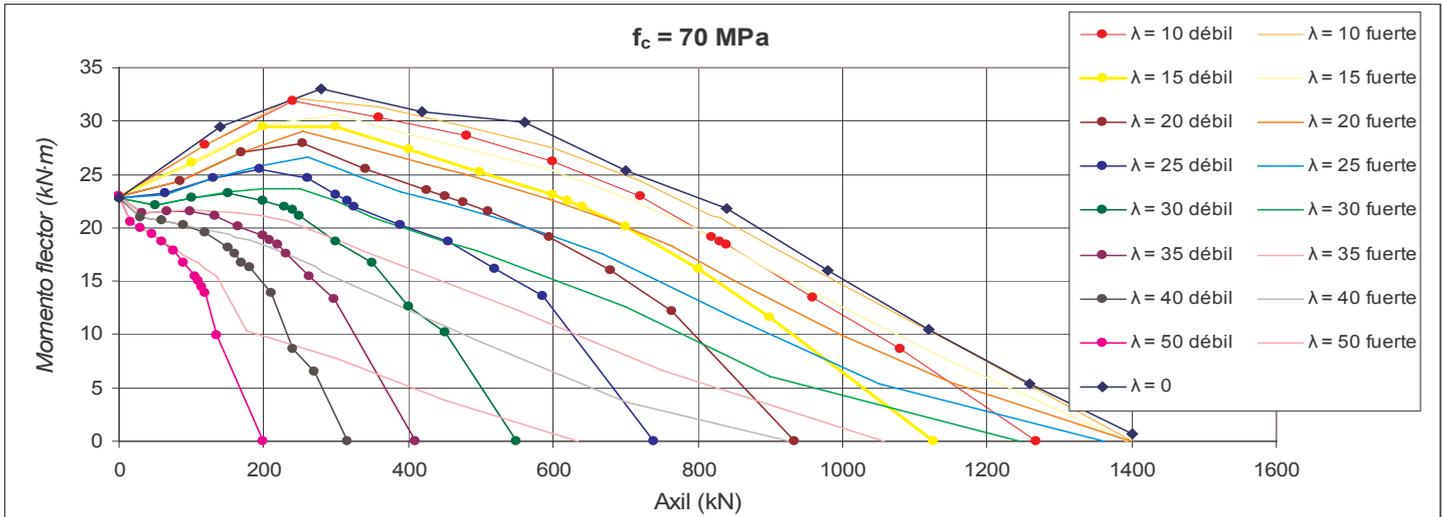
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	60	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



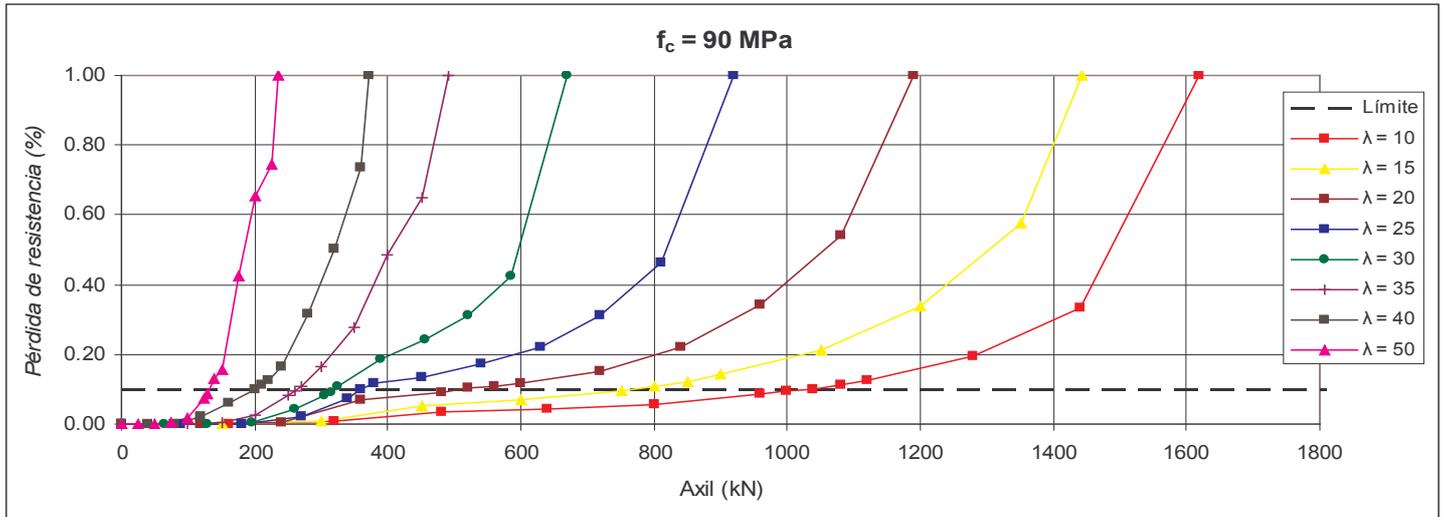
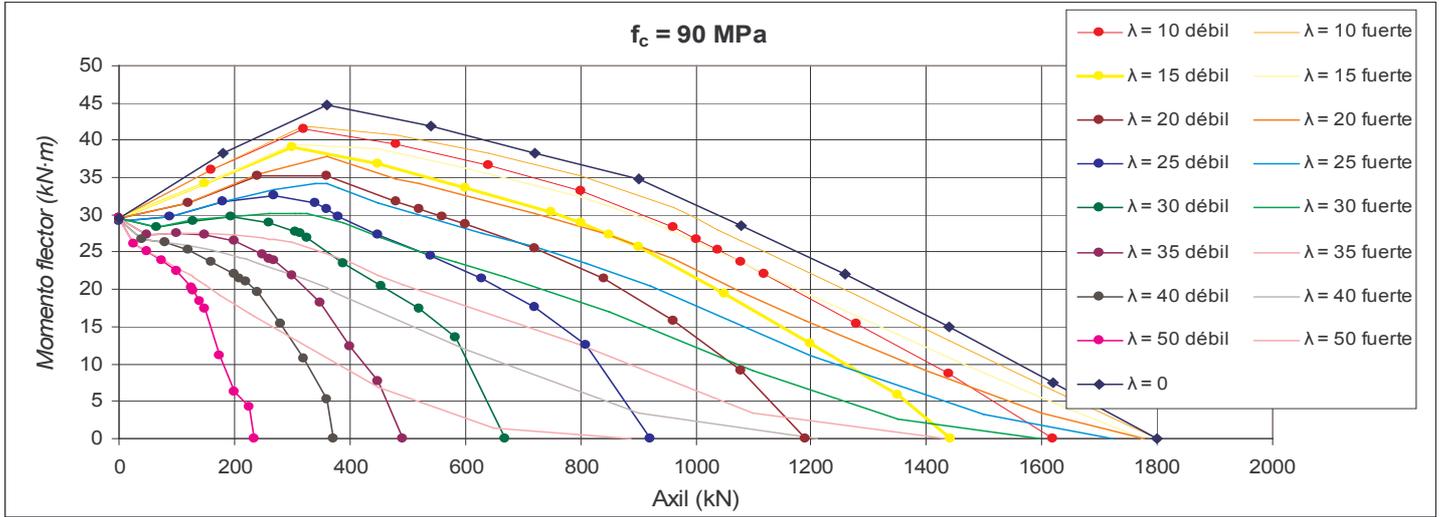
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	70	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



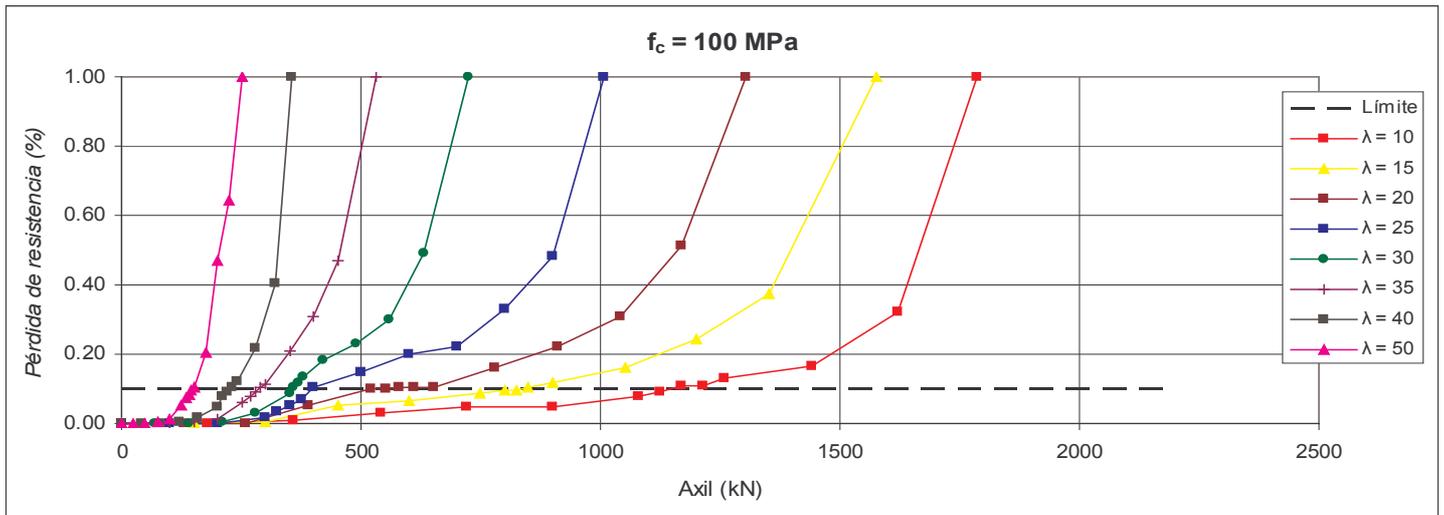
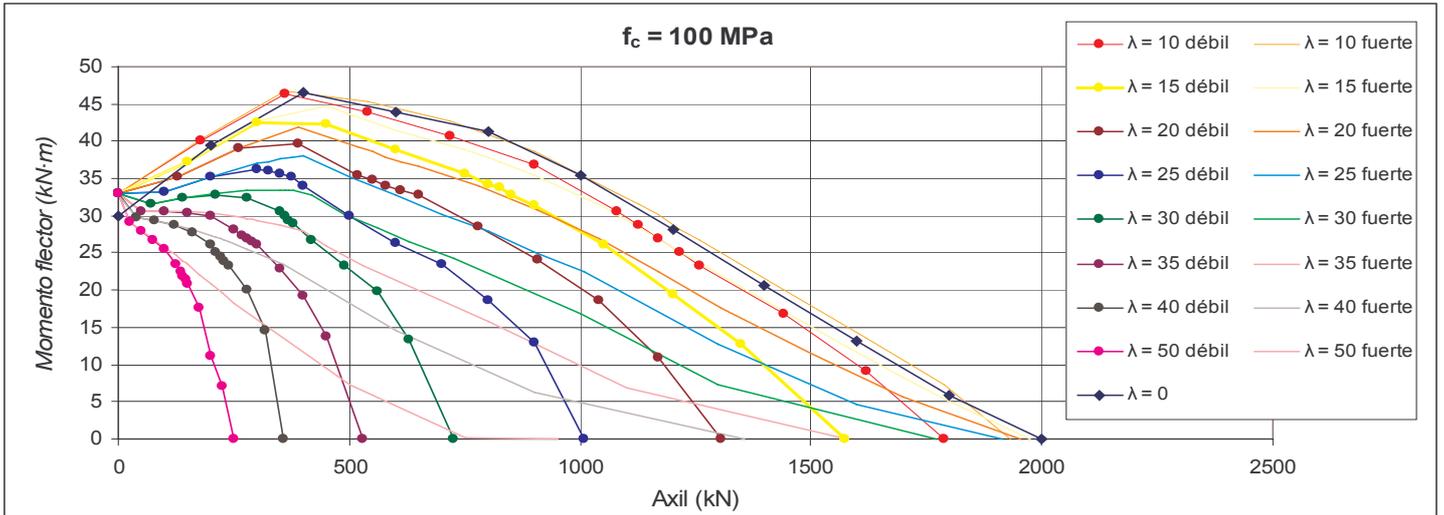
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	90	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



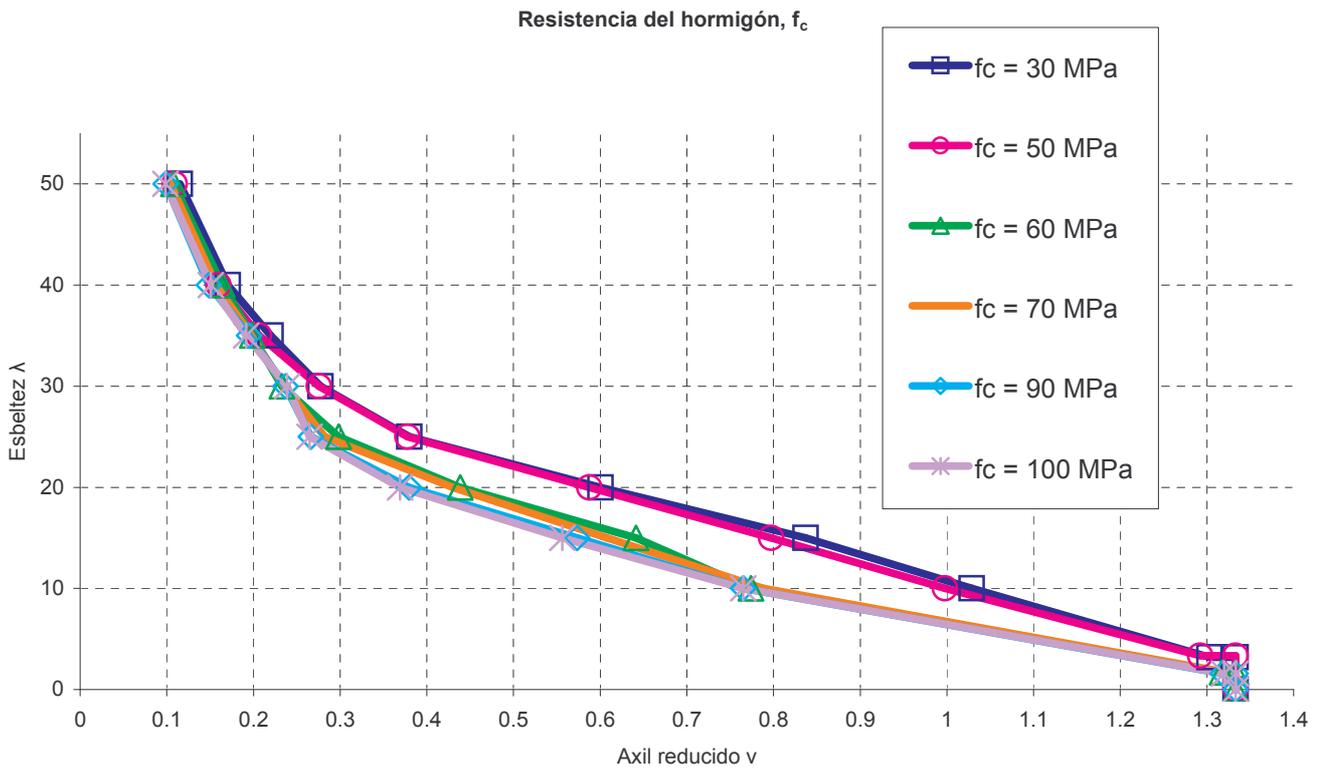
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	100	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



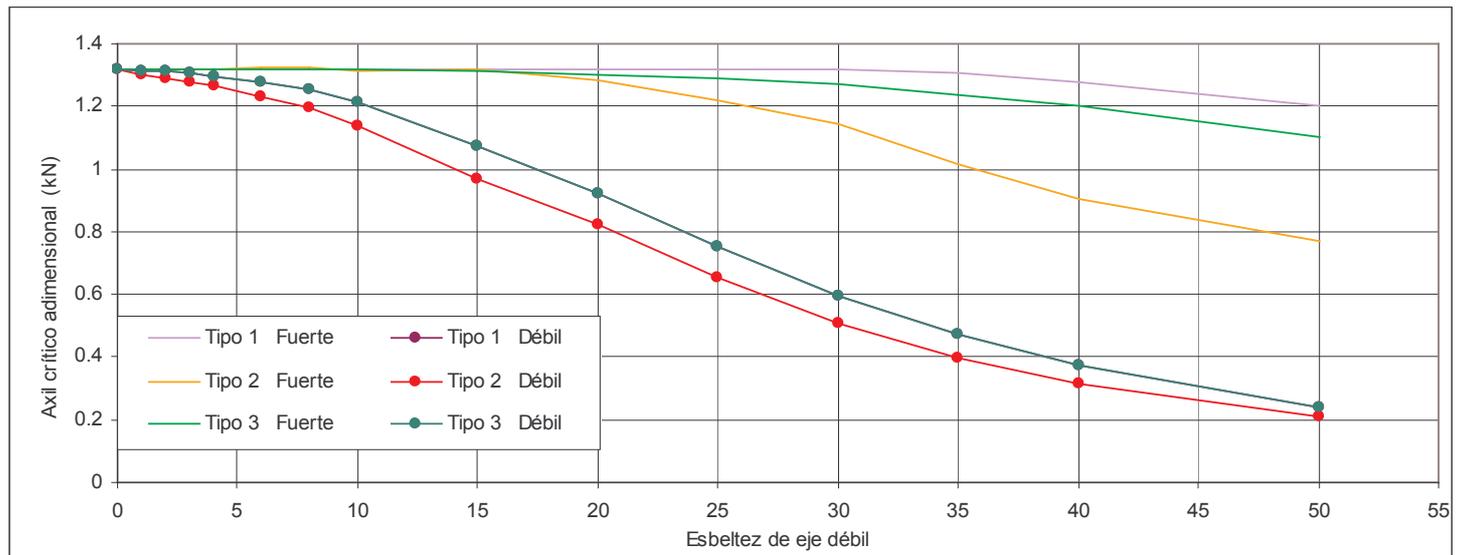
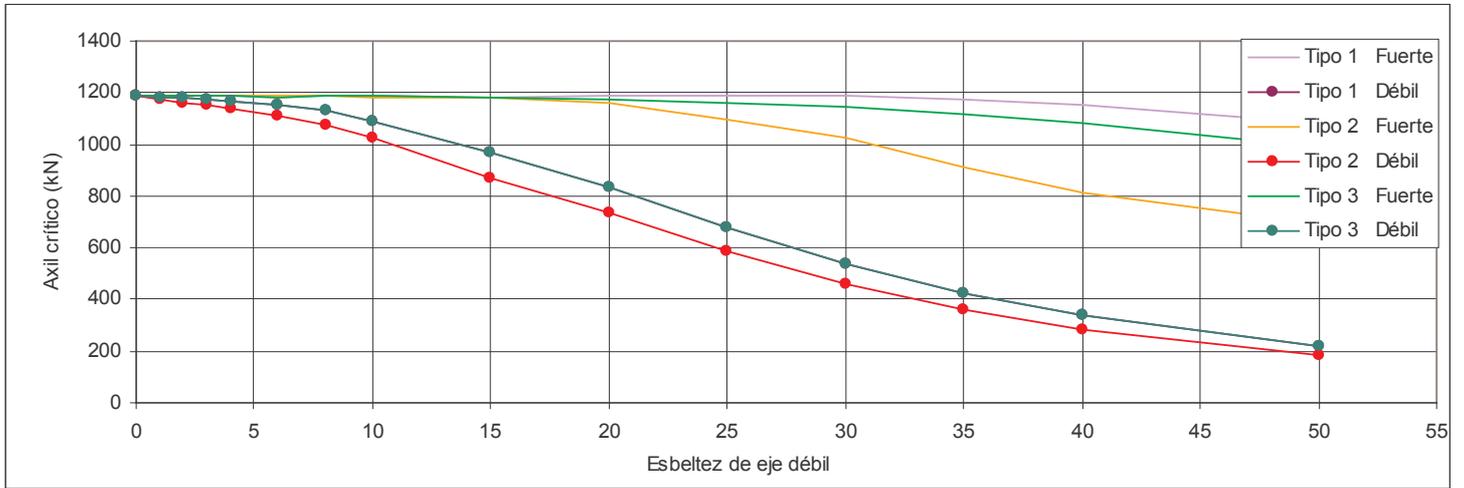
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	variable	0.3333	1

Variación de la esbeltez en función del axil reducido para la variable considerada



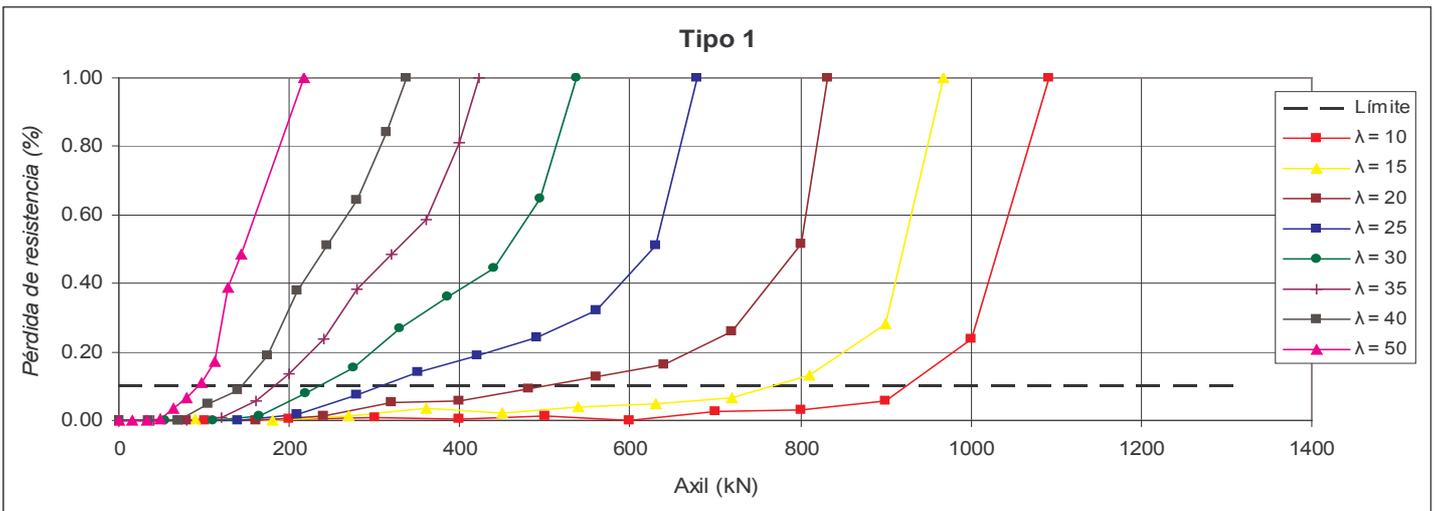
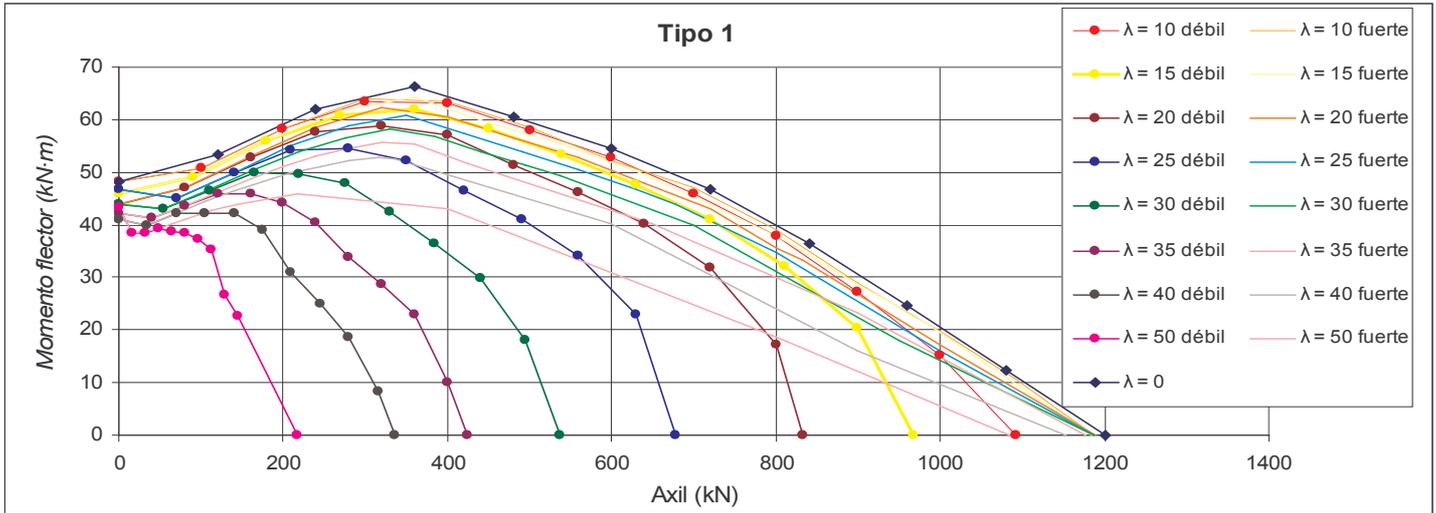
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	variable

Axiles críticos



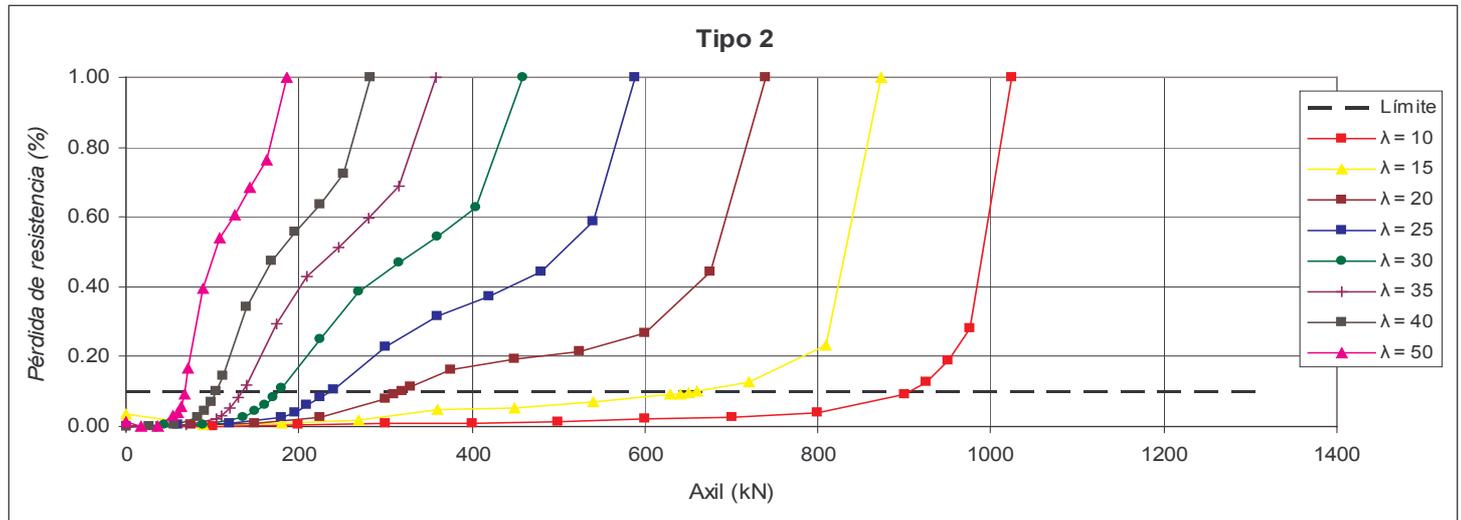
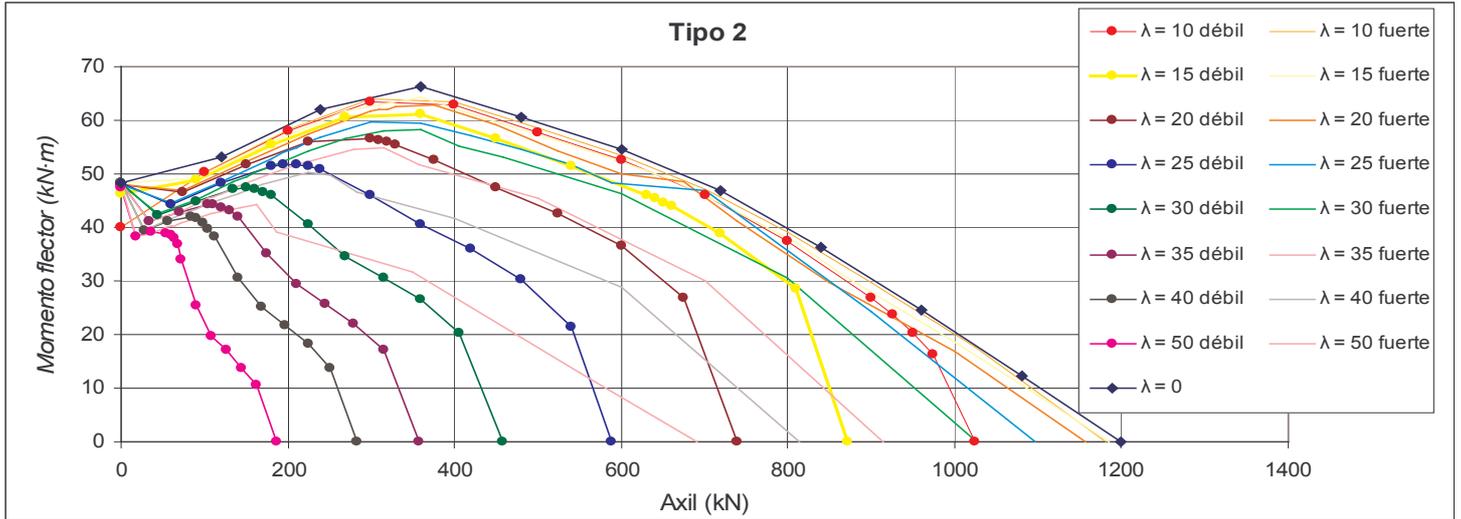
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



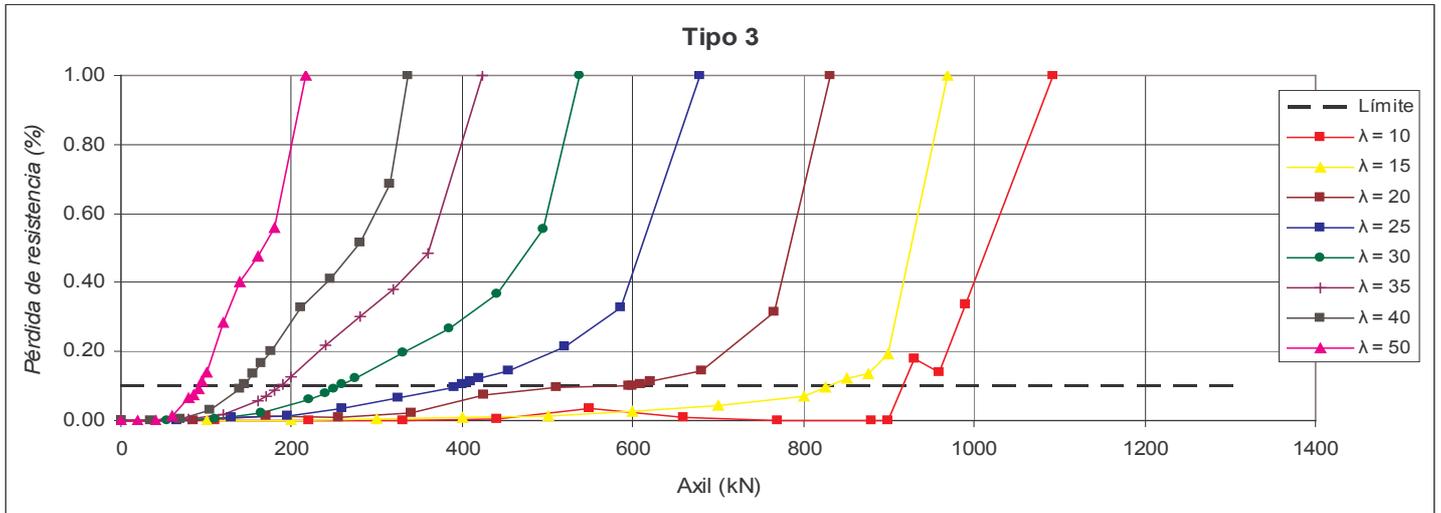
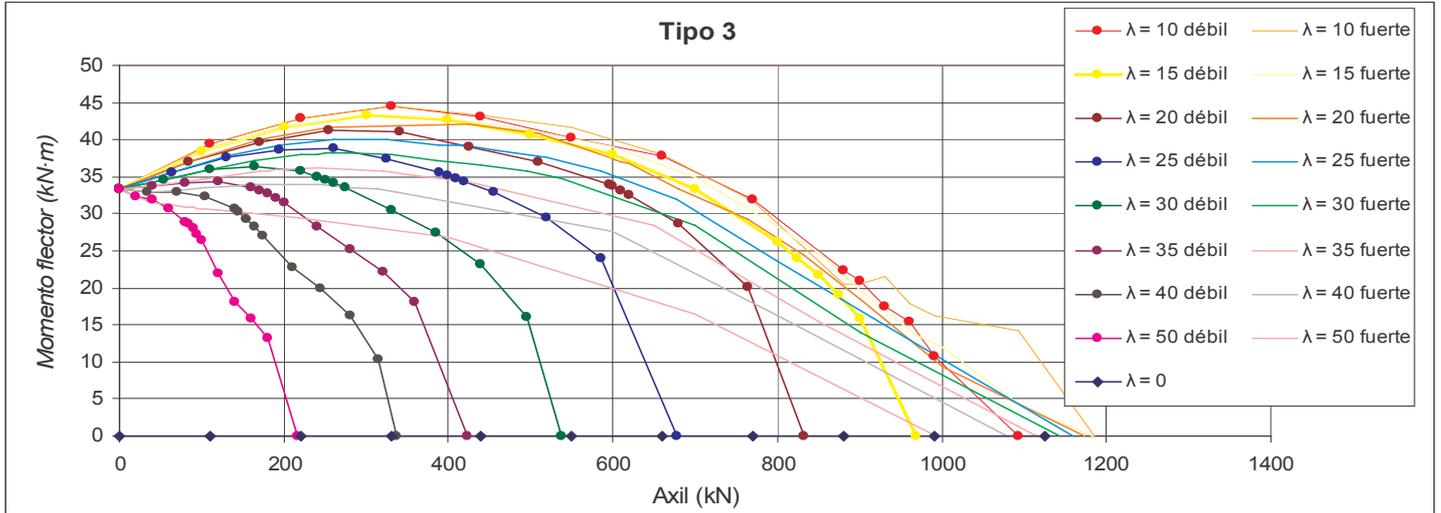
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1.73205081

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



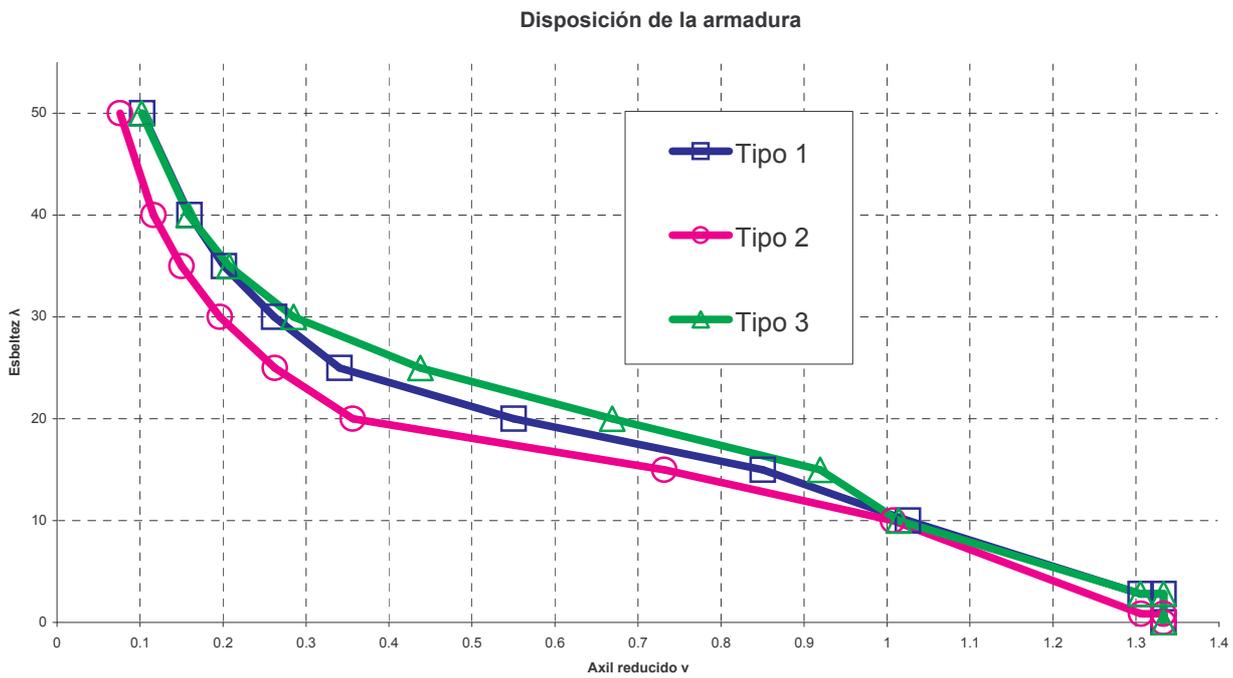
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	0.57735027

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



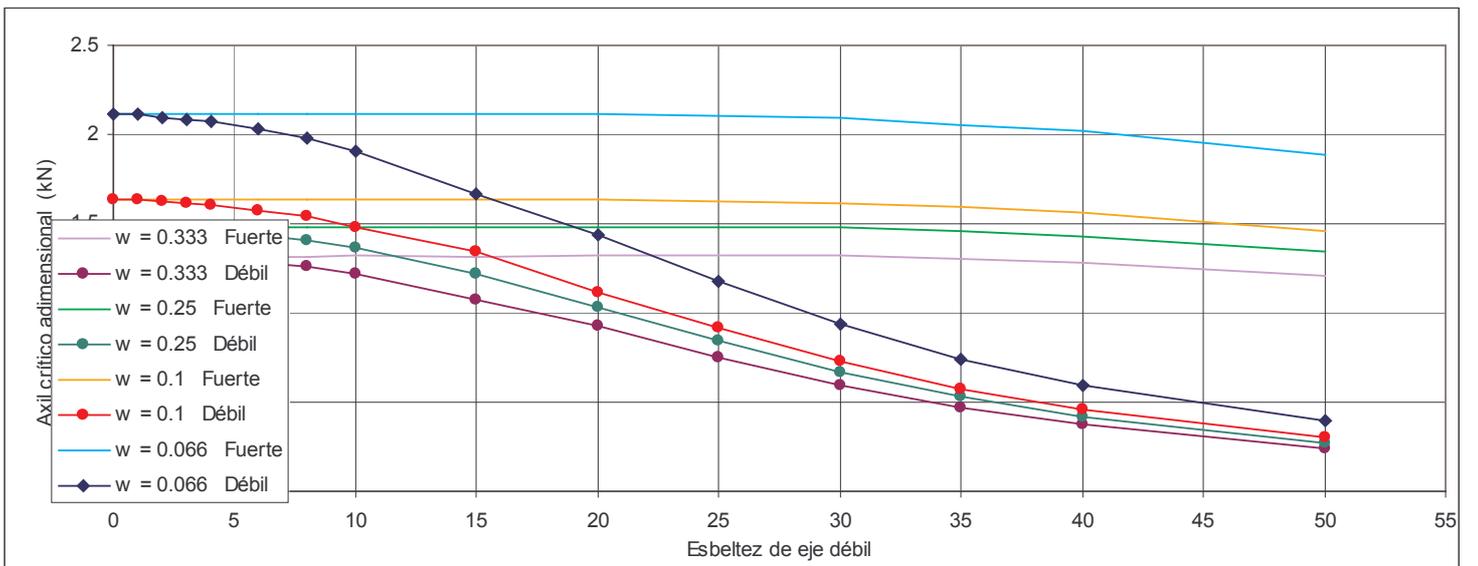
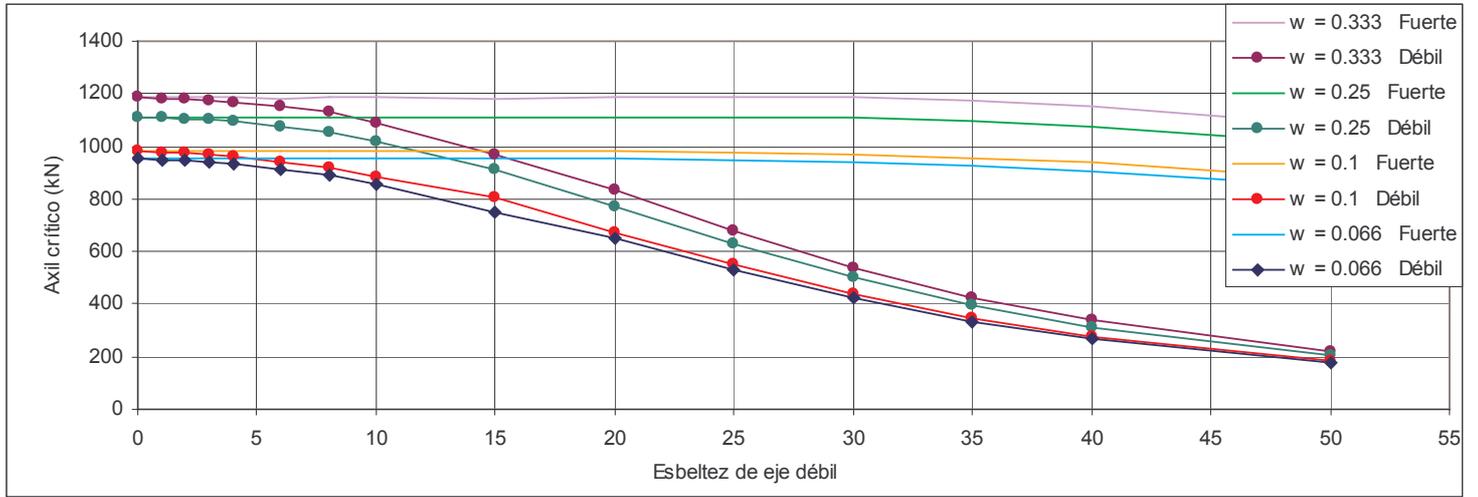
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	variable

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



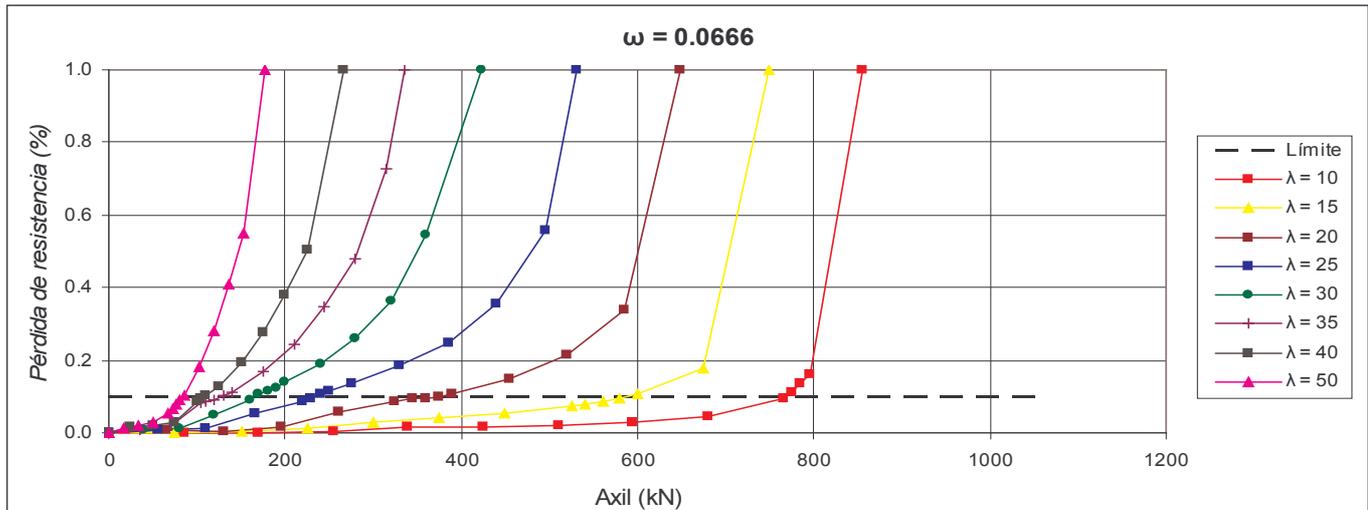
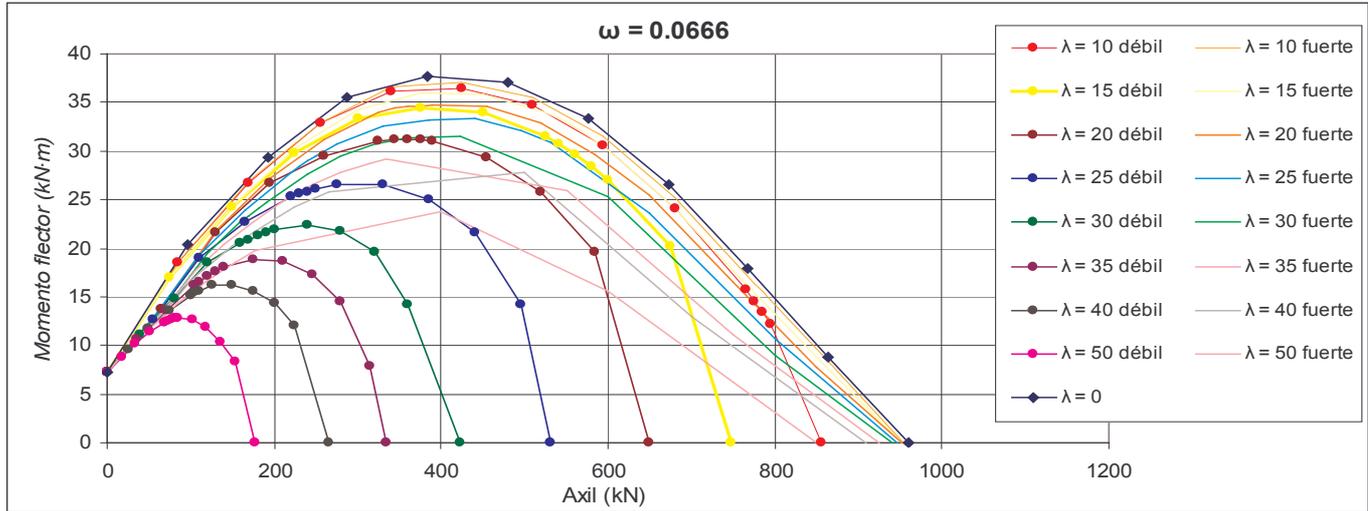
h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	variable	1

Axiles críticos



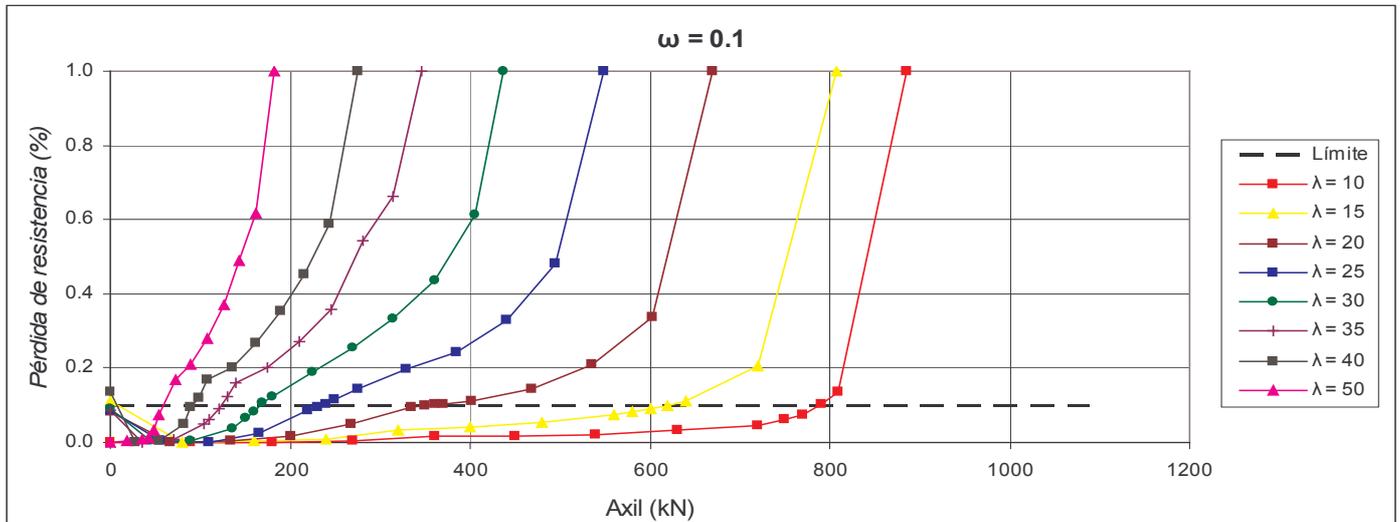
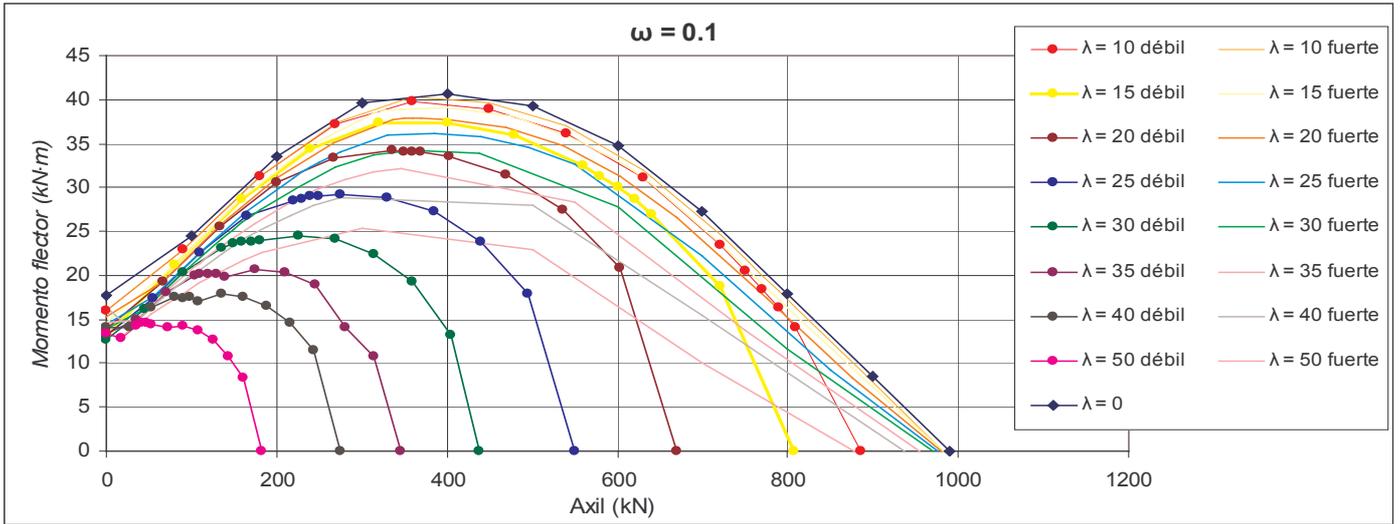
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.0666	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



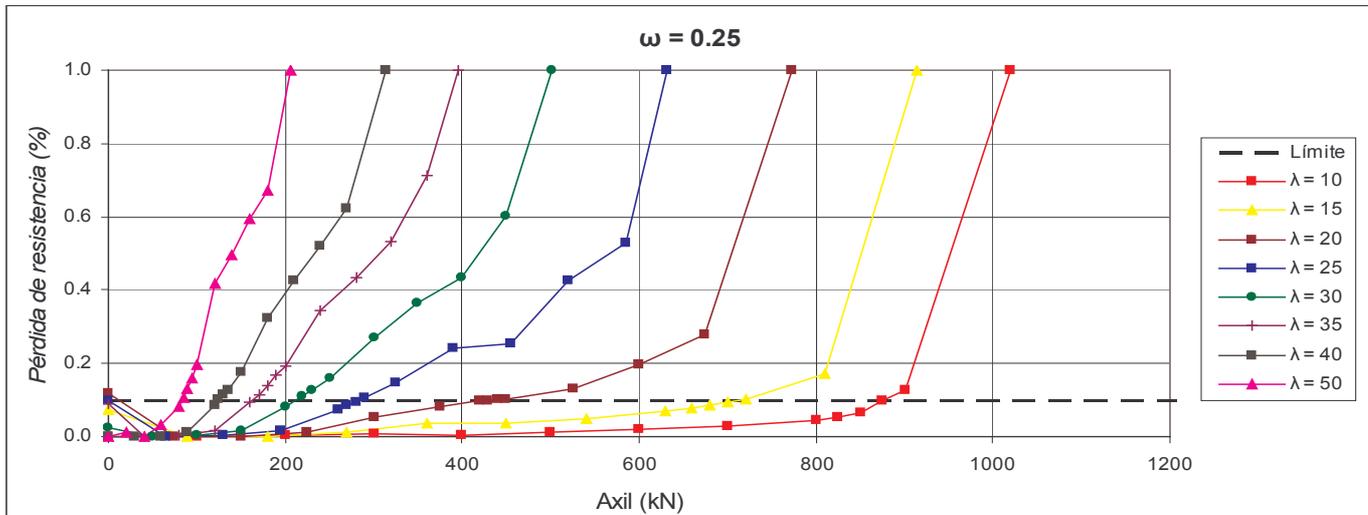
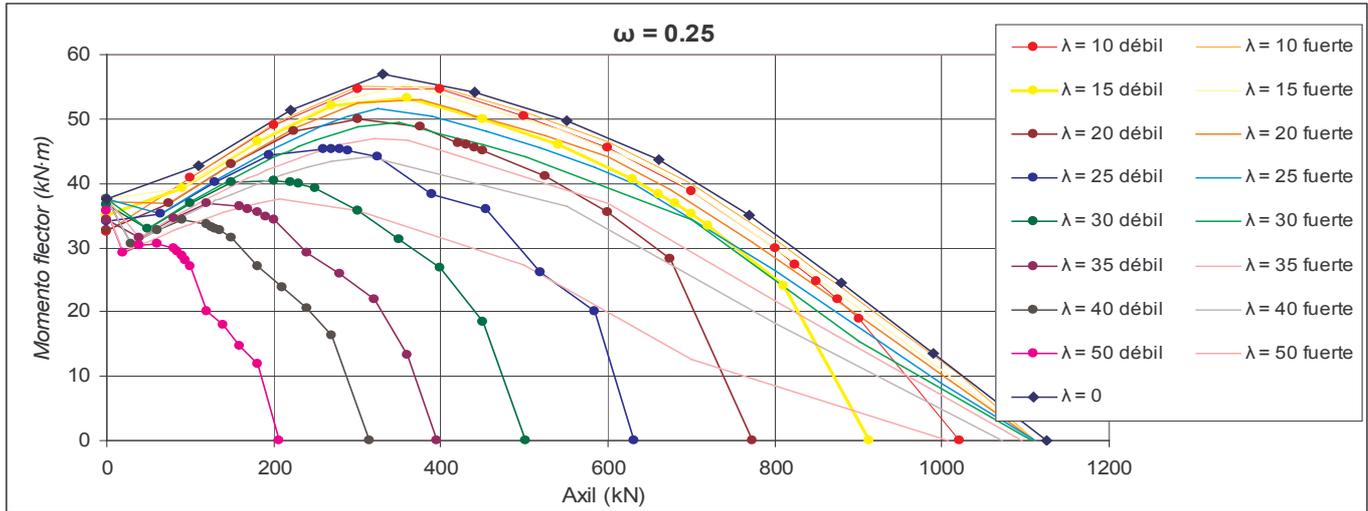
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.1	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



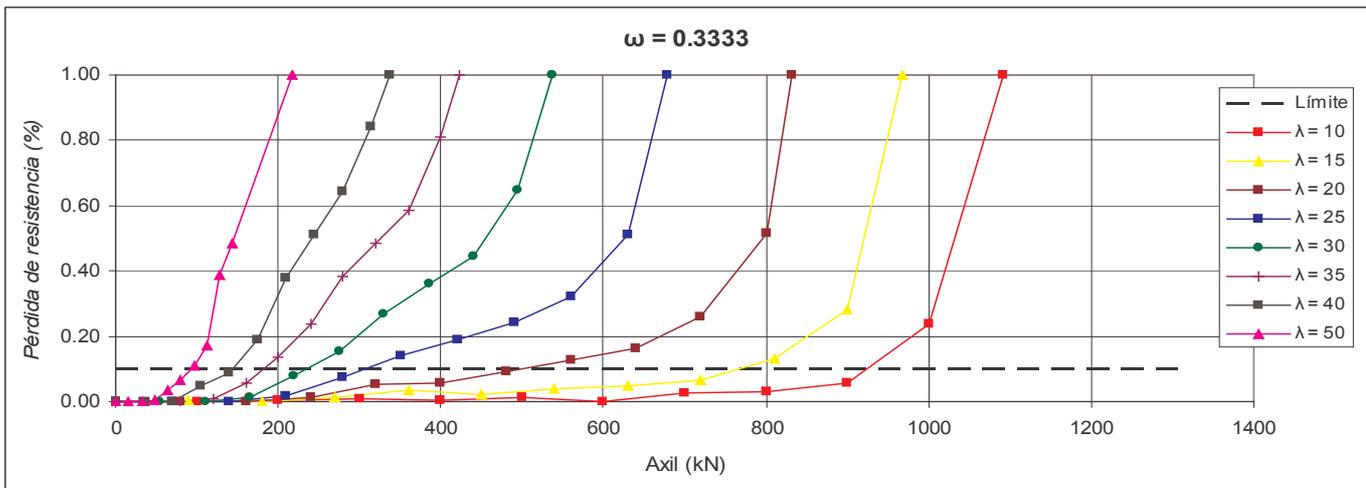
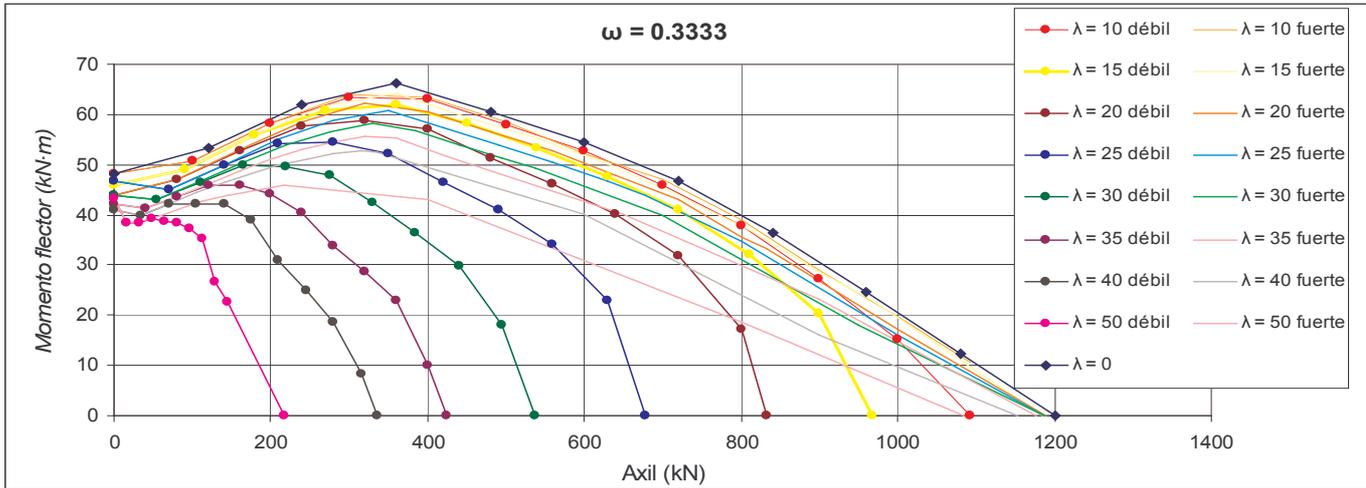
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.25	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
3	0	30	0.3333	1

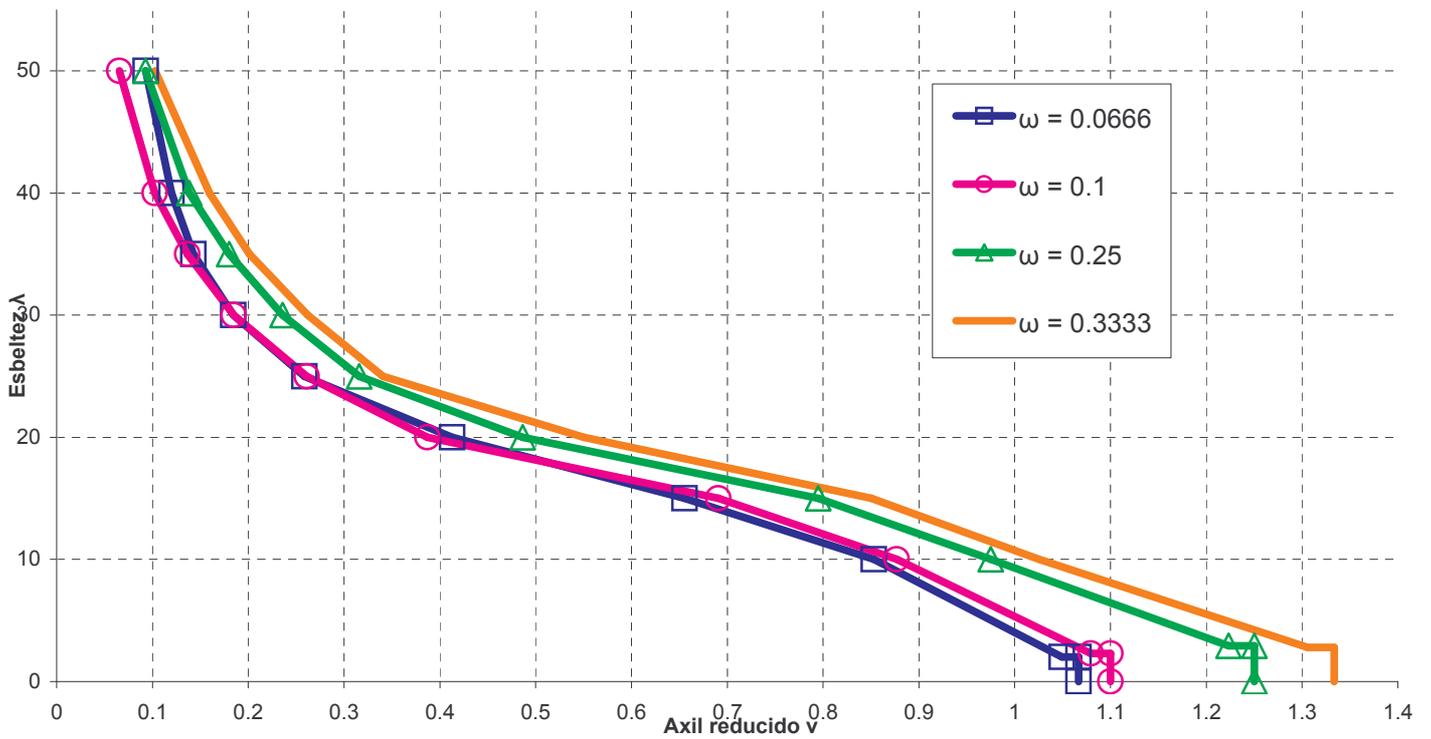
Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



h/b	φ	f_c	ω	ψ
3	0	30	variable	1

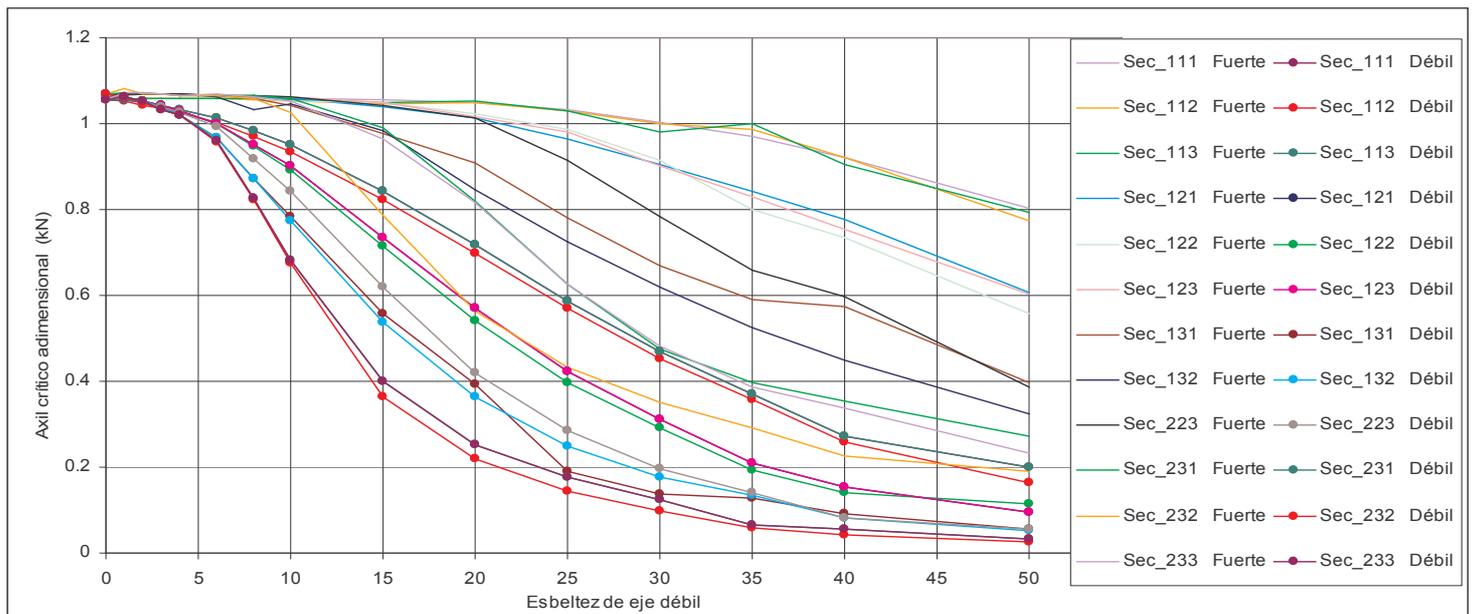
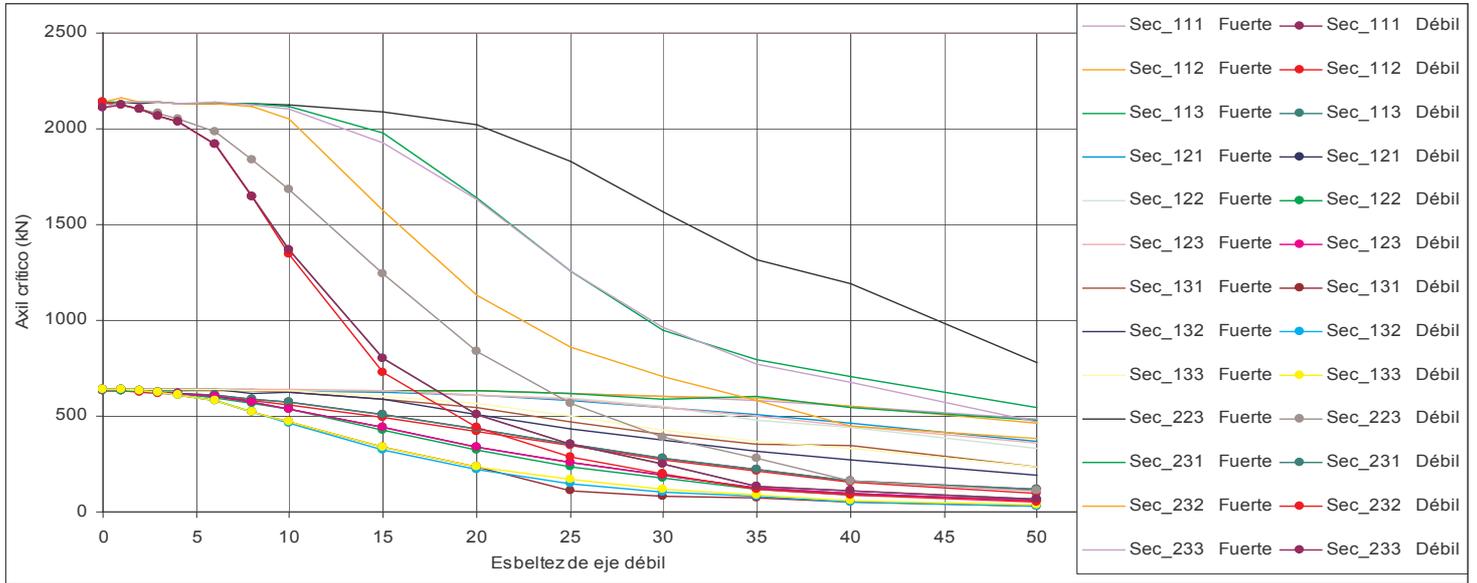
Variación de la esbeltez en función del axil reducido para la variable considerada

Quantía mecánica ω



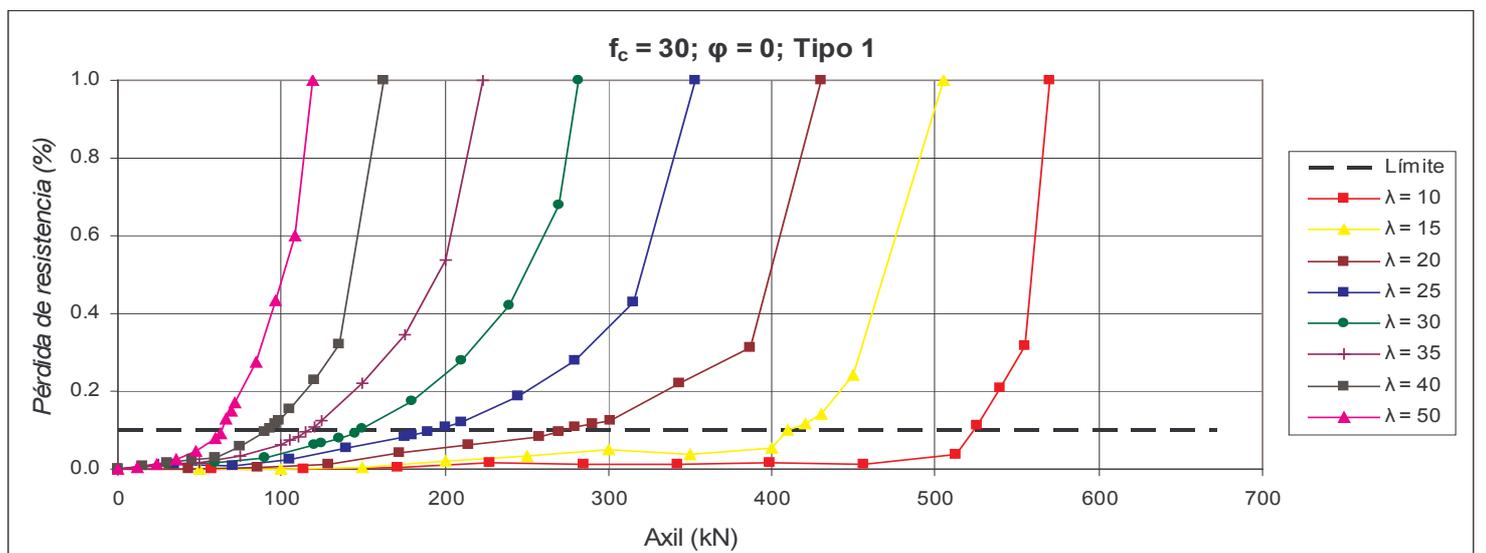
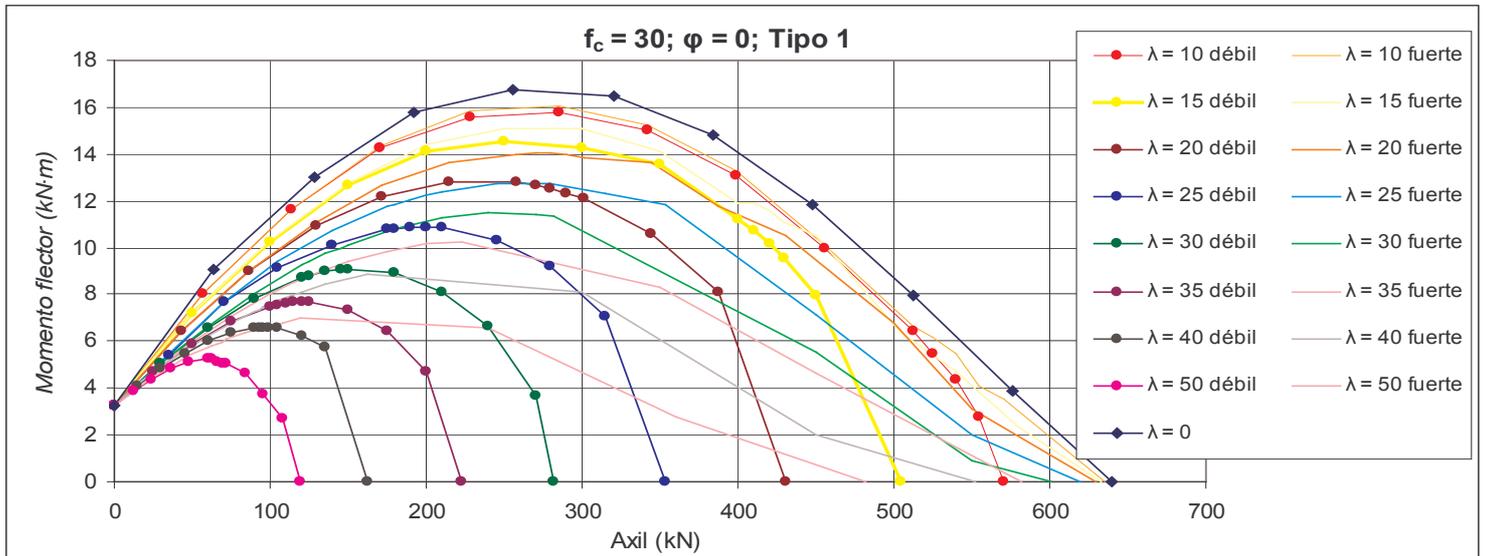
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	variable	variable	0.0666	variable

Axiles críticos



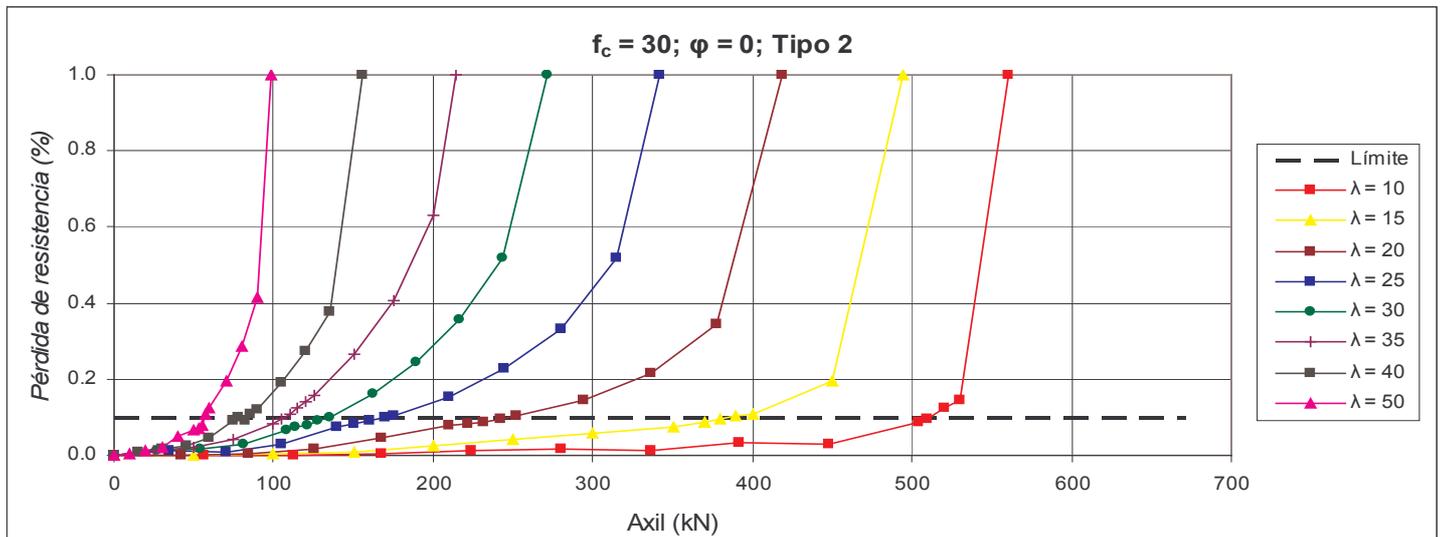
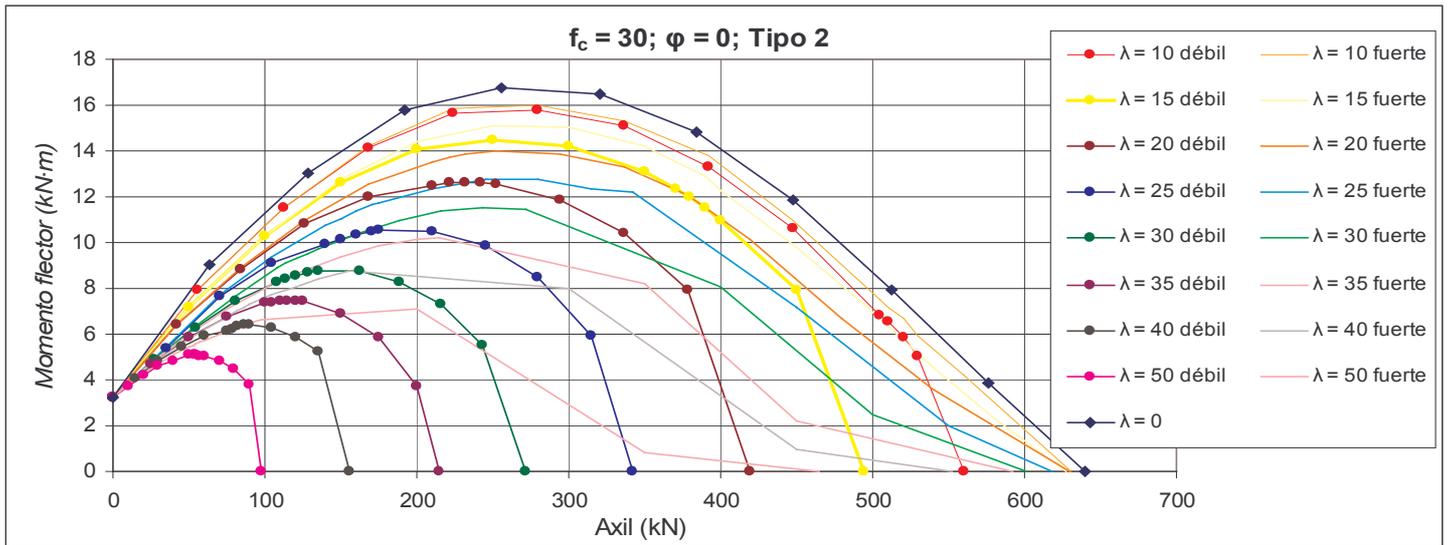
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	30	0.0666	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



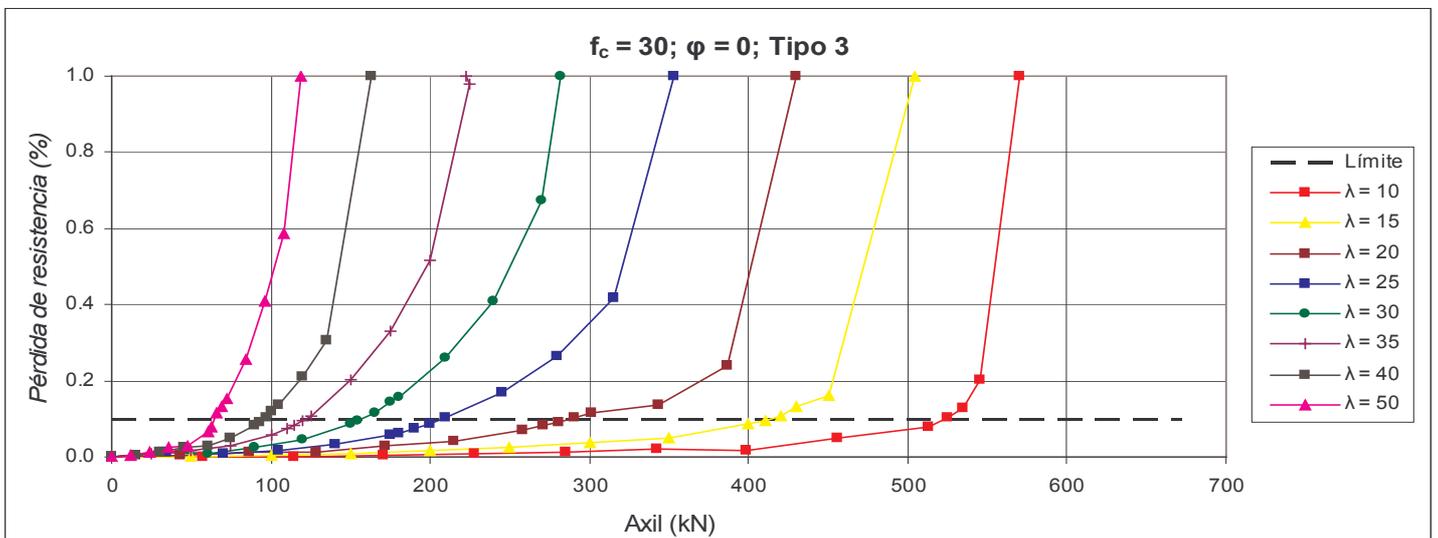
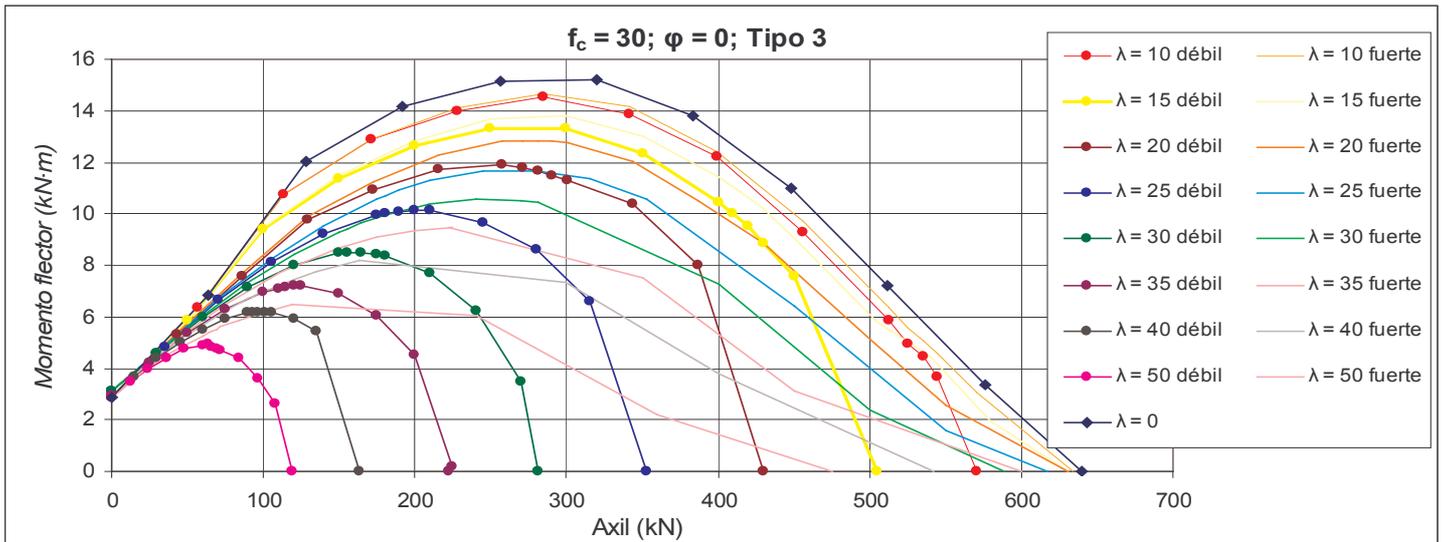
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
2	0	30	0.0666	1.73205081

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



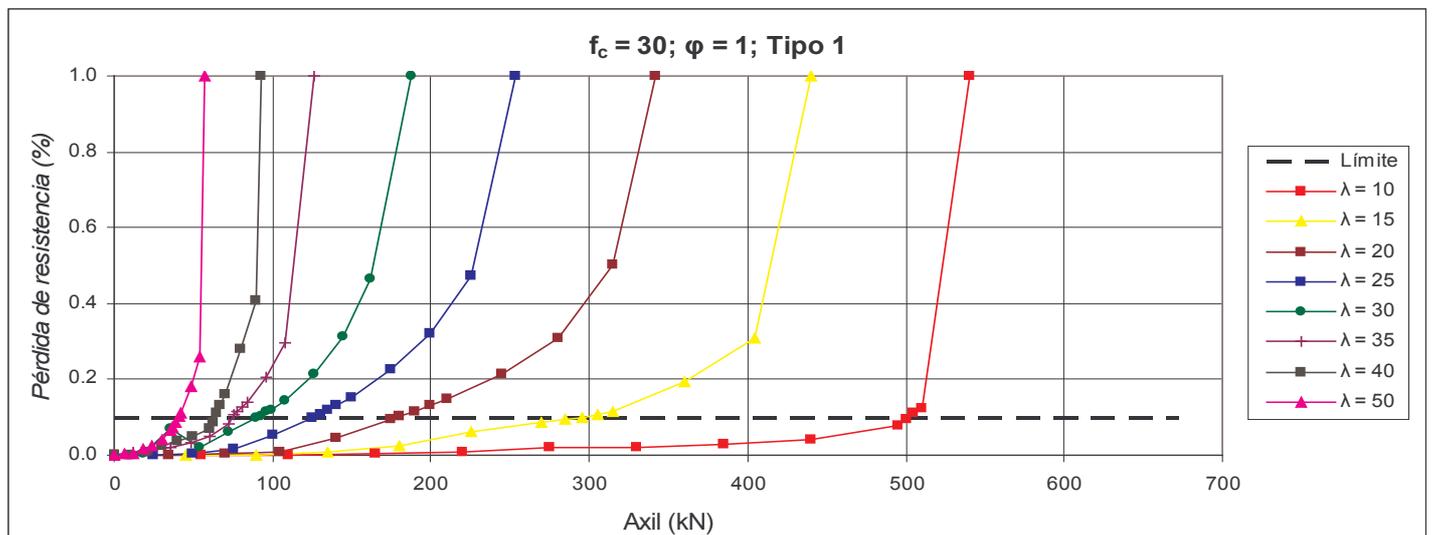
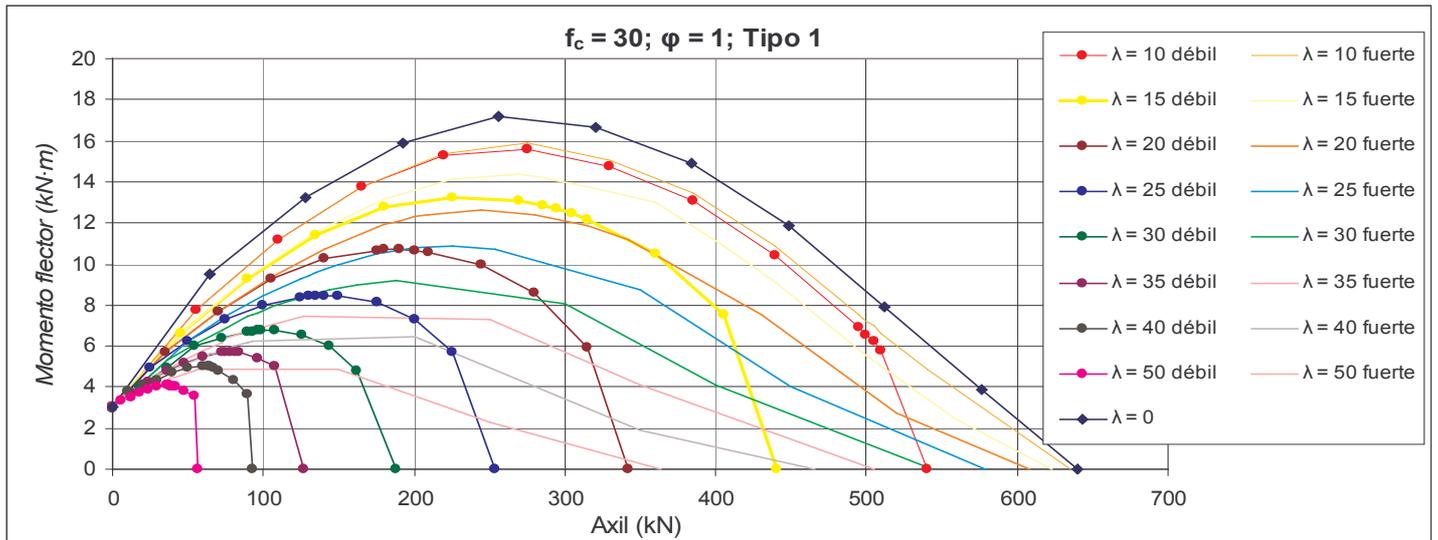
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	30	0.0666	0.57735027

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



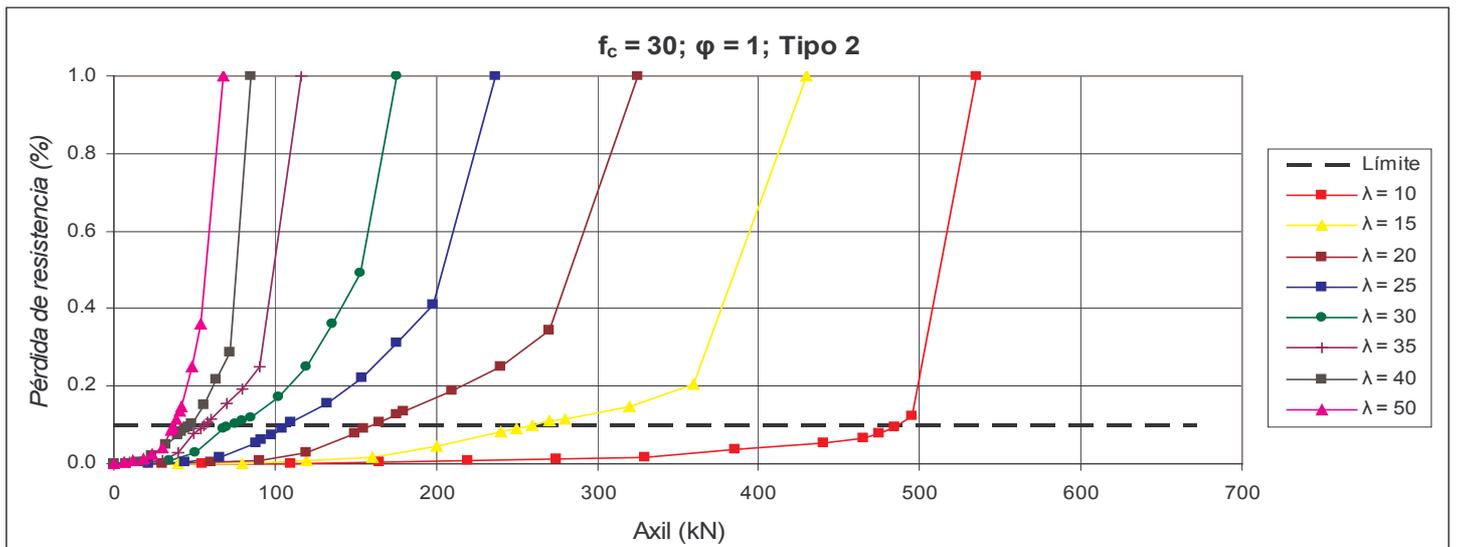
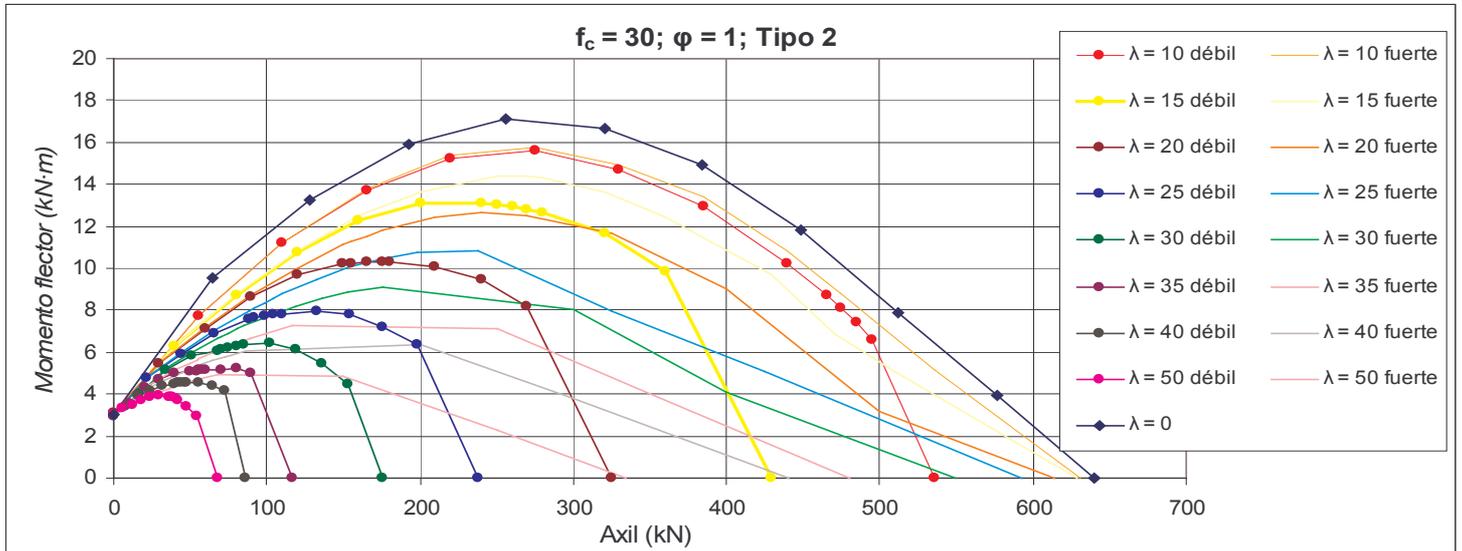
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
2	1	30	0.0666	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



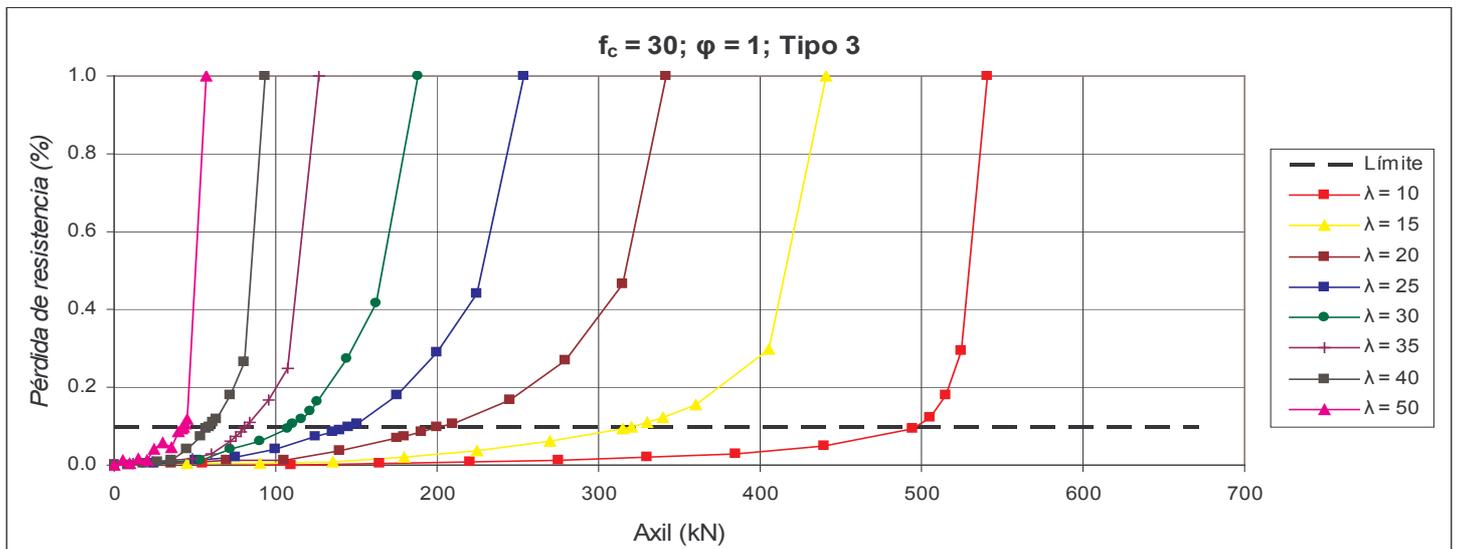
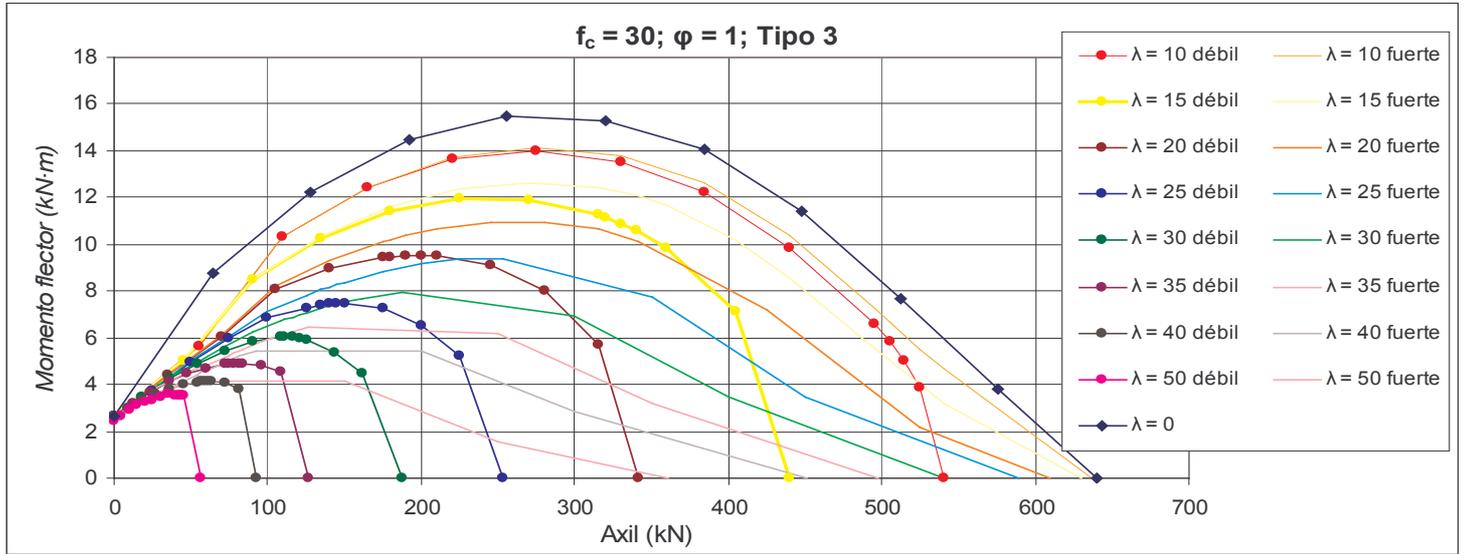
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	30	0.0666	1.73205081

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



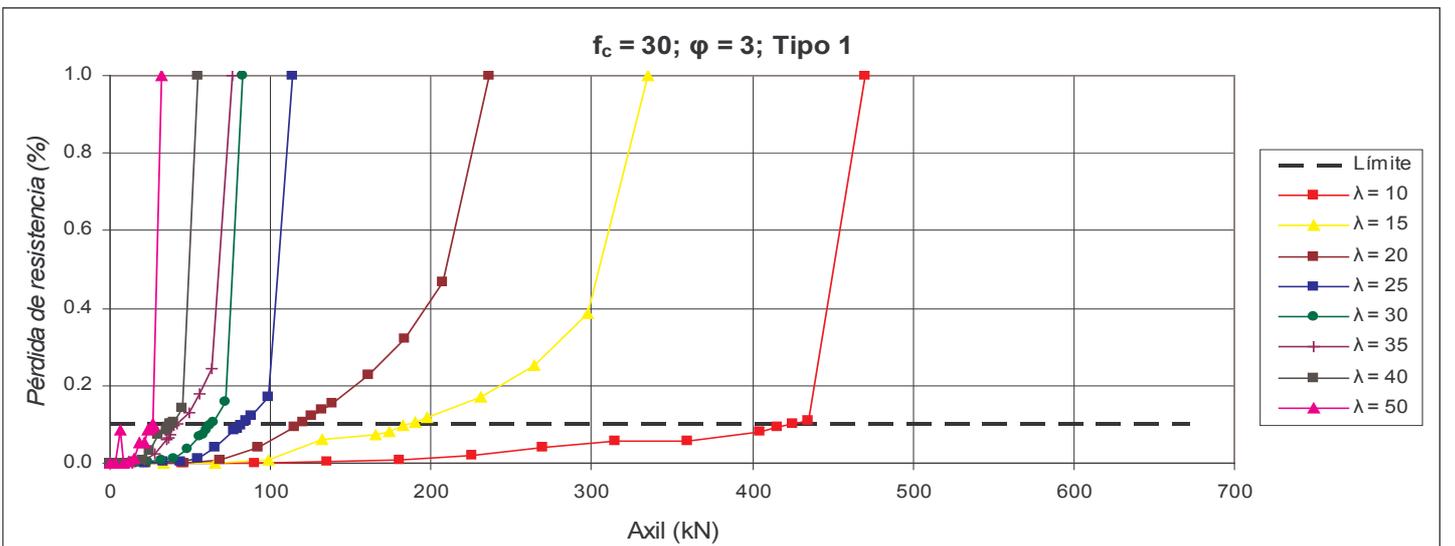
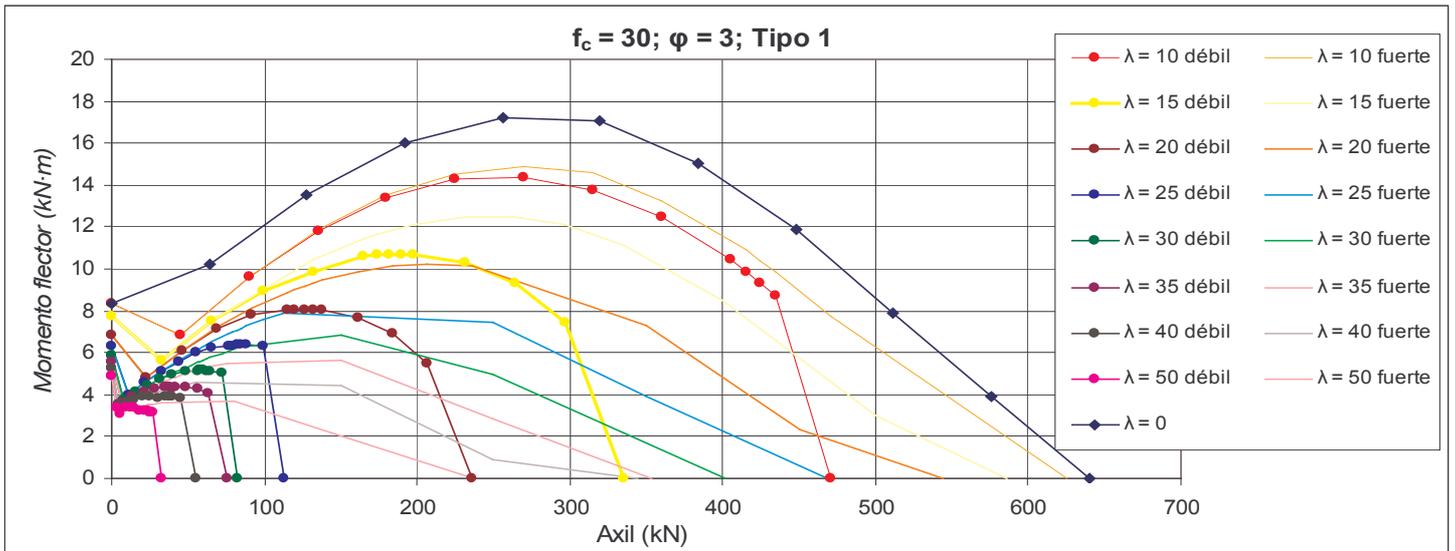
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	30	0.0666	0.57735027

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



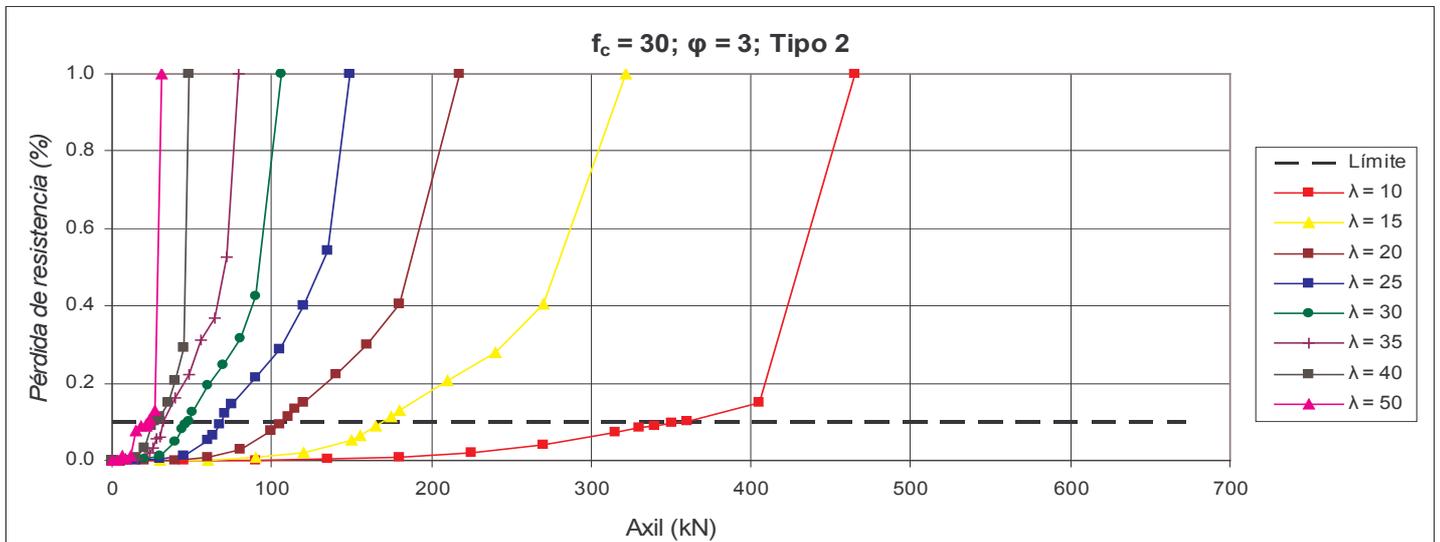
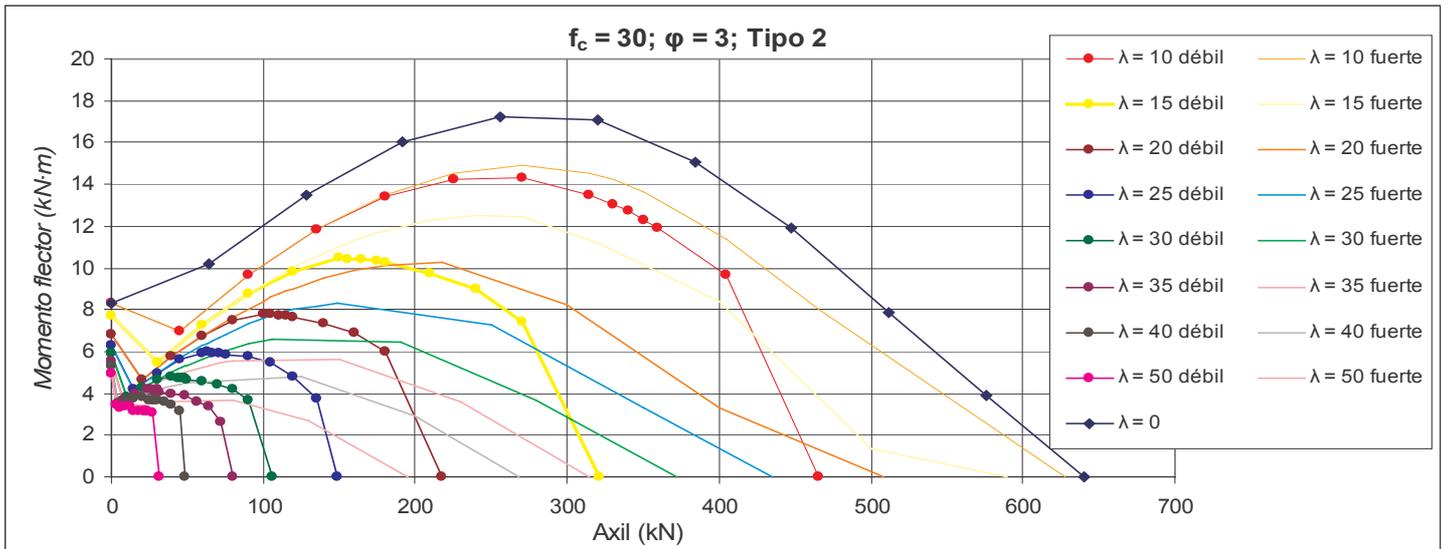
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
2	3	30	0.0666	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



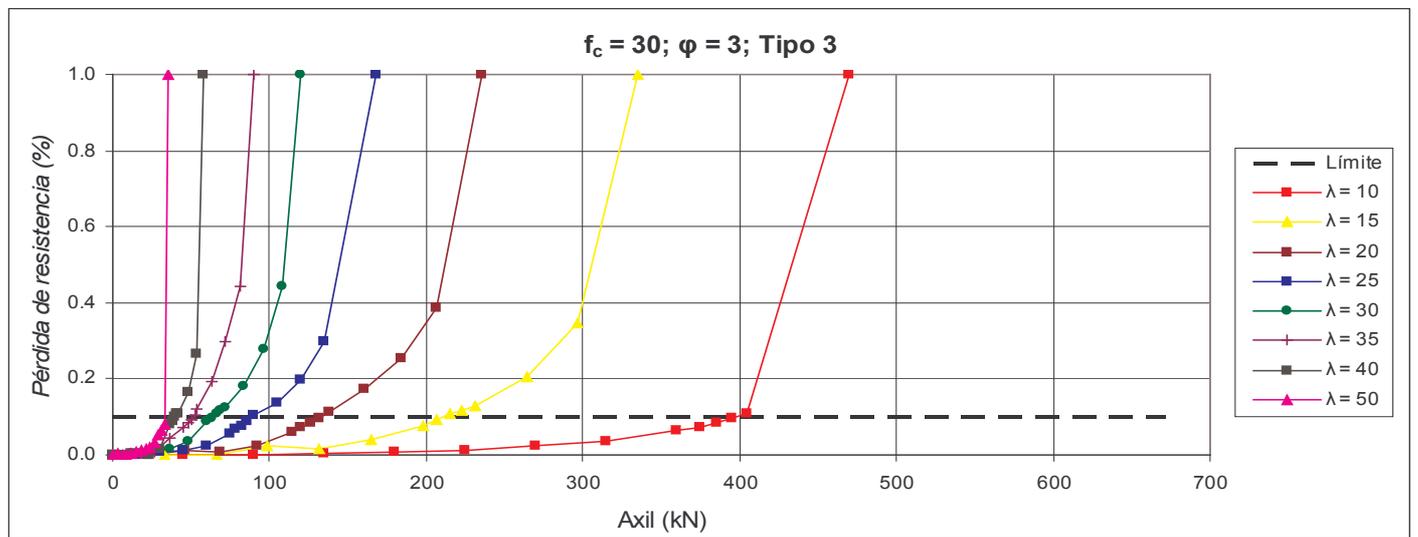
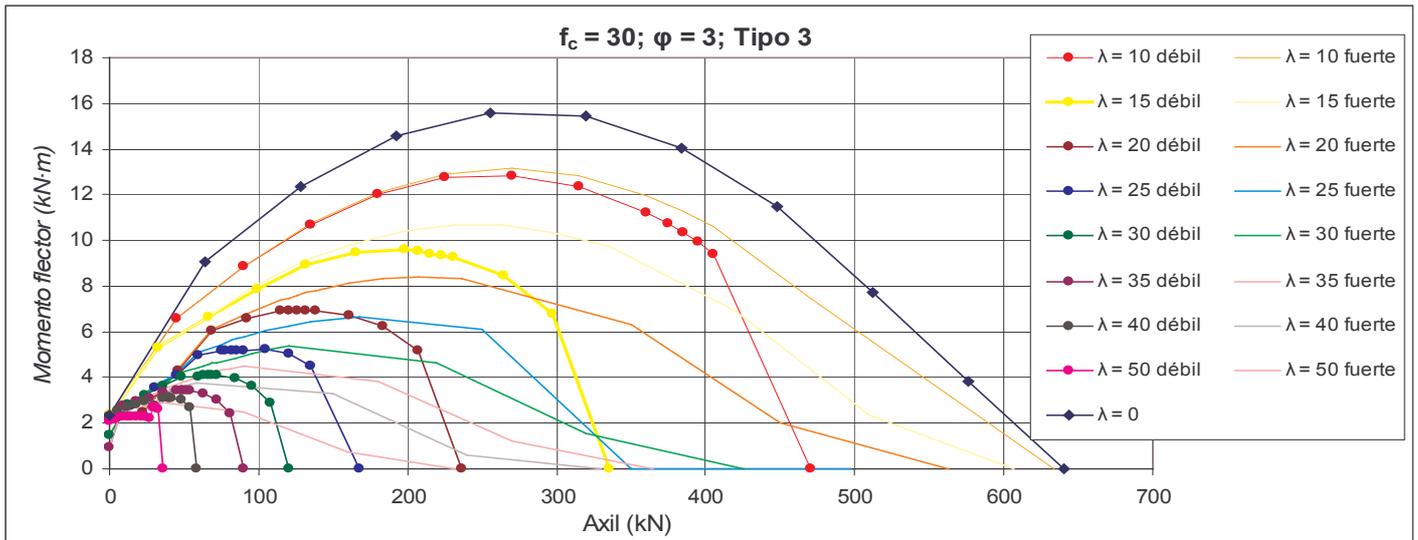
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	30	0.0666	1.73205081

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



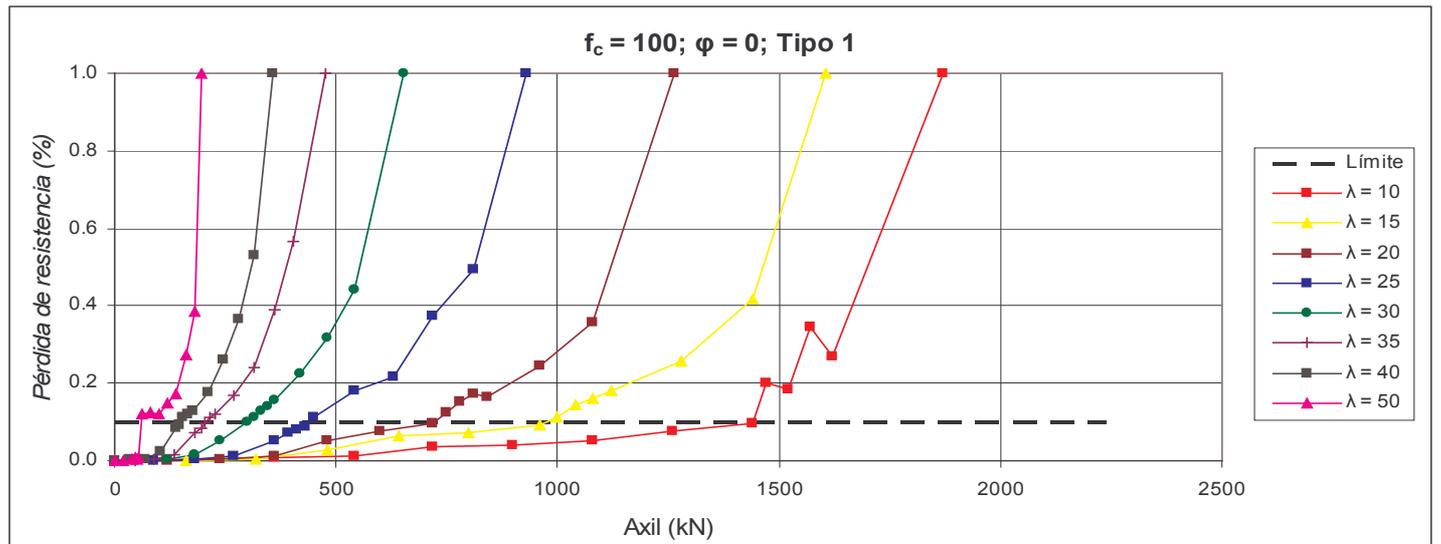
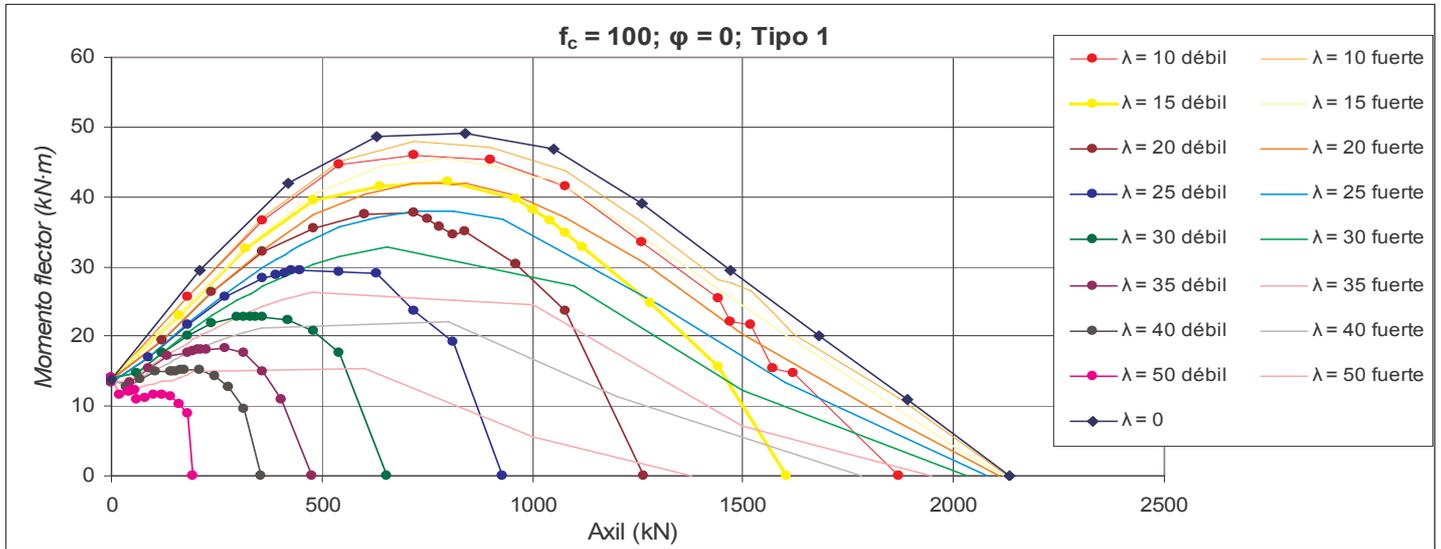
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	30	0.0666	0.57735027

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



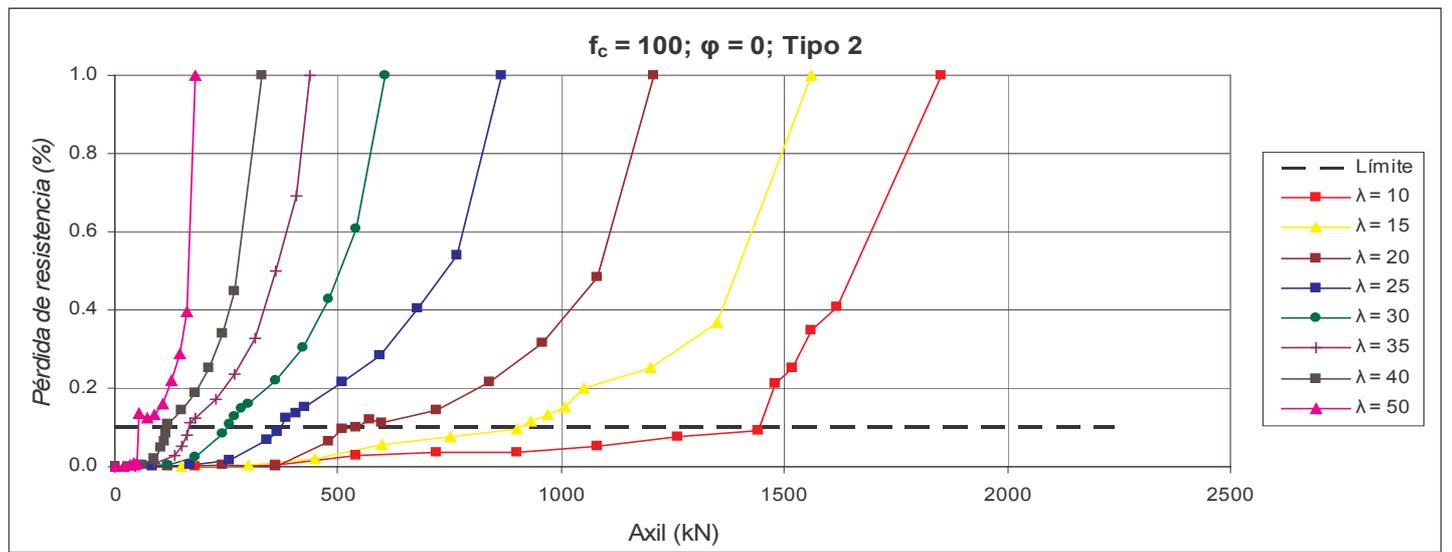
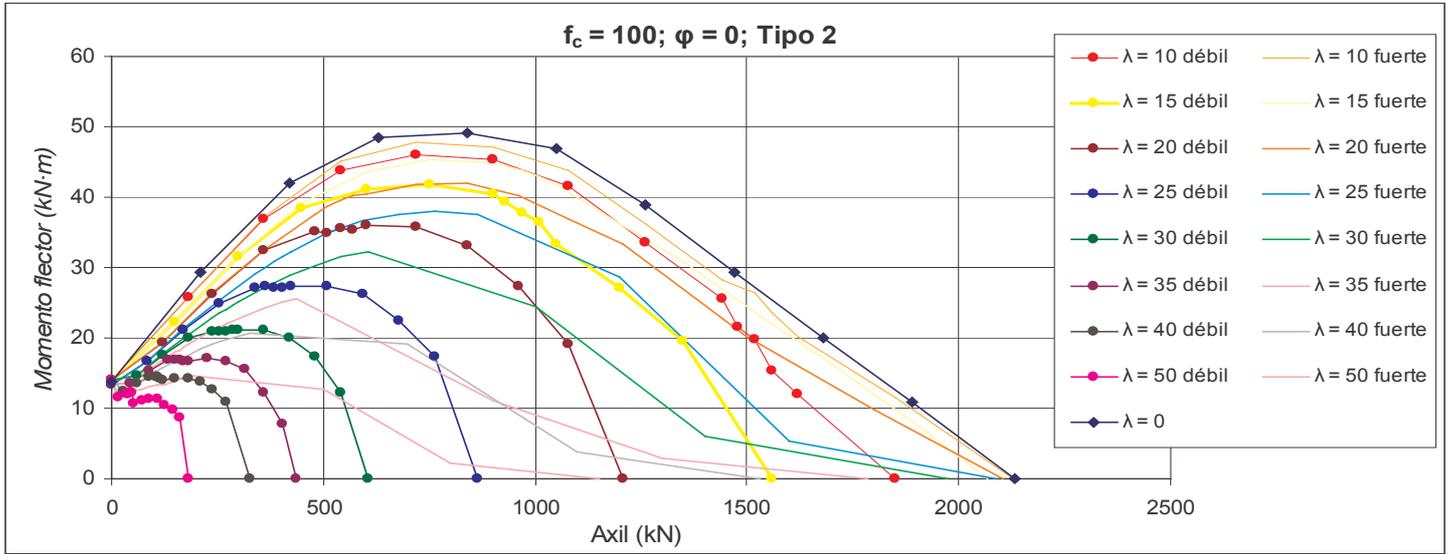
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	100	0.0666	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



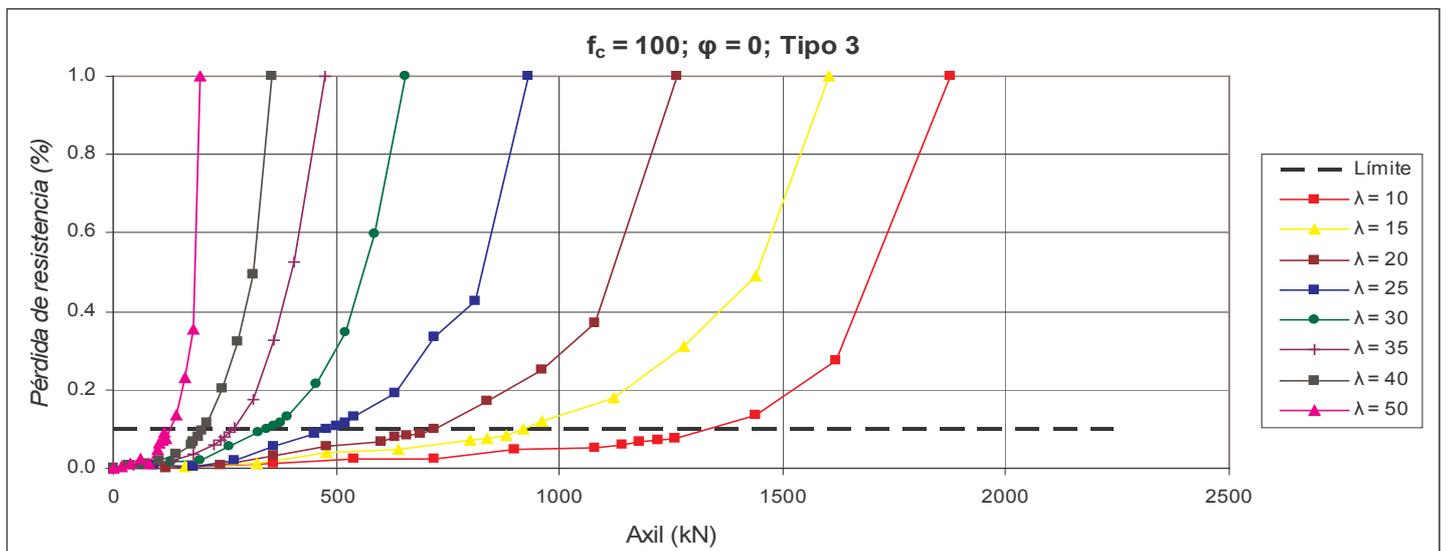
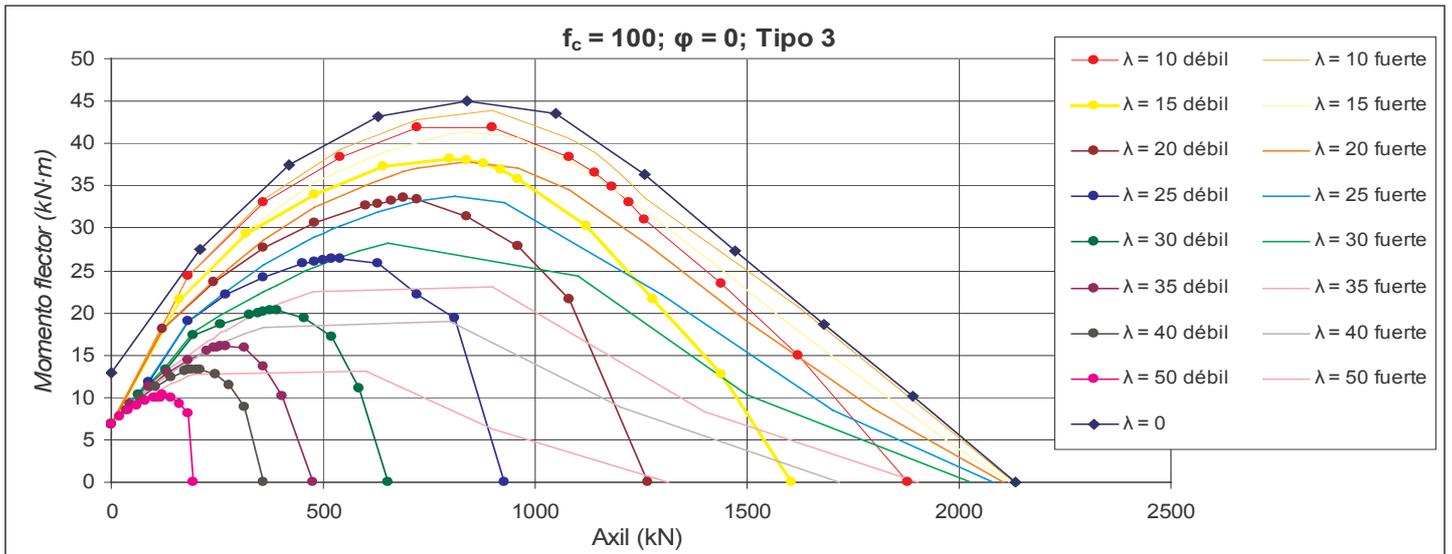
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	100	0.0666	1.73205081

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



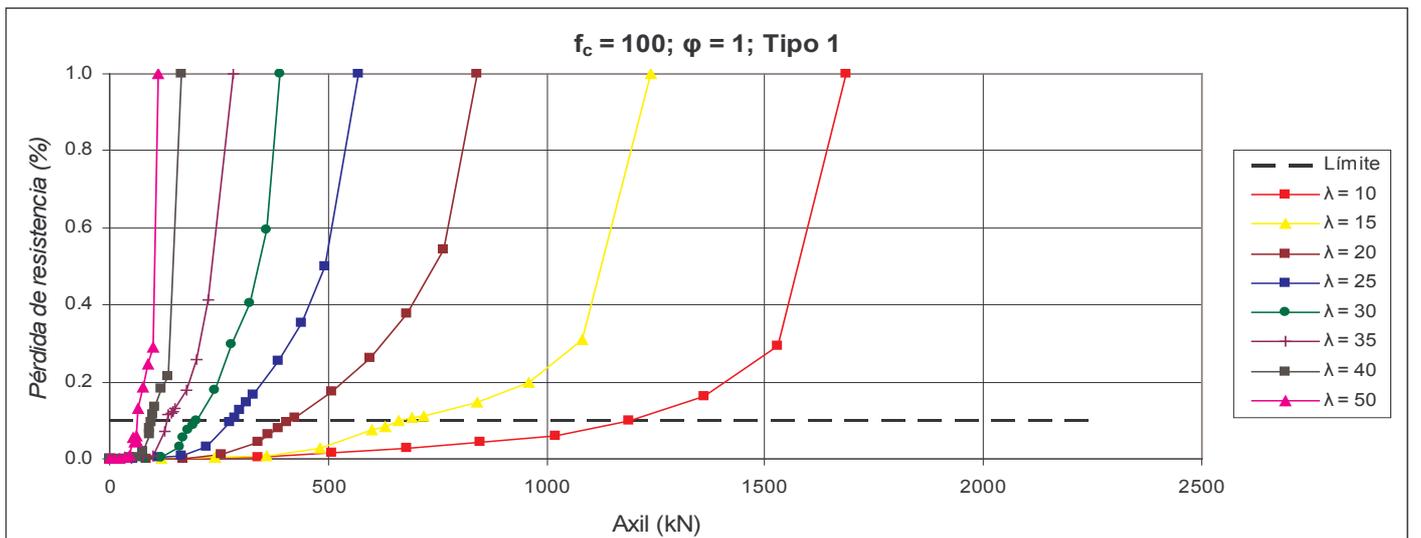
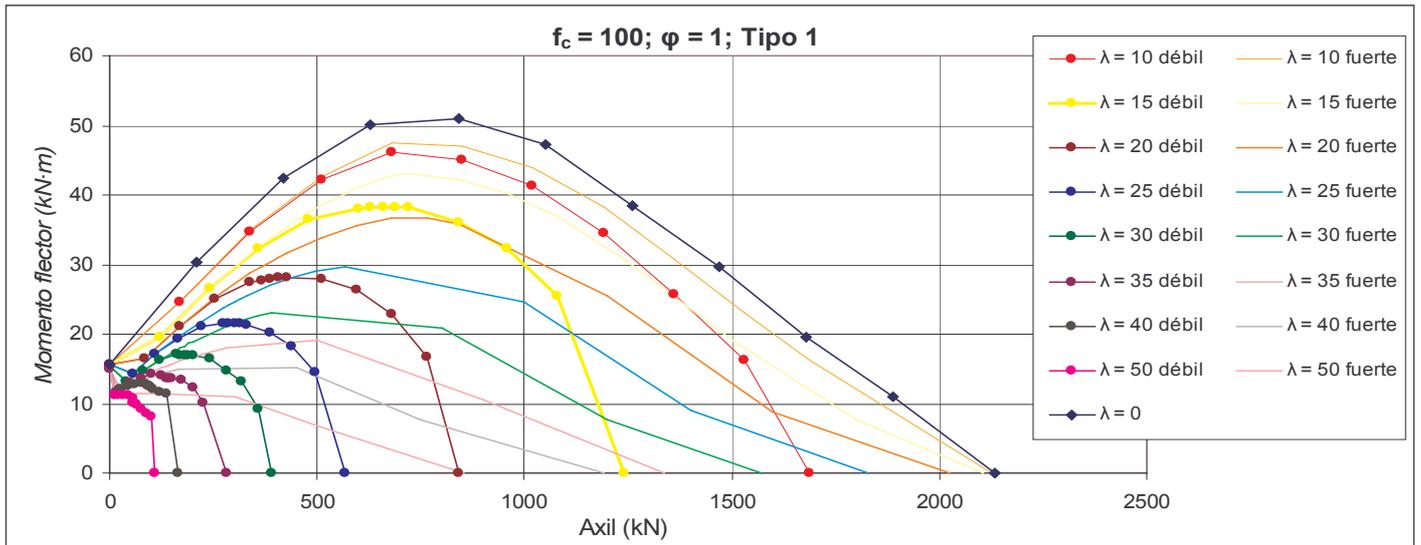
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	0	100	0.0666	0.57735027

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



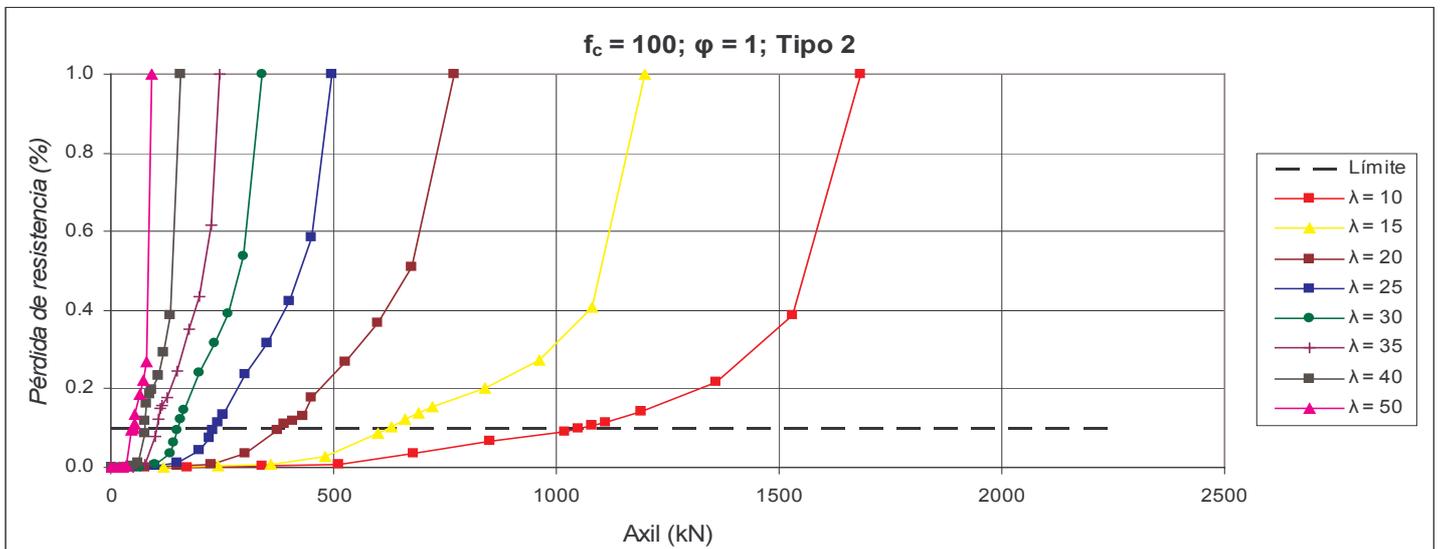
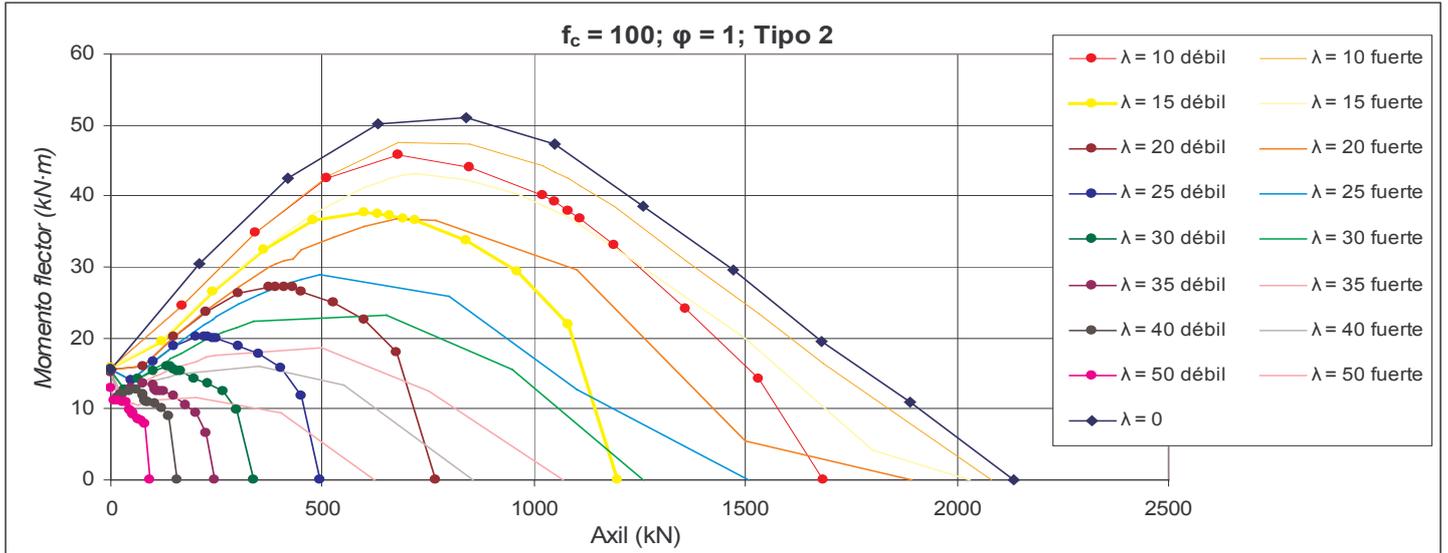
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
2	1	100	0.0666	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



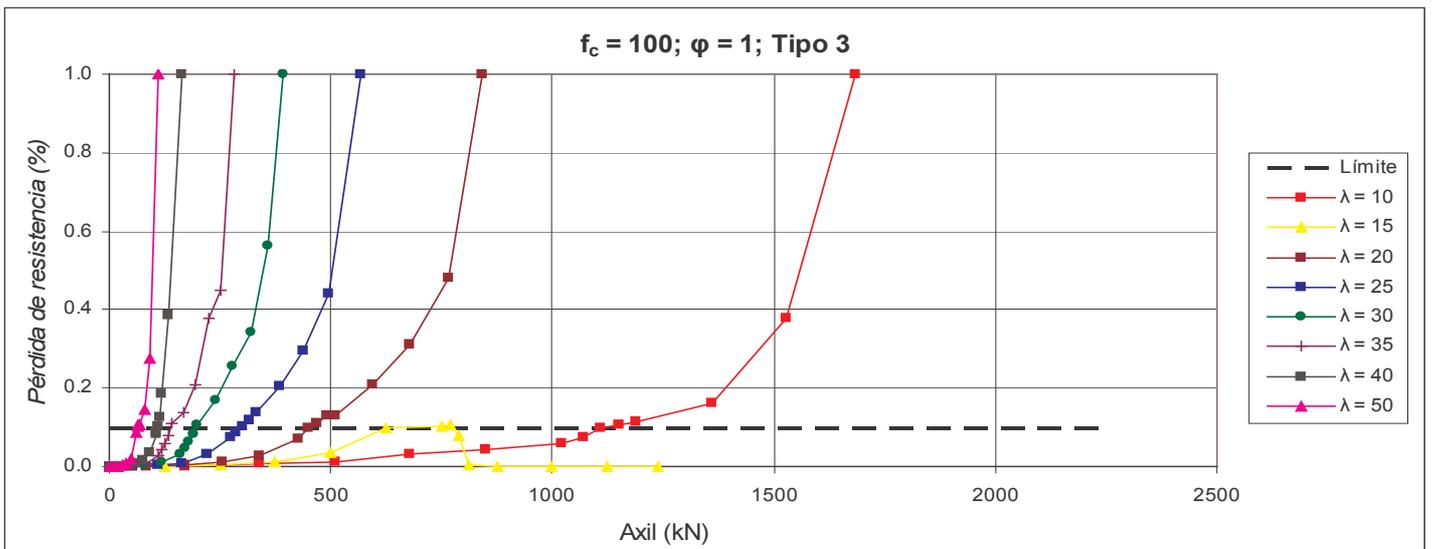
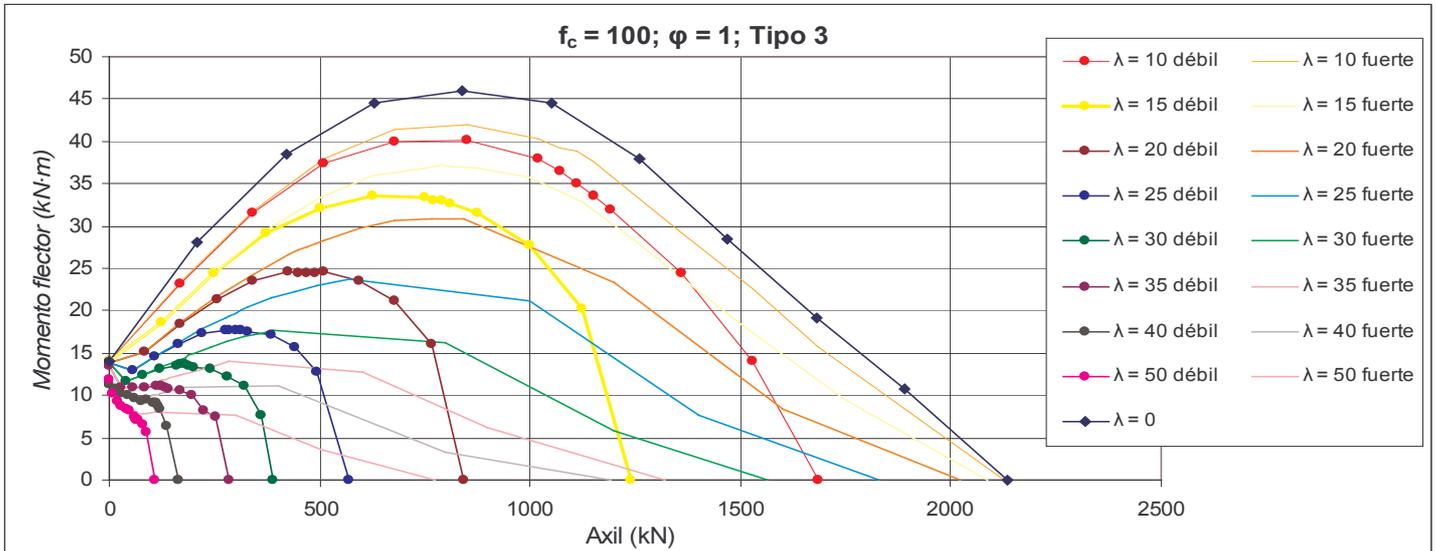
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	100	0.0666	1.73205081

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



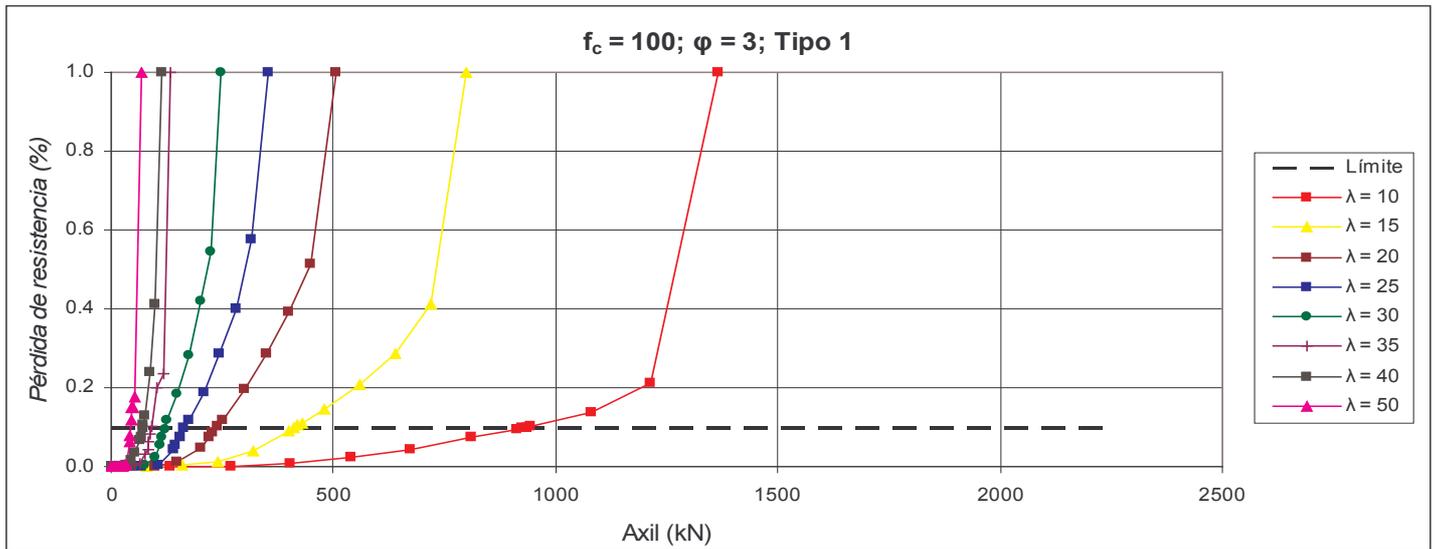
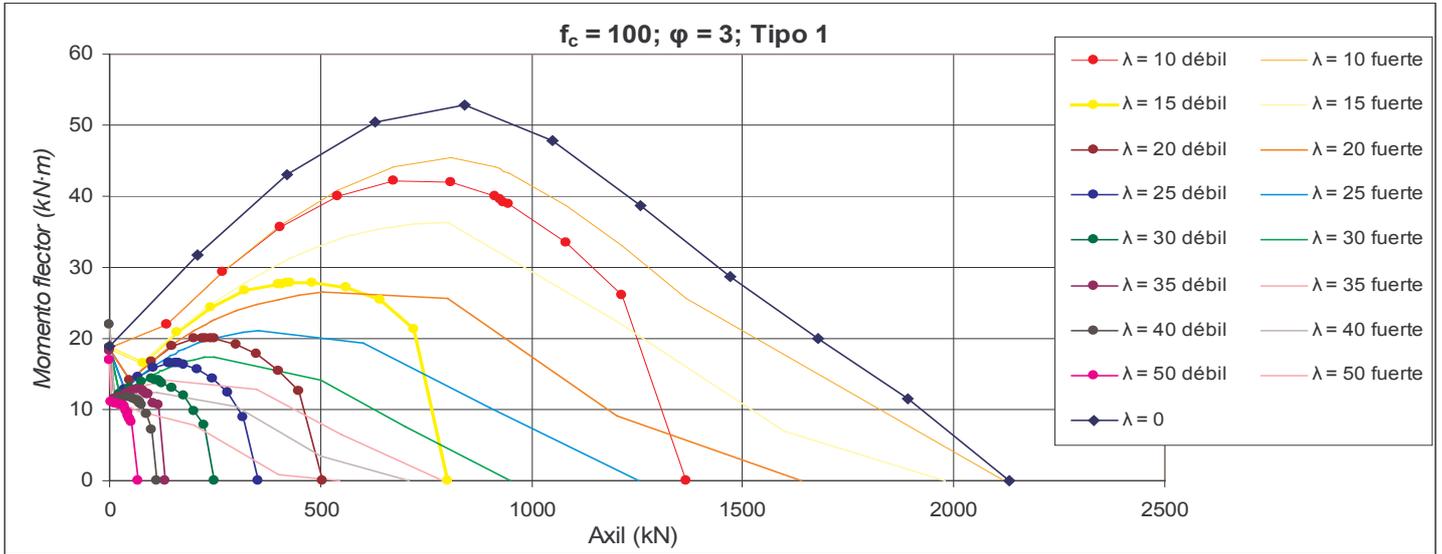
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	1	100	0.0666	0.57735027

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



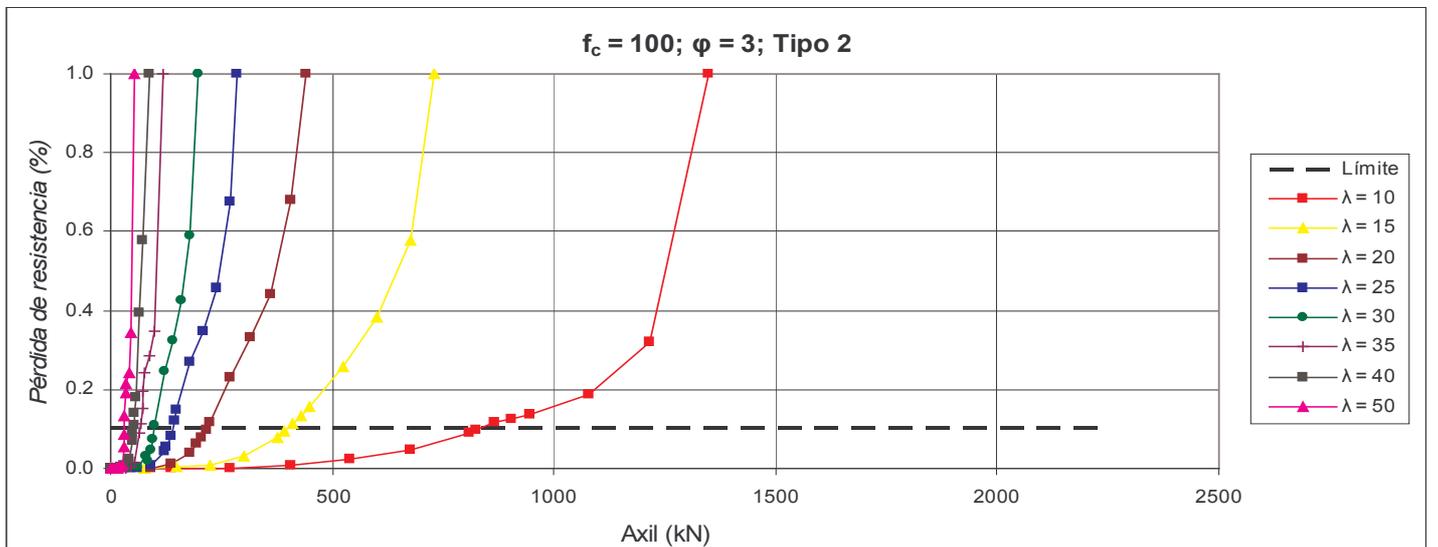
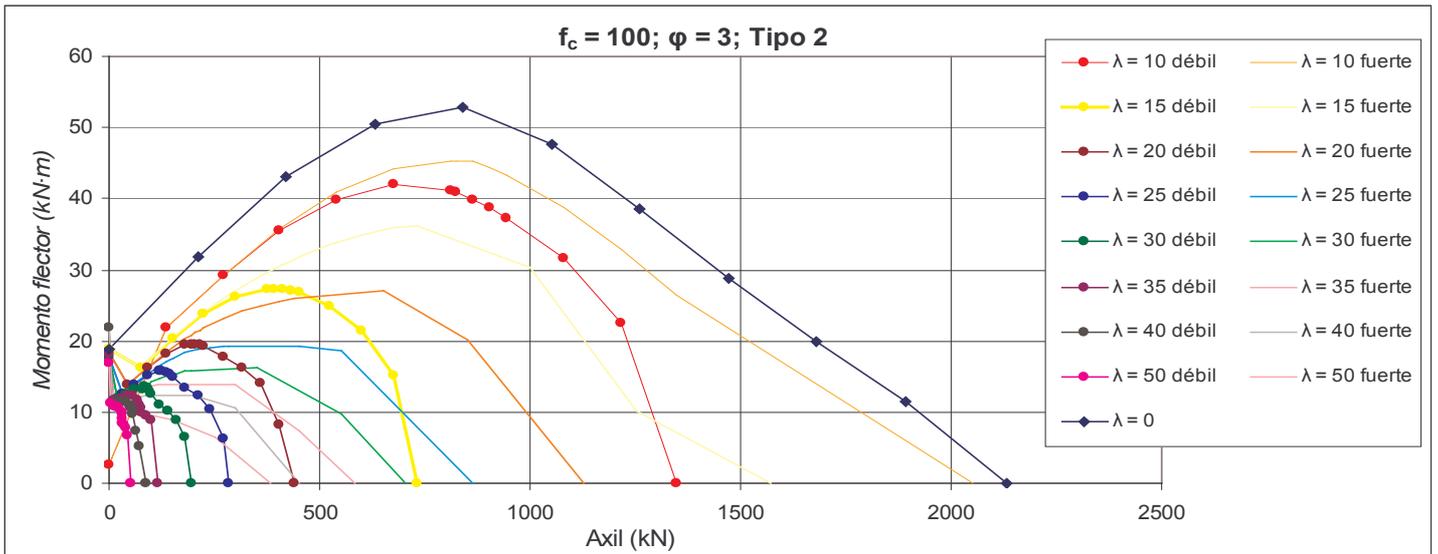
h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	3	100	0.0666	1

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



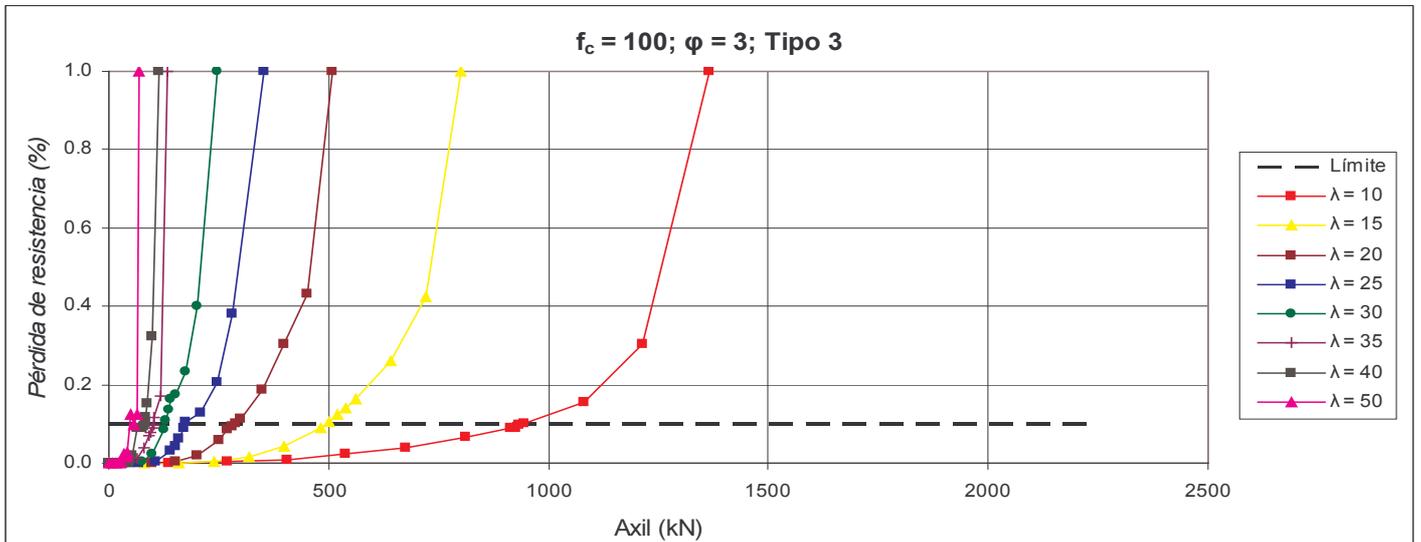
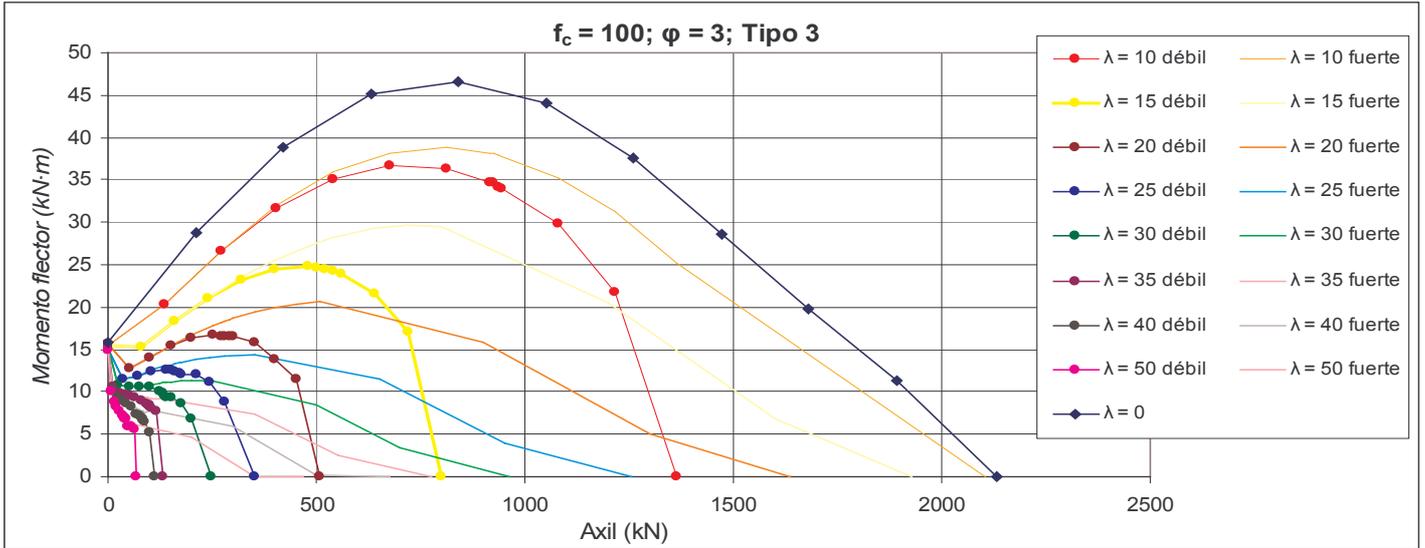
h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
2	3	100	0.0666	1.73205081

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



h/b	ϕ	f_c	ω	ψ
2	3	100	0.0666	0.57735027

Diagrama de interacción y error en función del axil reducido



h/b	φ	f_c	ω	ψ
2	variable	variable	0.0666	variable

Variación de la esbeltez en función del axil reducido para la variable considerada

