

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DE MASTER

**EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL J_{x1} EN
PROBLEMAS 3D CON GRIETAS DE
FRENTE RECTO.**

Presentada por: D. Rafael Jiménez Lorenzo

Dirigida por: Dr. D. Eugenio Giner Maravilla

Valencia, Junio de 2010

A mis padres, mis hermanos y amigos.
A ti.

RESUMEN

Este trabajo se enmarca dentro del programa del Máster de Ingeniería Mecánica y de Materiales impartido por la Universidad Politécnica de Valencia.

En la presente Tesis de Máster se han revisado los métodos energéticos más utilizados para la caracterización del estado tensional a lo largo de un frente de grieta 3D. Además de la integral de volumen J (método EDI), se ha escogido el método basado en el cálculo de la integral de línea-área J_{X1} .

Para el estudio de la integral J_{X1} se han analizado placas 3D con grietas de frente recto de diferentes espesores y se ha evaluado la integral J_{X1} a lo largo de diferentes caminos tomados a distintas distancias del frente de grieta. Se ha hecho uso del software comercial ABAQUS para la generación de los modelos de EF y posterior análisis estructural de las placas estudiadas. Se ha implementado una rutina en MATLAB para el postproceso de los resultados del MEF que permite el cálculo de la integral J_{X1} (así como de sus componentes J_P y J_A). Se ha estudiado el comportamiento de la integral J_{X1} dependiendo del espesor de la placa analizada y de la distancia del camino de integración escogido al frente de grieta. Finalmente, se ha presentado una serie de conclusiones y trabajos futuros propuestos.

Palabras clave: Mecánica de la Fractura, Factor de Intensidad de Tensiones, integral J , método de la Integral de Dominio Equivalente, integral de línea-área J_{X1} , integral J_P , integral J_A .

ABSTRACT

This work is included in the Master of Mechanical Engineering and Materials program given by the Universidad Politécnica of Valencia.

In the present Master Thesis the most used energetic methods to characterize the tensional state along a 3D crack front have been reviewed. Besides the volume integral J (EDI method), the one based on the path-area integral J_{X1} calculation has been chosen.

For the study of the J_{X1} integral, it has been analyzed 3D cracked plates with different thicknesses and the J_{X1} integral has been evaluated along different paths taken at different distances from the crack front. The commercial software ABAQUS has been used to generate the FE models and the structural analysis of the studied plates. It has been implemented a routine using MATLAB for the postprocessing of the FEM results which enables to calculate de J_{X1} integral (and its components J_P y J_A). It has been studied the behaviour of the J_{X1} integral depending on the analyzed plate thickness and on the distance from the crack front to the integration path. Finally, a set of conclusions and future proposed works has been presented.

Keywords: Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, J integral, Equivalent Domain Integral method, path-area integral J_{X1} , J_P integral, J_A integral.

RESUM

Este treball s'emmarca dins del programa del Màster d'Enginyeria Mecànica i de Materials impartit per la Universitat Politècnica de València.

En la present Tesi de Màster s'han revisat els mètodes energètics més utilitzats per a la caracterització de l'estat tensional al llarg d'un front de clavill 3D. A més de la integral de volum J (mètode EDI), s'ha triat el mètode basat en el càlcul de la integral de línia-àrea J_{X1} .

Per a l'estudi de la integral J_{X1} s'han analitzat plaques 3D amb clavills de front recte de diferents grossàries i s'ha avaluat la integral J_{X1} al llarg de diferents camins presos a distintes distàncies del front de clavill. S'ha fet ús del programari comercial ABAQUS per a la generació dels models d'EF i posterior anàlisi estructural de les plaques estudiades. S'ha implementat una rutina en MATLAB per al postprocesado dels resultats del MEF que permet el càlcul de la integral J_{X1} (así com dels seus components J_P i J_A). S'ha estudiat el comportament de la integral J_{X1} depenent de la grossària de la placa analitzada i de la distància del camí d'integració triat al capdavant de clavill. Finalment, s'ha presentat una sèrie de conclusions i treballs futurs proposats.

Paraules clau: Mecànica de la Fractura, Factor d'Intensitat de Tensions, integral J , mètode de la Integral de Domini Equivalent, integral de línia-àrea J_{X1} , integral J_P , integral J_A .

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar me gustaría dar las gracias a mi director de tesis Eugenio por su dedicación durante el largo periodo que ha durado la elaboración de esta tesis. Gracias por los conocimientos transmitidos y por todos los consejos recibidos tanto a nivel profesional como personal. Y sobre todo gracias por la infinita paciencia que has mostrado a lo largo de estos últimos 2 años. Gracias por todo.

También transmitir mi agradecimiento a todo el personal docente del Máster de Ingeniería Mecánica y de Materiales, por haber contribuido a ampliar mis conocimientos y mi formación académica. En especial, agradecer a los miembros del Área de Ingeniería Mecánica: Manolo, Pepe, Juanjo, Javier Fuenmayor, Paco, Alex, Javi, Luis, Andrés, y todos aquéllos que me pueda dejar por el camino.

Un profundo agradecimiento a mis compañeros del máster: Jose, Octavio, Juanen, Felipe, Santos, David y Dani. Pasamos un buen año entre risas, clases y alguna que otra cena. Os deseo a todos vosotros lo mejor en todas las etapas de vuestra vida.

Cómo no agradecer también a mis compañeros de la sala de becarios del departamento de ingeniería mecánica y de materiales. A Héctor, Enrique, Virginia, Antoine, Ramy, Mohamad, Vicente, Guillem, Jorge y Fede. Por todos esos cafés de máquina a las 9 de la mañana en la escalera de incendios.

Agradecer también al equipo de DIMM por esos partidos jugados durante el último año que nos han servido para distraer nuestra atención de los deberes diarios. A Julien, Victor y Alessio.

Por último agradecer a mis padres el esfuerzo que han realizado para que haya podido llegar hasta aquí y por haber hecho de mí la persona que soy hoy en día.

Y sobre todo, gracias a ti por haber hecho el esfuerzo de abrir la tesis que tanto esfuerzo me ha costado.

Junio 2010

Índice general

Resumen	i
Abstract	iii
Resum	v
Agradecimientos	vii
Índice general	ix
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 OBJETIVOS	3
1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESINA	4
2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL J MEDIANTE EL MEF	7
2.1 ECUACIONES DEL CAMPO ELÁSTICO EN MFEL	7
2.2 TASA DE LIBERACIÓN DE ENERGÍA G	12
2.3 MÉTODOS APLICABLES MEDIANTE EL MEF	14
2.3.1 <i>INTRODUCCIÓN</i>	15
2.3.2 <i>MÉTODOS ENERGÉTICOS APLICABLES MEDIANTE EL MEF</i>	17
2.3.3 <i>INTEGRALES DE CONTORNO</i>	19
2.3.3.1 La integral de contorno J	19
2.3.3.2 Las integrales de contorno J_k , L y M	28
2.3.3.3 Generalización a tres dimensiones	35
2.3.3.4 Evaluación numérica de la integral J mediante el MEF	40
2.3.4 <i>MÉTODO DE LA INTEGRAL DE DOMINIO (EDI)</i>	44
2.3.4.1 Método EDI en 2D	45
2.3.4.2 Método EDI en 3D	47
2.3.4.3 Formulación del método mediante el MEF	51
2.3.4.3.1 Aplicación a 2D	52
2.3.4.3.2 Aplicación a 3D	56
2.3.5 <i>MÉTODO DE LA INTEGRAL J_{XI}</i>	65
2.3.5.1 Definición de la integral J_{XI}	70
3 METODOLOGÍA EMPLEADA	75
3.1 FASE 1. GENERACIÓN Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS	77
3.1.1 <i>SUBFASE 1.1. DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL PROBLEMA</i>	78

3.1.2	<i>SUBFASE 1.2. GENERACIÓN DE LA MALLA</i>	79
3.1.3	<i>SUBFASE 1.3. MODIFICACIÓN DEL FICHERO .inp Y CREACIÓN DEL FICHERO .fil</i>	83
3.2	FASE 2. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DE LA INTEGRAL J_{X1}	87
3.2.1	<i>SUBFASE 2.1. ESTUDIO DEL PROBLEMA</i>	88
3.2.2	<i>PROGAMACIÓN EN MATLAB DE LA RUTINA PARA EL CÁLCULO DE J_{X1}</i>	90
3.3	FASE 3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS	110
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	113
4.1	CÁLCULO DE J_{X1}	113
4.2	J_{X1} EVALUADA PARA DISTINTOS ESPESORES	116
4.3	LA INTEGRAL J_p PARA DIFERENTES ESPESORES	120
4.4	VARIACIÓN DE LA INTEGRAL J_{X1} A LO LARGO DEL ESPESOR Y SU RELACIÓN CON EL VALOR DE J_p^*	123
4.5	VARIACIÓN DE LA INTEGRAL J_p Y J_p^* A LO LARGO DEL ESPESOR	126
5	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	129
5.1	CONCLUSIONES	129
5.2	TRABAJOS FUTUROS	131
6	BIBLIOGRAFÍA	133

1 INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

La Mecánica de la Fractura se ha valido de los avances introducidos en el campo de la simulación numérica para llevar a cabo el diseño de estructuras mediante el criterio tolerante al fallo.

En los últimos 30 años se ha impuesto el potente Método de los Elementos Finitos (MEF) para la aplicación de la Mecánica de la Fractura Elástico-lineal (MFEL) en las fases de diseño debido a su versatilidad.

Uno de los objetivos fundamentales de la Mecánica de la Fractura consiste en el estudio de propagación de grietas en estructuras mecánicas. A lo largo del siglo XX se han propuesto diferentes criterios para predecir el comportamiento de una grieta situada en el seno de un material. Algunos de ellos están basados en el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), K , mientras que otros se basan en el cálculo de la tasa de liberación de energía, G . La aplicación del MEF para el cálculo de K (o equivalentemente de G), en cualquier configuración geométrica es virtualmente ilimitada.

Sin embargo, la evaluación tanto de K como de G en un problema real de Mecánica de la Fractura Elástico-lineal a través de una técnica numérica como el MEF es siempre aproximada, debido a la existencia de errores de discretización y errores de redondeo. La evolución informática, con la introducción de ordenadores cada vez más potentes, permite el cálculo de estructuras con un menor error de discretización al emplear mallas más refinadas en el MEF.

Tradicionalmente, el comportamiento de grietas en sólidos elásticos se ha considerado fundamentalmente para situaciones 2D. Aunque en la bibliografía especializada en MFEL se puede encontrar análisis de grietas tridimensionales, la mayoría de los desarrollos prácticos llevados a cabo

1 INTRODUCCIÓN

continúan basándose en conceptos y resultados obtenidos para soluciones 2D. Sin embargo, se ha comprobado que en muchas ocasiones la mayoría de estos conceptos no son generalizables al caso 3D. El análisis de $J(s)$ en la dirección transversal en placas de espesor finito que presentan grietas de frente recto es uno de estos casos.

Es ampliamente conocido que la tenacidad a la fractura en placas con grietas aumenta cuando disminuye el espesor B para una longitud de grieta dada a . Este incremento es debido a la pérdida de constricción si se compara con la existente en una placa gruesa, a menudo asimilada a la condición de deformación plana. Un estudio detallado del efecto de la constricción solo puede ser llevado a cabo considerando los campos de tensión tridimensional alrededor del frente de grieta.

Por otro lado, en situaciones 3D como las que se presentan en placas reales de espesor finito, la integral J propuesta por Rice [4] no se puede aplicar de manera precisa puesto que ignora los campos de tensión y deformación en la dirección transversal (dirección del frente de grieta en el caso de grietas de frente recto que ocupa el presente trabajo de investigación). Como consecuencia, se hace necesario el estudio de la integral $J(s)$ en diferentes puntos a lo largo del frente de grieta. Este estudio se puede llevar a cabo con integrales de dominio 3D o con la integral de línea-área J_{X1} .

En este trabajo de investigación, la equivalencia entre la integral J_{X1} y otras integrales existentes para el cálculo de la integral a lo largo del frente $J(s)$ queda verificada. Este trabajo se ha centrado en el comportamiento de la integral J_{X1} (y de sus componentes J_P y J_A) para placas 3D de diferente espesor B con grietas de frente recto. Cuando se estudian por separado, estas integrales no son independientes del camino escogido y reflejan de diferente manera los efectos de los campos elásticos tridimensionales. Por lo tanto, su comportamiento a lo largo de una distancia r en la dirección normal al frente de grieta está influido por la presencia o ausencia de constricción lateral. También se ha estudiado la relación de las integrales J_{X1} , J_P y J_A con los casos de tensión plana y deformación plana 2D.

Se han analizado placas de espesor constante con una grieta de frente recto cargadas con una tensión uniforme de tracción que produce un

1 INTRODUCCIÓN

Modo I de apertura. Esta geometría resulta importante desde un punto de vista práctico ya que muchas probetas utilizadas en laboratorios para la caracterización de la tenacidad a la fractura de un material se basan en esta geometría (por ejemplo las conocidas como “*compact tension test specimen*” C(T)). Se ha asumido un material isótropo con comportamiento elástico lineal.

1.2 OBJETIVOS

El objetivo principal del trabajo de investigación desarrollado y que se expone en esta tesina es mostrar la validez de la integral J_{X1} (así como de sus componentes J_P y J_A) para caracterizar el estado de placas 3D de diferentes espesores B que presentan grietas de frente recto. Para conocer el estado tensional y deformacional de las mismas se ha realizado el análisis estructural de las mismas por el Método de Elementos Finitos (MEF).

Para poder llevar a cabo este análisis de EF se ha utilizado el software comercial ABAQUS 6.7. Una vez realizado el análisis por el MEF con ABAQUS, los resultados obtenidos han sido post-procesados en el software MATLAB 7.0 para el cálculo de la integral J_{X1} . Se han desarrollado una serie de rutinas que llevan al cálculo de J_{X1} . Finalmente, para el estudio del comportamiento de la integral J_{X1} (y de sus componentes J_P y J_A) se ha utilizado el software MATHCAD utilizando los valores de J_{X1} , J_P y J_A calculados por las rutinas desarrolladas en MATLAB.

Para alcanzar el objetivo principal, ha sido necesario alcanzar primero una serie de objetivos parciales:

- Revisión bibliográfica sobre los métodos utilizados para el cálculo de la integral J en la MFEL mediante el Método de los Elementos Finitos.
- Desarrollo de modelos geométricos en ABAQUS/CAE de placas en 3D con grietas de frente recto con diferentes espesores B .

1 INTRODUCCIÓN

- Mallado de los modelos geométricos en ABAQUS realizando una correcta distribución de elementos con el objetivo de obtener el menor error de discretización posible.
- Desarrollo de las rutinas necesarias en MATLAB para a partir de los resultados obtenidos del análisis de Elementos Finitos obtener los valores de las integrales J_{X1} , J_P y J_A .
- Finalmente, estudio de las integrales J_{X1} , J_P y J_A en función de diferentes parámetros (espesor de la placa analizada B , camino de integración escogido, plano en la dirección del espesor x_3 sobre el que se evalúa $J(s)$).

1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESINA

En primer lugar, en el capítulo 2 se detallan las expresiones matemáticas para la descripción de los campos de tensiones y deformaciones en los puntos cercanos al extremo de grieta. A continuación se muestran los métodos tanto locales como energéticos para el cálculo de los FIT, desarrollando en profundidad los métodos energéticos basados en integrales de contorno, en la integral de dominio equivalente (EDI) y en la integral J_{X1} .

En el capítulo 3, se presenta la metodología empleada en el trabajo de investigación indicando todas las fases llevadas a cabo para poder realizar un estudio detallado del comportamiento de la integral J_{X1} (y de sus componentes J_P y J_A).

En el capítulo 4 se presentan los resultados numéricos obtenidos en el desarrollo de este trabajo. Se muestra la independencia de la integral J_{X1} con respecto al camino escogido así como la variación de sus componentes J_P y J_A con respecto del camino de integración tomado. Se estudia el comportamiento de J_{X1} y de J_P para distintos espesores de placa B . Finalmente se estudia la integral J_{X1} a lo largo del espesor de la placa para mostrar la influencia del campo de tensiones y deformaciones en la dirección de fuera del plano de integración.

1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones extraídas de este trabajo de investigación y los posibles trabajos futuros que se pueden llevar a cabo utilizando este estudio como base.

Por último indicar que esta memoria concluye con una lista de referencias bibliográficas consultadas durante el desarrollo de este trabajo.

2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL J MEDIANTE EL MEF

2.1 ECUACIONES DEL CAMPO ELÁSTICO EN MFEL

En este apartado se presentan las ecuaciones que describen los campos de tensiones y de desplazamientos en presencia de singularidades. Estas ecuaciones permiten modelar una singularidad mediante el MEF.

Todos los problemas de la MFEL se caracterizan por presentar un comportamiento singular tanto en deformaciones como tensiones en el extremo (problemas 2D) o frente (problemas 3D) de grieta.

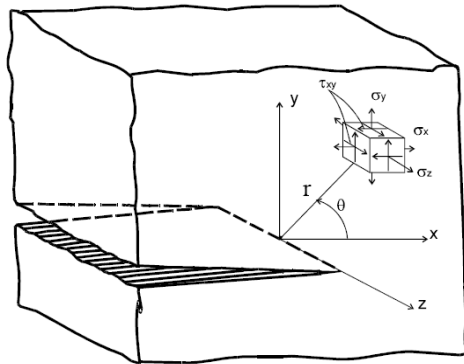


Figura 2.1 Sistemas de referencia cartesiano y polar utilizados para definir los campos de tensiones y desplazamientos en un punto cercano al frente de grieta en MFEL.

En la Figura 2.1 se presenta el frente de grieta recto de un sólido 3D. Para describir el estado tensional en la zona próxima al extremo de grieta se procede a la utilización de un sistema polar de coordenadas mostrado en la Figura 2.1. Las coordenadas (r, θ) están definidas en el plano XY que es perpendicular al extremo de grieta. Por otro lado, el plano XZ contiene la grieta y se denomina plano de grieta.

Broek (1986) define los tres modos de apertura a los que puede estar solicitada la grieta de un cuerpo sólido 3D como el mostrado en la Figura 2.1:

- Modo I o modo de apertura: es aquél en el cual la grieta se abre (o se cierra) en dirección perpendicular a la superficie de la misma (dirección Y) debido a tensiones normales al plano de fractura.
- Modo II o modo de deslizamiento: resulta debido a la aplicación de tensión cortante en el plano de fractura. Se producen desplazamientos longitudinales de las superficies en dicho plano.
- Modo III o modo de rotura transversal: se corresponde al desplazamiento de las superficies de fractura en sentidos opuestos, debido a la aplicación de tensión cortante en planos diferentes al plano de fractura.

La superposición de los desplazamientos de estos tres modos define cualquier otro tipo de deformación de la grieta. En general, el Modo I es el predominante y el más crítico en problemas de ingeniería. Además, los restantes modos tienden a evolucionar al estado de modo I. Es por ello que éste será el modo impuesto en los problemas analizados en este trabajo de investigación.

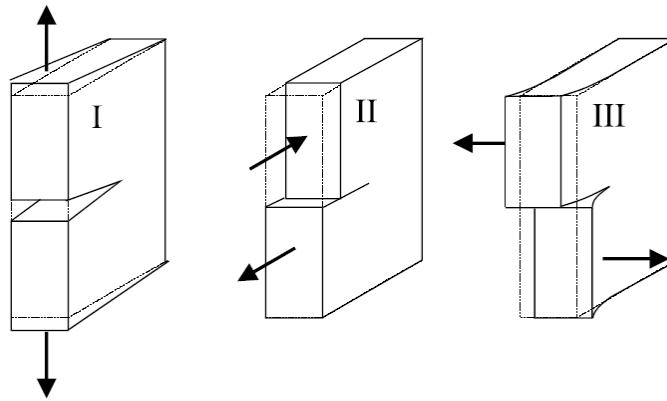


Figura 2.2 Modos de carga y de apertura de grieta.

El campo de tensiones en un punto (r,θ) situado suficientemente cerca del extremo de grieta de un sólido tridimensional, elástico lineal e isótropo como el mostrado en la Figura 2.1 fue propuesto por Williams [3]. De acuerdo con la nomenclatura propuesta en la Figura 2.1, las ecuaciones de Williams se corresponden a una expansión en serie cuyos primeros términos para un problema 3D de la MFEL son:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \text{o. t. acotados} \quad (2.1)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \text{o. t. acotados} \quad (2.2)$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{en tensión plana} \quad (2.3)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{en deformación plana}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} + \text{o. t. acotados} \quad (2.4)$$

$$\tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \text{o. t. acotados} \quad (2.5)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \text{o. t. acotados} \quad (2.6)$$

donde o. t. acotados hace referencia a otros términos de orden superior a $r^{1/2}$. Estos términos acotados normalmente se desprecian a la hora de describir el estado tensional en la proximidad del frente de grieta. Esto es debido a que en este caso $r \rightarrow 0$ y por lo tanto los términos proporcionales a $r^{-1/2}$ (denominados términos singulares) predominan sobre el resto de términos.

2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL J MEDIANTE EL MEF

Para el caso de modo I de carga, se tiene que $K_I \neq 0$ y $K_{II} = K_{III} = 0$. Análogamente ocurre para los otros modos de carga II y III.

De las ecuaciones anteriores se pueden extraer ciertas consideraciones:

- a) Se debe observar la existencia de otros términos que difieren de un problema a otro según las condiciones de contorno aplicadas. Sin embargo, estos términos pueden considerarse despreciables para puntos suficientemente cercanos al extremo de grieta, ya que en estos puntos $r \rightarrow 0$ y los términos que sí aparecen en las ecuaciones permanecen predominantes.
- b) Destacar que las ecuaciones expuestas con anterioridad son teóricas y no tienen sentido para puntos infinitamente cercanos al extremo de grieta donde las tensiones tienden a infinito. Tratando el problema desde un punto de vista matemático, el extremo de grieta puede ser considerado como un punto singular (o en el caso de grietas en 3D, una línea singular). Esta singularidad que se presenta en las grietas se conoce como singularidad de tipo $r^{-1/2}$.
- c) Observando las ecuaciones se puede apreciar que las tensiones para un punto del componente dado (r, θ) solamente dependen del valor de los K_I , K_{II} y K_{III} . Las tensiones son directamente proporcionales a los Factores de Intensidad de Tensiones, por lo que cuanto mayor sean éstos, mayores serán las tensiones presentes en el entorno de la grieta (de aquí deriva su nombre). Una vez conocido los Factores de Intensidad de Tensiones, los campos elásticos de tensiones y desplazamientos en las cercanías del extremo de grieta quedan totalmente determinados. Es por eso que se considera al Factor de Intensidad de Tensiones como un parámetro caracterizante del estado tensional.
- d) De las ecuaciones anteriores se puede extraer una conclusión importante. Cualquier grieta con los mismos

2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL J MEDIANTE EL MEF

FIT, tendrá asociado el mismo campo de tensiones en el extremo de grieta.

Cuando se trate de un componente suficientemente delgado en la dirección z , el problema se puede aproximar a un caso de tensión plana donde $\sigma_z \approx 0$. Por el contrario, cuando se trabaje con un componente con un espesor en dirección z razonablemente grande, será más oportuno hacer la suposición de que se trata de un caso de deformación plana con $\varepsilon_z \approx 0$.

En las ecuaciones anteriores aparecen los términos K_I , K_{II} y K_{III} denominados Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) para modo I, modo II y modo III respectivamente. Estos parámetros caracterizan la severidad de una grieta para el respectivo modo de carga y, como se puede observar en las diferentes expresiones, son parámetros caracterizantes del estado tensional. Así pues, conocidos los FIT, quedan totalmente determinados los campos elásticos de tensiones y desplazamientos en las cercanías del extremo de grieta.

La distribución de tensiones que aparece en el fondo de una grieta es igual para cualquier componente cargado en el mismo modo (el caso más habitual es encontrar componentes cargados en Modo I). Dicho de otro modo, en la hipótesis de elasticidad lineal, se puede interpretar que la grieta crea su propio campo de tensiones en las cercanías del extremo de grieta y se diferencia del campo de tensiones de otra grieta solamente en el Factor de Intensidad de Tensiones, K . De esta manera, aunque en el extremo de grieta exista un punto singular de la solución, se pueden comparar los campos de tensiones de dos grietas con el mismo modo de carga comparando simplemente el Factor de Intensidad de Tensiones de cada una de ellas. Como se pudo comprobar en las ecuaciones anteriores, cuanto mayor sea el FIT, el extremo de grieta estará sometido a un campo de tensiones más severo. Es por ello que al FIT se le considera un parámetro que refleja la severidad de una grieta.

En cuanto al campo de desplazamientos, sus primeros términos en puntos cercanos al frente de grieta vienen dados por las siguientes expresiones:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) + \text{o. t. acotados} \quad (2.7)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) + \text{o. t. acotados} \quad (2.8)$$

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \text{o. t. acotados} \quad (2.9)$$

donde μ es el módulo de rigidez a cizalladura y κ es la constante de Kolosov, que toma los siguientes valores dependiendo del tipo de estado tensional:

$$\begin{aligned} \kappa &= 3 - 4\nu && \text{en deformación plana} \\ \kappa &= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} && \text{en tensión plana} \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson.

Cabe destacar que existe una relación explícita (demostrada por Irwin) entre los FIT y la tasa de liberación de energía G (ver p. ej. Gdoutos [5])

2.2 TASA DE LIBERACIÓN DE ENERGÍA G

La tasa de liberación de energía G representa la energía disponible para la generación de nuevas superficies de grieta, esto es, para que la grieta progrese. Un cuerpo elástico sometido a una serie de cargas exteriores presentará una cierta deformación. Debido a esta deformación, el cuerpo almacena una cierta energía potencial. Cuando la grieta progrese, cambia la geometría del cuerpo, la distribución de tensiones, los puntos de aplicación de las cargas, etc. Este cambio supondrá una variación en la energía disponible:

2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL J MEDIANTE EL MEF

- Cuando la variación de la energía disponible sea igual o mayor que la energía necesaria para romper la cohesión del material existente en el extremo de la grieta, esta grieta progresará. Puede ocurrir que este crecimiento de grieta se produzca de manera inestable, propagándose en este caso rápidamente y ocasionando finalmente la rotura total de la pieza.
- En caso contrario, cuando la variación de la energía disponible en el cuerpo sea menor que la energía necesaria para romper el material, la grieta no progresará.

Cada material presenta una resistencia que debe ser vencida para que la grieta avance. Esta resistencia, denotada comúnmente por R , es una propiedad intrínseca del material.

La tasa de liberación de energía por unidad de área de grieta G está definida como:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (2.11)$$

donde A es la longitud de grieta y Π es la energía potencial total del sistema, que viene definida por:

$$\Pi = U + F \quad (2.12)$$

siendo U la energía potencial de deformación elástica almacenada en el cuerpo y F es la energía potencial de las fuerzas exteriores aplicadas (que es equivalente al trabajo realizado por las fuerzas externas pero cambiado de signo, suponiendo que éstas son constantes).

En el caso en que el material tenga un comportamiento elástico lineal, se puede demostrar que K y G están relacionados por la siguiente expresión:

2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL J MEDIANTE EL MEF

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{E} (1 + \nu) = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (2.13)$$

siendo G_I , G_{II} y G_{III} las tasas de liberación de energía correspondientes a los diferentes modos de carga:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} ; G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} ; G_{III} = \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.14)$$

donde E se corresponde con el módulo de elasticidad o módulo de Young, ν es el coeficiente de Poisson y E' es el módulo de elasticidad efectivo el cual, dependiendo del estado tensional, tiene un valor de:

$$\begin{aligned} E' &= E && \text{en estados de tensión plana} \\ E' &= \frac{E}{(1 - \nu^2)} && \text{en estados de deformación plana} \end{aligned} \quad (2.15)$$

La relación (2.13) tiene en la práctica una gran utilidad.

En apartados posteriores se demuestra que para el caso de la Mecánica de la Fractura Elástico Lineal (MFEL) se cumple la relación:

$$G = J = J_1 \quad (2.16)$$

2.3 MÉTODOS APLICABLES MEDIANTE EL MEF

En este apartado se hace una revisión a los principales métodos energéticos más conocidos y eficientes que admiten su implementación mediante el MEF que permiten el cálculo de las integrales J y J_2 . A partir de ellos será posible obtener fácilmente la tasa de liberación de energía G y posteriormente los Factores de Intensidad de Tensiones K .

2.3.1 INTRODUCCIÓN

El Método de Elementos Finitos (MEF) se ha consolidado durante el último medio siglo como el método más versátil para el análisis de problemas de la mecánica del sólido. Tras el establecimiento de las bases del método, muy pronto surgieron aplicaciones directas a la Mecánica de la Fractura. Desde entonces el número de referencias en la literatura acerca de la aplicación del MEF a la Mecánica de la Fractura ha crecido de forma imparable.

A lo largo de los últimos 40 años han aparecido periódicamente revisiones de los métodos que permiten aplicar el MEF a la Mecánica de la Fractura. Estas técnicas permiten la evaluación tanto de las integrales J y J_2 como del Factor de Intensidad de Tensiones K (o equivalentemente la tasa de liberación de energía G) de los problemas mecánicos y se pueden agrupar en dos grandes grupos:

- **Métodos globales (o indirectos):** se basan en planteamientos energéticos extendidos a zonas que no necesariamente corresponden al entorno de grieta, lo que hace innecesario un modelado preciso de la singularidad. El parámetro caracterizante calculable con estos métodos es la tasa de liberación de energía G , permitiendo así la estimación indirecta de los FIT por medio de la ec. (2.13). Los métodos globales más ampliamente utilizados son:
 - Diferencias finitas de U .
 - Integrales de contorno (integral J y otras integrales).
 - Método de las funciones de extracción.
 - Método de la Integral de Dominio Equivalente (EDI).
 - Método de la derivada de la matriz de rigidez.
 - Método del cierre virtual de grieta (VCCT).
 - Integral de línea-área J_{χ_1} .
- **Métodos locales (o directos):** tras un análisis numérico del problema, la evaluación del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) se realiza a partir de los campos de desplazamientos y/o tensiones obtenidos en el entorno de grieta. Alguno de los métodos de extracción locales más utilizados son:

2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL J MEDIANTE EL MEF

- Extrapolación de desplazamientos y tensiones.
- Correlación de desplazamientos (DCT).
- Desplazamientos en nodos “quarter-point” (QPDT).
- Método de las fuerzas nodales.
- Ajuste por mínimos cuadrados.

Para estos métodos, es necesario un correcto modelado de la singularidad. Existen varias técnicas para este correcto modelado:

- Refinamiento de malla: lo que conlleva un mayor coste computacional al ser necesario un mayor número de grados de libertad.
- Utilización de elementos singulares: tratan de modelar de manera adecuada el comportamiento singular en el entorno del extremo de grieta. Se pueden clasificar como:
 - Elementos con funciones de forma especiales.
 - Elementos enriquecidos.
 - Elementos híbridos.
 - Elementos basados en transformaciones geométricas.
 - Elementos de transición.
- Utilización de otras variaciones del MEF: se trata de variaciones sobre la formulación estándar del MEF, orientadas a simplificar la habitualmente tediosa definición de malla en el entorno de grieta. Tres de estas alternativas son:
 - Superposición de malla.
 - Sustitución local de malla (ALMR).
 - Método extendido de EF (X-FEM).

El objetivo fundamental de esta tesina es el estudio de la integral J en grietas de frente recto en 3D de la Mecánica de la Fractura Elástico Lineal. Según se presentó en la ec. (2.16), para el caso de MFEL, la integral J coincide con la tasa de liberación de energía G . Así pues, para el cálculo de la integral J será necesario el empleo de métodos globales, por lo que serán los que se tratarán en profundidad en esta tesina.

2.3.2 MÉTODOS ENERGÉTICOS APLICABLES MEDIANTE EL MEF

Los métodos energéticos (también conocidos como indirectos ya que permiten obtener los FIT de manera indirecta a través del cálculo de G) se fundamentan en un enfoque radicalmente distinto al problema de extracción de los Factores de Intensidad de Tensiones en MFEL, lo que permite estimar la tasa de liberación de energía G e indirectamente K . Comparados con los métodos locales (o directos), estos métodos presentan notables ventajas que los hacen especialmente indicados para la evaluación de la tasa de liberación de energía G (y por consiguiente de la integral J). Esto es debido principalmente a dos características muy destacables, a saber:

- Permiten obtener resultados precisos utilizando mallas relativamente bastas y sin necesidad de ningún refinamiento especial en el entorno de grieta. Estos métodos implican la evaluación global de ciertas magnitudes energéticas, haciendo intervenir en su cómputo elementos alejados del extremo de grieta, en zonas donde los campos de EF son aproximados con mayor exactitud. Su elevada precisión es una consecuencia del fundamento mismo del MEF: minimización de forma global de un funcional de carácter energético¹. Por tanto, estos métodos hacen innecesaria la utilización de elementos singulares².
- Los métodos energéticos se prestan a una estimación del error de discretización cometido al utilizar el MEF. La solución aproximada dada por el MEF es la que mejor representa la solución exacta de entre todas las disponibles con una malla dada y es interpretable como la solución que mejor se ajusta desde un punto de vista de mínimos cuadrados. En general, y dado que el

¹ Minimización del funcional *energía potencial total* Π .

² Elementos singulares: elementos específicos que permiten modelar de forma adecuada el comportamiento singular en el entorno del extremo de grieta. Su utilización reduce las exigencias en cuanto a los refinamientos necesarios para modelar correctamente el comportamiento teórico. Evidentemente, la utilización de elementos singulares en combinación con la implementación de métodos energéticos puede contribuir a la obtención de una solución más precisa.

error de discretización de EF está distribuido por todos los elementos de la malla en mayor o menor grado, técnicas globales de estimación que consideren el error de discretización en un gran número de elementos de la malla permitirán evaluar mucho mejor el error cometido.

De entre los métodos energéticos, los más importantes son los que se muestran a continuación:

- Diferencias finitas de U .
- Integrales de contorno (integral J y otras integrales).
- Método de las funciones de extracción.
- Método de la Integral de Dominio Equivalente (EDI).
- Método de la derivada de la matriz de rigidez.
- Método del cierre virtual de grieta (VCCT).
- Integral de línea-área J_{X1} .

En general, un gran inconveniente de los métodos energéticos es su dificultad para separar las contribuciones energéticas asociadas a cada uno de los modos de apertura de grieta y así obtener estimaciones independientes de G_I , G_{II} y G_{III} (y consecuentemente, K_I , K_{II} y K_{III}). Sin embargo, con el fin de paliar este inconveniente, existen técnicas específicas para desacoplar los modos (como la integral de interacción con campos auxiliares).

Otro inconveniente de los métodos energéticos cuando se aplican a problemas 3D es que la equivalencia de G con K sólo queda definida si se asume un estado ideal de deformación plana o bien de tensión plana. Aunque lejos de la intersección del frente de grieta con la superficie del sólido es frecuente suponer un estado de deformación plana, en situaciones intermedias no es posible suponer ninguno de los dos estados. Para intentar paliar esta deficiencia, algunos autores han propuesto valores del módulo de elasticidad efectivo E' para un caso intermedio entre tensión plana y deformación plana.

Por otra parte, y al contrario de lo que sucede con los métodos locales, los métodos energéticos permiten caracterizar un frente de grieta 3D en su intersección con la superficie libre.

De todos los métodos energéticos, en esta tesina se presentarán los basados en **integrales de contorno**, los basados en el **método de la integral de dominio equivalente** (EDI) y los basados en la **integral de línea-área J_{X1}** , ya que son los que más ampliamente se han utilizado en problemas de grietas 3D de frente recto para modo I de apertura de la MFEL. El método que se ha desarrollado en profundidad en este trabajo es el último de ellos.

2.3.3 INTEGRALES DE CONTORNO

2.3.3.1 La integral de contorno J

La evaluación correcta del campo de deformaciones en las inmediaciones de una entalla o grieta con el objetivo de permitir su caracterización suele presentar dificultades (en especial si se considera un comportamiento no lineal del material). Este hecho llevó a Rice [4] a proponer la conocida integral de contorno J , originariamente para una entalla en un problema bidimensional en el que el campo de tensiones sólo depende de dos coordenadas cartesianas x e y .

Bajo las hipótesis de sólido homogéneo con comportamiento elástico (no necesariamente lineal), libre de fuerzas por unidad de volumen y contorno de la entalla libre de fuerzas por unidad de superficie aplicadas, Rice definió su integral J como sigue (teniendo en cuenta la disposición de la entalla con arreglo al sistema de referencia mostrado en la Figura 2.3):

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} d\Gamma \right) \quad (2.17)$$

donde Γ es cualquier camino que rodee el extremo de entalla (cuyo contorno es Γ_l), recorrido en sentido antihorario desde una cara de la entalla a la otra, W es la energía de deformación por unidad de volumen, \mathbf{T} es el vector de tracciones en el contorno Γ (fuerzas por uds.), \mathbf{u} es el

vector de desplazamientos y $d\Gamma$ es un elemento diferencial de arco de la curva Γ .

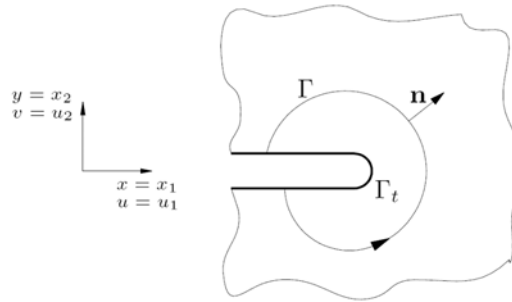


Figura 2.3 Entalla en un dominio bidimensional. Γ es cualquier curva que contenga el fondo de entalla Γ_t .

La densidad de energía de deformación W para el caso elástico (lineal o no) viene dada por la expresión³

$$W = W(x, y) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.18)$$

en la que ε_{ij} es el tensor de deformaciones infinitesimales. Por otra parte, las componentes del vector de tracciones \mathbf{T} sobre el contorno Γ se definen, con arreglo al vector normal unitario \mathbf{n} indicado en la Figura 2.3, como:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.19)$$

Conviene remarcar que la expresión (2.17) está planteada para una entalla del tipo mostrado en la Figura 2.3 cuyas caras son paralelas al eje x_1 , resultando evidente que una grieta alineada con dicho eje es un caso límite del mismo problema.

³ En gran parte de este capítulo se utiliza la notación tensorial y el correspondiente criterio de suma respecto a los índices repetidos.

J como integral independiente del camino

La independencia de la integral J con respecto al camino Γ utilizado para su evaluación es sin duda la propiedad que ha hecho de este método energético uno de los más versátiles en las técnicas numéricas aplicadas a Mecánica de la Fractura. Así, es posible estimar J en zonas alejadas del extremo de la entalla o grieta, donde los gradientes de deformación no son elevados y donde la solución numérica del problema suele ser razonablemente precisa. Rice [4] demostró que la integral que aparece en la expresión (2.17) es nula cuando se evalúa a lo largo de un *contorno cerrado* Γ^* que encierre un dominio *libre de singularidades* A^* de forma que las funciones a integrar presenten continuidad C^1 . En estas condiciones es aplicable el teorema de Green⁴ y la ec. (2.17) se puede escribir utilizando notación indicial como:

$$\oint_{\Gamma^*} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = \int_{A^*} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right) dx_1 dx_2 \quad (2.20)$$

Por otra parte, la derivada de la energía de deformación por unidad de volumen se puede expresar del siguiente modo:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (2.21)$$

ya que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

(puesto que por hipótesis se ha supuesto ausencia de fuerzas por udv. en el dominio):

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (2.22)$$

⁴ Bajo otras expresiones se le denomina también teorema de Gauss o de la divergencia.

lo que implica que la integral que aparece en las ecs. (2.17) y (2.20) es nula si Γ^* es un contorno cerrado:

$$J = \oint_{\Gamma^*} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = 0 \quad (2.23)$$

Si se elige convenientemente el camino Γ^* (ver Figura 2.4) resulta inmediato demostrar la independencia de J con respecto al camino tomado: la contribución de los tramos del camino que recorren las caras de la entalla, Γ_2 y Γ_4 , es nula ya que en ellos se verifica que $dx_2=0$ y que $T_i=0$ al estar las caras de entalla libres de fuerzas aplicadas. Por tanto, para que se cumpla la ec. (2.23), la contribución de Γ_1 y Γ_3 ha de ser necesariamente la misma, aunque con signos opuestos debido al sentido diferente con el que se recorren dichos tramos. Es decir, J tiene el mismo valor si se evalúa con caminos que partan de la cara inferior plana de la entalla, terminen en la cara superior y sean recorridos en igual sentido.

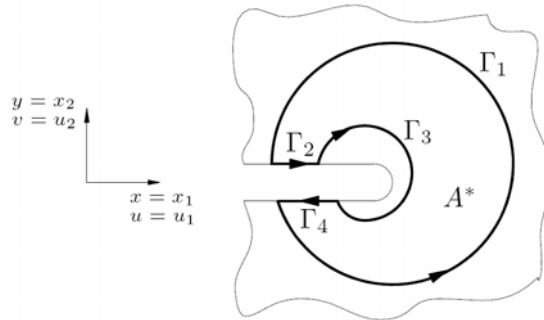


Figura 2.4 Camino cerrado $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ utilizado en la demostración de J como independiente del camino

Sentido físico de la integral J

El hecho de presentar la integral J como un parámetro aplicable a entallas permite dar un cierto sentido físico (Rice [4]). Si se escoge como camino aquél que recorre el fondo de entalla Γ_i (ver Figura 2.3) la ec. (2.17) se reduce a:

$$J = \int_{\Gamma_i} W dx_2 \quad (2.24)$$

ya que $T_i=0$ al estar las superficies de la entalla libres de fuerzas aplicadas. Por consiguiente, J es una medida del grado de deformación alcanzado en el fondo de entalla, evaluado a través de una integral de la densidad de energía de deformación. Obviamente, se pierde este sentido físico cuando se trata de un extremo de grieta, ya que entonces Γ_i es infinitamente pequeño y, bajo la hipótesis de comportamiento elástico, W es infinitamente grande.

Relación entre J y K_I en MFEL

En Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal es conocido que el campo de tensiones en el entorno de la grieta está dominado por la singularidad de tipo $\frac{1}{\sqrt{r}}$, donde r es la distancia al extremo de grieta. Las tensiones del campo elástico bidimensional en coordenadas polares (r, θ) con origen en el extremo de grieta vienen dadas por las ecs. (2.1) - (2.6). Para el modo I el campo está caracterizado únicamente por K_I a través de ecuaciones del tipo siguiente ($i, j = 1, 2$):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \dots \quad (2.25)$$

donde los puntos suspensivos indican términos acotados que son despreciables en todo entorno de grieta suficientemente pequeño comparado con las dimensiones del problema y con la longitud de grieta. Si se considera una grieta lateral semiinfinita en un dominio infinito con comportamiento elástico lineal, es evidente que estos términos acotados son despreciables para toda distancia finita desde el extremo de grieta. En esta situación se puede evaluar J tomando un camino circular Γ de radio r desde el extremo de grieta e integrar el campo elástico singular antes mencionado (Rice [4]).

Expresando la ec. (2.17) en coordenadas polares resulta:

2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL J MEDIANTE EL MEF

$$J = r \int_{-\pi}^{+\pi} \left(W(r, \theta) \cos \theta - \mathbf{T}(r, \theta) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(r, \theta) \right) d\theta \quad (2.26)$$

Si se tiene en cuenta que el campo de deformaciones viene dado por expresiones del tipo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^I(\theta, \kappa) + \dots \quad (2.27)$$

(donde κ es la constante de Kolosov, ver ec. (2.10), y g_{ij}^I son funciones diferentes según se trate de *deformación plana* o *tensión plana*) es inmediato observar de nuevo la independencia de J con respecto al radio r del camino tomado tras sustituir en la ec. (2.26), ya que los términos del integrando son esencialmente productos de tensiones y deformaciones y por tanto

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \propto \frac{1}{r} \quad (2.28)$$

Llevando a cabo la integración de la ec. (2.26) resulta

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.29)$$

donde E' viene dada por la ecuación (2.15) dependiendo de si se trata de un caso de tensión plana o de deformación plana.

Este resultado es generalizable a otros problemas reales de dimensión finita, incluso con pequeña plastificación en el fondo de grieta (*small scale yielding*) siempre que se pueda encontrar una zona lo suficientemente pequeña comparada con las dimensiones del problema y la longitud de grieta y suficientemente alejada de la zona de plastificación. En otras palabras, una zona donde el campo elástico esté regido por las ecs. (2.25) con términos acotados despreciables. La gran ventaja que ofrece la invariancia de J con respecto al camino tomado es que permite su evaluación lejos de la zona dominada por las ecs. (2.25),

donde el campo elástico (en general, analíticamente desconocido) es estimado con mucha mayor precisión cuando se utilizan métodos numéricos tales como el MEF.

La ec. (2.29) se puede generalizar a otros modos de apertura de grieta o su combinación:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.30)$$

Dado que la relación entre J y K es la misma que la relación entre la tasa de liberación de energía G y K (ver ec.(2.13)), este planteamiento prueba la equivalencia $J = G$ en MFEL. Obviamente existe una demostración directa de la relación entre J y G sin necesidad de utilizar el concepto de K , tal y como se muestra en el apartado siguiente.

Relación entre J y $\frac{d\Pi}{da}$

Rice demostró también la relación existente entre J y la tasa de liberación de energía por unidad de área de grieta formada (ver p. ej. Gdoutos [5]). Considérese una grieta en un cuerpo bidimensional (espesor unidad) con comportamiento elástico *no necesariamente lineal*, como el mostrado en la Figura 2.5. Sea el contorno del sólido Γ , dividido en dos porciones Γ_T y Γ_u , tales que $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_u$ y $\Gamma = \Gamma_T \cap \Gamma_u = \emptyset$. Sobre Γ_T se suponen aplicadas fuerzas por unidad de superficie \mathbf{T} que se consideran *independientes* de la longitud de grieta a , al igual que las restricciones en desplazamientos aplicadas sobre Γ_u . Se considera ausencia de fuerzas por udv. y que $T_i=0$ en las caras de grieta. Además se supone que el sistema de referencia x_1, x_2 es fijo en el extremo de grieta y avanza con ella, que la grieta está orientada en la dirección x_1 y cuando avanza lo hace en dicha dirección.

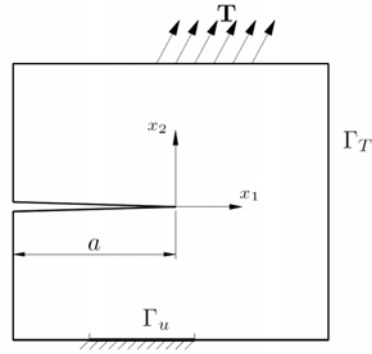


Figura 2.5 Grieta en un sólido bidimensional elástico (lineal o no) bajo la acción de tracciones \mathbf{T} . Notar los sistemas de referencia utilizados.

Si A es el área total del sólido, la energía potencial total Π (definida por la ec. (2.12)) se puede expresar como:

$$\Pi = \int_A W dA - \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.31)$$

Derivando Π respecto a la longitud de grieta a y dado que se ha supuesto que \mathbf{T} es independiente de a

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{dW}{da} dA - \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} d\Gamma \quad (2.32)$$

Notar que la segunda integral en la ec. (2.32) se puede extender a la totalidad del contorno del cuerpo Γ , debido a que los desplazamientos prescritos en Γ_u son también independientes de a . Al ser a asimilable al tiempo t (puesto que a es una función monótona creciente con t) el operador $\frac{d}{da}$ se puede interpretar como el operador *derivada material*

$\frac{d}{dt}$, utilizado en Mecánica del Medio Continuo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.33)$$

ya que se utiliza una descripción euleriana (o espacial) al ser el sistema x_1, x_2 móvil con el extremo de grieta. Se puede escribir entonces

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial x_1}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.34)$$

dado que $\frac{\partial x_1}{\partial a} = -1$. De esta forma, la ec. (2.32) queda

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA - \int_{\Gamma} T_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad (2.35)$$

Por otro lado, bajo la hipótesis de comportamiento elástico, se cumple de manera análoga a lo visto en la ec. (2.21):

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right) \quad (2.36)$$

Si se interpreta $\frac{\partial u_i}{\partial a}$ como una "velocidad" virtual cinemáticamente admisible a partir de la posición de equilibrio, el Principio de las Potencias Virtuales establece que la potencia virtual debida a las fuerzas externas aplicadas ha de ser igual a la potencia consumida por las fuerzas internas en la deformación del cuerpo:

$$\int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right) dA = \int_A \frac{\partial W}{\partial a} dA \quad (2.37)$$

donde se ha utilizado la ec. (2.36), lo que permite simplificar la ec. (2.35). Haciendo uso del teorema de Green para la integral extendida sobre el área A (aplicable, ya que la singularidad se encuentra sobre el contorno Γ) se puede escribir del siguiente modo, análogo al visto en la ec. (2.20)

$$-\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{\partial W}{\partial x_1} dA - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = J \quad (2.38)$$

Evidentemente, al cumplirse las hipótesis que aseguran la independencia de J con respecto al camino tomado, el contorno del cuerpo Γ no es el único que cumple la ec. (2.38).

En el supuesto de comportamiento *elástico lineal* y por definición de la tasa de liberación de energía G (ver ec. (2.11)), se cumple que $J=G$ como ya se había indicado anteriormente. Sin embargo, en la relación dada por la ec. (2.38) el comportamiento no ha de ser necesariamente lineal, aunque sí elástico. Esta importante conclusión es la que ha permitido interpretar J como una generalización de G para comportamiento plástico, y justifica la extensa aplicación que se ha hecho de este método en los últimos 40 años (favorecida también por la facilidad de estimar J experimentalmente).

2.3.3.2 Las integrales de contorno J_k , L y M

Tras el trabajo de Rice en 1968 [4], se han propuesto en el ámbito de la Mecánica de la Fractura numerosas integrales de contorno, la mayoría extendiendo la aplicabilidad de la integral J y generalizando sus hipótesis. Knowles y Stenberg [6] dedujeron nuevas integrales planteando el problema desde el punto de vista más general de la Mecánica del Medio Continuo tanto para deformaciones infinitesimales (elasticidad lineal y no lineal) como para deformaciones finitas en elasticidad (hiperelasticidad), de forma que sus integrales se pueden considerar principios conservativos de la elastoestática.

A partir de principios variacionales y un teorema sobre invariantes formulado por Noether en 1918 obtuvieron expresiones de nuevos principios conservativos, aplicables a sólidos homogéneos en campos elastoestáticos, en ausencia de fuerzas másicas. Si S es una superficie que encierra un dominio tridimensional con comportamiento elástico (lineal o no) carente de singularidades y \mathbf{n} es el vector unitario normal saliente a dicha superficie, entonces se cumple que:

$$\int_S \left(W n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dS = 0 \quad (2.39)$$

Si además el comportamiento es *isótropo*, también se cumple que

$$\int_S \varepsilon_{ijk} \left(W x_k n_j + T_j u_k - T_p \frac{\partial u_p}{\partial x_j} x_k \right) dS = 0 \quad (2.40)$$

donde ε_{ijk} hace referencia al tensor de permutaciones cíclicas⁵. Por último, únicamente si el comportamiento es *lineal* (aunque no necesariamente isótropo) se tiene

$$\int_S \left(W x_i n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} x_i - \frac{1}{2} T_i u_i \right) dS = 0 \quad (2.41)$$

Por tanto, los tres principios se cumplen en el caso de comportamiento elástico lineal isótropo. Es interesante señalar que Knowles y Sternberg [6] obtuvieron la ec. (2.39) por aplicación del teorema de Noether con una función de transformación de coordenadas del dominio equivalente a una *traslación* de sus puntos. Para la ec. (2.40), la transformación de coordenadas es equivalente a una *rotación* del dominio y para la ec. (2.41) a un *cambio de escala*. También demostraron que bajo la hipótesis de comportamiento elástico lineal no son obtenibles otros principios conservativos por aplicación del teorema de Noether.

Sentido físico de las integrales de Knowles y Sternberg

Budiansky y Rice [7] denominaron a estas integrales J_k , L y M para el caso bidimensional en el que los campos dependen sólo de x_1, x_2 (estados de deformación plana o antiplana, e incluso tensión plana generalizada cuando se interpretan σ_{ij}, u_i como valores promedio en el espesor):

⁵ $\varepsilon_{ijk} = 0$ si al menos dos de los índices son iguales; $\varepsilon_{ijk} = \pm 1$ si i, j, k es una permutación cíclica de 1,2,3 o de 1,3,2 respectivamente

$$J_k = \oint_C \left(W n_k - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad (2.42)$$

$$L = \oint_C \varepsilon_{ijk} \left(W x_j n_i + T_i u_j - T_p \frac{\partial u_p}{\partial u_i} x_j \right) d\Gamma \quad (2.43)$$

$$M = \oint_C \left(W x_i n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} x_i \right) d\Gamma \quad (2.44)$$

donde el camino C es un contorno cerrado en el plano (x_1, x_2) .

Resulta evidente que la primera de estas integrales (ec. (2.42)) coincide con la integral J (ec. (2.17)) para el caso $k=1$. Para el caso $k=2$ tenemos la integral J_2 . Finalmente, en cuanto a J_3 es trivial comprobar que es siempre nula en un problema bidimensional. Por ello, Budiansky y Rice [7] también denominaron a la ec. (2.42) como J_k ($k=1,2$).

Como sucede para el caso tridimensional, las tres integrales J_k , L y M se anulan en ausencia de singularidades dentro de C para el caso elástico lineal e isótropo. Si C encierra alguna singularidad, las integrales serán en general *no nulas e independientes del camino* (suponiendo obviamente que todos los caminos tomados encierren únicamente la misma singularidad). Este hecho permite utilizarlas como parámetros caracterizantes de dicha singularidad, como ya se razonó para la integral J .

Budiansky y Rice [7] dieron sentido físico a estas integrales, considerando el caso más general tridimensional. Sea V el volumen de material contenido por una superficie $S+s$, siendo s la porción de superficie libre de fuerzas por uds. y S la porción sobre la que actúan las cargas externas aplicadas \mathbf{T} , que se suponen constantes en todo el proceso. Se trata ahora de apreciar cuál es la variación en la energía potencial total Π cuando se modifica la posición del contorno libre de cargas s con el tiempo t^6 . Al ser el contorno una función del tiempo,

⁶ En lugar de realizar el estudio con respecto al tiempo se puede realizar con respecto a otro parámetro que varíe de forma análoga, como podría ser la longitud a en el caso de una grieta.

$S+s(t)$, el volumen V también lo será, $V=V(t)$. De acuerdo con la expresión de la energía potencial total, ec. (2.12), resulta que:

$$\Pi = \int_{V(t)} W dV - \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} dS \quad (2.45)$$

Estudiando la variación de Π respecto al tiempo y recordando que el propio volumen varía con t a través de $s(t)$ (no así S ni \mathbf{T} que permanecen constantes)

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{V(t)} \frac{dW}{dt} dV - \int_S \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} dS + \int_{s(t)} W v_j m_j ds \quad (2.46)$$

donde v_j son las componentes del vector velocidad \mathbf{v} con que se desplazan los puntos del contorno s y m_j las componentes del vector unitario \mathbf{m} normal *saliente* al contorno s (ver Figura 2.6), ya que es evidente que si \mathbf{x} es el cambio de posición de los puntos del contorno s se cumple

$$dV = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) ds \quad (2.47)$$

$$\frac{d}{dt} dV = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}) ds = v_j m_j ds \quad (2.48)$$

igualdad que permite escribir la última integral de la ec. (2.46).

Por otra parte, las dos primeras integrales del lado derecho de la ec. (2.46) se cancelan entre sí en virtud del Principio de las Potencias Virtuales, siempre que se considere $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ una *velocidad virtual* cinemáticamente admisible (de forma totalmente análoga a lo visto en la ec. (2.37)). Por consiguiente

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{s(t)} W v_j m_j ds \quad (2.49)$$

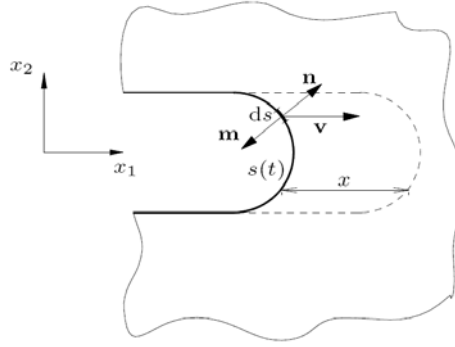


Figura 2.6 Traslación de una cavidad en el seno de un dominio 2D. $s(t)$ es su contorno y \mathbf{m} el vector unitario normal saliente.

Por otro lado, si la superficie $s(t)$ resulta ser el contorno de una cavidad en un dominio como la mostrada en la Figura 2.6⁷ y el vector velocidad de traslación \mathbf{v} es un vector *unidad* en una dirección i (por ejemplo, en la dirección x_1 para el caso bidimensional de la Figura 2.6) se puede escribir

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{s(t)} W m_i ds = - \int_{s(t)} W n_i ds = -J_i \quad (2.50)$$

ya que por definición $n_i = -m_i$ por tratarse de un vector hacia la derecha cuando el contorno se recorre en sentido antihorario. Esta es precisamente la definición de \mathbf{n} que se utiliza en la expresión de la integral J_k según las ecs. (2.39) y (2.42). Observando que el contorno llamado S en la ec. (2.39) (C en la ec. (2.42)) se puede hacer coincidir con $s(t)$ y que \mathbf{T} es nulo en $s(t)$, se justifica la última igualdad de la ec. (2.50).

Este razonamiento es básicamente el mismo que el visto en la relación entre J y $\frac{d\Pi}{da}$ e introduce el concepto de campo de velocidades, demostrando que la integral J está relacionada con la energía liberada por unidad de *traslación* de la cavidad en la dirección i (avance de grieta en dirección i en Mecánica de la Fractura).

⁷ En el límite, la cavidad se puede asimilar al extremo de una grieta.

La integral L está relacionada con la energía liberada por unidad de *rotación* de la cavidad. Si se considera una velocidad angular de módulo *unidad* alrededor del eje k (por ejemplo, alrededor del eje x_3 de la Figura 2.7 en un caso bidimensional) se cumple que $v_i = -\varepsilon_{kij} \cdot x_j$ (en la Figura 2.7, $v_1 = -\varepsilon_{312} \cdot x_2 = -x_2 = -\omega_3 \cdot x_2$ y $v_2 = -\varepsilon_{321} \cdot x_1 = x_1 = \omega_3 \cdot x_1$), con lo que la ec. (2.49) quedará

$$\frac{d\Pi}{dt} \int_{s(t)} W(-\varepsilon_{kij} x_j) m_i ds = \int_{s(t)} W(\varepsilon_{kij} x_j) n_i ds = L \quad (2.51)$$

La relación está justificada por la particularización de la ec. (2.43) al caso en el que el contorno C coincide con la pared de la cavidad $s(t)$, y por tanto libre de cargas \mathbf{T} .

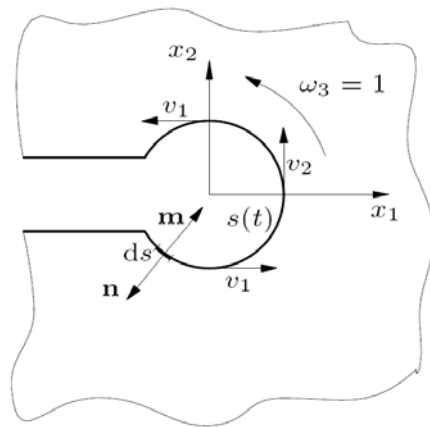


Figura 2.7 Relación de una cavidad en el seno de un dominio 2D al girar con una velocidad angular $\omega_3 = \pm 1$.

De forma totalmente análoga se demuestra que la integral M se puede asociar con la energía liberada al *expandir uniformemente* una cavidad con contorno $s(t)$ libre de cargas de acuerdo con la relación $v_i = x_i$. Partiendo de nuevo de la ec. (2.49) y particularizando la ec. (2.44) se obtiene:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{s(t)} W x_i m_i ds = - \int_{s(t)} W x_i n_i ds = -M \quad (2.52)$$

Para modo mixto de apertura de grieta (modos I y II) Budiansky y Rice [7] ya anticiparon que, en contra de las expectativas iniciales que generó el trabajo de Knowles y Stenberg [6], la integral L no suministra el otro parámetro escalar necesario junto con J_1 para caracterizar el estado tensional en el entorno de grieta.

J_k y el tensor de Eshelby

En el contexto de la Mecánica de Sólidos, Eshelby [8] denominó "*energy-momentum tensor*" al tensor que permite caracterizar la intensidad de defectos internos del material, de forma análoga a J . Eshelby [8] lo definió para un material elástico homogéneo como

$$\Sigma_{ki} = W \delta_{ki} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (2.53)$$

En sentido estricto, utilizó esta notación como referencia a una descripción espacial (o euleriana) de la Mecánica del Medio Continuo, por ejemplo con respecto a un sistema de coordenadas fijo con el extremo de grieta. Por simple comparación con la generalización a 3D de la ec. (2.42) se puede escribir:

$$J_k = \int_S \left(W \delta_{ki} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) n_i dS = \int_S \Sigma_{ki} n_i dS \quad (2.54)$$

que en general será distinta de cero para una superficie S cerrada que incluya una singularidad en su interior (debida, por ejemplo, a un defecto interno o grieta).

J_k como medida del flujo energético

Desde un punto de vista de la teoría general de campos, resulta evidente a partir de la ec. (2.54) que J_k es una medida del flujo correspondiente al campo vectorial representado por la componente en x_k del tensor de

Eshelby Σ_{ki} . Este flujo es de carácter energético y se puede considerar que tiene como *sumidero* la singularidad (extremo o frente de grieta en Mecánica de la Fractura Elástico-lineal). Cuando no existen singularidades encerradas por S , no existe flujo a través del contorno, y por aplicación del teorema de Gauss, la divergencia de dicho campo evaluada en el dominio encerrado por el contorno S es nula. Esta es una propiedad de los denominados *campos solenoidales*. Este hecho es el que permite demostrar la independencia de la superficie S utilizada en la evaluación de la ec. (2.54), siempre que contenga la misma singularidad.

Como se ha comentado anteriormente, la interpretación física del flujo es sencilla. Cuando se supone una traslación virtual del contorno S en dirección k con velocidad unidad, el primer término del integrando de J_k representa el cambio energético debido al *flujo de material* y el segundo término el aporte energético debido al trabajo realizado por el material exterior a S sobre el material que queda en su interior (ver p.ej. Nakamura *et al.* [9]). Conviene señalar que en el caso de Mecánica de la Fractura, la traslación virtual de la grieta implica su movimiento como sólido rígido en la dirección k en el plano de grieta, no admitiéndose por tanto cambios en la dirección de propagación (Atluri [10]).

2.3.3.3 Generalización a tres dimensiones

Si se considera un sólido elástico homogéneo, la expresión de la integral J_k para 3D dada por la ec. (2.39) ha de ser evaluada sobre un contorno S que englobe todo el frente de grieta:

$$J_k = \int_S \left(W n_k - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS \quad (2.55)$$

Como se ha visto, físicamente está relacionada con la energía liberada por unidad de *traslación* del frente en una dirección k contenida en el plano de grieta. Sin embargo, resulta obvio que rara vez todos los puntos de un frente curvilíneo tridimensional de una grieta real se trasladarán una misma magnitud en dirección k . Este problema, junto con los inconvenientes que presenta la evaluación numérica de una integral de superficie 3D, obliga a que el planteamiento para 3D no sea tan simplista.

Blackburn [11]⁸ propuso una generalización de la integral J en 2D (ec. (2.17)) para un punto s del frente de grieta tridimensional:

$$J_1(s) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left(W dx_2 - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} d\Gamma \right) \quad (2.56)$$

Aquí, las coordenadas x_1, x_2 hacen referencia a un sistema local ortogonal con origen en el punto donde se desea evaluar la integral J : x_1 es normal al frente de grieta y está contenida en el plano de la misma en ese punto, x_2 es normal al frente y al plano de grieta en ese punto y x_3 es tangente al frente (véase Figura 2.8). Como se observa en la ec. (2.56) la evaluación puntual de J en un frente de grieta tridimensional obliga a tomar un camino Γ infinitamente cercano al extremo de grieta de forma que los campos se puedan considerar en un estado de deformación plana y por tanto dependientes únicamente de las coordenadas x_1, x_2 , condición ésta implícita en la definición de la ec. (2.17) (Shih *et al.* [12]).

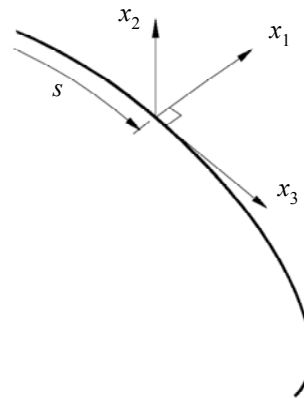


Figura 2.8 Frente de grieta en 3D. Se muestra el sistema de referencia local con origen en un punto s de dicho frente.

El hecho de requerir un camino Γ muy próximo al frente de grieta implica que J evaluada a lo largo de cualquier otro camino contenido en

⁸ En esta referencia Blackburn presenta también su integral J^* , aunque el planteamiento que realiza es poco riguroso e incluye numerosas erratas.

el plano local x_1, x_2 tendrá otro valor, o lo que es lo mismo, J deja de ser independiente del camino escogido. Desafortunadamente, la expresión de la ec. (2.56) se presta muy poco a su evaluación numérica. Habría que extrapolar los resultados obtenidos con varios caminos cuyas distancias al frente de grieta tendieran a 0, evaluación ésta en una zona donde los resultados obtenidos por el MEF presentan una baja calidad debido a la aproximación numérica que se lleva a cabo en las cercanías del frente de grieta.

Un planteamiento similar es el que presenta Cherepanov [2]. Generalizando a J_2 la definición dada en la ec. (2.56) en coordenadas locales del frente de grieta se puede escribir:

$$J_k(s) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left(W n_k - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad k = 1, 2 \quad (2.57)$$

Es inmediato reformular la expresión anterior de manera que sea más útil desde el punto de vista numérico. De acuerdo con la Figura 2.9, se puede extender la integral dada por la ec. (2.57) a una superficie cilíndrica S_0 de radio ρ infinitamente pequeño y que rodee un segmento muy pequeño Δs del frente de grieta, siendo s un parámetro que define la posición a lo largo de dicho frente.

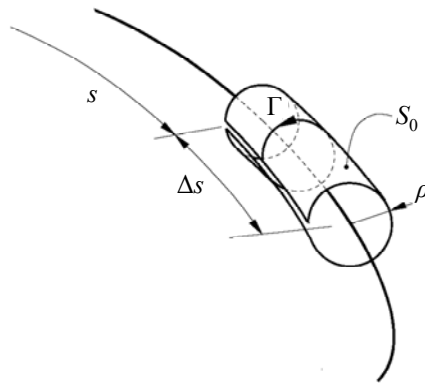


Figura 2.9 Cilindro de radio infinitesimal ρ que rodea un segmento Δs de un frente de grieta en 3D.

Como Δs es un segmento muy pequeño del frente de grieta se puede considerar rectilíneo, y por lo tanto S_0 es la superficie cilíndrica generada por extrusión del camino Γ a lo largo del segmento de frente Δs . Además, al asumir condiciones de deformación plana en el tramo Δs , el valor obtenido se puede interpretar como el valor promedio integrado a lo largo de la longitud Δs . Cherepanov [2] dio una definición de $J_k(s)$ en estas condiciones retomada posteriormente por Nikishkov y Atluri [13] y Shivakumar y Raju [14]:

$$J_k(s) \Delta s = \lim_{\substack{\rho/\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \int_{S_0} \left(W n_k - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS \quad k = 1, 2 \quad (2.58)$$

De nuevo la aplicación práctica de este planteamiento carece de sentido al tratarse de valores estimados en regiones infinitamente próximas al frente de grieta. Una alternativa es utilizar el teorema de Gauss, de forma que se pueda evaluar J_k extendida a lo largo de una superficie S alejada del frente de grieta como se muestra en la Figura 2.10 (bajo la hipótesis de que dicha superficie no encierre otras singularidades además de la propia grieta).

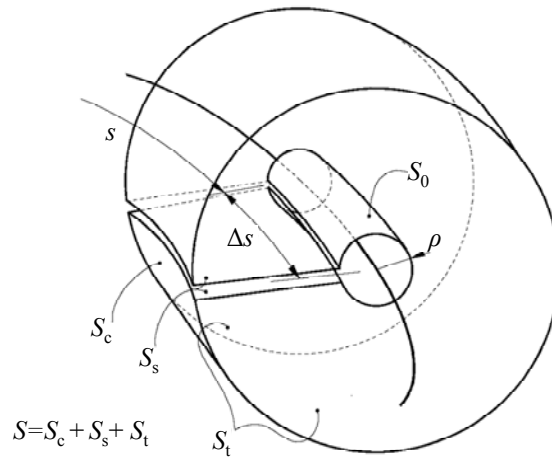


Figura 2.10 Cilindro de radio arbitrario que rodea al cilindro de radio infinitesimal ρ , que a su vez engloba un segmento Δs de un frente de grieta en 3D.

La superficie S deberá ser tal que $(S - S_0)$ constituya una superficie cerrada (el signo negativo en S_0 indica que sobre ella se debe tomar un vector normal unitario de sentido opuesto al habitualmente definido como \mathbf{n}). La aplicación del teorema de Gauss implica la aparición de la integral de volumen correspondiente, siendo V el volumen encerrado por $(S - S_0)$, resultando:

$$J_k(s) \Delta s = \lim_{\substack{\rho/\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \left\{ \int_S \left(W n_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS - \int_V \left[\frac{\partial W}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] dV \right\} \quad (2.59)$$

Conviene señalar que S incluye tanto la superficie cilíndrica exterior S_c como las coronas laterales a modo de “tapas” S_t y las porciones de los planos de grieta S_g comprendidas entre el contorno exterior y el interior limitado por S_0 (véase Figura 2.10). En contraste, S_0 hace referencia únicamente a la superficie cilíndrica equivalente a la extrusión del camino Γ . Algunos autores (Shivakumar y Raju [14]) incluyen también los discos laterales de radio ρ como parte de la superficie S_0 , lo que no parece que esté justificado.

Evidentemente, si se utiliza un sistema de referencia local como el de la Figura 2.8, se tendrá que tomar $k = 1$ en la ec. (2.59) para obtener $J_1(s)$. Si por el contrario las magnitudes están referidas a un sistema de coordenadas global (como suele ser habitual utilizar en el MEF), en realidad J debe ser calculada como la proyección J_n del vector \mathbf{J} en la dirección normal al frente de grieta contenida en el plano de grieta (Atluri y Nishioka [15]). El vector \mathbf{J} viene dado por la expresión

$$\mathbf{J} = J_k \mathbf{e}_k \quad (2.60)$$

donde \mathbf{e}_k son los vectores unitarios a lo largo de las direcciones k del sistema global. Su proyección en la dirección normal requerida será

$$J_n = \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_n \quad (2.61)$$

donde ahora \mathbf{e}_n es un vector unitario en la dirección normal al frente de grieta contenida en el plano de grieta (es decir, la dirección x_1 en la Figura 2.8).

En cualquier caso, la evaluación práctica mediante métodos numéricos (por ejemplo el MEF) de la expresión anterior no es simple, pues incluye una integral de dominio y además una integral de contorno. Li et al. [16], a partir del trabajo de DeLorenzi [17], propusieron su conocido Método de la Integral de Dominio, basado en la ec. (2.59) e incluyeron detalles de cómo aplicar el método mediante elementos finitos (véase el apartado 2.3.4).

2.3.3.4 Evaluación numérica de la integral J mediante el MEF

En este apartado se dan indicaciones acerca de la evaluación numérica de la integral J , restringida a expresiones como la ec. (2.17) y sus correspondientes hipótesis de carga. En estas condiciones, J es simplemente una integral de línea.

El camino a tomar Γ es arbitrario y supondremos en el desarrollo que sigue que está formado por *tramos rectilíneos*. Es preferible escoger un camino alejado del entorno del extremo de grieta, con el fin de evitar la zona donde los campos solución del MEF son peor estimados. El camino Γ puede intersectar los lados de los elementos o bien recorrerlos exactamente (ver Figura 2.11). Desde un punto de vista topológico la segunda opción es la más recomendable, pues hace innecesaria la búsqueda de los puntos de intersección de Γ con los lados de los elementos que atraviesa. Además, en este caso los puntos inicial y final del tramo recorrido en el elemento coinciden con nodos. En cualquiera de las dos situaciones, por las propiedades de la integral se puede escribir:

$$J = \sum_{e=1}^{N_e \in \Gamma} J_e \quad (2.62)$$

donde N_e es el número de elementos atravesados por Γ . Si se denomina Γ_e a la porción de camino Γ que atraviesa el elemento e , J_e será

$$J_e = \int_{\Gamma_e} \left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) d\Gamma_e \quad (2.63)$$

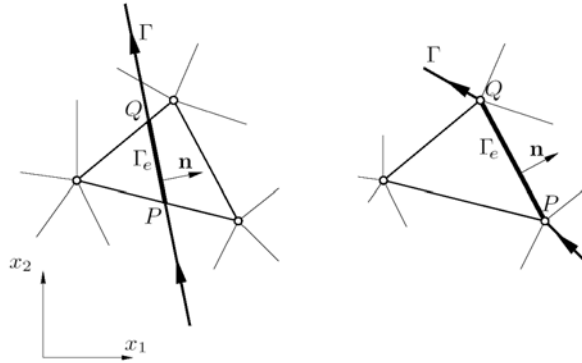


Figura 2.11 Intersección del camino Γ con un elemento. El tramo comprendido es Γ_e . Dcha: el camino se superpone a un lado.

Es conveniente realizar un cambio de coordenadas a un sistema de referencia unidimensional $\xi \in [-1,1]$ de forma que el punto P de la Figura 2.11 esté asociado con la coordenada local $\xi=-1$ y el punto Q con la coordenada local $\xi=1$. La integral en el sistema de referencia unidimensional será

$$J_e = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \frac{\overline{PQ}}{2} d\xi \quad (2.64)$$

donde \overline{PQ} es la distancia entre los puntos P y Q en el sistema de referencia global (x_1, x_2) . En estas condiciones es inmediato aproximar la integral numéricamente mediante la cuadratura de Gauss en N_G puntos:

$$J_e \approx \frac{\overline{PQ}}{2} \sum_{m=1}^{N_G} H_m \left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right)_{\xi_m} \quad (2.65)$$

donde la expresión entre paréntesis corresponde al integrando de la ec. (2.64) evaluado en la coordenada ξ_m asociada al punto de Gauss m y a su respectivo peso de Gauss H_m . Si se utilizan elementos lineales con una

formulación en desplazamientos, los campos de tensiones y deformaciones son constantes en cada elemento. Es suficiente entonces tomar un único punto de Gauss, $m=1$, de coordenada unidimensional $\xi_1=0$ y peso $H_1=2$. Si se utilizan elementos cuadráticos, el integrando de la ec. (2.64) deja de ser constante y es necesario realizar la integración numérica unidimensional al menos con dos puntos de Gauss, $m=2$. Los campos de tensiones y deformaciones se pueden estimar en las coordenadas ξ_m con una interpolación lineal a partir de sus valores en los puntos P y Q ($\xi=-1$ y $\xi=1$, respectivamente).

En la tabla siguiente (Tabla 2.1) se dan los pesos y las coordenadas de los puntos de Gauss para integración unidimensional:

n	$\pm\xi_i$	H_i	Integra exactamente
1	0	2	p=1
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1	p=3
3	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}} ; 0$	$\frac{5}{9} ; \frac{8}{9}$	p=5
4	$\pm\sqrt{\frac{\left(3+2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	p=7
	$\pm\sqrt{\frac{\left(3-2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	
5	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	p=9
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	
	0	$\frac{128}{225}$	

Tabla 2.1 Puntos de integración, pesos de la Cuadratura de Gauss y máximo grado de polinomios integrados exactamente.

Con elementos cuadriláteros es posible definir el camino Γ de forma que pase precisamente por los puntos de integración en cada elemento. De este modo se aprovecha la superconvergencia del gradiente de la solución en los puntos de integración (ver Figura 2.12). Para ello es necesario tomar un camino tal que sea paralelo a los lados del elemento, aprovechando así que los puntos de integración unidimensional coinciden con los puntos de integración bidimensional utilizada en la formulación de EF. Este planteamiento implica que la malla ha de estar distribuida y ordenada convenientemente e impide que se pueda tomar un camino Γ totalmente arbitrario. Con elementos triangulares en general no es posible hacer coincidir los puntos ζ_m de la integración unidimensional con los puntos de superconvergencia. Además es muy difícil distribuir ordenadamente los elementos de la malla de manera que un tramo que pase por los puntos de superconvergencia de un elemento “conecte” convenientemente con el tramo correspondiente al siguiente.

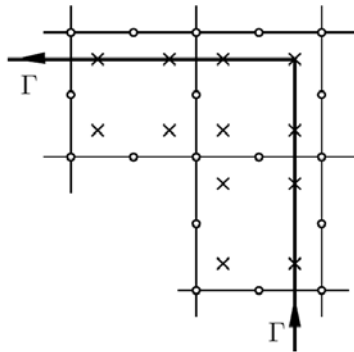


Figura 2.12 Camino de integración Γ tomado sobre los puntos de superconvergencia (puntos de integración) de elementos cuadriláteros cuadráticos.

En cuanto a la independencia de J con respecto del camino escogido, ésta se verifica razonablemente siempre que el camino Γ no atraviese los elementos inmediatos al extremo de grieta. Por último, indicar que el uso de elementos que reproduzcan la singularidad en el entorno de grieta no suele tener gran influencia cuando se utilizan caminos suficientemente alejados, por lo que su uso no es imprescindible.

2.3.4 MÉTODO DE LA INTEGRAL DE DOMINIO (EDI)

La evaluación de la integral J a partir de su definición en forma de integral de contorno (véase p. ej. ec (2.17)) está limitada en la práctica a aquellos problemas bidimensionales en los que se cumplen las condiciones bajo las cuales dicha integral es independiente del camino escogido. Esta propiedad permite su evaluación numérica mediante el MEF en zonas donde las soluciones aproximadas a los campos buscados son más precisas. Sin embargo, como se ha visto, la aplicación de J a problemas más generales (como es el caso de problemas tridimensionales) supone su definición a lo largo de un camino Γ infinitamente cercano al extremo de grieta. También se ha comentado que esta formulación no es apropiada para su estimación numérica mediante el MEF debido a:

- a) La imposibilidad de tomar un camino muy cercano al extremo por limitaciones en la discretización.
- b) El gran error que se comete en la solución aproximada en las cercanías de la singularidad.

Con el fin de evaluar J en zonas alejadas del extremo de grieta, resulta de gran utilidad el teorema de Gauss, como se ha visto en apartados anteriores. Para los casos en los que J no es independiente del camino, esto implica el cómputo de una integral de contorno junto con una integral de dominio.

Por otra parte, es siempre más compleja y laboriosa la evaluación numérica de una integral de contorno (de línea en 2D o de superficie en 3D) que la integral de dominio asociada (de área en 2D o de volumen en 3D). El Método de la Integral de Dominio (*Equivalent Domain Integral Method*, EDI) propuesto por Li, Shih y Needleman [16] varía ingeniosamente la formulación de la integral correspondiente de forma que *no es necesaria la evaluación de una integral de contorno, sino únicamente una integral de dominio*, siempre preferible por su mayor precisión y facilidad de cómputo (especialmente en problemas tridimensionales).

2.3.4.1 Método EDI en 2D

Recordemos que J es independiente del camino en un problema bidimensional con comportamiento elástico y homogéneo, ausencia de fuerzas por udv. y en caras de grieta. Para el caso de una grieta orientada en dirección x_1 y crecimiento en la misma dirección, y de acuerdo con la denominación y sentido de los caminos empleados en la Figura 2.4, J viene dada por la siguiente expresión:

$$J = -\int_{\Gamma_3} \left(W\delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_i d\Gamma = -\int_{\Gamma_3} \Sigma_{1i} n_i d\Gamma \quad (2.66)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal al contorno que queda a la derecha del camino cuando se recorre en su sentido de definición y Σ_{1i} las componentes $(1, i)$ del tensor de Eshelby. Al ser nulas las cargas en caras de grieta y al encontrarse éstas orientadas en la dirección x_1 , esta integral se puede escribir como extendida al camino cerrado $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ si el integrando se multiplica por una función q_1 que valga la unidad en Γ_3 y se anule en Γ_1 ⁹: Recordando entonces que $\Sigma_{1i} n_i = 0$ en las caras de grieta Γ_2 y Γ_4 y utilizando la función q_1 descrita, se puede escribir la ec. (2.66) como:

$$J = -\int_{\Gamma_3} \Sigma_{1i} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_4} \Sigma_{1i} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Sigma_{1i} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \Sigma_{1i} q_1 n_i d\Gamma \quad (2.67)$$

con

$$q_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ 1 & (x_1, x_2) \in \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.68)$$

Resulta entonces que:

$$J = -\oint_{\Gamma^*} \left(W\delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) q_1 n_i d\Gamma = -\oint_{\Gamma^*} \Sigma_{1i} q_1 n_i d\Gamma \quad (2.69)$$

⁹ La función q_1 es identificable con el concepto de *campo de velocidades*.

Suponiendo que q_1 sea una función suficientemente continua en A^* se puede aplicar el teorema de Gauss, resultando:

$$J = -\int_{A^*} \left(\frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial x_i} q_1 + \Sigma_{1i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right) dA = -\int_{A^*} \Sigma_{1i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (2.70)$$

ya que $\frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial x_i} = 0$ en las condiciones anteriormente expuestas. Por tanto, J se puede calcular a partir de una integral de área como

$$J = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (2.71)$$

Multiplicando y dividiendo la ec. (2.71) por un incremento virtual de grieta Δa se tiene una interpretación física de q_1 como una *función de ponderación* que hace variar el desplazamiento virtual Δx_1 de los puntos contenidos en A^* en dirección x_1 entre el valor máximo Δa en el contorno Γ_3 y 0 en el contorno Γ_1 (ver Figura 2.13):

$$J = \frac{1}{\Delta a} \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dA \quad \text{con } \Delta x_1 = \Delta a q_1 \quad (2.72)$$

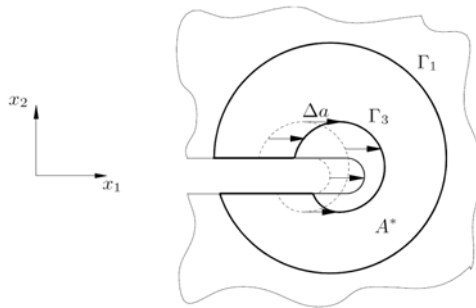


Figura 2.13 Desplazamiento virtual Δa de los puntos Γ_3 (y de todos los puntos encerrados por Γ_3) que induce un desplazamiento virtual Δx_1 de los puntos en A^* .

De otra manera, q_1 es el desplazamiento virtual Δx_1 de cada punto en A^* adimensionalizado con respecto al incremento virtual de longitud de grieta Δa , es decir $q_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta a}$ y en el límite $q_1 = \frac{dx_1}{da}$.

2.3.4.2 Método EDI en 3D

En el caso tridimensional, resulta de interés conocer el valor puntual de $J(s)$ en una posición determinada de la coordenada s que recorre el frente de grieta, ya que este valor es el parámetro caracterizante de la intensidad de los campos en el entorno inmediato. Con arreglo al *sistema local* de coordenadas definido en la Figura 2.8, $J(s)$ viene dado por la ec. (2.59) particularizada para $k = 1$, tal y como se razonó en el apartado 2.3.3.3 con ayuda de las Figura 2.9 y de la Figura 2.10:

$$\begin{aligned}
 J(s) \Delta s &= J_1(s) \Delta s = \lim_{\substack{\rho/\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \int_{S_0} \left(W n_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) dS = \\
 &= \lim_{\substack{\rho/\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \left\{ \int_S \left(W n_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) dS - \int_V \left[\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \right] dV \right\} \quad (2.73)
 \end{aligned}$$

siendo S_0 el contorno de un cilindro infinitamente cercano al frente de grieta bajo las condiciones ya comentadas en el apartado 2.3.3.3. Con el fin de evitar la evaluación de la integral de contorno extendida a S , se puede multiplicar el integrando de la integral extendida a S_0 por una función q_1 , tal que se anule en la superficie cilíndrica S_c (véase la Figura 2.10). Además, q_1 se ha de anular también en las superficies S_t , es decir, a ambos lados del pequeño segmento de frente de longitud Δs . Sin embargo, no es posible tomar una función q_1 que se anule en las superficies S_s correspondientes a las caras de grieta, aunque la integral de superficie asociada será nula en ausencia de cargas en caras de grieta al encontrarse éstas contenidas en el plano $x_1 x_3$.

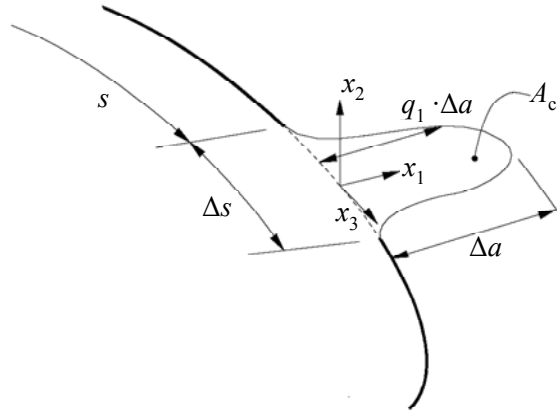


Figura 2.14 Avance elemental de grieta en un segmento Δs de un frente de grieta tridimensional y su relación con q_1 .

En cuanto al valor de q_1 sobre la superficie S_0 (que en el límite coincide con el tramo de frente Δs), es función de la posición s dentro de dicho segmento Δs , es decir $q_1 = q_1(s)$. El aspecto que puede tomar esta función q_1 a lo largo del segmento Δs se esquematiza en la Figura 2.14 donde, como en el caso bidimensional, se ha relacionado q_1 con la extensión virtual de grieta Δa en dirección normal al frente y contenida en el plano de grieta (es decir, en dirección x_1 del sistema local de la Figura 2.14).

Físicamente, el valor que toma $q_1 \Delta a$ en cada punto del tramo Δs determina la forma en que se supone que avanza el frente de grieta en la evaluación de la variación de energía potencial Π debida a este avance. Es decir, la función q_1 *implica un crecimiento virtual de grieta determinado que condicionará la estimación local* realizada mediante un método numérico como el MEF. Por tanto es importante que la función q_1 escogida represente un avance del frente con cierto sentido físico. En el apartado 2.3.4.3 se dan algunas indicaciones acerca de su elección. En contraste, conviene recordar que en el caso bidimensional no se presenta esta libertad de elección: el segmento Δs queda reducido a un punto (el extremo de grieta) en el que necesariamente $q_1 = 1$.

Teóricamente, y suponiendo un Δs infinitamente pequeño, q_1 ha de ser una función derivable que cumpla las siguientes condiciones:

$$q_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \in S_c \cup S_t \\ q_1(s) \in [0,1] & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \in S_0 \equiv \Delta s \Leftrightarrow x_1, x_2 = 0 \\ 1 & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) \end{cases} \quad (2.74)$$

donde las coordenadas de punto (x_1, x_2, x_3) están referidas al sistema local de la Figura 2.14. En una estimación numérica, resulta evidente que Δs no puede ser infinitamente pequeño y en realidad lo que se hace es establecer la siguiente expresión integrando la ec. (2.73) a lo largo del segmento Δs (se omiten los límites que indican que tanto el radio ρ como el segmento Δs han de ser pequeños):

$$\begin{aligned} \int_s^{s+\Delta s} J(s) ds &= \int_{s_0} \left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) dS = \\ &= \int_s \left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) dS - \int_V \left[\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (2.75)$$

Si se multiplica por la función $q_1(s)$ con la finalidad de aplicar el Método de la Integral de Dominio (y por Δa si se quiere dar un sentido físico interpretando como el avance virtual de grieta antes comentado) resulta:

$$\begin{aligned} \int_s^{s+\Delta s} J(s)q_1(s)\Delta a ds &= \int_{s_0} \left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) q_1(s)\Delta a dS = \\ &= \Delta a \int_{S_0} \Sigma_{1i} q_1 n_i dS = -\Delta a \oint_{S-S_0} \Sigma_{1i} q_1 n_i dS \end{aligned} \quad (2.76)$$

recordando una vez más que la superficie S_0 es infinitamente próxima al frente de grieta y donde la última igualdad es posible escribirla en base a que $q_1 = 0$ sobre $S_c \cup S_t$, no hay cargas sobre S_s y además $n_1 = 0$ sobre S_s en un sistema local de referencia como el de la Figura 2.14. La evaluación extendida a $-S_0$ implicaría tomar un vector normal a S_0 de sentido contrario a \mathbf{n} . Aplicando el teorema de Gauss para evitar la evaluación de la integral sobre el contorno S_0 de forma análoga a como se hizo en el caso bidimensional:

$$\int_s^{s+\Delta s} J(s)q_1(s)\Delta a ds = -\Delta a \int_V \left(\frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial x_i} q_1 + \Sigma_{1i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right) dV = -\Delta a \int_V \Sigma_{1i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dV \quad (2.77)$$

ya que $\frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial x_i} = 0$ en ausencia de fuerzas por udv. cuando el comportamiento es elástico y homogéneo. En definitiva:

$$\int_s^{s+\Delta s} J(s)q_1(s)\Delta a ds = \Delta a \int_V \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dV \quad (2.78)$$

Si Δs es pequeño, es frecuente suponer que $J(s)$ no varía apreciablemente en el tramo Δs . En tal caso, la estimación de $J(s)$ en un punto s del frente vendrá dada por:

$$J(s) \approx J_{vol} = \frac{\Delta a}{A_c} \int_V \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dV \quad (2.79)$$

donde A_c es el incremento en área de grieta debido a la extensión virtual de grieta de la Figura 2.14 dado por:

$$A_c = \int_s^{s+\Delta s} q_1(s)\Delta a ds \quad (2.80)$$

La expresión de la ec. (2.79) no es más que la particularización del resultado presentado en DeLorenzi [17], [18] a partir de un planteamiento de extensión virtual de grieta. Como es lógico, el valor de $J(s)$ no depende del Δa escogido. En planteamientos más recientes (Nikishkov y Atluri [13]; Shivakumar y Raju [14]) no se incluye Δa en el desarrollo y la primera parte de la ec. (2.76) se escribe simplemente

$$J(s)f \approx \int_{s_0} \left(W n_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) q_1 dS \quad (2.81)$$

donde f es el área comprendida entre la función $q_1(s)$ y el frente de grieta:

$$f = \int_s^{s+\Delta s} q_1(s) ds \quad (2.82)$$

De igual modo, la ec. (2.79) resultante de aplicar el teorema de Gauss se puede escribir:

$$J(s) \approx \frac{1}{f} \int_V \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{ii} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dV \quad (2.83)$$

Shih et al. [12] aplicaron este método para calcular $J(s)$ a lo largo de grietas rectas en 3D sometidas a cargas térmicas. Extensiones a este método se han ido desarrollando para grietas curvas planas en modo mixto (Nikishkov y Atluri, [13]), grietas no planas en 3D (Gosz y Moran, [19]), grietas rectas 3D con cambio de material en la interfase (Nakamura, [20]) o con grietas curvas (Gosz et al., [21]), muchos de ellos usando integrales de interacción y campos auxiliares. El método EDI tiene la ventaja que es muy adecuado para la implementación en un código de elementos finitos como parte del postproceso. Además, tiende a obtener resultados más precisos que la integral de contorno equivalente porque incluye información calculada en un dominio (que es mucho más coherente con la formulación de elementos finitos).

2.3.4.3 Formulación del método mediante el MEF

Varios autores dan detalles acerca de la implementación del método como postproceso de la solución numérica obtenida mediante el MEF (DeLorenzi [18]; Li *et al.* [16]; Shih *et al.* [12]; Nikishkov y Atluri [13]; Shivakumar y Raju [14]; Anderson [22]). En cada caso la formulación varía ligeramente en función del enfoque teórico seguido, hipótesis asumidas, etc. A continuación se presentan los planteamientos más relevantes.

2.3.4.3.1 Aplicación a 2D

Área de integración

En primer lugar hay que determinar el área de integración A^* . Esta área puede tener forma anular (como se muestra en la Figura 2.13) siempre que las hipótesis de carga garanticen la independencia de J con respecto al camino escogido. Si se trata de un problema con fuerzas por $udv.$, deformaciones tipo ε_{ij}^* , cargas en caras de grieta o efectos dinámicos, entonces A^* deberá extenderse necesariamente a toda la región comprendida entre el contorno exterior Γ_1 y el extremo de la grieta. A efectos prácticos, resulta obvia la conveniencia de que el contorno exterior Γ_1 este formado por *lados de elementos* (y también el interior Γ_3 si A^* es anular).

Elección de la función q_1

Recordemos que la función q_1 ha de ser suficientemente continua y debe cumplir las condiciones dadas por la ec. (2.68) para el cálculo de J , donde Γ_3 se reduce a un punto (el extremo de grieta) en el caso de que A^* no pueda ser anular. Además, la función q_1 ha de ser suficientemente continua. De hecho, como afirman Shih *et al.* [12], si la precisión con la que se calculan los campos de EF sobre todo el dominio es del mismo orden, entonces *las estimaciones de J serán insensibles al tamaño y forma de la región A^* e independientes de la función q_1 escogida*. Sin embargo, en la práctica la estimación en la zona cercana al extremo de grieta es siempre menos precisa que en zonas alejadas. En estas condiciones, sí puede afectar el área A^* y la función q_1 elegidas. Como regla general, cuanto más se extienda lejos del extremo de grieta el área A^* las estimaciones de J serán más precisas. Muchos autores proponen el cálculo de J a través de diferentes dominios para evaluar la independencia de J y así tener una estimación de la precisión del análisis (Li *et al.* [16]; Shih *et al.* [12]).

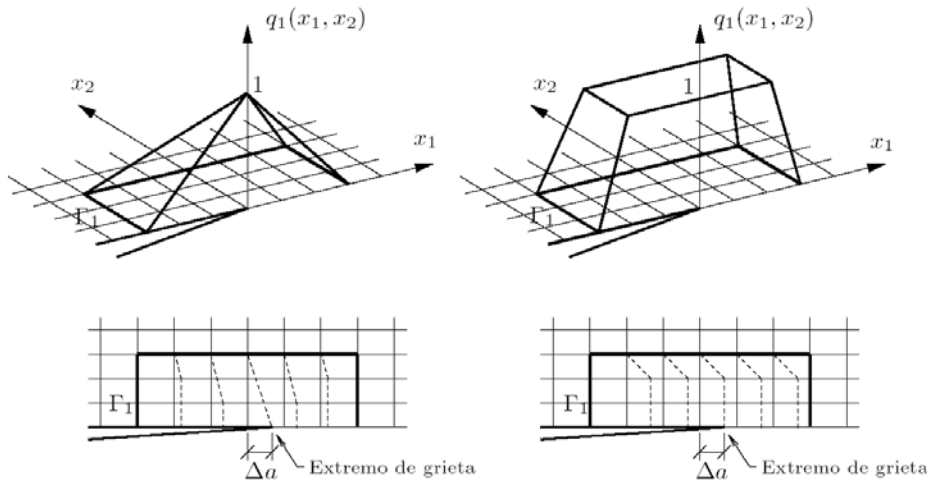


Figura 2.15 Ejemplo de dos funciones q_1 para problemas 2D tipo piramidal (izqda.) y tipo plateau (dcha.) Debajo: representación de los desplazamientos virtuales Δx_1 en nodos.

En la Figura 2.15 se representan las funciones q_1 tipo piramidal y tipo *plateau* propuestas por Shih *et al.* [12]. Ambas definen el dominio de integración alrededor del extremo y cumplen que $q_1=0$ en el contorno exterior, $q_1=1$ en el extremo de grieta y son funciones continuas. Notar que si q_1 es *piramidal* se pondera de igual modo la parte del integrando que acompaña a $\frac{\partial q_1}{\partial x_i}$ (ya que esta derivada es constante) mientras que los

términos de fuerzas por udv., deformaciones tipo ε_{ij}^* , cargas en caras de grieta, etc. se ponderan linealmente (q_1 es lineal). Si se utiliza una función tipo *plateau* los términos que multiplican a $\frac{\partial q_1}{\partial x_i}$ no contribuyen

al cómputo de J cuando se trata de elementos en la zona plana de la función q_1 , es decir, sólo importa donde hay gradiente de q_1 (aunque la información de estos elementos sí contribuye a los términos asociados a casos de carga más generales, pues en ellos $q_1 = 1$). Notar que para un problema en el que las hipótesis de carga sean las asociadas a la independencia de J del camino tomado, la utilización de una función tipo *plateau* equivale a la integración en un dominio A^* anular, ya que la

única contribución es debida a aquellos elementos donde q_1 no es constante. En estos casos la elección de una función q_1 tipo *plateau* presenta la ventaja de evaluar los resultados lejos de la zona de elevados gradientes, donde la solución de EF es más exacta, aunque por contra es menor el número de elementos que contribuye al cómputo de la integral. Shih *et al.* [12] aplicaron estas funciones a problemas con deformaciones térmicas y, como cabía esperar, las estimaciones de J fueron básicamente independientes de la función q_1 utilizada.

Integración numérica

Resulta evidente que la integración extendida al área A^* equivale a la suma de las integrales extendidas al área de cada uno de los elementos incluidos en A^* . La integral en cada elemento de expresiones como las ecs. (2.71) o (2.72) se realiza entonces numéricamente *en el dominio de referencia* ζ, η mediante la cuadratura de Gauss. A continuación se incluye a modo de ejemplo la expresión discretizada de la ec. (2.71) (válida en ausencia de cargas por *udv.*, efectos térmicos o dinámicos y cargas en las caras de grieta). Se ha supuesto el uso de *elementos isoparamétricos*

$$J \approx \sum_{e=1}^{N_e \in A^*} \left\{ \sum_{m=1}^{N_G} \sum_{n=1}^{N_G} H_m H_n \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{li} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} |\mathbf{J}| \right]_{(\xi_m, \eta_n)} \right\}_e \quad (2.84)$$

donde N_e es el número de elementos contenidos en el área de integración A^* , N_G es el número de puntos de Gauss tomados en cada dirección local de integración ζ, η , siendo H_m, H_n sus correspondientes pesos de Gauss y $|\mathbf{J}|$ es el determinante de la matriz jacobiana \mathbf{J} de la transformación de coordenadas. El integrando (expresión entre corchetes) ha de ser evaluado en las coordenadas de referencia de los puntos de Gauss (ξ_m, η_n) . Para la evaluación de $\frac{\partial q_1}{\partial x_i}$ resulta conveniente definir la

función q_1 en cada elemento como interpolación a partir de los valores nodales:

$$q_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{N_{ne}} N_n(\xi, \eta) q_{1n} \quad (2.85)$$

donde N_{ne} es el número de nodos por elemento, $N_n(\xi, \eta)$ es la función de forma del nodo n en coordenadas de referencia de elemento y q_{1n} es el valor de q_1 asociado al nodo n . De esta manera, las derivadas de q_1 con respecto a las coordenadas espaciales x_i se calculan como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^{N_{ne}} \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \xi} q_{1n} \\ \sum_{n=1}^{N_{ne}} \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \eta} q_{1n} \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

Utilización de elementos singulares. Disposición de los elementos

En principio el uso de elementos singulares no parece estar justificado al ser el EDI un método energético basado en la información de una gran parte del dominio y en el que la mejora en la estimación local no tiene apenas relevancia (Shivakumar y Raju [14]). Sin embargo, los ejemplos numéricos llevados a cabo por Li *et al.* [16] señalan que siempre se obtiene una mejora adicional al utilizar elementos singulares colapsados de tipo *quarter-point*. También la disposición de elementos singulares colapsados en forma de abanico alrededor del extremo de grieta da mejores resultados que la simple utilización de 4 elementos cuadriláteros tipo *quarter-point* sin colapsar (véase la Figura 2.16).

Conviene insistir en que las mejoras que suponen estos refinamientos de malla son pequeñas y en ocasiones no compensan las complicaciones adicionales en postproceso. Es por esta razón que en esta tesina se ha optado por hacer uso de elementos standard.

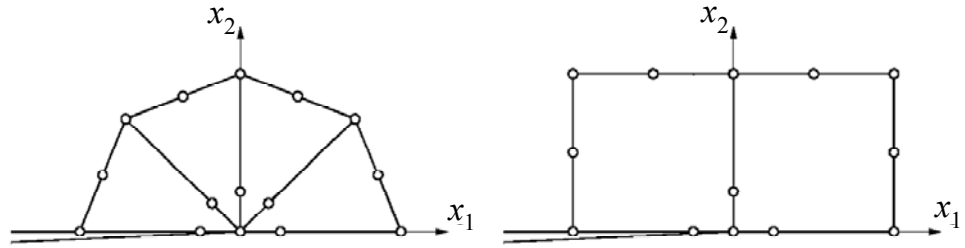


Figura 2.16 Elementos cuadriláteros singulares “quarter-point”. Izqda.: Colapsados en abanico. Dcha.: Sin colapsar.

2.3.4.3.2 Aplicación a 3D

A continuación se exponen algunas indicaciones para la implementación del método EDI en un problema 3D resuelto por el MEF. El objetivo es estimar el valor puntual $J(s)$ en una posición determinada s del frente de grieta.

Sistema de referencia

Nikishkov y Atluri [13] y Shivakumar y Raju [14] recomiendan el uso de un sistema de coordenadas local x_1, x_2, x_3 , como el mostrado en la Figura 2.8 y en la Figura 2.14. Dado que la solución de un problema de elementos finitos se expresa generalmente en un sistema global de referencia X_1, X_2, X_3 , se aprovechan las propiedades del álgebra tensorial para expresar los campos obtenidos por EF en el sistema local y facilitar así su postproceso. Si denotamos por a_{ij} el tensor de transformación de coordenadas (en el que cada término a_{ij} es el coseno del ángulo formado por el eje local x_i con el eje global X_j), la transformación de coordenadas espaciales y de los campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
 x_i &= a_{ij} X_j \\
 u_i &= a_{ij} u_j^g \\
 \varepsilon_{ij} &= a_{ip} a_{jq} \varepsilon_{pq}^g \\
 \sigma_{ij} &= a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}^g
 \end{aligned}
 \tag{2.87}$$

donde el superíndice g indica los campos obtenidos por EF en coordenadas globales.

Volumen de integración

Es habitual utilizar elementos isoparamétricos hexaédricos (generalmente elementos cuadráticos de 20 nodos, aunque es posible utilizar lineales de 8 nodos). Una malla típica en estas situaciones se esquematiza en la Figura 2.17.

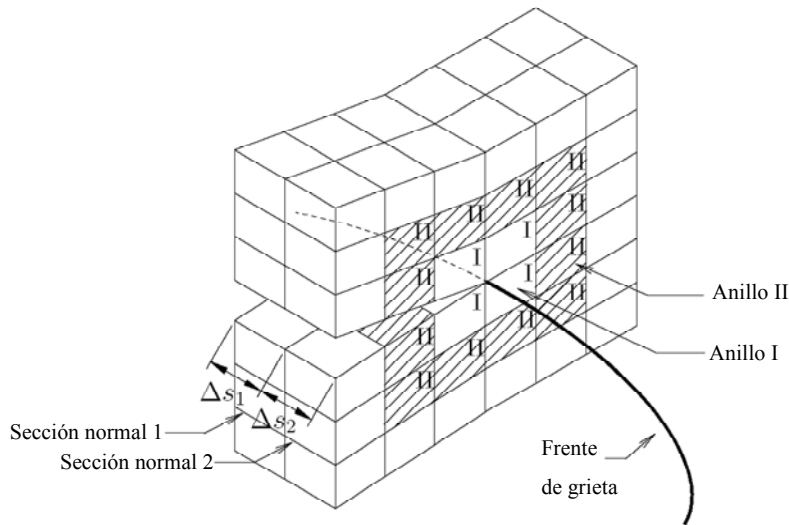


Figura 2.17 Posición de malla mostrando diferentes ‘anillos’ de elementos en dirección radial y dos ‘secciones normales’ de elementos según el contorno del frente.

Para la elección del volumen de integración V , en general se pueden considerar como válidas las siguientes opciones:

1. Anillo I interior de cada sección normal.
2. Anillo II de cada sección normal.
3. Anillos I+II de cada sección normal.
4. Mismos casos anteriores pero utilizando dos secciones normales consecutivas.

Evidentemente es también posible escoger anillos en dirección radial. La elección de estos dominios de integración está íntimamente ligada al tipo de función q_1 escogida, como se verá en el apartado siguiente. Notar que en la opción 1, la superficie S_0 (véase la Figura 2.10) queda reducida al frente de grieta y S_c está formada por las caras de elemento que hacen de frontera entre el anillo I y II. Por su parte, la opción 2 es equivalente a suponer que la superficie S_0 es la frontera entre los anillos I y II y la superficie S_c la frontera entre los anillos II y III. La opción 3 implica que S_0 se reduce al frente de grieta y S_c es la frontera entre los anillos II y III.

La elección del volumen de integración V depende en gran medida del problema y del mallado empleado en su discretización. Así, si el estado de deformación plana es generalizado en el componente (asimilable entonces a un problema 2D), la estimación de $J(s)$ es independiente de la opción escogida (cualquier anillo, que incluya o no los interiores, proporciona un resultado parecido). Tan sólo el anillo I se aleja de los resultados esperados en estos casos, con errores del 10-15 % (Shivakumar y Raju [14]), por los elevados gradientes en esa zona. Cuando se trata de un problema 3D en general, la definición teórica de $J(s)$ implica tomar $\Delta s \rightarrow 0$ y $\rho / \Delta s \rightarrow 0$ (ver ec. (2.58)). De acuerdo con esta definición, la opción 1 parecería la más adecuada, ya que se trata de un dominio cercano al frente de grieta y poco influido por los estados tensionales no locales. Sin embargo, presenta el inconveniente de un elevado error de discretización local, pues no se reproduce correctamente la singularidad. Los ejemplos numéricos analizados por Shivakumar y Raju [14] confirman que el empleo de *dos elementos en dirección radial (opción 3)* es recomendable para compensar la influencia de la singularidad mal representada en el primer elemento en dirección radial. También obtuvieron buenos resultados con la opción 2. En cualquier caso, conviene apuntar aquí que el número de anillos que se puede tomar en dirección radial depende del tamaño de los elementos en esta zona comparado con el frente de grieta, de forma que se garantice un estado lo más parecido posible al de deformación plana propio de un punto infinitamente cercano al frente¹⁰. Shivakumar y Raju [14] tomaron un

¹⁰ Obviamente, el estado de deformación plana no se mantiene en zonas próximas a la superficie, donde el frente intersecta el contorno exterior del componente y los *efectos de borde* dan lugar a una transición entre deformación y tensión plana. Esto obliga a un

tamaño de elemento junto al frente de grieta de $a/20$, siendo a la longitud característica de grieta.

En cuanto a la elección de una o dos secciones normales (Figura 2.17) depende claramente de la función q_1 . En general, si se utilizan elementos lineales de 8 nodos será necesario tomar dos secciones normales. Si los elementos son cuadráticos, puede ser suficiente con una sección normal tal y como se explica a continuación.

Elección de la función q_1

En la Figura 2.18 se presentan algunas funciones q_1 utilizables en la estimación de $J(s)$ en un problema 3D propuestas por Nikishkov y Atluri [13]; Shivakumar y Raju [14]¹¹. Se aprecia que cumplen los requisitos dados en la ec. (2.74) y que en el resto del dominio toman un valor que respeta la continuidad de la función. Notar que en la dirección local x_3 estas funciones se extienden el equivalente a la anchura de dos elementos (dos secciones normales en la Figura 2.17), excepto la función tipo (a), que sólo se extiende el ancho de un elemento (necesariamente cuadrático). En la dirección radial x_1 se puede extender uno o más anillos de elementos. Nikishkov y Atluri [13] también presentan otras funciones q_1 que no son cero en los costados laterales del dominio y que por tanto necesitan la inclusión de las correspondientes integrales de superficie extendidas a los costados S_i (véase Figura 2.10) en las ecs. (2.79), (2.83), etc.

refinamiento adicional en la dirección local x_3 . En sentido estricto, el estado tensional en esta zona no viene representado por las expresiones clásicas 2D, siendo necesarios otros planteamientos (Shivakumar y Raju [14]).

¹¹ Estos autores las denominan *funciones s* o *funciones S*.

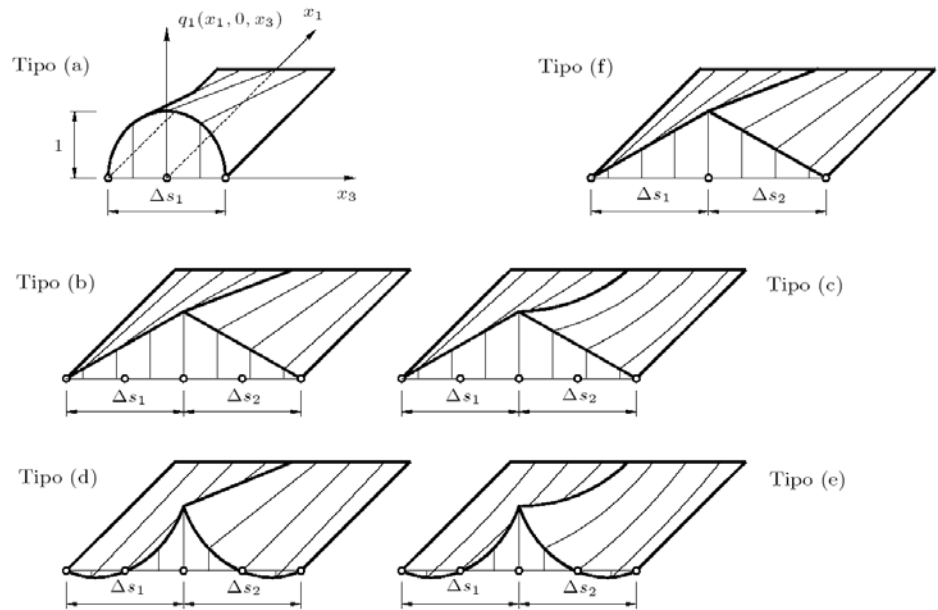


Figura 2.18 Algunas funciones q_1 para elementos cuadráticos de 20 nodos, tipos (a)-(e) y lineales de 8 nodos, tipo (f).

La Tabla 2.2 presenta funciones explícitas de $q_1(s) \equiv q_1(0, 0, x_3)$, correspondientes a su variación a lo largo del frente de grieta. Notar que se expresan en función de la coordenada de referencia unidimensional ξ (véase Figura 2.19). También se incluye f , que es el área comprendida entre dicha función y el eje local x_3 (véase ec. (2.82)).

Tipo	Para Δs_1	Para Δs_2	f
(a)	$(1 - \xi^2)$		$2\Delta s_1/3$
(b),(c),(f)	$(1 + \xi)/2$	$(1 - \xi)/2$	$(\Delta s_1 + \Delta s_2)/2$
(d),(e)	$(\xi^2 + \xi)/2$	$(\xi^2 - \xi)/2$	$(\Delta s_1 + \Delta s_2)/6$

Tabla 2.2 Expresiones para $q_1(s) \equiv q_1(x_3)$ en la coordenada de referencia ξ . Valor de la integral f .

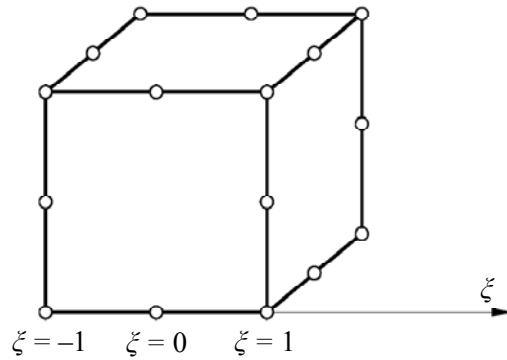


Figura 2.19 Coordenada de referencia ξ a lo largo del lado de elemento coincidente con el frente de grieta.

Diversas comprobaciones numéricas (Nikishkov y Atluri [13] y Shivakumar y Raju [14]) llevan a la conclusión de que es recomendable el uso de funciones q_1 con *variación lineal* en dirección radial (tipos (a), (b) y (d) para elementos cuadráticos; tipo (f) para elementos lineales), descartando los tipos (c) y (e). Notar que para el tipo (a) sólo es necesario una sección normal de elementos y permite evaluar $J(s)$ en el nodo de centro de lado. Los tipos (b), (d) y (f) necesitan dos secciones normales consecutivas, estimando $J(s)$ en las posiciones de nodo de esquina. Cuando se trata de un nodo de esquina situado en la intersección del frente de grieta con una superficie libre (nodo N en la Figura 2.20) sólo se puede tomar una única sección normal con la parte correspondiente de función q_1 asociada. Por otro lado, en estos casos la estimación suele ser muy deficiente por el rápido cambio en el estado tensional debido a los efectos de borde o *boundary layer effect* (Raju y Newman [23]; Shih *et al.* [12]; Shivakumar y Raju [24], [14]), que dan lugar a un valor local de $G = 0$ si el frente de grieta es perpendicular a la superficie exterior (véase nota al pie de la página 58).

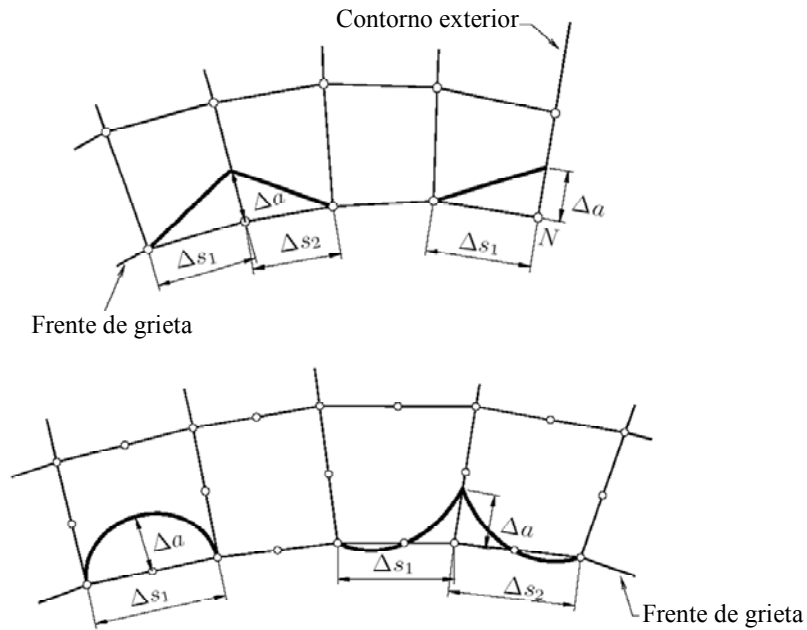


Figura 2.20 Avance local del frente en el plano de grieta en el caso de elementos lineales y cuadráticos. Notar el avance para el nodo N en la superficie libre.

En cuanto a la elección entre variación lineal en dirección x_3 (tipo (b)) o variación cuadrática (tipo (d)), los trabajos citados anteriormente no muestran diferencias significativas entre ambas. DeLorenzi [18]; Li *et al.* [16] utilizaron en un principio el tipo (e) para nodos de esquina de elementos de 20 nodos por su relación inmediata con las funciones de forma propias del elemento (cuadráticas). Sin embargo una variación lineal en dirección x_3 es más simple y su sentido físico es mayor cuando se relaciona con la extensión virtual de grieta Δa (las funciones q_1 tipo (d) y (e) producen un “retroceso” virtual de grieta entre los nodos más alejados, véase Figura 2.20). Por tanto, en modelos con elementos cuadráticos, es aconsejable una función q_1 tipo (a) para nodos de centro de lado y tipo (b) para nodos de esquina (Banks-Sills y Sherman [25]).

Integración numérica

La integración numérica de la ec. (2.83) (válida en ausencia de fuerzas por $udv.$, efectos térmicos y dinámicos, y cargas sobre caras de grieta)

sigue pautas análogas a las descritas para el caso bidimensional. La integración numérica se realiza en el dominio de referencia tridimensional ξ, η, ζ mediante cuadratura de Gauss. La expresión discretizada de la ec. (2.83) es:

$$J(s)f \approx \sum_{e=1}^{N_e \in V} \left\{ \sum_{m=1}^{N_G} \sum_{n=1}^{N_G} \sum_{p=1}^{N_G} H_m H_n H_p \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{li} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} |\mathbf{J}| \right]_{(\xi_m, \eta_n, \zeta_p)} \right\}_e \quad (2.88)$$

donde N_e es el número de elementos contenidos en el volumen de integración V , f es la integral de la ec. (2.82), cuyos valores para ciertas funciones q_1 se muestran en la Tabla 2.2. El resto de parámetros son definidos de igual modo que en la ec. (2.84). Es inmediato extender al caso tridimensional las ecs. (2.85) y (2.86) (q_1 definida como interpolación a partir de valores nodales y sus derivadas respecto a x_i).

Disposición de los elementos. Uso de elementos singulares.

Aunque el método EDI posee en principio las ventajas de métodos energéticos (poca influencia del grado de refinamiento en las cercanías de la singularidad), no hay que olvidar que la estimación de $J(s)$ es local a lo largo del frente de grieta, por lo que cabe esperar que la utilización de elementos singulares mejore notablemente los resultados. Nikishkov y Atluri [13] utilizaron elementos de 20 nodos singulares (tipo *quarter-point*), colapsados en cuña y dispuestos en forma de abanico alrededor del frente de grieta. Sin embargo, Shivakumar y Raju [14] no hicieron uso de elementos singulares en torno al extremo de grieta, y obtuvieron igualmente correlaciones excelentes con soluciones existentes en la literatura (evitando tomar como dominio de integración el primer anillo de elementos). Tampoco utilizaron elementos colapsados dispuestos en abanico, sino una disposición *rectangular* como la mostrada en la Figura 2.17.

Como conclusión, para la aplicación del método EDI *no es necesario* un refinamiento de la malla en torno al frente de grieta, ya que las mejoras en la estimación de $J(s)$ no son en general significativas (lo que hace a este método especialmente ventajoso).

Variación de $J(s)$ a lo largo del frente de grieta.

Si el número de elementos tomados a lo largo del frente de grieta s es suficiente, es posible asumir que $J(s)$ es una función lineal a tramos entre cada dos nodos consecutivos (véase la Figura 2.21):

$$J(s) = A_i s + B_i \quad \text{con } i = 1, \dots, N_{tr} \quad (2.89)$$

siendo N_{tr} el número de tramos en que se discretiza la evolución de $J(s)$, lo que supone que existen $N_{tr} + 1$ nodos a lo largo del frente de grieta.

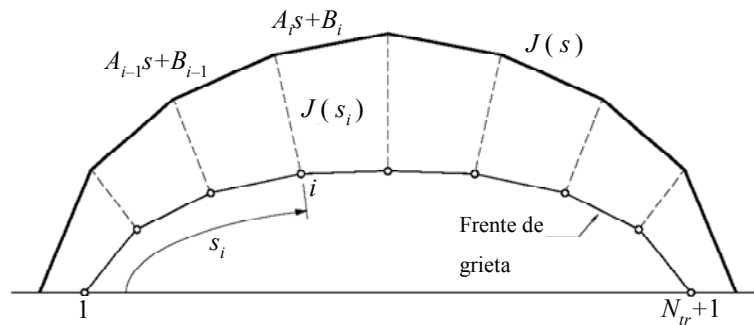


Figura 2.21 Variación lineal a tramos de $J(s)$ a lo largo del frente de grieta en un problema 3D.

Por tanto, para determinar completamente $J(s)$ se deben conocer las $2N_{tr}$ constantes A_i y B_i . Se dispone para ello de $2N_{tr}$ ecuaciones provenientes de:

- $N_{tr} - 1$ ecuaciones de continuidad de los tramos $J(s)$ a ambos lados de los nodos intermedios.
- $N_{tr} + 1$ evaluaciones puntuales de $J(s)$ a través de otras tantas aplicaciones del método EDI para cada nodo del frente de grieta (ecs. (2.79), (2.83) o su equivalente numérica ec. (2.88)).

De esta manera la variación de $J(s)$ a lo largo del frente de grieta puede ser descrita a partir de interpolaciones del tipo ec. (2.89). Este

planteamiento fue propuesto originalmente por Parks [26] en el contexto del Método de la Derivada de Rigidez (método que queda fuera del trabajo de esta tesis). En Li *et al.* [16]; Shih *et al.* [12] se puede encontrar un enfoque totalmente análogo, por lo que la variación de $J(s)$ a lo largo del frente de grieta se puede expresar con ayuda de funciones polinómicas $\psi_i(s)$ y los valores puntuales $J(s_i)$ en cada nodo i del frente:

$$J(s) = \sum_{i=1}^{N_n+1} J(s_i) \psi_i(s) \quad (2.90)$$

Las funciones polinómicas $\psi_i(s)$ no han de ser necesariamente lineales, aunque han de cumplir la condición de $\psi_i(s_j) = 1$ cuando $i = j$ y $\psi_i(s_j) = 0$ cuando $i \neq j$. De hecho pueden ser escogidas de forma que coincidan con las correspondientes funciones de forma.

2.3.5 MÉTODO DE LA INTEGRAL J_{X1}

En ciertos análisis de rotura basados en la Mecánica de la Fractura Elastoplástica (MFEP) es posible aplicar un procedimiento simplificado, típico de la Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal (MFEL) consistente en calcular la integral J y a partir de ella deducir un Factor de Intensidad de Tensiones equivalente K_{eq} mediante una supuesta relación entre ambos, aún cuando, en sentido estricto, esta relación sólo existe en el supuesto de un dominio elástico lineal. Para los casos límite de tensión plana y deformación plana, se ha obtenido, considerando que existe únicamente apertura en modo I, que:

$$J = \frac{K^2}{E'} \quad (2.91)$$

donde E' es el módulo de elasticidad efectivo definido en la ec. (2.15).

Para las situaciones en las que encontramos constricción parcial, como es el caso de las probetas reales que poseen un espesor B específico, en las que se presenta una situación intermedia entre ambos casos límite, varios

autores han desarrollado expresiones empíricas del módulo de elasticidad efectivo E' .

Así pues, Nikishkov y Atluri [13] propusieron la siguiente ecuación para definir el módulo de elasticidad efectivo que relaciona J con K :

$$E' = E \left(\frac{1}{1-\nu^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \varepsilon_r \right) \quad (2.92)$$

donde ε_r es conocido como ratio de deformación y viene definido por:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}} \quad (2.93)$$

donde el tensor de deformaciones ε_{ij} se toma en las cercanías del vértice de grieta con respecto a los ejes locales del frente de grieta. Este sistema de ejes cartesianos está orientado de manera que el eje X se sitúa en la dirección de propagación de la grieta, el eje Y está orientado perpendicular al plano de grieta y el eje Z se sitúa a lo largo del frente de grieta. En los casos extremos de tensión plana y deformación plana, es fácil deducir que la ec. (2.92) se reduce a la ec. (2.15) respectivamente. Sin embargo, estos autores no dieron ninguna justificación teórica a esta expresión por lo que se debe interpretar como una interpolación lineal entre deformación plana y tensión plana.

Una alternativa a esta expresión fue propuesta por Williams y Bass [27] mediante la siguiente ecuación:

$$E' = \frac{8Jr}{\pi u_y^2(r, \theta = \pi)} \quad (2.94)$$

donde u_y representa el desplazamiento de apertura de grieta tomado a la distancia r que se encuentra cerca del vértice de grieta. A pesar de que esta expresión contempla el cálculo del módulo de elasticidad efectivo para puntos situados a distintas distancias del vértice de grieta, no resulta una expresión muy práctica a la hora de convertir K en J puesto que requiere conocer de antemano J lo que nos llevaría a un proceso iterativo.

Por otro lado, esta expresión no es muy susceptible al valor seleccionado de r .

En [28] se demuestra que el Factor de Intensidad de Tensiones K_I es coincidente para los casos límite de tensión plana y deformación plana. Así pues, cabe suponer que este FIT no resulta afectado por el espesor en el caso de una probeta real, puesto que, de acuerdo con el principio de superposición aplicable a la teoría elástica-lineal, el efecto del espesor se manifiesta solamente como una acción transversal suplementaria, σ_{33} , presuntamente no presente en el caso de tensión plana y de valor $\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ en el caso de deformación plana.

En situaciones tridimensionales como las que se presentan en probetas fisuradas reales debido al efecto del espesor B , la integral J no es estrictamente aplicable para el análisis del comportamiento en fractura, al no incluir los campos de tensión y deformación existentes en el sentido transversal, por lo que se han propuesto otras integrales alternativas que pretenden solventar esta carencia. Una de estas integrales se ha expuesto en el apartado anterior como una integral de dominio equivalente (EDI). Otra de estas integrales propuestas es la integral J_{X1} , que será la integral desarrollada en el presente trabajo de investigación. Esta integral consiste en una integral de línea-área y resulta independiente del dominio de integración. Esta integral se postula como una seria candidata para establecer criterios de fractura en casos de probetas reales donde existe un efecto debido al espesor real de la probeta. La consideración de las conocidas como *curvas de constricción* que, en el ámbito de la MFEL, caracterizan el estado tensional y deformacional en el frente de grieta incluyendo los términos de orden superior del desarrollo de Williams (véase ecs. (2.1)-(2.6)), plantea interesantes cuestiones sobre la relación entre la integral J_{X1} y el factor de intensidad de tensiones K y permite valorar la validez y utilidad de la integral J_{X1} para definir el riesgo de inestabilidad de grietas en situaciones en las que se presenta constricción parcial en probetas reales.

De lo expuesto anteriormente se contempla la importancia de poder contar con un programa que permita obtener el valor de la integral J_{X1} para una probeta real con un espesor concreto, pudiendo de esta forma establecer unas limitaciones de validez de la integral J dentro de la *zona de constricción*.

El desarrollo que se presenta a continuación que conduce a la definición de la integral J_{x1} está basado en la expresión dada por Rigby y Aliabadi [29].

En un campo bidimensional, la integral J se define por medio de una integral de línea. En el contexto de un cálculo por el Método de Elementos Finitos (MEF), es preferible realizar la integración sobre un área que no es sino una extensión natural de las integraciones que se realizan sobre cada elemento finito durante la generación de la matriz de elemento.

Una particularización en la aplicación de la definición de la integral J definida en el capítulo anterior (ec. (2.17)) es el caso de 2-D. En un sólido elástico (tanto lineal como no-lineal), bidimensional, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones y despreciando las fuerzas de volumen, la integral J puede definirse como:

$$J = \int_{\Gamma} \left[W n_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] ds \quad (2.95)$$

donde:

Γ es un contorno cualquiera que rodea al vértice de la grieta, recorrido en sentido antihorario desde la cara inferior de la grieta hasta la superior.

n_i es la normal a Γ hacia el exterior.

σ_{ij} es el tensor de tensiones.

u_j es el vector de desplazamientos.

ds es el incremento del arco a lo largo del contorno Γ .

W es la densidad de energía de deformación

La densidad de energía de deformación viene dada por la ecuación vista en el apartado anterior:

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.96)$$

A partir de la integral anterior se puede relacionar tensor de tensiones σ_{ij} , con las componentes del tensor de deformaciones ε_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \text{donde } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.97)$$

Con esta expresión se puede demostrar que se cumple la relación:

$$\frac{\partial \Sigma_{kj}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \quad (2.98)$$

donde el término Σ_{kj} es el conocido como tensor de Eshelby [8] que se define mediante la siguiente expresión:

$$\Sigma_{kj} = W\delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (2.99)$$

donde

u_i son las componentes del vector desplazamiento.

δ_{kj} son los índices de Kronecker:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Por tanto, también se cumplirá la relación:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P_{kj}}{\partial x_j} d\Omega = 0 \quad (2.100)$$

donde:

Ω representa el dominio limitado por la curva cerrada.

2.3.5.1 Definición de la integral J_{x1}

Considérese un sólido que contiene una fisura en el plano x_1-x_3 y una sección de este sólido correspondiente a un corte con el plano $x_3=z_0=cte$. Sea el dominio de integración $\Omega(C - C_\epsilon)$ limitado por la curva cerrada $\Gamma \equiv C + \gamma_1 + C_\epsilon + \gamma_2$ (ver Figura 2.22).

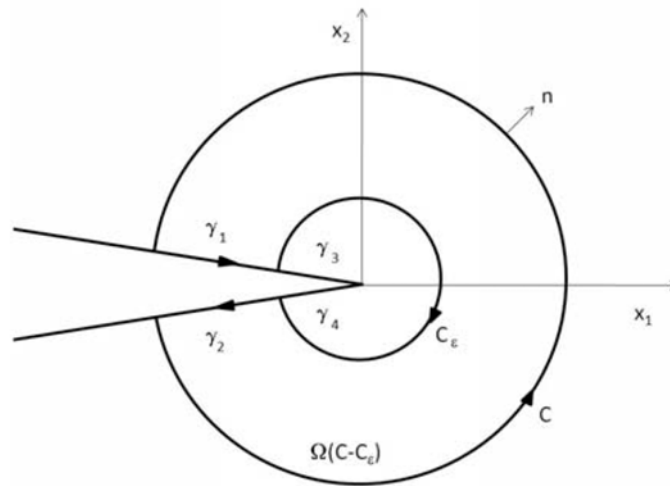


Figura 2.22 Dominio de integración en un plano perpendicular al frente de la fisura ($x_3 = cte$).

Por otro lado, el Teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva plana con una integral doble sobre el recinto que encierra la curva. Así pues, sea C una curva cerrada simple regular, positivamente orientada (sentido contrario a las agujas del reloj), diferenciable a trozos, en el plano y sea D la región limitada por C . Si P y

Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene D , entonces:

$$\int_C P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (2.101)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -n_2 dC \\ dx_2 &= n_1 dC \end{aligned}$$

donde:

n_1 y n_2 son las componentes de la normal exterior al camino de integración.

s es la variable que recorre el camino de integración.

En el cálculo de $J(s)$ sólo se necesita considerar el caso $k = 1$ (esto es, la componente J_1 del vector \mathbf{J}). Así pues, la ec. (2.100) particularizada para el caso $k = 1$ se convierte en:

$$\int_{\Gamma} \left(W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j \right) dC - \int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Omega = 0 \quad (2.102)$$

Abreviadamente, la ec. (2.102) se puede escribir como:

$$\int_{C+\gamma_1+\gamma_2} A dC - \int_{\Omega(C)} B d\Omega = - \int_{C_\varepsilon} A dC - \int_{\Omega(C_\varepsilon)} B d\Omega \quad (2.103)$$

donde:

$$A = W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j \quad (2.104)$$

y

$$B = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (2.105)$$

El dominio $\Omega(C)$ está limitado por las curvas C , γ_1 , γ_3 , γ_4 y γ_2 , mientras que las curvas C_ε , γ_4 y γ_3 limitan el dominio $\Omega(C_\varepsilon)$ (ver Figura 2.22).

Teniendo en cuenta que $\int_{\gamma_1+\gamma_2} A dC = 0$ puesto que en los contornos γ_1 y γ_2 se cumple que $n_1 = 0$ y $\sigma_{ij} n_j = 0$, y que el camino C_ε se recorre en sentido contrario a la curva C , se puede escribir:

$$\int_C A dC - \int_{\Omega(C)} B d\Omega = \int_{C_\varepsilon^-} A dC - \int_{\Omega(C_\varepsilon)} B d\Omega \quad (2.106)$$

siendo la curva C_ε^- coincidente con el camino C_ε , pero recorrida en sentido contrario a ésta.

A partir de esta última expresión queda definida la integral J_{X1} (integral de línea-área) en la forma:

$$J_{X1} = \int_C \left(W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j \right) dC - \int_{\Omega(C)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Omega \quad (2.107)$$

donde:

$$i, j = 1, 2, 3 \text{ (para el caso 3D que nos ocupa).}$$

$\Omega(C)$ es el área recta encerrada por el contorno C como se muestra en la Figura 2.22.

La ec. (2.107), como se deduce de la ec. (2.106), toma valores independientes de la elección del dominio de integración, aunque dependa del plano x_3 en el que se esté evaluando la integral J_{X1} .

Observando la ec. (2.107), se observa que la integral J_{X1} está compuesta a su vez por la suma de dos integrales. La primera de ellas consiste en una

integral de línea que se corresponde con la integral a lo largo del contorno C alrededor del frente de grieta. Por otro lado, segunda integral que compone J_{X1} es una integral de área correspondiente a la integral en el recinto encerrado por el contorno C . Así pues, en el presente trabajo se considerará que la integral J_{X1} está formada por dos componentes:

$$J_P = \int_C \left(W \delta_{li} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_i dC \quad (2.108)$$

$$J_A = - \int_{\Omega(\Gamma)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Omega \quad (2.109)$$

Así pues, $J_{X1} = J_P + J_A$. Se espera que la integral J_{X1} sea independiente del camino escogido (Rigby y Aliabadi [29]) dado que el camino C está contenido en el plano x_1 - x_2 y por lo tanto es normal al frente de grieta con lo que $n_3 = 0$. Este comportamiento fue verificado por Chiarelli y Frediani [30] en sus estudios para ejemplos numéricos en grietas curvas planas en 3D. Para grietas no planas, Eriksson [31] generalizó la ec. (2.107) del cálculo de J_{X1} usando coordenadas curvilíneas.

Claramente $J_A = 0$ en el caso de dos dimensiones para condiciones tanto de tensión plana como de deformación plana. En el problema general de una grieta 3D, se puede demostrar que la integral J_{X1} es equivalente a la ec. (2.17) puesto que J_A desaparece cuando $C \rightarrow 0$ puesto que el área $\Omega(C)$ se reduce a 0 y el integrando de J_A es no singular. Además, la integral de volumen J_{vol} en la ec. (2.79) es equivalente a la integral J_{X1} cuando $\Delta s \rightarrow 0$ (ver Figura 2.14).

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

En los apartados anteriores se ha descrito como abordar el cálculo de la integral J (e indirectamente del FIT) a partir de los resultados obtenidos del análisis de EF. Se ha implementado en MATLAB una metodología para el cálculo de dicha integral en problemas 3D de la MFEL con grietas de frente recto como postproceso de los resultados obtenidos en análisis por el método de los elementos finitos utilizando el software comercial ABAQUS.

A continuación se procede a exponer de manera esquemática (mediante un diagrama de bloques), la metodología implantada para el cálculo de la integral J_{X1} para grietas 3D de frente recto.

La metodología empleada en el presente trabajo de investigación se subestructura en tres fases bien diferenciadas, que se muestran en la Figura 3.1:

- **Fase 1. Generación y análisis estructural del modelo de elementos finitos:** en esta primera fase se definen los datos del problema, las geometrías a estudiar, las condiciones de contorno y las cargas aplicadas. Además se genera la malla de elementos finitos. Una vez generados los modelos de elementos finitos, se procede al análisis estructural de los mismos. Para ello, se ha utilizado el software comercial ABAQUS/Standard. Finalmente se extraen los resultados obtenidos por el método de los elementos finitos (tanto en nodos como en puntos de integración) necesarios para el posterior cálculo de la integral J .
- **Fase 2. Implementación numérica de la integral J_{X1} :** esta fase constituye la fase principal del trabajo de investigación desarrollado en esta tesina. Se trata de un postproceso de los resultados obtenidos por el método de elementos finitos llevado a cabo en la fase anterior. Se emplean los resultados obtenidos en nodos y puntos de integración para el cálculo numérico de la integral J_{X1} así como de sus componentes J_P y J_A .

- **Fase 3. Análisis de los resultados obtenidos:** esta última fase de la metodología llevada a cabo en el presente trabajo de investigación tiene por objetivo realizar un estudio de la integral J y estudiar su comportamiento.

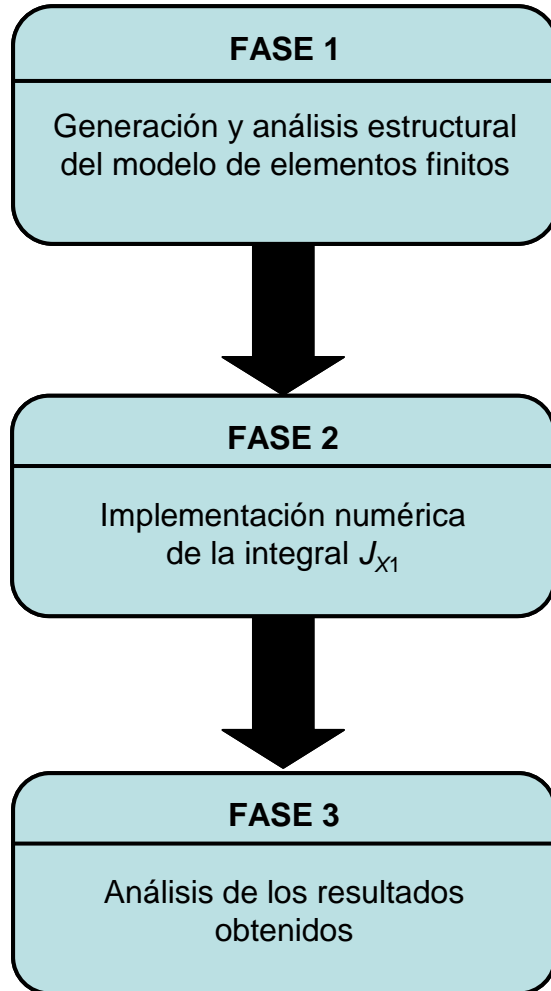


Figura 3.1 Fases principales de la metodología seguida en el trabajo de investigación.

A continuación se procede a realizar un estudio detallado de estas tres fases seguidas en el desarrollo de esta tesina.

3.1 FASE 1. GENERACIÓN Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.

En una primera fase de este trabajo de investigación, se ha realizado el análisis estructural de modelos de elementos finitos de placas 3D de diferentes espesores que presentan una grieta de frente recto. Para ello se ha utilizado el software comercial de elementos finitos ABAQUS.

Esta primera etapa del trabajo puede ser dividida a su vez en tres sub-fases diferenciadas tal y como se ilustra en la Figura 3.2:

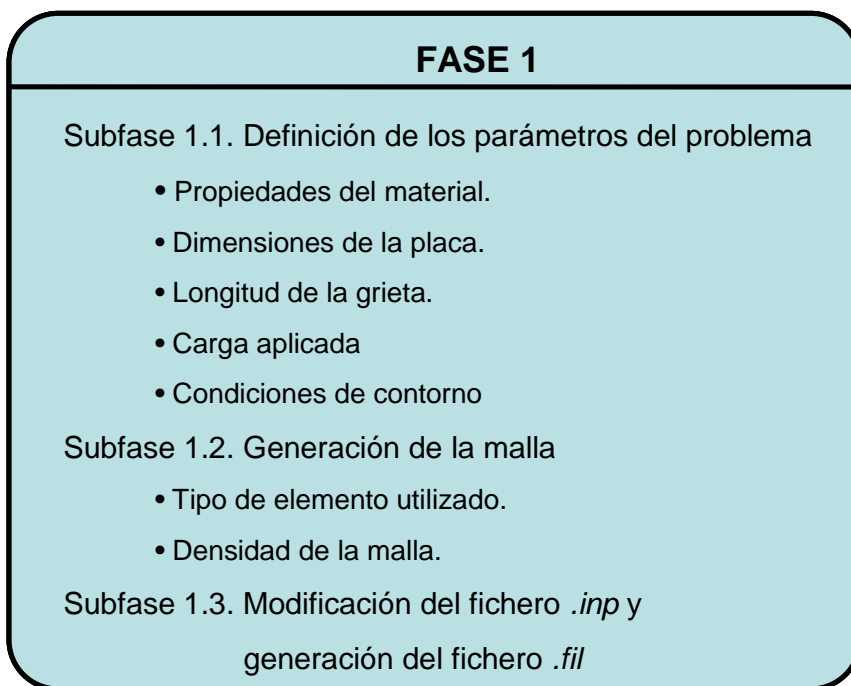


Figura 3.2 Fase 1 del trabajo de investigación realizado.

3.1.1 SUBFASE 1.1. DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL PROBLEMA

En primer lugar se han escogido las características introducidas para el análisis estructural de placas 3D con grietas de frente recto.

Se ha asumido un material elástico lineal (además de isótropo y homogéneo) que posee las siguientes características mecánicas:

Módulo de Young $E = 207 \text{ GPa}$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0.3$

Por otro lado, todas las placas analizadas tienen la misma anchura, altura y longitud de grieta variando únicamente el espesor de las placas. De esta manera, todas las placas analizadas tienen una anchura fija $W = 50 \text{ mm}$ y una semi-altura de placa (altura del modelo geométrico realizado) de $H = W = 50 \text{ mm}$. Por otro lado la longitud de grieta en todas las placas es $a = W/2$ y se han analizado siete espesores distintos $B = \{0.1, 1, 5, 10, 20, 50, 200\} \text{ mm}$ con el fin de estudiar el efecto del espesor B y de la relación a/B en los resultados.

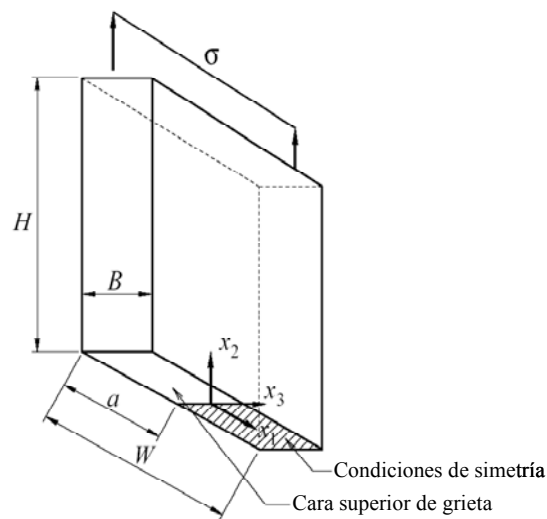


Figura 3.3 Modelo geométrico genérico de las placas analizadas en el trabajo de investigación.

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

Se ha aplicado una carga uniforme sobre la parte superior de la cara superior de la placa que para todos los espesores tiene un valor de $\sigma_{22} = 1$ MPa (ver Figura 3.3). Esta carga produce un modo I de apertura. En la Figura 3.3 se muestra rallada la zona donde se han aplicado las condiciones de contorno de simetría a los modelos de elementos finitos.

Por último indicar que puesto que se pretende estudiar la integral J_{X1} en el plano medio de las placas, se ha modelado el espesor completo de las mismas B (a pesar de la posible utilización de condiciones de simetría en esta dirección) con el objetivo de poder utilizar los puntos de integración de localizados exactamente en el plano medio de las placas.

3.1.2 SUBFASE 1.2. GENERACIÓN DE LA MALLA

Como se ha comentado anteriormente, el análisis estructural realizado por el método de los elementos finitos se ha llevado a cabo utilizando el software ABAQUS.

Una vez realizados los modelos geométricos en ABAQUS/CAE con las dimensiones expuestas en el apartado anterior, el siguiente paso consiste en el mallado de la placa.

En primer lugar se ha de escoger el tipo de elemento que se va utilizar para realizar este mallado. Se ha optado por un elemento tipo *3D Stress standard quadratic (C3D20)*, que se trata de un elemento con forma de hexaedro sólido cuadrático 3D de 20 nodos.



Figura 3.4 Elemento 3D cuadrático de 20 nodos (C3D20) utilizado en el mallado de los modelos de las placas.

En la Figura 3.4, se muestra un elemento de los utilizados para el mallado de las placas. En ella, se aprecia la numeración de los nodos que forman el elemento así como las caras del mismo.

Por otra parte, estos elementos poseen $3 \times 3 \times 3$ puntos de integración, ya que se ha optado por elementos de 20 nodos con integración completa.

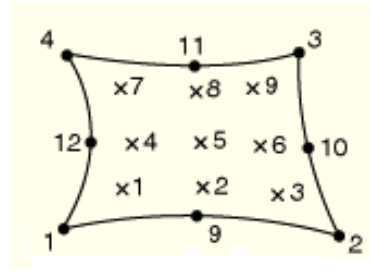


Figura 3.5 Capa de puntos de integración situados más próximos a la cara 1 del elemento 3D cuadrático de 20 nodos (C3D20).

En la Figura 3.5 se muestra la capa con los puntos de integración más próximos a la cara formada por los nodos 1-2-3-4 (cara 1 en la figura anterior).

Los puntos de integración situados en las capas segunda y tercera estarán numerados consecutivamente.

A modo de ejemplo, en la Figura 3.6 se muestra el modelo de elementos finitos de una placa mallada con el tipo de elemento anteriormente comentado y que presenta las siguientes dimensiones:

- Anchura $W = 2 \text{ u.d.l.}$
- Altura $2 \cdot H = 2 \text{ u.d.l.}$ (en la Figura 3.6 se aprecia, tal y como se ha comentado anteriormente, que solamente se ha modelado la semi-altura superior $H = 1 \text{ u.d.l.}$)
- Longitud de la grieta $a = W / 2 = 1 \text{ u.d.l.}$

- Anchura $B = 1 \text{ u.d.l.}$

Se trata de una malla con un total de 11466 elementos y 51120 nodos:

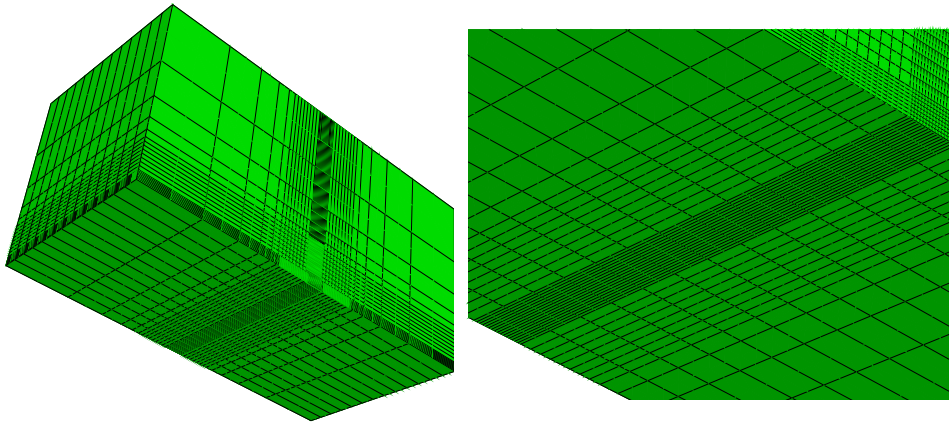


Figura 3.6 Malla de modelo de placa. Dcha.: detalle del frente de grieta.

En la Figura 3.6 se observa cómo se ha concentrado la malla en la región cercana al frente de grieta. Se han utilizado elementos de mayor tamaño en zonas alejadas del frente de grieta ya que en estas zonas el gradiente de tensiones esperado es inferior. Sin embargo, en zonas próximas al frente de grieta, donde se espera que este gradiente de tensiones sea elevado, el tamaño de elemento empleado es mucho menor. Observando la Figura 3.6 dcha., se aprecia que la malla consta, en este caso, de 13 elementos en la dirección transversal de la placa. Así pues, el plano medio vertical de la placa pasará exactamente por mitad del elemento 7 contando desde un borde y en sentido transversal. Este hecho ocurrirá siempre que el número de elementos escogidos en la dirección transversal de la placa sea impar.

Por la constitución del elemento, encontramos una capa de 3×3 puntos de integración que pasan exactamente por mitad de elemento y por tanto, esa capa de 3×3 puntos de integración (del elemento séptimo contando desde un borde de la placa para el ejemplo mostrado en la Figura 3.6) se encuentra situada exactamente en el plano medio vertical de la placa (plano $x_3 = 0$). Esta situación se dará para todas las mallas generadas en las que el número de elementos situados en al dirección transversal de la

placa sea impar. En estos casos, siempre existirá un conjunto de elementos centrales en el que el plano $x_3 = 0$ corte a dicho conjunto de elementos por la mitad.

La importancia de la existencia de estos conjuntos de elementos reside en que en esta tesina se va a proceder al estudio de la integral J_{X1} en el plano $x_3 = 0$. Se ha escogido este plano de simetría $x_3 = 0$ para el cálculo de la integral J_{X1} ya que éste se simplifica notablemente al ser nulas las componentes σ_{13} y σ_{23} del tensor de tensiones por razones de simetría. Al mismo tiempo, la energía de deformación calculada en función de las componentes no-nulas del tensor de tensiones se expresa como:

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + 2(1+\nu)\sigma_{12}^2] \quad (3.1)$$

donde E y ν son respectivamente el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material anteriormente indicados.

Así pues, el hecho de disponer de este conjunto de elementos, con su capa de 3x3 puntos de integración situada en el plano $x_3 = 0$, proporciona las tensiones y deformaciones calculadas en estos puntos de integración necesarias para la evaluación de la integral J_{X1} en este plano.

En estos análisis, la utilización de elementos tipo quarter-point con el fin de mejorar la solución de elementos finitos en las proximidades del frente de grieta no es necesaria ya que como se ha visto la integral J_{X1} está basada en principios de energía y leyes de conservación.

Por último se ha comprobado que el error de discretización, inherente a cualquier solución obtenida con la formulación del método de los elementos finitos, no afecta significativamente a la calidad de los resultados presentados en la presente tesina de master. Se ha comprobado utilizando varias mallas y se ha verificado que los resultados convergen a la misma solución con suficiente precisión.

3.1.3 SUBFASE 1.3. MODIFICACIÓN DEL FICHERO *.inp* Y CREACIÓN DEL FICHERO *.fil*.

Una vez se ha realizado en ABAQUS/CAE el modelo geométrico de la placa, se han definido las características resistentes del material, se ha mallado, se han introducido las condiciones de contorno y las cargas exteriores a las que se encuentra sometida la placa, el modelo se encuentra listo para ser analizado. ABAQUS/CAE genera un fichero que tiene una extensión *.inp*. En él se ha almacenado la siguiente información:

- Nombre del modelo
- Información acerca de los nodos:
 - Número de nodo
 - Coordenadas X,Y,Z
- Información acerca de los elementos:
 - Número de elemento
 - Números de los nodos que forman el elemento
- Información acerca de los *sets* generados. Algunos *sets* son generados internamente por ABAQUS mientras que otros se han generado para obtener información necesaria que permita el cálculo de la integral J_{X1} . Se crean pues *sets* de elementos situados en forma de anillos entorno al frente de grieta. De manera análoga, se generan *sets* de nodos pertenecientes a estos elementos seleccionados.
- Información acerca del material:
 - Nombre del material.
 - Tipo de material. Tal y como se ha comentado anteriormente el material utilizado en los modelos tiene un comportamiento elástico lineal, isótropo y homogéneo y posee las siguientes características resistentes:

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

- *Módulo elástico* $E = 210 \text{ GPa}$.
 - *Coefficiente de Poisson* $\nu = 0.3$.
- Condiciones de contorno. Se utilizan condiciones de contorno de simetría en la dirección vertical de la placa.
 - Carga aplicada. Como se comentó, las placas se encuentran cargadas con una tensión aplicada constante de 1 MPa en la cara superior de las mismas.
 - Por último, se almacena la información requerida en los archivos de salida. Esto es, se indica la información calculada que se desea almacenar en el archivo de extensión *.fil* que ABAQUS/Standard generará cuando realice el cálculo estructural de la placa. Se ha de indicar el set de elementos o de nodos del cual se requiere almacenar la información. De ahí radica la importancia de la creación de los sets de elementos y nodos que se explicó en el punto anterior. Se distinguen dos tipos de variables que se pueden almacenar en este fichero:
 - Variables calculadas en los puntos de integración de los elementos. Para ello se utiliza el comando **EL FILE* de ABAQUS. Seguidamente se ha de indicar el set de elementos del que se desea extraer la información. De entre todas las variables calculadas en los puntos de integración, las que serán necesarias para el cálculo de la integral J_{χ_1} , son las siguientes:
 - S que se trata de todas las componentes de tensión calculadas en cada punto de integración del elemento. Para el tipo de elemento utilizado en el modelo (elemento 3D cuadrático de 20 nodos, *C3D20*), el tensor tensional queda de la siguiente manera:

S_{11}	se trata de la tensión σ_{xx}
S_{22}	se trata de la tensión σ_{yy}
S_{33}	se trata de la tensión σ_{zz}

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

S_{12} se trata de la tensión τ_{xy}
 S_{13} se trata de la tensión τ_{xz}
 S_{23} se trata de la tensión τ_{yz}

- E que se trata de todas las componentes de la deformación en cada punto de integración del elemento. El tensor de deformación se almacena en el mismo orden que el tensor de tensión, de manera que:

E_{11} se trata de la deformación ϵ_{xx}
 E_{22} se trata de la deformación ϵ_{yy}
 E_{33} se trata de la deformación ϵ_{zz}
 E_{12} se trata de la deformación γ_{xy}
 E_{13} se trata de la deformación γ_{xz}
 E_{23} se trata de la deformación γ_{yz}

- $ENER$ que se trata de la energía de deformación calculada para cada punto de integración.
 - $COORD$ que se trata de las coordenadas x, y, z de cada uno de los puntos de integración.
 - $IVOL$ que se define como el volumen del punto de integración y que se corresponde con el jacobiano.
- Variables nodales. Para ello se utiliza el comando **NODE FILE* de ABAQUS. Seguidamente se ha de indicar el set de nodos del que se desea extraer la información. De entre todas las variables calculadas en los nodos, las que serán necesarias para el cálculo de la integral J_{XI} . serán las siguientes:
 - U que se trata de todas las componentes del desplazamiento físico del nodo, incluidas las rotaciones de los nodos que poseen grados de libertad rotacionales.

- *COORD* que se trata de las coordenadas x , y , z de cada uno de los nodos.

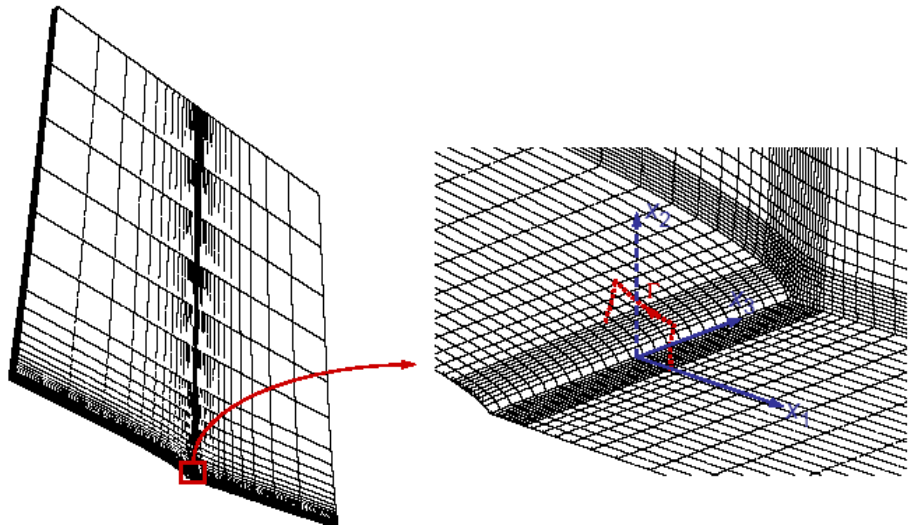


Figura 3.7 Dibujo de la deformada de un modelo de una placa de elementos finitos de espesor 1 mm. Dcha.: Uno de los caminos sobre los que se calcula la integral J_{X1} .

Una vez se tiene completo el fichero de entrada (de extensión *.inp*), el siguiente paso es llevar a cabo el análisis estructural del modelo con ABAQUS/Standard. Éste calcula todas las variables en los nodos y puntos de integración y almacena en el fichero de salida de extensión *.fil* aquellas variables que se han comentado anteriormente de los elementos y nodos correspondientes al los sets que se han creado. Puesto que se pretende evaluar la integral J_{X1} para el plano medio de la placa, los sets generados contienen los elementos cortados por el plano $x_3 = 0$.

En la Figura 3.7, se muestra la deformada de una placa calculada con el método de los elementos finitos para el caso en el que el espesor de placa B tiene un valor de 1 mm. En ella se ha mostrado sobreimpreso un camino de integración sobre el que se ha calculado la integral J_{X1} .

Por último, a modo de ejemplo, se muestra en la Figura 3.8 una imagen de la deformada del modelo representado en la Figura 3.6, en la que se representa la tensión equivalente de von Mises en cada uno de los elementos que configuran la placa.

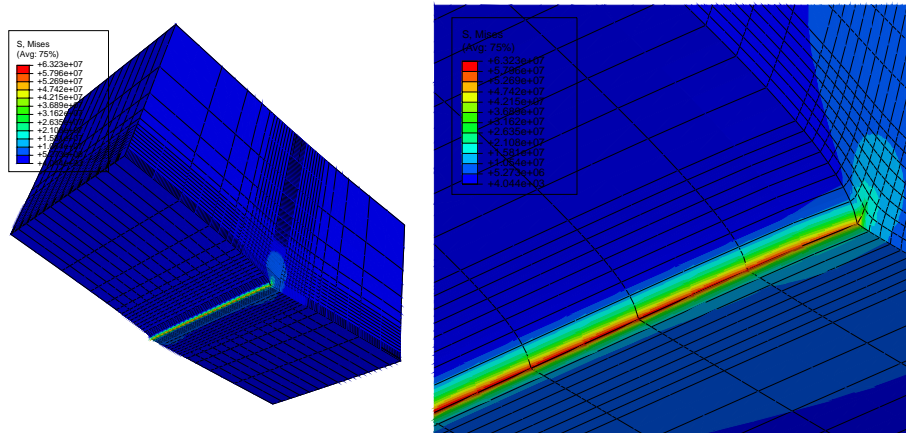


Figura 3.8 Tensión de von Mises de una placa de espesor $B = H = W / 2$. Dcha.: detalle de la concentración de las tensiones en el frente de grieta y de la zona de intersección con el borde libre.

Como era de esperar, la región donde se concentra la mayor tensión es el frente de grieta (mostrado con color rojo) mientras que las zonas alejadas del frente de grieta permanecen poco cargadas (dibujadas en un color azul). Es por tanto lógica la estrategia seguida en cuanto al refinamiento de la malla en las proximidades del frente de grieta con el fin de alcanzar un error de discretización menor.

3.2 FASE 2. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DE LA INTEGRAL J_{X1}

Una vez se ha realizado el análisis mediante el método de los elementos finitos y se ha generado el fichero de salida de ABAQUS/Standard de extensión *.fil*, se procede a la generación de una rutina en MATLAB que permita el cálculo de la integral J_{X1} y su posterior evaluación como postproceso de la solución de EF.

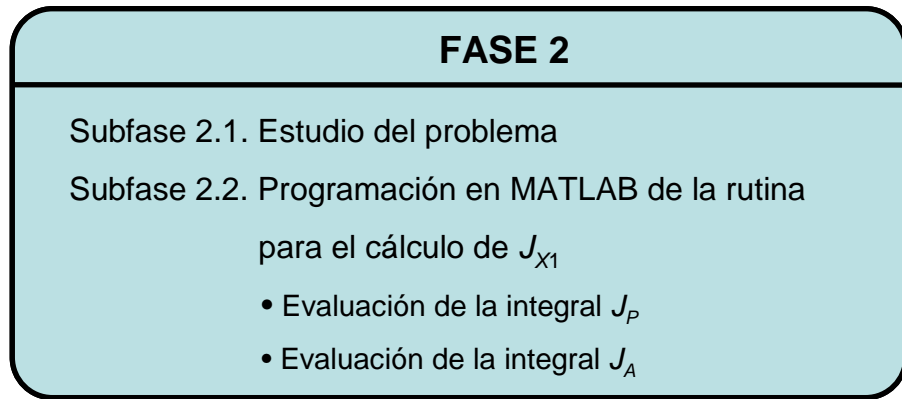


Figura 3.9 Fase 2 del trabajo de investigación realizado.

3.2.1 SUBFASE 2.1. ESTUDIO DEL PROBLEMA

Con el fin de estudiar el comportamiento de la integral J_{x1} , J_P y J_A en la dirección radial, se han definido una serie de 32 caminos Γ que rodean el frente de grieta. Estos caminos están contenidos en el plano medio $x_3 = 0$ y atraviesan los nodos de mitad de lado de los elementos que son cortados por este plano medio. El primero de los caminos incluye únicamente los dos elementos que comparten el segmento del frente de grieta y el resto de los caminos se han definido añadiendo sucesivamente anillos de elementos.

La integración a lo largo de un camino Γ (cálculo de la integral J_P) se lleva a cabo a lo largo de los lados de los elementos. Se han utilizado seis puntos de integración a lo largo de cada uno de los lados de los elementos que atraviesa el camino Γ (véase la Figura 3.10).

Por otro lado, para el cálculo de la integral J_A , el área encerrada por el camino Γ se integra usando los nueve puntos de integración localizados en el plano medio de cada elemento (puntos verdes en la Figura 3.10).

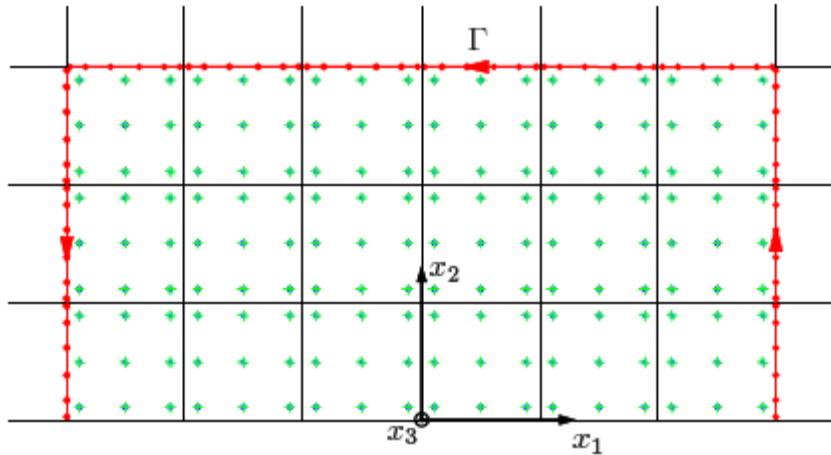


Figura 3.10 Camino Γ utilizado para el cálculo de la integral J_P (tercer camino del conjunto de 32). Se utilizan 6 puntos de integración a lo largo de cada lado de elemento atravesado por el camino Γ . Se observa también los 9 puntos de integración por elemento utilizados para el cálculo de la integral J_A .

De acuerdo con la definición de la integral de área dada en la ec. (2.109), el cálculo de J_A implica el cálculo de las derivadas espaciales de los campos de tensión σ_{i3} y de los cocientes $\partial u_i / \partial x_j$. Para ello se han ajustado polinomios locales de orden 2 (también conocidos como hipersuperficies) a los valores obtenidos del análisis de elementos finitos de estos campos obtenidos en los 27 puntos de integración que forman cada elemento. Posteriormente se ha desarrollado una derivada explícita para los polinomios de ajuste para cada magnitud y el resultado de dicha derivada se ha evaluado en los nueve puntos de integración que caen en el plano medio. Este procedimiento se explica con más detalle en el siguiente apartado.

De una manera similar, para evaluar el integrando de la integral de camino J_P en los seis puntos de integración de los lados de elementos que conforman el camino Γ , se han usado los valores dados por los polinomios de ajuste en esos puntos, promediados con los elementos adyacentes.

Como se explica posteriormente, esta aproximación propuesta en la presente tesina de investigación proporciona buenos resultados. Por ejemplo, Chiarelli y Frediani [30] proporcionan una descripción detallada del cálculo de la integral J_{X1} por medio de elementos finitos, aunque el procedimiento es bastante engorroso. Estos autores toman el camino Γ a lo largo de los puntos de integración del elemento y posteriormente redefinen el área delimitada por el camino para el cálculo de J_A por medio de la creación de nuevos elementos cuyos lados coinciden con el camino de integración. Otro defecto del procedimiento dado por Chiarelli y Frediani [30] es que calculan las derivadas de la tensión y de la deformación para el cálculo de J_A para la interpolación de elementos finitos (con sus funciones de forma) que, para elementos de segundo orden, proporciona resultados constantes para cada elemento. Esto conlleva una correspondiente pérdida de precisión.

Por otro lado, Omer y Yosibash [32] comentan que la integral de área J_A tiende a dar peores resultados y proponen calcular únicamente J_P haciendo cada vez menor el camino seguido Γ , seguido de una extrapolación de Richardson a medida que el radio tiende a cero. Se trata de una simple aplicación de (2.56).

3.2.2 PROGRAMACIÓN EN MATLAB DE LA RUTINA PARA EL CÁLCULO DE J_{X1}

A continuación se procede a presentar la rutina programada para el cálculo de la integral J_{X1} . Como se ha indicado, para llevar a cabo esta integración se ha utilizado el software MATLAB.

A la rutina principal que calcula la integral J_{X1} se le ha dado el nombre *main* y tiene la siguiente forma:

```
clear all
global set
global nelem
global ngauss
global Elem
```


3 METODOLOGÍA EMPLEADA

```
global dSig13dz
global Epsilon1
global dSig23dz
global dvdx
global dSig33dz
global dwdx
global Sig13
global dEpsilon1dz
global Sig23
global d_dvdx_dz
global Sig33
global d_dwdx_dz
global Coord
global MatJac_PM
global Jac_PM

ejecuta
almacenEPs(set)
NodosElem
interpola
jacobianoPM
integral(set)
integral2(set)
integrales
```

Como se aprecia en el cuadro anterior, lo que primero ejecuta la rutina es una limpieza de los posibles valores residuales que las variables pudieran tener de anteriores análisis. Esto se consigue con el comando *clear*. Posteriormente vienen definidas una serie de variables globales que serán necesarias para el programa y finalmente vienen definidas una serie de subrutinas que se han de seguir para el cálculo final de la integral J_{X1} .

A continuación se procede a detallar cada una de estas subrutinas para explicar paso a paso cómo se han extraído las variables calculadas por ABAQUS/Standard y se han tratado para el cálculo de la integral J_{X1} .

GENERACIÓN DE LA SUBRUTINA ejecuta

Es la primera subrutina que se ejecuta. En ella se ha de especificar el número de set del cual se quiere calcular la integral. A continuación se presenta la estructura de esta subrutina:

```

function ejecuta

global set

set=input('INTRODUCE EL NÚMERO DEL SET\n');

format long
DATOS
leernelem(set)
leerEps(set)
%calcSs no lo se
leerSs(set)
leerWs(set)
leerCoordPG(set)
leerCoordN(set)
leerTopEl(set)
leerElemFila(set)
coord_local_pg
leerNodoFila(set)
BuscarElemFila
leerUVW(set)
leerIvols(set)
return

```

Se puede observar que se introduce como variable global *set*. Esta variable es demandada por MATLAB al usuario y se corresponde con el número del set de donde se quiere calcular la integral J_{X1} .

De la misma manera, en el cuadro también se aprecia que dentro de esta subrutina hay un conjunto de funciones definidas que la subrutina ejecuta de manera ordenada:

Función DATOS

Es una función fundamental del programa. En ella, se introducen los valores de las características mecánicas del material para posteriores cálculos. Notar que se han de introducir exactamente los mismos valores que se introdujeron en ABAQUS para el análisis del modelo ($E = 210$ GPa , $\nu = 0.3$).

Posteriormente la función calcula el módulo de elasticidad transversal. En este caso se supone que el material utilizado en la elaboración de las

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

placas es idealmente isótropo. Por ello, el módulo de elasticidad transversal se calcula como:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (3.2)$$

Tras el cálculo del módulo de elasticidad transversal, la función calcula la matriz de flexibilidades del material que viene identificada con la letra C y está definida como:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{E} & \frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Posteriormente, se calcula la matriz de rigideces del material (que será la que se utilice en posteriores funciones y por ello se introduce como variable global) que se define como:

$$D = E \cdot \frac{1 - \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Finalmente la función comprueba que la formulación introducida es correcta a partir de la diferencia entre la inversa de la matriz de flexibilidades C y la matriz de rigideces D . Si esta diferencia es cero, la formulación introducida es correcta puesto que la matriz de rigideces es la inversa de la matriz de flexibilidades.

Funciones leernelem, leerEps, leerSs, leerWs, leerCoordPG, leerCoordN, leerTopEl, leerElemFila, leerNodoFila, leerUVW, leerIvols

Se tratan de funciones de lectura y poseen una estructura similar. Todas ellas toman como variable de entrada el número del set que se introduce en la subrutina *ejecuta*.

- leernelem: Dependiendo del número de set introducido en dicha subrutina, esta función lee el fichero de nombre "*ElemSet_ X*" donde X se corresponde con el número de set de elementos. La función almacena dos variables globales. Por un lado la variable *ElemenSet* almacena el número de cada uno de los elementos del set mientras que por otro lado la variable *nelem* almacena el número de elementos total que conforman el set.
- leerEps: Atendiendo al número de set introducido, la función lee el fichero "*EpsPGSet_ X*". Este fichero contiene los valores de las deformaciones calculadas en los puntos de Gauss de los elementos del set X . Así pues, esta función devuelve dos variables globales. Por un lado la variable *Eps* almacena las deformaciones calculadas en cada uno de los puntos de integración de cada uno de los elementos del set mientras que por otro lado la variable *ngauss* almacena el número de puntos de integración que contiene el set.
- leerSs: Esta función lee el fichero "*SigPGSet_ X*" siendo X el número de set introducido por el usuario en la subrutina *ejecuta*. Posteriormente genera una variable global llamada *Ss* que almacena las tensiones calculadas en cada punto de integración de cada uno de los elementos que constituyen el set elegido.

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

- leerWs: Esta función genera una variable global denominada *Ws*. Esta variable global almacena los valores de la energía de deformación calculados en cada punto de integración de cada uno de los elementos que constituyen el set elegido.
- leerCoordPG: La función lee el fichero “*xyzPGSet_ X*”, el cual contiene la información acerca de las coordenadas de los puntos de integración de los elementos que forman el set número *X*. Genera una variable local *CoordPGPrevio* que es un vector que contiene toda la información del fichero leído de manera continua. Llegados a este punto interesa ordenar esta información. Para ello se ha creado la variable global de salida *CoordPG* que se trata de una matriz con un número de filas igual al número de puntos de integración del set y 4 columnas. En la primera columna, esta matriz contiene las coordenadas x, en la segunda columna las coordenadas y, en la tercera columna las coordenadas z mientras que en la cuarta columna se almacena el número de punto de integración al que pertenecen estas coordenadas dentro del elemento. De esta manera, los valores de esta última columna irán del 1 al 27 puesto que cada elemento contiene 27 puntos de integración.
- leerCoordN: Esta función tiene una estructura idéntica a la función *leerCoordPG*. La diferencia con la anterior función reside en que esta función lee el archivo “*Coor_Nod_ X*”. Este archivo contiene las coordenadas de los nodos de los elementos que forman el set. Las variables globales que tiene por salida esta función son dos. Por un lado la variable *CoordN* que se trata de una matriz similar a la matriz *CoordPG* con la diferencia que esta variable almacena las coordenadas de los nodos del set, así como el número de nodo que tiene dichas coordenadas. Por otro lado, la función devuelve la variable global *nnodos* que almacena el número total de nodos que contiene el set.
- leerTopEl: Esta función tiene una estructura similar a las dos funciones anteriormente expuestas. La función lee el fichero “*TopElset_ X*” y devuelve dos variables globales. Por un lado, la función devuelve la variable global *TopEl*. Se trata de una

matriz que tiene tantas filas como número de elementos tiene el set y tantas columnas como número de nodos tenga cada uno de los elementos más una columna más que almacena el número de elemento al cual pertenecen los nodos de esa fila. Por otro lado, la función devuelve la variable global *numnodoselem* que no es más que el número de nodos que contiene cada elemento del set (en nuestro caso, y como se comentó, el elemento C3D20 contiene 20 nodos).

- leerElemFila: Esta función lee el fichero "*ElemFila_ X*" y devuelve como variable global de salida la matriz *ElemFila* que se trata de una matriz que contiene tantas filas como número de elementos tiene el modelo de elementos finitos analizado. Esta matriz contiene dos columnas. En la primera columna almacena todos los números de los elementos que componen el modelo. En la segunda columna numera los elementos que forman parte del set seleccionado asignando el valor 0 a los elementos que no forman parte de dicho set. De esta manera, recorriendo la segunda columna de esta matriz, se puede saber qué número tiene cada elemento del set puesto que tendrá asignado en esta segunda columna un valor distinto de 0.
- leerElemFila: Esta función es similar a la función *leerElemFila*. La función lee el fichero "*NodoFila_ X*" y devuelve como variable global de salida la matriz *NodoFila* que se trata de una matriz que contiene tantas filas como número de nodos tiene el modelo de elementos finitos analizado. Esta matriz contiene dos columnas. En la primera columna almacena todos los números de los nodos que componen el modelo. En la segunda columna numera los nodos que forman parte del set seleccionado asignando el valor 0 a los nodos que no forman parte de dicho set. De esta manera, recorriendo la segunda columna de esta matriz, se puede saber qué número tiene cada nodo del set puesto que tendrá asignado en esta segunda columna un valor distinto de 0.
- leerUVW: Esta función lee el archivo "*UVW_Nodo_ X*" y devuelve la variable global denominada *UVW*. Se trata de una matriz cuyo número de filas es el número total de nodos que

forman el set mientras que tiene 4 columnas. Las tres primeras almacenan las coordenadas x, y, z de los nodos mientras que la cuarta columna almacena el número del nodo del que se trata.

- leerIvols: Esta función lee el fichero “ivol_PG__ X” y devuelve la variable global *Ivols* que es un vector que almacena los valores del jacobiano calculados en cada punto de integración de cada uno de los elementos del set.

Función coord._local_pg

Esta función devuelve la variable global *coord_local_pg*. Se trata de una matriz que tiene 27 filas (tantas como puntos de integración tiene cada elemento utilizado en la malla) por 3 columnas (donde se almacenan las coordenadas locales de cada uno de los puntos de integración del elemento ξ, η y ζ). Estas coordenadas locales se corresponden con las coordenadas de los puntos de integración de un elemento isoparamétrico estándar.

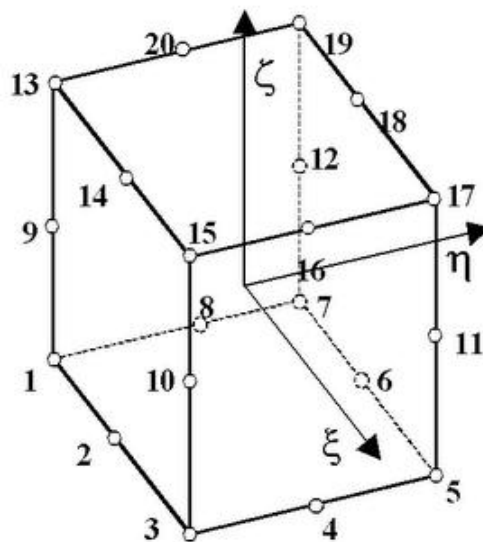


Figura 3.11 Elemento isoparamétrico estándar 3D cuadrático en el que se muestran sus 20 nodos.

n	$\pm\xi_i$	H_i	Integra exactamente
3	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}; 0$	$\frac{5}{9}; \frac{8}{9}$	p=5

Tabla 3.1 Coordenadas y pesos de los puntos de Gauss de un elemento lineal cuando $n = 3$.

En la Figura 3.11, se observa el elemento 3D de 20 nodos utilizado en la malla con los tres ejes locales ξ, η, ζ .

Por otro lado, la Tabla 3.1 muestra las coordenadas locales de los 3 puntos de integración de un elemento lineal. Los 27 puntos de integración del elemento tridimensional mostrado en la Figura 3.11 tienen unas coordenadas (ξ, η, ζ) combinación de las 3 coordenadas del elemento isoparamétrico lineal de 3 puntos de integración.

Función BuscarElemFila

Esta función genera la variable global *FilaElem*. Esta variable consiste en un vector con una numeración que va desde el número 1 al número de elementos del set.

GENERACIÓN DE LA SUBRUTINA almacenEPs

En una primera fase de esta subrutina, se introducen variables globales almacenadas en las funciones ejecutadas durante la primera subrutina *ejecuta*.

```
function almacenEps(set)
global Eps
global Ss
global Ws
global ElemSet
global nelem
global ngauss
global D
global CoordPG
global E
```



```
global nu  
global Elem  
global Ivols
```

Se observa que esta subrutina tiene como variable de entrada el set introducido del cual se desea calcular la integral J_{X1} . Se observa que las variables globales introducidas son:

- *Eps* almacena las deformaciones calculadas en cada uno de los puntos de integración de cada uno de los elementos del set. Se ha generado en la función *leerEps*.
- *Ss* almacena las tensiones calculadas en cada uno de los puntos de integración de cada uno de los elementos del set. Se ha generado en la función *leerSs*.
- *Ws* almacena los valores de la energía de deformación calculados en cada uno de los puntos de integración de cada uno de los elementos del set. Se ha generado en la función *leerWs*.
- *ElemSet* almacena el número de cada uno de los elementos del set mientras. Se ha generado en la función *leerElem*.
- *nelem* almacena el número de elementos que conforman el set. Se ha generado en la función *leernelem*.
- *ngauss* almacena el número de puntos de integración que contiene el set. Se ha generado en la función *leerEps*.
- *D* es la matriz de rigideces del material. Se ha calculado en la función *DATOS*.
- *CoordPG* matriz con un número de filas igual al número de puntos de integración del set y 4 columnas. En la primera columna, esta matriz contendrá las coordenadas x, en la segunda columna las coordenadas y, en la tercera columna las coordenadas z mientras que en la cuarta columna se almacenará número de punto de integración al que pertenecen estas coordenadas dentro del elemento. Se ha generado en la función *leerCoordPG*.

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

- E es el módulo elástico del material. Se ha introducido en la función *DATOS*.
- ν es el coeficiente de Poisson del material. Se ha introducido en la función *DATOS*.
- $Elem$ es la variable global que genera la subrutina y que forma la base de la estructura de almacenamiento de las variables.
- $Ivols$ almacena los valores del jacobiano calculados en cada punto de integración de cada uno de los elementos del set. Se ha generado en la función *leerIvols*.

En una segunda etapa, se almacenan las variables calculadas por ABAQUS/Standard (y posteriormente almacenadas en variables globales en la subrutina *ejecuta*) en estructuras de la forma:

$$Elem(n).PG(pg).variable$$

donde:

n es el número de elemento del set en el que está calculada la *variable*.

pg es el número de punto de integración dentro del elemento n en el que está calculada la *variable*.

variable se trata de la variable calculada en el elemento n y punto de integración pg . Dependiendo del tipo de variable, será un vector o un escalar. Así pues, se distinguen tres tipos de variables:

- Variables consistentes en vectores de 6 componentes: se tratan de las tensiones y deformaciones calculadas por ABAQUS/Standard para cada punto de Gauss de cada uno de los elementos. Así pues, esta subrutina genera los siguientes vectores de 6 componentes:
 - $Elem(n).PG(pg).Def(i)$: donde i toma valores de 1 a 6. Esta variable almacena las deformaciones calculadas por ABAQUS/Standard y que en la subrutina anterior se

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

- almacenaron en la variable global Eps (mediante la función $leerEps$).
- $Elem(n).PG(pg).Ten(i)$: donde i toma valores de 1 a 6. Esta variable almacena las tensiones calculadas por ABAQUS/Standard y que en la subrutina anterior se almacenaron en la variable global Ss (mediante la función $leerSs$).
 - Variables consistentes en vectores de 3 componentes: se trata de las coordenadas de los puntos de Gauss de los elementos. Así pues, esta subrutina genera el siguiente vector de 3 componentes:
 - $Elem(n).PG(pg).Coord(j)$: donde j toma valores de 1 a 3. Esta variable almacena las coordenadas de los puntos de integración de los elementos que en la subrutina anterior se almacenaron en la variable global $CoordPG$ (mediante la función $leerCoordPG$).
 - Variables consistentes en un escalar: se trata de variables calculadas en los puntos de integración que solamente tienen una componente. Estas variables son la energía de deformación y el jacobiano. Así pues, esta subrutina genera las siguientes variables:
 - $Elem(n).PG(pg).W$: Esta variable almacena la energía de deformación calculada para cada punto de integración por ABAQUS/Standard y que en la subrutina anterior se almacenó en la variable global Ws (mediante la función $leerWs$).
 - $Elem(n).PG(pg).Ivol$: Esta variable almacena el jacobiano calculado para cada punto de integración por ABAQUS/Standard y que en la subrutina anterior se almacenó en la variable global $Ivols$ (mediante la función $leerIvols$).

En una última fase, se lee la coordenada z de los puntos de integración de los elementos y para aquellos puntos de integración cuya coordenada z coincida exactamente con la coordenada z del plano medio del modelo

generado en ABAQUS, se almacenan las variables en estructuras similares a las utilizadas en la fase anterior. Así pues, esta subrutina genera las variables necesarias para la evaluación de la integral J_{X1} en el plano medio de la placa. Estas variables son:

Elem(n).PG(pg).Def_PM(i)
 Elem(n).PG(pg).Ten_PM(i)
 Elem(n).PG(pg).W_PM

GENERACIÓN DE LA SUBRUTINA NodosElem

En primer lugar, esta subrutina calcula el jacobiano. Para ello se ha introducido en lenguaje de MATLAB las funciones de forma de un elemento 3D isoparamétrico de 20 nodos.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(2+\xi+\eta+\zeta) \\
 N_2 &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(2-\xi+\eta+\zeta) \\
 N_3 &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(2-\xi-\eta+\zeta) \\
 N_4 &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(2+\xi-\eta+\zeta) \\
 N_5 &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(2+\xi+\eta-\zeta) \\
 N_6 &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(2-\xi+\eta-\zeta) \\
 N_7 &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(2-\xi-\eta-\zeta) \\
 N_8 &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(2+\xi-\eta-\zeta) \\
 N_9 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\
 N_{10} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\eta)(1+\xi)(1-\zeta)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\
 N_{12} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\eta)(1-\xi)(1-\zeta) \\
 N_{13} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 N_{14} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\eta)(1+\xi)(1+\zeta) \\
 N_{15} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\
 N_{16} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\eta)(1-\xi)(1+\zeta) \\
 N_{17} &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\zeta)(1-\xi)(1-\eta) \\
 N_{18} &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\zeta)(1+\xi)(1-\eta) \\
 N_{19} &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\zeta)(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_{20} &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\zeta)(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned}$$

Donde las coordenadas ξ , η , ζ se introdujeron mediante la función coord._local_pg y tienen los valores de los puntos de Gauss de un elemento lineal de 3 puntos de integración mostrados en la Tabla 3.1.

Una vez se tienen evaluadas las funciones de forma se calcula la matriz jacobiana.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Y puesto que por la formulación de elementos finitos haciendo uso de las funciones de forma:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i \cdot x_i \quad (3.7)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i \cdot y_i \quad (3.8)$$

$$z = \sum_{i=1}^n N_i \cdot z_i \quad (3.9)$$

siendo n el número de nodos que tiene el elemento (en este caso 20), N_i las función de forma evaluada en el nodo i y x_i, y_i, z_i las coordenadas del nodo i .

Así pues, la matriz jacobiana se puede calcular para punto de integración de cada elemento como:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot z_i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Así pues, esta subrutina genera una matriz que contiene el valor del jacobiano de cada punto de Gauss de cada elemento.

Elem(n).PG(pg).Jac

Una vez se ha calculado el jacobiano, se procede al cálculo de las derivadas de las funciones de forma en coordenadas globales y al cálculo de la matriz **B**.

3 METODOLOGÍA EMPLEADA

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Generando una matriz 6x20 que se almacena en la variable

Elem(n).PG(pg).B

Una vez hallada la matriz \mathbf{B} , se calculan las deformaciones para cada punto de Gauss de cada elemento.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

puesto que

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial w_i}{\partial z} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde u_i es el desplazamiento en el eje x del nodo i , v_i es el desplazamiento en el eje y del nodo i y w_i es el desplazamiento en el eje z del nodo i .

Se genera un vector que contiene las deformaciones calculadas en los puntos de Gauss y se almacenan con la variable:

Elem(n).PG(pg).Epsilons

Por último se han calculado las derivadas cruzadas $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ que como se verá posteriormente son útiles para el cálculo de la integral de área J_A .

GENERACIÓN DE LA SUBRUTINA Interpola

Se trata de la subrutina más importante generada en esta tesina. Se realiza una hipersuperficie que permita calcular el valor de los distintos parámetros (tensiones y deformaciones) en cada punto del elemento a partir de los valores calculados en los diferentes puntos de Gauss. Se generan para ello polinomios cuadráticos de la forma:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + b_7x_1^2 + b_8x_2^2 + b_9x_3^2 \quad (3.16)$$

donde los coeficientes b_i variarán dependiendo de la tensión de la cual se haya calculado el polinomio de interpolación.

Si se observa la ecuación de la integral de área definida en la integral J_{X1} (ec. (2.109)), se aprecia que es necesario realizar las derivadas con respecto del eje z de las tensiones con componente 3 así como derivadas segundas de las deformaciones, esto es, $\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}$, $\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}$, $\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}$, $\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$.

El tener estos parámetros como polinomios cuadráticos permite que estas derivadas se puedan calcular de manera inmediata.

GENERACIÓN DE LA SUBRUTINA jacobianoPM

Esta subrutina calcula el jacobiano en el plano medio de la placa que es donde se va a evaluar la integral J_{X1} . Se generan pues dos nuevas variables

Elem(*n*).PG(*pg*).MatJac_PM que almacena la matriz jacobiana.

Elem(*n*).PG(*pg*).Jac_PM que almacena el jacobiano (el determinante de la matriz jacobiana).

GENERACIÓN DE LA SUBRUTINA integral

Esta rutina calcula la integral de área J_A de la integral J_{X1} en el plano medio de la placa estudiada. Para ello, en primer lugar se calcula el integrando en el plano medio $x_3 = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (3.17)$$

Creando la variable:

Elem(*n*).PG(*pg*).integrando

que almacena un valor 0 para los puntos de Gauss que quedan fuera del plano medio y el valor del integrando para los aquéllos que caen en el plano medio.

Por último se resuelve la integral de área J_A numéricamente utilizando los pesos de Gauss y el jacobiano.

Los pesos de la cuadratura de Gauss se obtienen de la tercera columna de la Tabla 3.1 y son $5/9$ para las coordenadas $\pm \sqrt{3/5}$ y $8/9$ para la coordenada 0.

Finalmente se calcula numéricamente la integral de área J_A

$$J_A = \int_A \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dA \approx \sum_{e=1}^{N_e \in A} \left\{ \sum_{i=1}^{N_G} \sum_{j=1}^{N_G} H_i H_j \left[|\mathbf{J}| \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right]_{(\xi_i, \eta_j)} \right\}_e \quad (3.18)$$

donde N_e es el número de elementos contenidos en el área de integración A (número de elementos que conforman el set), N_G es el número de puntos de Gauss tomados en cada dirección local del área A ξ, η siendo H_i, H_j sus correspondientes pesos de Gauss y $|\mathbf{J}|$ es el determinante de la matriz jacobiana de transformación de coordenadas evaluado en el plano medio. Por último, el integrando (expresión entre corchetes) ha de ser evaluado en las coordenadas de referencia de los puntos de Gauss (ξ_i, η_j) .

GENERACIÓN DE LA SUBRUTINA integral2

En esta subrutina se calcula la integral de contorno J_P que permite completar el cálculo de la integral J_{X1} . Para ello, en primer lugar es necesario definir los caminos sobre los que se va a evaluar esta integral. Para ello se escogen los nodos que definen dicho camino tal y como se muestra en la Figura 3.10. Se observa que para cada tramo comprendido entre dos nodos se evalúan 6 puntos. Es por ello que el camino comprendido entre dos nodos del *path* se evalúa como un elemento lineal de 6 puntos de integración.

n	$\pm\xi_i$	H_i	Integra exactamente
6	± 0.932469514203152	0.171324492379170	p=11
	± 0.661209386466265	0.360761573048139	
	± 0.238619186083197	0.467913934572691	

Tabla 3.2 Coordenadas y pesos de los puntos de Gauss de un elemento lineal cuando n = 6.

A través de las ecs. (3.7)-(3.9) se calculan las coordenadas globales de estos puntos de integración donde posteriormente se van a extrapolar las variables que intervienen en la integral J_P . Una vez se tienen las coordenadas globales y haciendo uso de los polinomios de interpolación calculados anteriormente se puede calcular el valor de las variables que intervienen en el cálculo de J_P en los puntos de integración.

Una vez se tienen calculadas las variables en los puntos de integración de cada tramo del *path* se procede a la integración numérica de la ecuación J_P .

$$J_P = \int_C \left(W \delta_{li} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_i dC \approx \sum_{t=1}^{N_t \in C} \left\{ \sum_{i=1}^{N_G} H_i \left[|\mathbf{J}| \left(W \delta_{li} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_i \right]_{\xi_i} \right\} \quad (3.19)$$

donde N_t es el número de tramos contenidos en el camino de integración C N_G es el número de puntos de Gauss tomados en cada dirección local del camino C ξ siendo H_i su correspondiente peso de Gauss y $|\mathbf{J}|$ es el determinante de la matriz jacobiana de transformación de coordenadas evaluado en el camino. Por último, el integrando (expresión entre corchetes) ha de ser evaluado en la coordenada de referencia de los puntos de Gauss ξ_j .

GENERACIÓN DE LA SUBRUTINA integrales

Esta subrutina simplemente calcula la integral J_{X1} como suma de los valores calculados en las anteriores subrutinas de las integrales de área J_A y de contorno J_P .

3.3 FASE 3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Para realizar un estudio de los resultados obtenidos en MATLAB, se ha utilizado el software MATHCAD. Como se comentó en capítulos anteriores, se va a estudiar el comportamiento de la integral J_{X1} (así como de la integral de contorno J_P) en el plano medio para placas de diferente espesor $B = \{0.1, 1, 5, 10, 20, 50, 200\}$ mm.

Del mismo modo, se va a evaluar la integral J_{X1} dependiendo del número de elementos encerrados por el contorno (del número de elementos que formen el set escogido en ABAQUS).

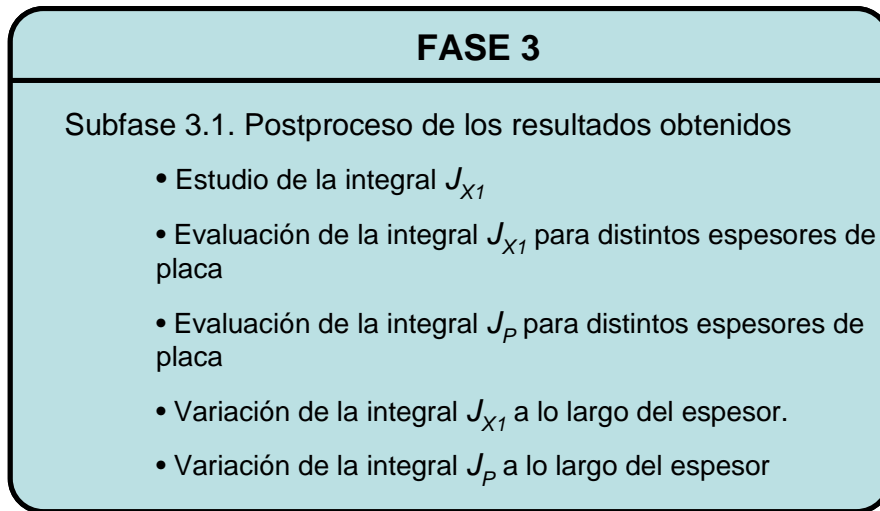


Figura 3.12 Fase 3 del trabajo de investigación realizado.

Finalmente se estudia cómo las integrales J_{X1} y J_P varían cuando se evalúan en planos distintos del plano medio. Todos estos resultados se exponen en detalle en el siguiente capítulo.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se muestran los resultados del estudio de la integral J_{x_1} atendiendo a diferentes parámetros como puede ser el espesor de la placa analizada o la distancia al camino C en el que se evalúa.

4.1 CÁLCULO DE J_{x_1}

Como se ha ido desarrollando a lo largo de esta tesina, todos los análisis de elementos finitos llevados a cabo se han realizado con el software comercial específico ABAQUSTM v. 6.7 (Hibbitt et al. [33]). Los cálculos correspondientes al post-proceso de los resultados obtenidos por el método de elementos finitos se han realizado de manera independiente después de leer el fichero de resultados proporcionado por ABAQUS/Standard de extensión *.fil*.

En la Figura 4.1 se muestra la evaluación de las integrales J_P , J_A y $J_{x_1} = J_P + J_A$ para una placa de espesor $B = 10$ mm tomando 32 caminos empezando a distinta distancia x_1 . Esta cota ha sido adimensionalizada dividiéndola por el valor de la anchura de la placa W .

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

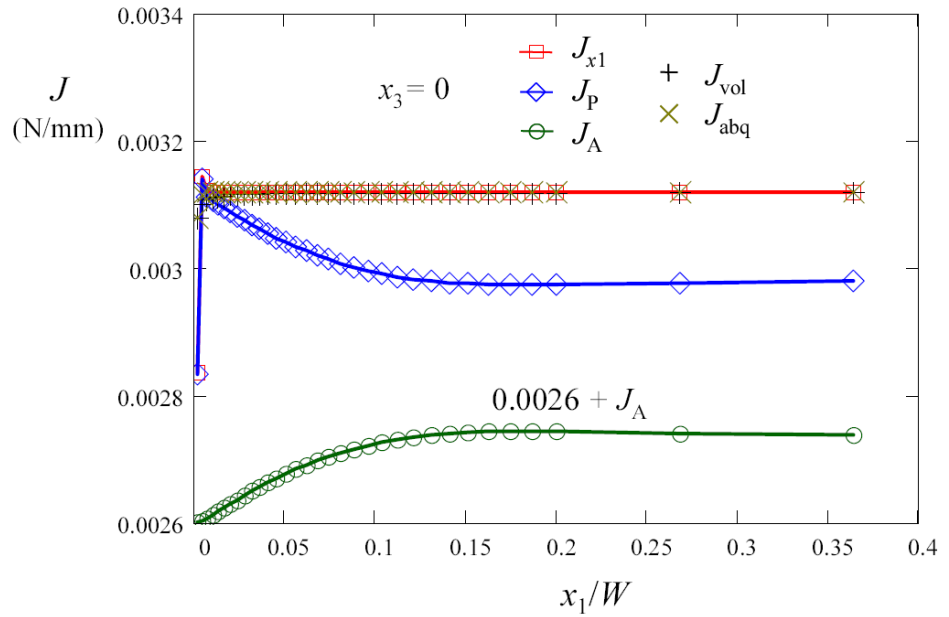


Figura 4.1 Cálculo de J_p , J_A y $J_{x1} = J_p + J_A$ para 32 caminos empezando en diferente cota x_1 , estudiadas en el plano medio $x_3 = 0$ de placas de espesor $B = 10$ mm. Comparativa con la integral J_{vol} (calculada por el método EDI). Notar que los valores de J_A han sido desplazados 0.0026 unidades para una mayor claridad (i.e. $J_A = 0$ en $x_1 = 0$).

Todos los resultados mostrados en la imagen anterior se corresponden con el plano medio de la placa ($x_3 = 0$). Algunas conclusiones se pueden obtener de la gráfica anterior:

- 1) Se comprueba la independencia de la integral J_{x1} con respecto al camino escogido.
- 2) Como era de esperar, la integral de camino J_p converge a la integral J_{x1} a medida que el camino se reduce hacia el frente de grieta, y por lo tanto, la integral J_A tiende a 0.
- 3) La integral J_p contribuye a la integral J_{x1} mucho más que la integral de área J_A (en torno a un 95 %).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

- 4) La integral de camino J_P decrece mientras que la integral de área J_A aumenta a medida que aumenta la distancia x_I en una región cercana al frente de grieta mientras que tiende a estabilizarse a medida que aumenta esta distancia.

La estabilización se produce porque se alcanza un campo elástico similar al 2D (para mayor precisión, se alcanza una condición de tensión plana) a una cierta distancia del frente de grieta x_I . Este hecho conlleva que anillos grandes (con mayor número de elementos) no contribuyan a la integral J_A , por lo tanto esta integral es constante una vez que se ha alcanzado la condición de tensión plana. Debido a que la integral J_{X1} es independiente del camino escogido, lo expuesto anteriormente implica que la integral de camino J_P se convierte en independiente del camino escogido y, de hecho, la integral J_P se reduce a la integral J_{2D} dada en la ec. (2.95). Dicho en otras palabras, la estabilización de las integrales J_A y J_P indican que los efectos debidos a problemas de 3D son despreciables a una cierta distancia desde el frente de grieta.

Observando la Figura 4.1 y desde un punto de vista numérico, los dos primeros caminos escogidos proporcionan los peores resultados para la integral J_P , ya que estos incluyen los dos primeros anillos de elementos alrededor del frente de grieta, donde la solución calculada por el método de elementos finitos tiene un elevado error de discretización y esto afecta a la integración en el camino. Por el contrario, la integral J_A proporciona resultados constantes incluso para los primeros dos anillos de elementos, porque las integraciones de dominio están mejor adaptadas a la formulación de elementos finitos. Se ha observado que para largas distancias radiales (esto es, relaciones $x_I/W \rightarrow 0.5$) la proximidad a los bordes libres de la placa introduce efectos de borde que afectan ligeramente a los resultados (estos efectos no se han mostrado en la Figura 4.1).

La Figura 4.1 también muestra una comparación de la integral J_{X1} con el valor de la integral J_{vol} obtenida con el método EDI (Integral de Dominio Equivalente, por sus siglas en inglés) a través de la integral de volumen mostrada en la ec. (2.79). En este caso, la integración se ha llevado a cabo sobre los mismos anillos de elementos, incluyendo los 27 puntos de integración que posee cada elemento. Además, y puesto que el software ABAQUS también tiene programadas rutinas para el cálculo de la

integral $J(s)$ a lo largo de una integral de volumen, también se han representado estos valores para poder ser comparados. Estos valores se han marcado en la Figura 4.1 como J_{abq} . Como era de esperar, se puede observar que las integrales J_{X1} , J_{vol} y J_{abq} proporcionan los mismos resultados. Este hecho verifica que las expresiones (2.79) y (2.107) son numéricamente equivalentes.

4.2 J_{X1} EVALUADA PARA DISTINTOS ESPESORES

Para que sirva como referencia, se ha llevado a cabo análisis en elementos finitos de una placa 2D con las mismas dimensiones correspondientes al plano x_1 - x_2 bajo condiciones de tensión plana y de deformación plana. En la presente tesina, los valores de la integral J para las condiciones de tensión plana y deformación plana en 2D se denotan como $J_{2D}^{p\sigma}$ y J_{2D}^{pe} respectivamente. En un problema 2D, se sabe que el Factor de Intensidad de Tensiones K_I es independiente de las propiedades elásticas del material E , ν , siempre que las cargas aplicadas en la cara de grieta sean cero o estén en equilibrio y en ausencia de fuerzas volumétricas. En este caso, la tasa de liberación de energía $G \equiv J$ para tensión plana generalizada mientras que el caso de deformación plana se diferencia simplemente en un factor de $(1 - \nu^2)$, por lo que:

$$K_I = \sqrt{J E'} \quad (4.1)$$

donde E' es el módulo de elasticidad efectivo definido en la ec. (2.15).

Por lo tanto:

$$J_{2D}^{pe} = (1 - \nu^2) J_{2D}^{p\sigma} \quad (4.2)$$

lo que para el caso particular donde $\nu = 0.3$ se obtiene que:

$$J_{2D}^{pe} = 0.91 J_{2D}^{p\sigma}$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para las dimensiones específicas del problema (recuérdese: $H = W = 50$ mm y $a = W/2$) y para la carga aplicada ($\sigma_{22} = 1$ MPa), se obtienen los siguientes resultados:

$$J_{2D}^{p\sigma} = 0.0030267 \text{ N/mm}$$

$$J_{2D}^{pe} = 0.0027543 \text{ N/mm}$$

Estos valores confirman la relación (4.2).

Volviendo de nuevo a los modelos de placas 3D, en la Figura 4.2 se muestran los valores de la integral J_{x1} en el plano medio de las placas para distintos espesores. Los resultados se han normalizado dividiendo por $J_{2D}^{p\sigma}$, mostrando, tal y como era de esperar, la independencia en cuanto al camino escogido.

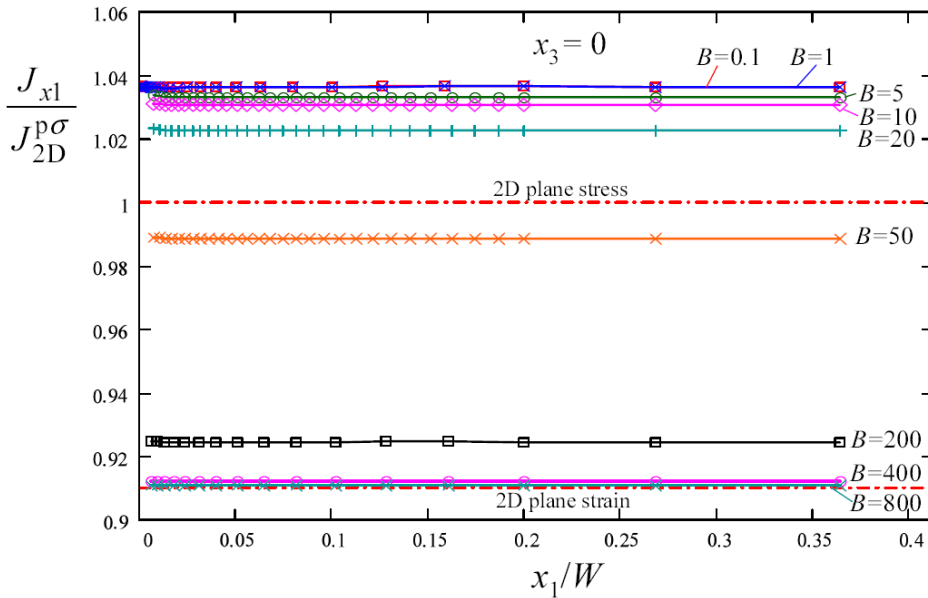


Figura 4.2 Valores de J_{x1} en el plano medio para placas de diferente espesor B , normalizada dividiéndolos por el valor 2D en tensión plana $J_{2D}^{p\sigma}$. Se ha indicado también el valor 2D en deformación plana J_{2D}^{pe} .

Notar la escala utilizada en los valores del eje de ordenadas.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nótese en la figura anterior que la distancia entre las localizaciones de los caminos tomados (marcadas en la gráfica con símbolos) varía para ciertos espesores porque la ordenación de las mallas es diferente. Para intentar aclarar el gráfico, se ha optado por descartar los resultados para los primeros dos caminos escogidos ya que la solución de elementos finitos contiene un elevado error de discretización.

Al mismo tiempo, se puede observar que la integral J_{XI} en el plano medio es independiente del camino y por tanto del área tomada y además decrece con el espesor.

La integral J_{XI} , para placas de espesor muy pequeño, tiende a converger a un valor que es un 3.6 % mayor que para el caso de tensión plana 2D, J_{2D}^{ps} . Esto demuestra que un análisis en tensión plana 2D no puede modelar el verdadero comportamiento de placas delgadas 3D en el plano medio, porque la tensión singular de fuera de plano, siempre presente en el frente de grieta en zonas suficientemente alejadas de las superficies libres, es ignorada (como ya fue presentado por Sih [34]; Nakamura y Parks [35]).

Por el contrario, la integral J_{XI} para placas con espesores mayores tiende a converger al valor de deformación plana calculado para 2D J_{2D}^{pe} , que es el valor mínimo. En la gráfica anterior se han incluido dos nuevos espesores, $B = 400$ y $B = 800$ mm. El objetivo es verificar la convergencia de la integral J_{XI} a un estado de deformación plana al aumentar el espesor.

Para placas muy delgadas, Nakamura y Parks [35] propusieron un valor hipotético del factor de intensidad de tensiones para los campos de tensión plana:

$$K^{far} = \sqrt{J_{2D}^{ps} E} \quad (4.3)$$

También definieron un valor local del factor de intensidad de tensiones:

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

$$K^{\text{local}} = \sqrt{\frac{J^{\text{local}} E}{1 - \nu^2}} \quad (4.4)$$

donde J^{local} equivale a la integral J_{X1} cuando el espesor tiende a anularse, esto es $J_{X1}|_{B \rightarrow 0}$.

Nakamura y Parks [35] propusieron la siguiente relación para ambos factores de intensidad de tensiones:

$$\frac{K^{\text{local}}}{K^{\text{far}}} = 1.067 \quad (4.5)$$

Por lo tanto, para placas muy finas con un material con coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, se obtiene:

$$\frac{J_{x1}|_{B \rightarrow 0}}{J_{2D}^{\text{p}\sigma}} \approx (1 - \nu^2)(1.067)^2 = 1.036 \quad (4.6)$$

que coincide con el ratio obtenido en los cálculos realizados y mostrados en la Figura 4.2, mientras que para placas muy gruesas se obtiene que:

$$\frac{J_{x1}|_{B \rightarrow \infty}}{J_{2D}^{\text{p}\sigma}} = \frac{J_{2D}^{\text{p}e}}{J_{2D}^{\text{p}\sigma}} = (1 - \nu^2) = 0.91 \quad (4.7)$$

Así pues, la variación entre los valores máximo y mínimo que puede alcanzar la integral J_{X1} es aproximadamente del 14 %, ya que:

$$\frac{J_{x1}|_{B \rightarrow 0}}{J_{x1}|_{B \rightarrow \infty}} = \frac{J_{x1}|_{B \rightarrow 0}}{J_{2D}^{\text{p}e}} \approx (1.067)^2 = 1.139 \quad (4.8)$$

Es importante resaltar que la integral $J_{2D}^{\text{p}e}$ coincide con la integral J_{X1} para análisis de grietas 3D contenidas en cualquier placa cuando el desplazamiento en el eje x_3 , u_3 se encuentra restringido en las caras laterales de la placa en $x_3 = -B/2$ y en $x_3 = +B/2$. Sin embargo, no es posible reproducir la condición de tensión plana ni el valor de $J_{2D}^{\text{p}\sigma}$ para

un modelo de placa en 3D. Destacar que la integral J_{X1} es independiente del camino (y por tanto del área) escogido en un dominio 3D general, independientemente del espesor de la placa que se esté analizando.

La razón primordial por la que la integral J_{X1} en el plano medio de la placa varía para diferentes espesores es debido al efecto de la relativa proximidad a la que se encuentren los bordes del frente de grieta. Los efectos debido a las tres dimensiones dependen de las relaciones a/B , W/B y H/B , mientras que en un problema de placa 2D el factor geométrico C usado en el cálculo del factor de intensidad de tensiones $K_I = C_{2D} \sigma \sqrt{\pi a}$ simplemente depende de las dimensiones del plano, esto es, $C_{2D} \left(\frac{a}{W}, \frac{a}{H} \right)$. En otras palabras, un nuevo factor geométrico tridimensional para el cálculo del factor de intensidad de tensiones $K_I = C_{3D} \sigma \sqrt{\pi a}$ debería incluir dependencias de la forma $C_{3D} \left(\frac{a}{W}, \frac{a}{H}, \frac{a}{B}, x_3, \nu \right)$. Esto conduce a la variación de la integral J_{X1} de nuestros análisis (y por consiguiente de K_I), ya que el parámetro B es el único que cambia, manteniéndose constantes el resto de las dimensiones y la carga aplicada. La relación 1.139 dada en la ec. (4.8) es una consecuencia directa de este efecto particularizada para la geometría estudiada y para un valor de coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

4.3 LA INTEGRAL J_P PARA DIFERENTES ESPESORES

En la Figura 4.3 se observa los valores de la integral J_P evaluada en el plano medio para siete placas de diferentes espesores ($B = \{0.1, 1, 5, 10, 20, 50, 200\}$). Cabe destacar que los valores de esta integral J_P se han normalizado dividiendo por su correspondiente valor de J_{X1} que fueron dados para cada espesor B en la Figura 4.2. De esta manera, todos los valores de la integral J_{X1} serían 1 si se dibujaran y, por lo tanto, todas las curvas J_P convergen a 1 a medida que el radio del camino tiende a 0.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

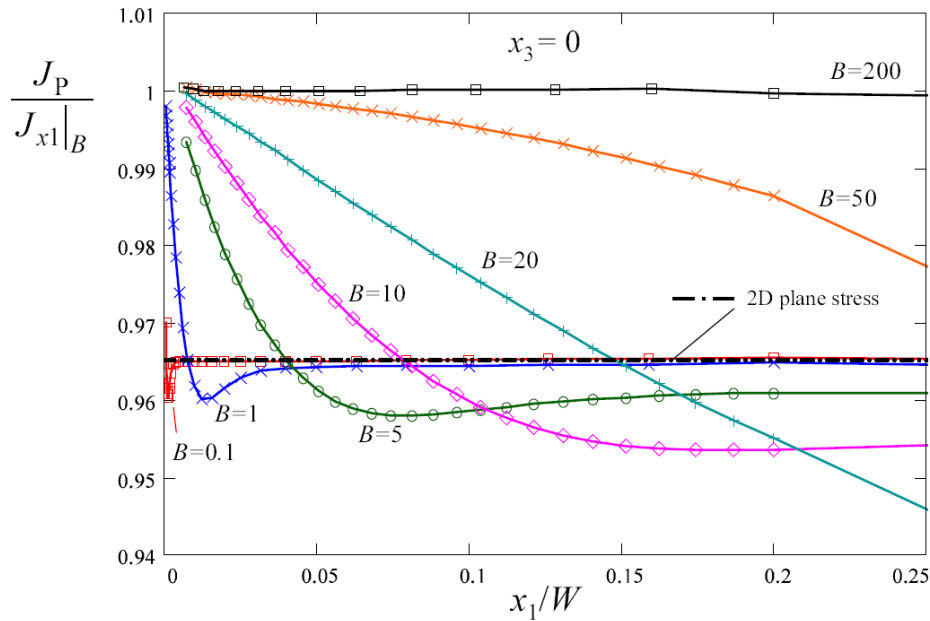


Figura 4.3 Valores de J_P en el plano medio para siete placas de diferente espesor B , normalizadas por su correspondiente valor de J_{x1} para cada B .

Se observa que para valores bajos de espesor B , los valores de la integral J_P decrecen muy rápidamente con respecto de x_l hasta alcanzar un valor mínimo y después tiende a estabilizarse en un valor constante. A medida que el espesor aumenta, este mínimo se localiza más alejado del frente de grieta. Para valores muy grandes de B , el mínimo no entra dentro de los valores de la dimensión W de la placa o, dicho con otras palabras, la placa no es suficientemente ancha como para observar este comportamiento. En el caso límite, cuando $B \rightarrow \infty$, este mínimo se alcanza para $x_l \rightarrow \infty$. En este caso, la integral J_P no decrece al aumentar x_l y por lo tanto $J_P = J_{x1}$ y por lo tanto $J_A = 0$. Este último caso se corresponde con un estado de deformación plana pura.

En este trabajo de investigación, el valor estabilizado de J_P se ha denotado por J_P^* . Como se comentó en apartados anteriores, esta estabilización indica que se ha alcanzado un estado similar a uno de tensión 2D y los efectos debidos a las restricciones pueden despreciarse para esta distancia. Se ha definido el radio de constricción y se ha

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

denotado como r_c como la distancia al frente de grieta donde la integral J_p alcanza el mínimo valor. De esta manera, se tiene que:

$$J_p = J_p^* \quad \text{cuando} \quad x_1 \geq r_c$$

Merece la pena observar que el valor de J_p^* para placas muy delgadas se aproxima al valor de tensión plana del caso 2D $J_{2D}^{p\sigma}$ (en la Figura 4.3, se ha normalizado este valor de $J_{2D}^{p\sigma}$ por el mismo $J_{x_1|B}$ para el menor B). Así pues:

$$J_p^* |_{B \rightarrow 0} = J_{2D}^{p\sigma} \quad (4.9)$$

Esto confirma que para distancias suficientemente lejanas al frente de grieta, (esto es, para $x_1 \geq r_c$), el efecto de la constricción debida al espesor desaparece. Para placas de espesor muy delgado (y más concretamente para placas donde el cociente a/B es grande), la zona de constricción es muy pequeña, pero su efecto sobre el frente de grieta no puede ser despreciado puesto que $J_{x_1} \neq J_p^* = J_{2D}^{p\sigma}$.

En la Figura 4.4 se presentan los mismos valores de J_p normalizados dividiendo por su correspondiente valor de J_{x_1} pero en este caso se ha representado en función de la distancia x_1 normalizada por cada espesor. Esto hace posible observar que las distancias de transición r_c/B aparecen en localizaciones situadas entre los valores $x_1/B = 0.6$ y $x_1/B = 1.0$. Dicho en otras palabras, es necesaria una cierta distancia en la dirección x_1 para alcanzar el valor estabilizado J_p^* y esta anchura es mayor a medida que aumenta el espesor de la placa.

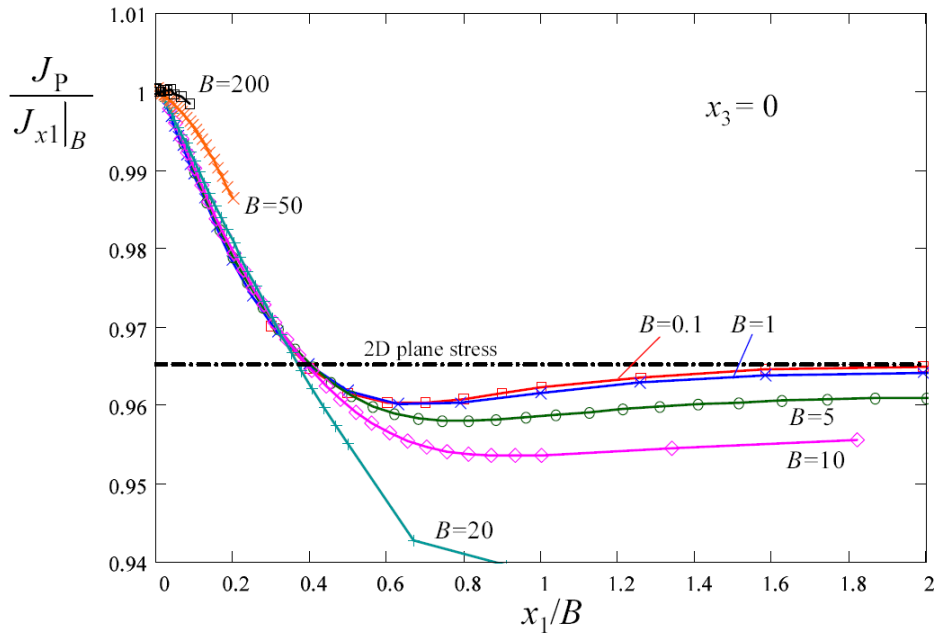


Figura 4.4 Algunos valores de $J_P / J_{x1|B}$ mostrados en la Figura 4.3. La dirección x_1 se ha normalizado ahora por el espesor B .

4.4 VARIACIÓN DE LA INTEGRAL J_{x1} A LO LARGO DEL ESPESOR Y SU RELACIÓN CON EL VALOR DE J_P^*

Se ha calculado también la integral $J_{x1}(s)$ definida a puntos a lo largo del frente de grieta. Considerando 51 puntos de cálculo, correspondientes a los nodos situados a lo largo del espesor de la placa (incluyendo los nodos de mitad de lado de cada elemento), se ha calculado el valor de la integral J_{x1} a partir de la integral equivalente de dominio J_{vol} . Los resultados se corresponden a una región encerrada por un contorno que pasa a través de $x_1/W \approx 0.1$. En la práctica, otros contornos proporcionarán los mismos valores debido a la independencia de la integral en cuanto al camino escogido. Estos resultados se han dibujado en la Figura 4.5:

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

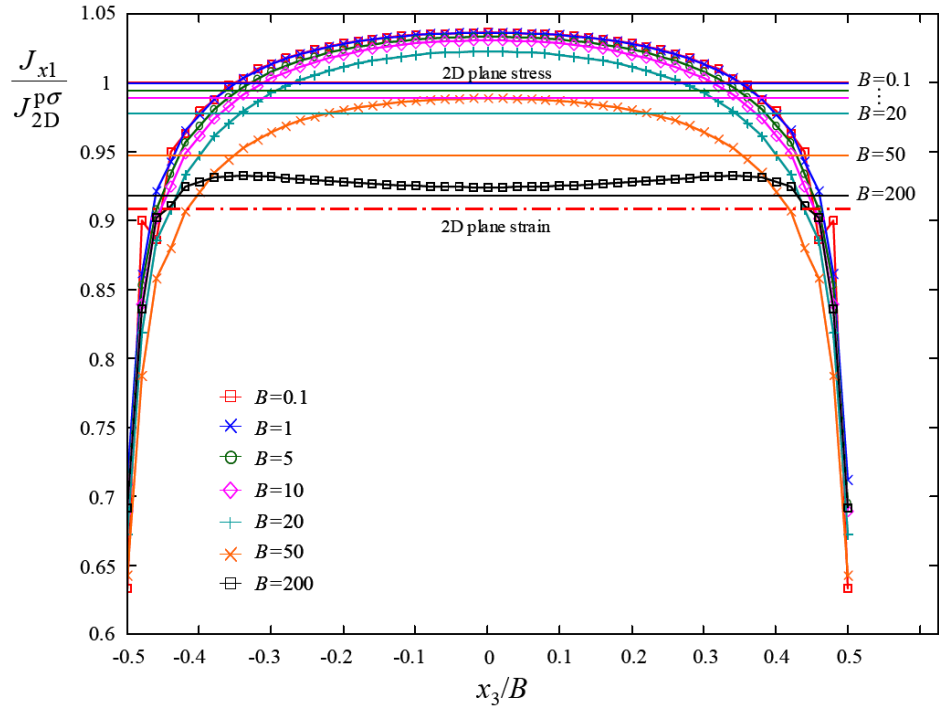


Figura 4.5 Variación de la integral J_{X1} a lo largo del espesor (normalizada por $J_{2D}^{p\sigma}$). Las líneas horizontales se corresponden con el valor medio de J_{X1} a lo largo del espesor para cada espesor B .

Como es ampliamente conocido, la integral $J_{X1}(s)$ varía a lo largo del espesor para todos los valores de B . Los valores correspondientes al cociente $x_3/B = 0$ (esto es, para el plano medio de la placa) coinciden con los valores de J_{X1} mostrados en la Figura 4.2 cuando se tiene una relación $x_1/W \approx 0.1$. Como referencia, se han incluido en la gráfica anterior los valores de J_{2D}^{pe} y $J_{2D}^{p\sigma}$, y además, todos los valores se han normalizado dividiendo por $J_{2D}^{p\sigma}$. Cabe destacar que la integral J_{X1} alcanza valores máximos para la posición $x_3 = 0$, excepto para el caso en el que $B = 200$ mm.

Se puede observar que las curvas muestran una cierta variación siempre que el espesor no sea demasiado grande en comparación con el resto de las dimensiones. Cuando el espesor $B \rightarrow 0$, las curvas convergen a una

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

única curva que muestra el valor máximo de J_{X1} . Por el contrario, cuando el espesor $B \rightarrow \infty$, el valor máximo de J_{X1} decrece y tiende a converger al valor de deformación plana para 2D J_{2D}^{pe} . En las proximidades a las superficies libres, la integral J_{X1} varía de manera similar para todos los espesores.

Utilizando una regla compuesta de Simpson, se ha integrado numéricamente el área encerrada por debajo de las curvas obteniendo el valor medio de la integral J_{X1} a lo largo del espesor y se ha denotado como \bar{J}_{X1} . Cabe observar que cuando $B \rightarrow \infty$ y en zonas suficientemente alejadas de las superficies libres, la integral J_{X1} se aproxima a ambas constantes: su valor medio \bar{J}_{X1} y el valor de deformación plana en 2D J_{2D}^{pe} gracias al cambio en la forma de la distribución de la curva J_{X1} . Para el caso de placas de espesor delgado, es muy interesante observar que su valor medio coincide prácticamente con el valor para tensión plana 2D J_{2D}^{ps} . Esta reseña fue ya comentada por Nakamura y Parks [35] quienes solamente analizaron una placa muy delgada. Por lo tanto, como ya se observó en (4.9), $J_P^* |_{B \rightarrow 0} = J_{2D}^{ps}$, se puede concluir que:

$$J_P^* |_{B \rightarrow 0} = \bar{J}_{X1} |_{B \rightarrow 0}$$

Como consecuencia de lo explicado anteriormente, parece razonable asumir que para cualquier valor de B , J_P^* será el valor medio correspondiente a la distribución de la integral J_{X1} a lo largo del espesor de la placa. Esto da un sentido físico al valor estabilizado J_P^* para todos los espesores tal y como se muestra en la siguiente figura:

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

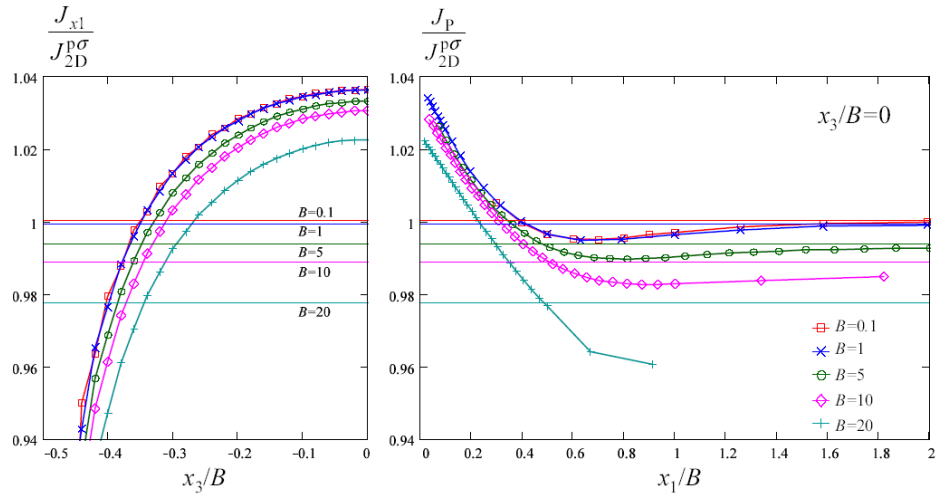


Figura 4.6 Variación de J_{x1} a lo largo del espesor (izqda.) y J_P para diferentes distancias del camino (dcha.). Ambas, J_{x1} y J_P se han normalizado por $J_{2D}^{p\sigma}$. Las líneas horizontales se corresponden con el valor medio de J_{x1} a lo largo del espesor para cada B .

En la figura de la izquierda se muestra un zoom detallado de la Figura 4.5 en el que se han omitido los casos $B = 50$ mm y $B = 200$ mm. En la imagen de la derecha se muestra el valor de la integral J_P para el plano medio mostrando que, para todos y cada uno de los espesores B , J_P^* tiende asintóticamente al valor \bar{J}_{x1} en regiones suficientemente alejadas del frente de grieta y, como era de esperar, la integral J_P converge a J_{x1} cuando $x_1 \rightarrow 0$.

4.5 VARIACIÓN DE LA INTEGRAL J_P Y J_P^* A LO LARGO DEL ESPESOR

Para un espesor dado ($B = 5$ mm), la siguiente figura muestra la evolución de la integral J_P y J_P^* para tres localizaciones con respecto al frente de grieta: $x_3 / B = 0$ (lo que se corresponde con el plano medio de la placa), $|x_3 / B| = 0.24$ y $|x_3 / B| = 0.48$ (cerca de la superficie libre). También se ha representado la independencia del camino tomado para la integral J_{x1} y se corresponde con los valores dados en la Figura 4.5.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

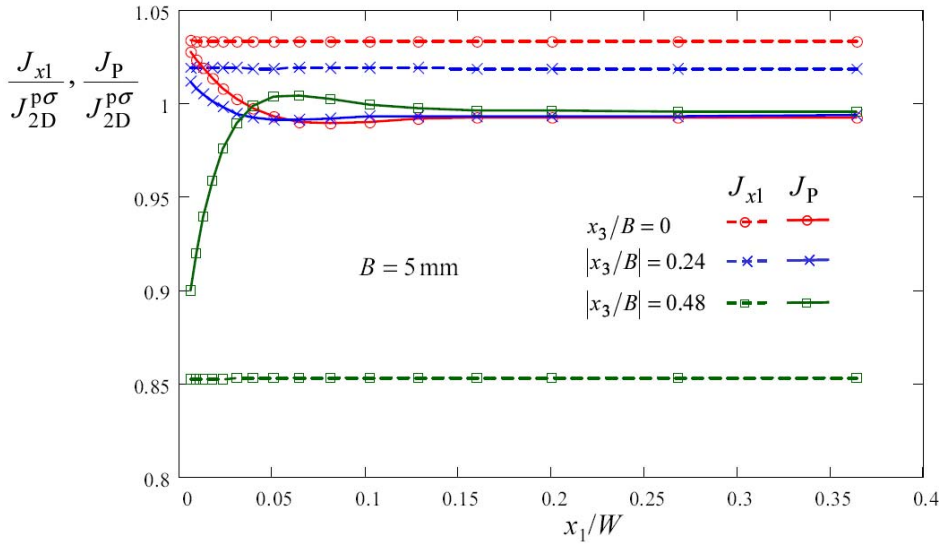


Figura 4.7 J_{x1} y J_P (normalizados por $J_{2D}^{p\sigma}$) para las localizaciones en la dirección del espesor $x_3/B = 0$, $|x_3/B| = 0.24$ y $|x_3/B| = 0.48$. Placa de espesor $B = 5$ mm.

Destacar que el valor de J_P^* es prácticamente el mismo para las tres localizaciones tomadas a lo largo del frente de grieta y para un espesor dado, indicando que el estado tensional es el mismo a lo largo del espesor para zonas situadas suficientemente alejadas del frente de grieta, esto es, se alcanza un estado de tensión plana 2D. Esto es coherente con el hecho de que $J_P^* = \bar{J}_{x1}$, por lo que hay solamente un valor medio para un espesor dado. Como consecuencia, la variación de la integral J_P para los puntos interiores ($x_3/B = 0$ y $|x_3/B| = 0.24$) es similar al caso analizado en el apartado 4.3. Sin embargo, para los puntos situados en las proximidades de las superficies libres ($|x_3/B| = 0.48$), J_P es mayor que J_{x1} ya que $J_{x1} < \bar{J}_{x1}$ y se debe satisfacer que:

$$J_P \rightarrow J_P^* = \bar{J}_{x1} \quad \text{cuando} \quad x_1/B > r_c$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esto significa que la integral J_A cambia de signo cerca de la superficie libre ($J_A < 0$) y además tiene un valor absoluto mayor. Siempre existen dos localizaciones a lo largo del frente de grieta (no representadas en la Figura 4.7) donde se cumple $J_{x1} = \bar{J}_{x1}$. Esta localización se encuentra a $x_3 / B = \pm 0.35$ para el caso $B = 5$ mm (véase la Figura 4.5), y por lo tanto $J_{x1} = J_P$ y consecuentemente $J_A = 0$ en estas localizaciones concretas del frente de grieta.

5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este último apartado se presentan las conclusiones del trabajo de investigación desarrollado así como se da pie a una serie de trabajos futuros que pueden tomar este trabajo como base.

5.1 CONCLUSIONES

Tras el desarrollo del trabajo de investigación expuesto en esta tesina se pueden extraer una serie de conclusiones que se presentan a continuación:

- Se ha realizado un estudio de las ecuaciones que dominan el campo elástico en Mecánica de la Fractura Elástico Lineal (MFEL).
- Se han definido los parámetros más relevantes de la MFEL como son el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) K para los tres modos de apertura y la tasa de liberación de energía G . Asimismo se ha introducido la expresión que permite su relación.
- Se han revisado los métodos energéticos aplicables mediante el MEF que permiten la obtención del FIT de forma indirecta a través del cálculo de G . De ellos, se han presentado los métodos basados en la **integral de contorno**, los basados en el **método de la integral de dominio equivalente (EDI)** y los basados en la **integral de línea-área J_{X1}** .
- Se ha escogido el método basado en la integral J_{X1} para su implementación debido a las ventajas que puede ofrecer frente a otros métodos energéticos desde el punto de vista de la caracterización de la zona de constricción, asentando una metodología de trabajo para su estudio.

5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

- Se han realizado análisis de placas con grietas de frente recto de diferentes espesores por el MEF utilizando el software comercial ABAQUS extrayendo los resultados necesarios para el posterior cálculo de J .
- Se han implementado rutinas y subrutinas en el software MATLAB para el postproceso de los resultados del análisis de EF que permiten el estudio de las integrales J_{X1} , J_P y J_A .

Del estudio del comportamiento de las integrales J_{X1} , J_P y J_A se pueden extraer una serie de conclusiones:

- Se ha demostrado la independencia de la integral J_{X1} con respecto al camino de integración escogido.
- Se ha comprobado que la integral de línea J_P converge a la integral J_{X1} a medida que el camino se reduce hacia el frente de grieta ya que en este caso la integral de área J_A tiende a 0 puesto que el área de integración se reduce.
- La integral de línea J_P contribuye a la integral J_{X1} mucho más que la integral de área J_A .
- La integral de línea J_P decrece mientras que la integral de área J_A aumenta a medida que la distancia x_1 se hace mayor en una región cercana al frente de grieta mientras que tienden a estabilizarse a medida que aumenta la distancia.
- La integral J_{X1} decrece al aumentar el espesor de la placa analizada.
- Se ha demostrado que un análisis en tensión plana 2D no puede modelar el comportamiento real de placas delgadas 3D debido a la existencia de tensiones singulares transversales presente en el caso tridimensional.

- Se ha comprobado que la integral J_{X1} para placas 3D de mayor espesor converge al valor de la integral J calculada para el caso de deformación plana.
- Se ha calculado la integral $J_{X1}(s)$ a lo largo del frente de grieta. Se ha comprobado que para espesores delgados, cuando el espesor tiende a 0, las curvas de $J_{X1}(s)$ tienden a una única curva que muestra el valor máximo de J_{X1} . Sin embargo, para espesores mayores, el valor máximo de J_{X1} tiende a converger al valor de deformación plana 2D.

5.2 TRABAJOS FUTUROS

En este apartado se plantean una serie de futuras actuaciones que pueden llevarse a cabo tomando como base los resultados y conclusiones obtenidos en este trabajo de investigación.

- Una futura línea de investigación consistiría en la inclusión en este estudio de los efectos de la plasticidad en el fondo de grieta en pequeña y gran escala (SSY por sus siglas en inglés “*small scale yielding*” y LSY “*large scale yielding*” respectivamente).
- Otra posible línea de investigación en la que en la actualidad se está avanzando es en el estudio de la singularidad en borde libre. Esto es, en el estudio del comportamiento de la integral J_{X1} en los bordes libres donde la formulación expuesta en esta tesina no es estrictamente aplicable.
- Por último, una nueva línea de investigación puede surgir de la consideración de los siguientes términos en el desarrollo de Williams (ecs. (2.1)-(2.6)) para determinar el campo tensional en las inmediaciones del frente de grieta. Esto implica el estudio de la influencia del término de tensión no singular *T-Stress* en los resultados numéricos obtenidos para placas 3D que presentan grietas de frente recto.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Eischen JW. An improved method for computing the J_2 integral. *Eng. Fract. Mech.* 1987;26(5):691-700.
- [2] Cherepanov GP. *Mechanics of Brittle Fracture*. McGraw-Hill, Nueva York, 1979. Traducido del ruso por De Wit R y Cooley W.
- [3] Williams ML. On the stress Distribution at the base of stationary crack. *J. Appl. Mech.* 1957;24:109-114.
- [4] Rice JR. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 1968;35:379-386.
- [5] Gdoutos EE. *Fracture Mechanics: an introduction*. Solid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda, 1993.
- [6] Knowles JK, Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1972;44(3):187-211.
- [7] Budiansky B, Rice JR. Conservation laws and energy-release rates *J. Appl. Mech.* 1973;40:201-203.
- [8] Eshelby JD. The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity* 1975;5(3-4):321-335.
- [9] Nakamura T, Shih CF, Freund LB. Computational methods based on an energy integral in dynamic fracture. *Int. J. Fracture* 1985;27:229-243.
- [10] Atluri SN. “Energetic Approaches and Path-Independent Integrals”. *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*, volumen 2 de *Computational Methods in Mechanics*, capítulo 5,

- págs. 121-165. North-Holland (Elsevier Science), Amsterdam, 1986.
- [11] Blackburn WS. Path independent integrals to predict onset of crack instability in an elastic-plastic material. *Int. Fracture* 1972, 8:343-346.
 - [12] Shih CF, Moran B, Nakamura T. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *Int. J. Fracture* 1986;30:79-102.
 - [13] Nikishkov GP, Atluri SN. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'equivalent domain integral' method. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 1987;24:1801-1821.
 - [14] Shivakumar KN, Raju IS. An equivalent domain integral method for three-dimensional mixed-mode fracture problems. *Engrg. Fracture Mech.* 1992;42(6):935-959.
 - [15] Atluri SN, Nishioka T. "Computational Methods for Three-Dimensional Problems of Fracture". *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*, volumen 2 de *Computational Methods in Mechanics*, capítulo 7, págs. 229-280. North-Holland (Elsevier Science), Amsterdam, 1986.
 - [16] Li FZ, Shih CF, Needleman A. A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engrg. Fracture Mech.*, 1985;21(2):405-421.
 - [17] deLorenzi HG. On the energy release rate and the J -integral for 3-D crack configurations. *Int. J. Fracture*, 1982;19:183-193.
 - [18] deLorenzi HG. Energy release rate calculations by the finite element method. *Engrg. Fracture Mech.* 1985;21(1):129-143.
 - [19] Gosz M, Moran B. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-

- planar cracks fronts in three dimensions. *Engrg. Fracture Mech.* 2002;69:299-319.
- [20] Nakamura T. Three-dimensional stress fields of elastic interface cracks. *J. Appl. Mech.* 1991;58:939-946.
- [21] Gosz M, Dolbow J, Moran B. Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *Int. J. of Solid and Structures* 1998;35(15):1763-1783.
- [22] Anderson TL. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. CRC Press, Boca Ratón, Florida, 2ª edición, 1995.
- [23] Raju IS, Newman JC Jr. Stress intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engrg. Fracture Mech.* 1987;28(3):251-274.
- [24] Shivakumar KN, Raju IS. Treatment of singularities in cracked bodies. *Int. J. Fracture*. 1990;45:159-178.
- [25] Banks-Sills L, Sherman D. On quarter point three-dimensional finite elements in linear elastic fracture mechanics. *Int. J. Fracture* 1989;41:177-196.
- [26] Parks DM. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *Int. J. Fracture* 1974;10:487-502.
- [27] Williams PT, Bass BR. Evaluation of an Effective Elastic Modulus for J to KJ Conversion in 3-Dimensional Linear-Elastic Finite-Element Analyses, ORNL/NRC/LTR-99/19, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn., August 1999, with addendum for C(T) and SE(B) specimens.2001.
- [28] Fernández Zúñiga D, Fernández Canteli A, Castillo E. Límites del modelo de Irwin en la MFEL ante efectos de constricción lateral. *Anales de Mecánica de la Fractura*. 2007;Vol. 24.

- [29] Rigby RH, Aliabadi MH. Descomposition of the mixed-mode J -integral-revisited. *Int. J. Fracture* 1998;35(17):2073-2099.
- [30] Chiarelli M, Frediani A. A computation of three-dimensional J -integral for elastic materials with a view to applications in fracture mechanics. *Engrg. Fracture Mech.* 1993;44(5):763-788.
- [31] Eriksson K. A general expression for an area integral of a point-wise J for a curved crack front. *Int. J. Fracture* 2000;106:65-80.
- [32] Omer N, Yosibash Z. On the path independency of the point-wise J integral in three-dimensions. *Int. J Fracture* 2005;136:1-36.
- [33] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. ABAQUS/Standard User's Manual, v. 6.7, Pawtucket, Rhode Islands. 2007.
- [34] Shih CF. A review of the three-dimensional stress problem for a cracked plate. *Int. J. Fracture* 1971;7(1):39-61.
- [35] Nakamura T, Parks DM. Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate. *J. Appl. Mech.* 1988;55:805-813.