MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

Modelling in Science Education and Learning
Volume 12 (1), 2019 DOI: 10.4995/msel.2019.10787.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Una introducción a la modelización estocástica de subyacentes cotizados
An introduction to stochastic modelling of underlying assets

Julia Calatayud, Juan Carlos Cortés, Marc Jornet, Rafael Villanueva
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
jucagre@doctor.upv.es, jccortes@imm.upv.es, marjorsa@doctor.upv.es, rjvillan@imm.upv.es.

Abstract

El objetivo de este trabajo es mostrar una metodología estocástica, basada en el denominado Modelo Lognormal, para modelizar la dinámica de subyacentes cotizados teniendo en cuenta la incertidumbre de los mercados financieros. Se trata de un modelo sencillo desde el punto de vista de su formulación, pero de gran valor formativo porque constituye la base de otros modelos avanzados que son objeto de investigación actual. La modelización que se presenta ha sido puesta en práctica por los autores en su labor docente en estudios tanto de Grado como de Posgrado universitario. Presentamos una aproximación docente al modelo y su aplicación a datos reales de un activo financiero que cotiza en el mercado español IBEX35.

The aim of this paper is to show a methodology, based on the so-called Lognormal Model, to describe the dynamics of underlying assets by taking into account the uncertainty of financial markets. In spite of its simple formulation, the Lognormal Model is a valuable tool from a formative standpoint because it provides an excellent basis to study more advanced models. The proposed approach has been put into practice by the authors in their teaching in both undergraduate and postgraduate studies. We present the model and its application to describe the dynamics of real data of an asset traded in the Spanish stock market index IBEX35.

Keywords: stochastic modelling, underlying assets, stochastic differential equation, parameter estimation, prediction.
Palabras clave: modelización estocástica, subyacentes cotizados, ecuación diferencial estocástica, estimación de parámetros, predicción.

1. Introducción

Los mercados financieros proporcionan información relevante para la adecuada valoración de la cotización de subyacentes, ya que ponen en un mismo plano la oferta y la demanda, es decir, lo que el mercado está dispuesto a pagar por ellos. La evolución de la cotización de los subyacentes financieros está influenciada por un gran número de factores complejos, como por ejemplo, la coyuntura económica, los tipos de interés, la inflación, la política monetaria, el riesgo cambiario, las tensiones políticas, entre otros. Conocer, con un cierto nivel de confianza, el valor al que cotizará la acción de una compañía es un problema de interés no solo para los responsables de la misma y sus accionistas, sino también en muchos casos para los intereses generales de una comunidad o de un país. Es por ello que se han desarrollado diferentes enfoques cuantitativos para predecir el valor que tendrá un activo subyacente en el futuro a partir de un histórico de sus cotizaciones. Algunos de los principales métodos cuantitativos se basan en el Análisis de Regresión, los Modelos GARCH, los Modelos ANOVA, las Series Temporales, las Cadenas de Markov, el Análisis Técnico, el Análisis Fundamental, Machine Learning, etc., (Lai y Chin, 2008, Gourieroux, 1997, Enders, 2014, Soofi y Cao, 2002, Plasmans, 2006, Clifford, 2015).

Además de estas técnicas, un enfoque que ha tenido un gran impacto en Finanzas es el basado en las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Platen y Liberati, 2010, Swishchuk e Islam, 2013). En este trabajo presentaremos una introducción a la modelización de la dinámica de subyacentes cotizados utilizando este enfoque. Las ideas que expondremos a lo largo del trabajo son el resultado del trabajo desarrollado por los autores en las asignaturas Análisis del Riesgo Financiero, del Grado en Administración y Dirección de Empresas, y Modelización y Valoración de Opciones Financieras, del Master en Dirección Financiera y Fiscal, de la Universitat Politècnica de València.

2. Motivación del modelo estocástico Lognormal desde la formulación determinista

En este apartado introduciremos el modelo estocástico para describir la dinámica de subyacentes cotizados que se utilizará en este trabajo. Este modelo se denomina Modelo Lognormal. Motivaremos la formulación del Modelo Lognormal a partir del modelo determinista de capitalización de un bono, es decir, de una inversión en ambiente de certidumbre (sin riesgo). Desde el punto de vista docente, este enfoque es interesante porque permite introducir al estudiante en el campo de las ecuaciones diferenciales estocásticas de un modo sencillo basado en sus conocimientos previos.

Cuando se invierte un principal S_0 bajo un régimen de capitalización a interés compuesto continuo, siendo el rendimiento de la inversión μ, el valor de la inversión en el instante t satisface el siguiente problema de valor inicial (ecuación diferencial ordinaria (EDO) junto a una condición inicial (CI)), cuya solución es la conocida fórmula de capitalización a interés compuesto continuo:

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{EDO:} & S'(t) & = & \mu S(t),\, t \geq 0, \\ \text{CI:} & S(0) & = & S_0, \end{array}\right\} \Longrightarrow S(t) = S_0 \mathrm{e}^{\mu t}. \tag{1}$$

A parir de la EDO anterior y de la aproximación de derivada como un cociente incremental, se puede obtener la siguiente interpretación del parámetro μ:

$$\mu = \frac{S'(t)}{S(t)} \approx \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t \cdot S(t)} = \text{tasa instantánea de rendimiento relativo.}$$

Por tanto, observamos que una inversión bajo un régimen de capitalización a interés compuesto continuo es aquella en la que la tasa instantánea de rendimiento relativo es constante. Como se ha indicado anteriormente, las inversiones en ambiente de certidumbre (con rendimiento acordado) capitalizan según este modelo. Ejemplos de este tipo de inversiones son los bonos, pero no las acciones porque el rendimiento de una acción depende de numerosos factores que afectan a los mercados financieros, los cuales, por lo general, están sujetos a una gran incertidumbre (volatilidad).

El modelo determinista (1) supone suavidad en la dinámica del subyacente $S(t)$, véase la siguiente Figura 1.

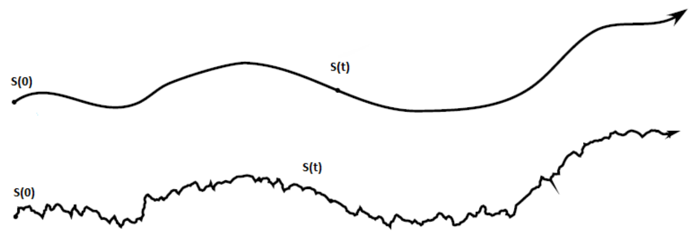

Figura 1: Trayectorias de la dinámica de un subyacente $S(t)$ en ambiente de certidumbre o sin riesgo (arriba) y en ambiente de incertidumbre o con riesgo (abajo). En el primer caso la trayectoria es suave o diferenciable y en el segundo es irregular o no diferenciable.

Como el rendimiento de la inversión en una acción no es conocido de forma determinista (cierta), lo que haremos es perturbar el parámetro μ mediante un proceso estocástico, que denotaremos por $\xi(t)$, de modo que posteriormente realizaremos la substitución $\mu \leftarrow \mu + \sigma\xi(t)$, donde $\sigma > 0$ denota la intensidad de la perturbación. El término $\xi(t)$ puede indentificarse como un error (perturbación). Las propiedades intuitivas de un error son:

- $\xi(t)$ es un proceso estocástico (de tipo gaussiano),
- $\mathbb{E}[\xi(t)] = 0$ (con media nula),
- $\mathbb{E}[\xi(t)\xi(s)] = \delta(t-s)$, siendo $\delta(\cdot)$ la función delta de Dirac (incorrelado).

El error $\xi(t)$ es un proceso estocástico, denominado Ruido Blanco, que es la derivada (en un sentido generalizado) de otro proceso estocástico muy importante, denominado proceso de Wiener (también llamado Movimiento Browniano), $\xi(t) = W'(t)$. Recordemos que un proceso estocástico $\{W(t) : t \geq 0\}$ se denomina un Movimiento Browniano si:

- $W(0) = 0$ con probabilidad 1 (empieza en el origen casi seguramente),
- $W(t_2)-W(t_1), \ldots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes, para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t_n$ (los incrementos del proceso sobre intervalos disjuntos son variables aleatorias independientes),
- $W(t)-W(s) \sim \text{Normal}(0; t-s)$ (media nula y varianza la longitud, $t-s$, del incremento).

Las principales propiedades estadísticas del Movimiento Browniano son las siguientes:

- $W(t) \sim \text{Normal}(0; t)$ (en el instante t, tiene media nula y varianza t, es decir la volatilidad aumenta al alejarnos del origen de tiempos),
- $\mathbb{E}[W(t)W(s)] = \text{mín}\{t, s\}$ (la correlación coincide con la covarianza y es el mínimo de los instantes temporales donde se calcula),

- $W(t)$ tiene trayectorias continuas, pero no diferenciables en todo punto.

Formalmente, se cumple que $W'(t) = \xi(t)$, aunque la derivada no exista en un sentido ordinario.

Una propiedad importante del Movimiento Browniano, que utilizaremos más adelante, es la siguiente representación, en el sentido de distribución (d), en términos de una variable aleatoria Gaussiana estándar:

$$W(t) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim \mathrm{Normal}(0;1). \tag{2}$$

En la Figura 2 que sigue, presentamos tres simulaciones de trayectorias del Movimiento Browniano. Una trayectoria del Movimiento Browniano es, fijado un suceso ω del espacio muestral subyacente, la función real $W(t,\omega) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Para dibujar una trayectoria en un intervalo $[0,T]$, particionamos $[0,T]$ en subintervalos pequeños $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ (n grande), y generamos realizaciones $y_1, \ldots, y_n$ de variables aleatorias independientes $Y_1, \ldots, Y_n$, distribuidas como $Y_i \sim \mathrm{Normal}(0; t_i - t_{i-1})$, $1 \le i \le n$. Entonces $w_i = \sum_{j=1}^{i} y_j$ es una realización de $W(t_i)$, para $1 \le i \le n$. Uniendo los puntos (t_i, w_i), tenemos una simulación de la trayectoria del Movimiento Browniano en $[0,T]$.

Otra forma de simular el Movimiento Browniano es mediante expansiones de Karhunen-Loève: se escribe el Browniano como límite en media cuadrática de una serie infinita de tipo Fourier que depende de una sucesión numerable de variables aleatorias normales estándar e independientes.

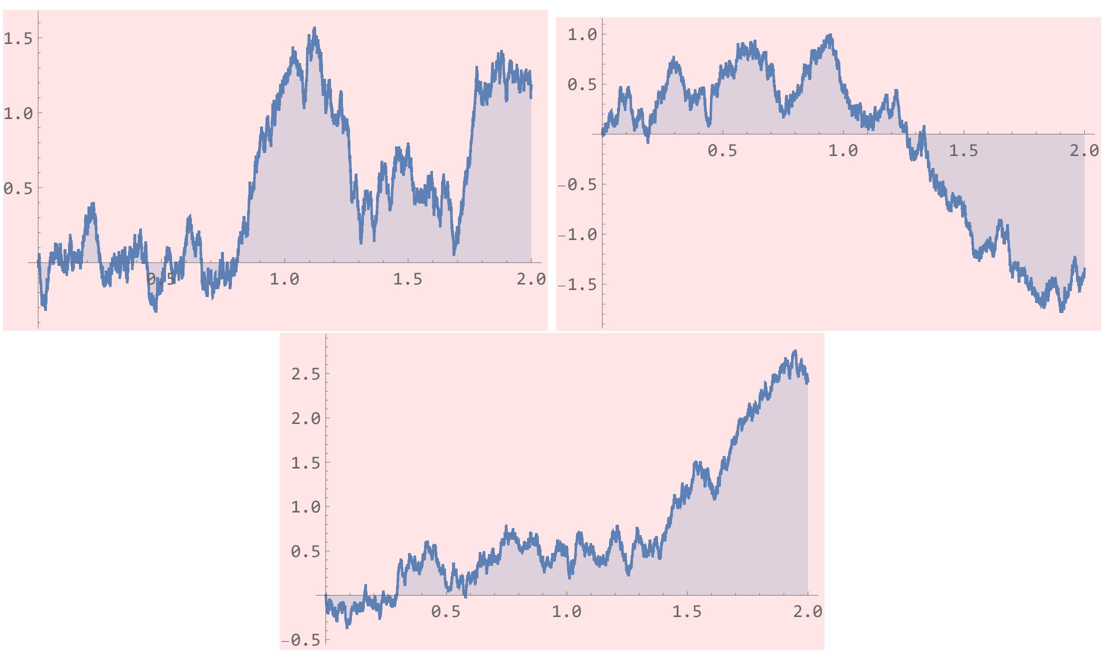

Figura 2: Simulación de trayectorias del Movimiento Browniano.

Si añadimos el error al modelo determinista (1), ahora $S(t)$ es un proceso estocástico y realizando la sustitución

$$\mu \leftarrow \mu + \sigma\xi(t) = \mu + \sigma W'(t),$$

se obtiene la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{EDE:} & S'(t) & = & \mu S(t) + \sigma S(t) W'(t),\ t \ge 0, \\ \text{CI:} & S(0) & = & S_0. \end{array}\right\}$$

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Rigurosamente esta ecuación no tiene sentido, pues aunque $W'(t)$ modeliza un error, no existe como objeto matemático. Vamos a interpretar la derivada, intuitivamente, como cociente de infinitesimales: $S'(t) = \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}$, $W'(t) = \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}$, de donde

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{EDE:} & \mathrm{d}S(t) & = & \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t),\ t \geq 0, \\ \text{CI:} & S(0) & = & S_0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Escribiendo en forma integral el problema de valor inicial anterior, aparecen dos integrales estocásticas, la primera de tipo Lebesgue, y la segunda, es una integral denominada de tipo Itô (porque el integrador no tiene variación acotada):

$$S(t) = S_0 + \mu \underbrace{\int_0^t S(s)\,\mathrm{d}s}_{\text{Integral de Lebesgue}} + \sigma \underbrace{\int_0^t S(s)\,\mathrm{d}W(s)}_{\text{Integral de Itô}}.$$

La integral de tipo Lebesgue $\int_0^t S(s)\,\mathrm{d}s$ es una integral ordinaria por trayectorias: para cada suceso ω de nuestro espacio muestral subyacente, se considera la función real $S(\cdot,\omega) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, esto es, cada trayectoria del proceso estocástico $S(t)$, y se define un nuevo proceso $I(t,\omega) = \int_0^t S(s,\omega)\,\mathrm{d}s$ como la integral de Lebesgue de dicha trayectoria. En cambio, la integral de tipo Itô $\int_0^t S(s)\,\mathrm{d}W(s)$ se define de forma diferente, como un límite en media cuadrática de sumas de Riemann con incrementos del Movimiento Browniano. El límite en media cuadrática no puede ser sustituido por un límite casi seguro, pues las trayectorias del Browniano no tienen variación acotada. Además, el límite en media cuadrática tiene propiedades muy deseables desde el punto de vista probabilístico, pues conserva la convergencia de la esperanza y varianza.

Se puede demostrar que de este modo el modelo (3) está bien definido en un sentido matemático riguroso (Øksendal, 2003).

3. Obtención del proceso estocástico solución y sus momentos

Queremos resolver de manera intuitiva la EDE junto a la CI dadas en (3), denominado en la literatura Modelo Lognormal. Para ello se necesita el Lema de Itô, que es una versión del desarrollo de Taylor para procesos estocásticos que son solución de EDEs. Existen muchas versiones del Lema de Itô (Øksendal, 2003). En este trabajo se aplicará la siguiente formulación:

Teorema 4.1 *(Lema de Itô) Sea $X(t)$ un proceso estocástico que satisface la siguiente EDE con condición inicial aleatoria X_0:*

$$\left.\begin{array}{rrcl} \textit{EDE:} & \mathrm{d}X(t) & = & f(t,X(t))\,\mathrm{d}t + g(t,X(t))\,\mathrm{d}W(t),\ t \geq 0, \\ \textit{CI:} & X(0) & = & X_0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

y sea $F(t,x)$ una función $F : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = F_1(t,x), \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = F_2(t,x), \quad \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} = F_{22}(t,x).$$

Entonces para $t>0$ se cumple

$$
\begin{aligned}
F(t,X(t))-F(0,X_0) &= \int_0^t \left(F_1(r,X(r))+f(r,X(r))F_2(r,X(r))\right) \mathrm{d}r \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t (g(r,X(r))^2 F_{22}(r,X(r))\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t g(r,X(r))F_2(r,X(r))\,\mathrm{d}W(r).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Cuando se aplica el Lema de Itô para resolver una EDE debe elegirse *apropiadamente* la función F y esto es un *arte*. En este caso funciona la siguiente elección: $F(t,x)=\ln x$ (obsérvese que en este caso F no depende de la variable t, y esto es así porque en realidad hemos aplicado una versión del Lema de Itô más general de la realmente requerida para dar al lector una mayor visión de este importante resultado estocástico). Identificando el Modelo Lognormal (3) con el modelo general (4)

$$
X(t)=S(t), \quad X_0=S_0, \quad f(t,X(t))=\mu S(t), \quad g(t,X(t))=\sigma S(t),
$$

y teniendo en cuenta que para la elección $F(x,x)=\ln x$ se cumple que

$$
\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=F_1(t,x)=0, \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=F_2(t,x)=\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}=F_{22}(t,x)=-\frac{1}{x^2},
$$

sustituyendo estos cálculos en (5) se deduce

$$
\begin{aligned}
\ln(S(t))-\ln(S_0) &= \int_0^t \left(\mu S(r)\,\frac{1}{S(r)}\right) \mathrm{d}r + \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma S(r))^2\,\frac{-1}{(S(r))^2}\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \sigma S(r)\,\frac{1}{S(r)}\mathrm{d}W(r).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Por tanto, simplificando

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) &= \int_0^t \left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right) \mathrm{d}r+\sigma\int_0^t \mathrm{d}W(r) \\
&= \left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t),
\end{aligned} \tag{7}
$$

donde en el cálculo de la última integral hemos utilizado que $W(0)=0$. Despejando se obtiene la solución del Modelo Lognormal,

$$
S(t)=S_0 \mathrm{e}^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)}. \tag{8}
$$

A este proceso estocástico se le denomina Movimiento Browniano Geométrico.

Cuando se resuelve una EDE, la solución es un proceso estocástico (en lugar de una función determinista), y dicha solución tiene interés para realizar predicciones del modelo. Las predicciones se construyen utilizando la función media y la función varianza (o desviación típica) del proceso solución, porque ello permite construir predicciones puntuales (a través de la función media) e intervalos de confianza (a través de la función varianza). Por ello, a continuación calcularemos estos momentos estadísticos del proceso solución.

Una forma sencilla de calcular estos momentos es hacer uso de la siguiente propiedad de los momentos exponenciales de una variable aleatoria Gaussiana estándar (o equivalentemente de la función generatriz de dichas variables aleatorias)

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda Z}\right] = \mathrm{e}^{\lambda^2/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ Z \sim \text{Normal}(0;1). \tag{9}$$

Aplicando dicha propiedad con la identificación $\lambda = \sigma\sqrt{t}$ junto con (2), se deduce la función media del Movimiento Browniano Geométrico

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S(t)] &= \mathbb{E}\left[S_0 \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}\right] = S_0 \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\sigma W(t)}\right] \\ &= S_0 \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{t}Z}\right] = S_0 \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = S_0\mathrm{e}^{\mu t}. \end{aligned} \tag{10}$$

Llegado este punto es realmente interesante observar la siguiente conexión entre el modelo determinista y el modelo estocástico de subyacentes: la media del Modelo Lognormal coincide con la solución del modelo determinístico (véase (1)). Podemos interpretar que, según la formulación estocástica que hemos hecho, el comportamiento *medio* de una acción cuyo valor inicial es S_0 coincide con el valor de una inversión libre de riesgo en cada instante cuyo principal es S_0. Por supuesto, no debe confundirse esta conclusión con el hecho de que en ambas inversiones se obtenga el mismo rendimiento, ya que, esta afirmación debe interpretarse *en media*. Esto nos permite *conectar* de una forma bella ambos mundos, el determinista (los bonos) y el aleatorio (las acciones).

Para calcular la varianza, haremos uso de la siguiente identidad bien conocida

$$\mathbb{V}[S(t)] = \mathbb{E}[S(t)^2] - (\mathbb{E}[S(t)])^2. \tag{11}$$

Como el término $\mathbb{E}[S(t)]$ ya lo hemos calculado en (10), calcularemos el momento de segundo orden, $\mathbb{E}[S(t)^2]$, utilizando un razonamiento similar.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S(t)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(S_0 \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}\right)^2\right] = S_0^2 \mathrm{e}^{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{2\sigma W(t)}\right] \\ &= S_0^2 \mathrm{e}^{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{2\sigma\sqrt{t}Z}\right] = S_0^2 \mathrm{e}^{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\mathrm{e}^{2\sigma^2 t} = S_0^2\mathrm{e}^{2\mu t + \sigma^2 t}. \end{aligned} \tag{12}$$

Por tanto, sustituyendo en (11), se deduce el valor de la función varianza

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[S(t)] &= \mathbb{E}[S(t)^2] - (\mathbb{E}[S(t)])^2 \\ &= S_0^2\mathrm{e}^{2\mu t + \sigma^2 t} - \left(S_0\mathrm{e}^{\mu t}\right)^2 \\ &= S_0^2\mathrm{e}^{2\mu t}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2 t} - 1\right) > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

4. Estimación de parámetros

A continuación se presentará un método de estimación de estos dos parámetros, denominado Método de los Momentos. Asumiremos que el valor $S(t)$ del Modelo Lognormal en el instante t_i, $S(t_i)$, es el valor observado de la cotización en dicho instante, es decir, s_i (obsérvese que $S(t_i)$ es una variable aleatoria). Asumimos por tanto que $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ y $S_0 = s_0$. Tomemos logaritmos en (8),

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \ln\left(S(t)\right) - \ln\left(S_0\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t).$$

Aplicando esta relación para $t = t_i$ y $t = t_{i-1}$ se obtiene, respectivamente,

$$\ln\left(\frac{S(t_i)}{S_0}\right) = \ln\left(S(t_i)\right) - \ln\left(S_0\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t_i + \sigma W(t_i)$$

y

$$\ln\left(\frac{S(t_{i-1})}{S_0}\right) = \ln\left(S(t_{i-1}t)\right) - \ln\left(S_0\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t_{i-1} + \sigma W(t_{i-1}).$$

Restando la segunda expresión de la primera se deduce

$$\begin{aligned} U_i :=& \ln\left(S(t_i)\right) - \ln\left(S(t_{i-1})\right) \\ =& \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_i - t_{i-1}) + \sigma(W(t_i) - W(t_{i-1})) \\ \sim& \text{ Normal}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t; \sigma^2 \Delta t\right), \quad 1 \le i \le N, \end{aligned}$$

donde, en el último paso hemos utilizado que $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ y que por las propiedades del Movimiento Browniano sus incrementos son Gaussianos de media cero y varianza la longitud temporal del intervalo, es decir, $W(t_i) - W(t_{i-1}) \sim \text{Normal}(0; \Delta t)$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[U_i] = (\mu - 1/2\sigma^2)\Delta t, \quad \mathbb{V}[U_i] = \sigma^2 \Delta t, \qquad 1 \le i \le N$$

Si $u_i = \ln(s_i) - \ln(s_{i-1})$ son valores (denominados log-retornos) obtenidos a partir de las cotizaciones, igualando los valores muestrales (parte izquierda) a los valores poblaciones (parte derecha) de la media y la varianza, y utilizando la Ley de los Grandes Números, se deduce

$$\bar{u} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i \approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t,$$

y

$$s^2 := \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \bar{u})^2 \approx \sigma^2 \Delta t,$$

donde para aproximar la varianza poblacional se ha utilizado su estimador insesgado, la cuasivarianza muestral. Así, los estimadores $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ de μ y σ, respectivamente, del Método de los Momentos satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)\Delta t \;=\; \bar{u}, \\ \\ \hat{\sigma}^2 \Delta t = s^2, \end{array} \right. \tag{14}$$

cuya solución es

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{u} + \frac{s^2}{2}}{\Delta t}, \qquad \hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}. \tag{15}$$

5. Aplicación a datos reales

En este apartado veremos un ejemplo de aplicación de los resultados anteriores a datos reales. A continuación, presentamos los valores de cotización de los últimos 30 días del activo Inditex (www.yahoo.com) en el período 5 de julio al 15 de agosto de 2017, con $\Delta t = 1$ (cotización diaria a cierre), $S_0 = 33.89$ y $N = 29$:

$$\begin{aligned}\{s_0, \ldots, s_{29}\} = \{&33.89, 33.535, 33.635, 33.745, 33.34, 33.79, 34.05, 34.2, 34.55, 33.72,\\ &34.22, 34.165, 33.625, 33.645, 33.39, 33.62, 33.745, 33.5, 33.59, 33.88,\\ &33.75, 33.68, 33.96, 33.955, 34.355, 34.04, 33.595, 33.17, 33.43, 33.59\}.\end{aligned}$$

De acuerdo con el desarrollo anterior, calculamos los log-retornos $u_i = \log(s_i) - \log(s_{i-1})$:

$$\begin{aligned}&\{u_1, \ldots, u_{29}\} = \{-0.0105303, 0.00297752, 0.00326507, -0.0120744, 0.013407,\\ &0.00766513, 0.00439561, 0.0101819, -0.0243164, 0.0147191, -0.00160854, -0.0159319,\\ &0.000594619, -0.007608, 0.00686467, 0.00371113, -0.00728682, 0.00268296, 0.00859647,\\ &-0.00384445, -0.00207623, 0.00827917, -0.000147243, 0.0117114, -0.00921126,\\ &-0.0131591, -0.0127314, 0.00780785, 0.0047747\}.\end{aligned}$$

La media y cuasivarianza muestrales vienen dados por

$$\bar{u} = -0.000306606, \quad s^2 = 0.0000957616.$$

Los estimadores de los parámetros del Modelo Lognormal por el Método de Momentos son

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{u} + \frac{s^2}{2}}{\Delta t} = -0.000258725, \quad \hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} = 0.00978579.$$

Podemos estimar la media y desviación típica del valor del subyacente en cada instante t, $t = 0, \ldots, 29$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}[S(t)]} = S_0 e^{\hat{\mu}t} = 33.89 \cdot e^{-0.000258725t} :\\ \{&33.89, 33.8812, 33.8725, 33.8637, 33.8549, 33.8462, 33.8374, 33.8287,\\ &33.8199, 33.8112, 33.8024, 33.7937, 33.7849, 33.7762, 33.7675, 33.7587,\\ &33.75, 33.7413, 33.7325, 33.7238, 33.7151, 33.7064, 33.6976, 33.6889,\\ &33.6802, 33.6715, 33.6628, 33.6541, 33.6454, 33.6367\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{sd}[S(t)]} &= \sqrt{\widehat{\mathbb{V}[S(t)]}} = \sqrt{S_0^2 e^{2\hat{\mu}t}(e^{\hat{\sigma}^2 t} - 1)}\\ &= \sqrt{33.89^2 e^{2\cdot(-0.000258725)t}(e^{0.00978579^2 t} - 1)} :\\ &\{0., 0.331562, 0.46879, 0.574013, 0.662658, 0.7407, 0.811206, 0.875997,\\ &0.93626, 0.992821, 1.04628, 1.09709, 1.1456, 1.1921, 1.23681, 1.27992,\\ &1.32159, 1.36194, 1.4011, 1.43915, 1.47619, 1.51229, 1.54752, 1.58193,\\ &1.61557, 1.6485, 1.68075, 1.71236, 1.74338, 1.77382\}.\end{aligned}$$

Podemos comparar nuestro ajuste con los datos reales, véase la siguiente Figura 3. El valor estimado del subyacente viene dado por $\widehat{\mathbb{E}[S(t)]}$, y el intervalo de confianza se ha calculado mediante la regla $[\widehat{\mathbb{E}[S(t)]} \pm 2 \cdot \widehat{\mathrm{sd}[S(t)]}]$. Observamos que el intervalo de confianza se abre conforme

t crece. Este comportamiento se hereda del modo en que se ha introducido la aleatoriedad en el Modelo Lognormal, es decir, a través del Movimiento Browniano, cuya variabilidad (desviación típica) se propaga en el tiempo t con valor $\sqrt{t}$. Como consecuencia de esta propiedad, el intervalo de confianza que genera el Modelo Lognormal en cada instante t es poco informativo (demasiado amplio) cuando nos alejamos mucho del origen de la serie de datos. Por ello, el Modelo Lognormal suele aplicarse con pocos datos en la serie y se va actualizando la estimación de sus dos parámetros μ y σ incorporando nuevos datos actualizados a la serie de cotizaciones para poder construir intervalos de confianza más ajustados. En cualquier caso, esas variantes del Modelo Lognormal se basan en las ideas desarrolladas en este trabajo.

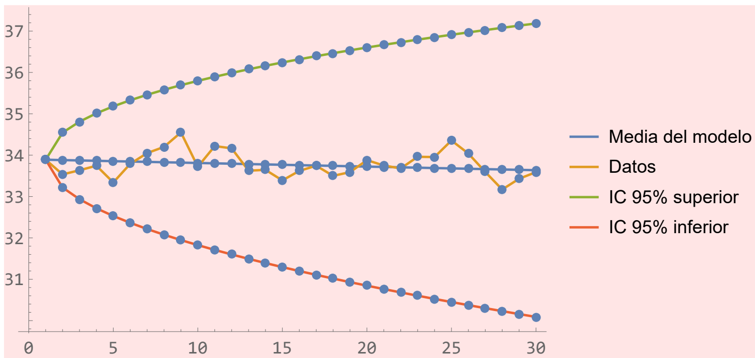

Figura 3: Representación gráfica de los valores reales de cotización de Inditex en el período 5 de julio al 15 de agosto de 2017 junto a las estimaciones puntuales (media del modelo) y probabilísticas (intervalo de confianza al 95 %).

6. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado, desde un punto vista docente, una aproximación práctica al Modelo Lognormal para modelizar la dinámica de activos subyacentes cotizados. Este modelo, a pesar de su sencilla formulación, es muy importante desde el punto de vista formativo, porque es la base para comprender modelos más avanzados donde se incluyen características más ricas como pueden ser por ejemplo los saltos repentinos que puede sufrir la cotización de una acción, y que pueden modelizarse incluyendo en la formulación del modelo un término de salto vía un proceso de Poisson, por ejemplo. En una primera parte del trabajo se ha mostrado una formulación intuitiva del Modelo Lognormal, se ha obtenido su solución (que es un proceso estocástico) y sus principales funciones estadísticas (media y varianza). Posteriormente, se ha explicado una técnica sencilla para estimar los dos parámetros del Modelo Lognormal (la tendencia y la difusión) y se ha mostrado una aplicación del modelo a la modelización de datos reales de un activo del IBEX-35.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto con referencia MTM2017–89664–P del Programa Estatal de Investigación Científica y Técnica de Excelencia del Ministerio de Ciencia e Innovación. El coautor Marc Jornet agradece la beca predoctoral del Programa de Ayudas de Investigación y Desarrollo (PAID) de la Universitat Politècnica de València.

Referencias

Lai, T. L., Xing, H. (2008).
Statistical Models and Methods for Financial Markets.
New York: Springer.

Gourieroux, H. (1997).
ARCH Models and Financial Application.
New York: Springer.

Enders, W. (2014).
Applied Econometric Time Series (4th ed.).
New York: Wiley.

Soo, A. S., Cao, L. (2002).
Modelling and Forecasting Financial Data: Techniques of Nonlinear Dynamics.
New York: Springer.

Plasmans, J. (2006).
Modern Linear and Nonlinear Econometrics.
Netherlands: Springer.

Cliord, S. (2015).
Analyzing Financial Data and Implementing Financial Models Using R.
Switzerland: Springer.

Platen, E., Bruti-Liberati, N. (2010).
Numerical Solution of Stochastic Diferential Equations with Jumps in Finance.
New York: Springer.

Swishchuk, A., Islam, S. (2013).
Random Dynamical Systems in Finance.
New Wales, USA: Chapman and Hall/CRC.

Øksendal, B. (2003).
Stochastic Diferential Equations: An Introduction with Applications.
Berlin, Germany: Springer-Verlag.