

EL DOUGONG COMO ELEMENTO DE LA ARQUITECTURA TRADICIONAL CHINA. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS Y PLANIFICACIÓN DE SU PRODUCCIÓN EN FÁBRICA PARA OPTIMIZAR BENEFICIOS



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
INGENIERÍA DE
EDIFICACIÓN



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

TRABAJO FINAL DE MÁSTER
MÁSTER EN EDIFICACIÓN

TUTOR: DAVID SOLER FERNÁNDEZ

AUTOR: XINYAO YANG

VALENCIA, 2019

Resumen

El DouGong es una estructura de la arquitectura tradicional china consistente en un conjunto de piezas de madera que se encajan entre sí sin adhesivos ni clavos y con doble misión, la de soportar el peso por parte de las columnas y la decorativa. En la antigua China este tipo de estructura estaba reservada para edificios imperiales y templos, pero en la actualidad se usa también para imitar edificios antiguos.

En este Trabajo Final de Máster, tras hacer un estudio exhaustivo de los diversos tipos de DouGong existentes, de sus características técnicas, las dimensiones y funciones de las distintas piezas que los componen y los pasos de su fabricación artesanal, se modeliza matemáticamente mediante Programación Lineal Entera las características de una fábrica de DouGong, con todos sus condicionantes (cartera de pedidos de diferentes tipos de DouGong, mano de obra, materiales y su coste, tiempo de fabricación de cada tipo de DouGong, precios de venta, etc.), con el objeto de maximizar los beneficios obtenidos por la fábrica en un cierto periodo de tiempo.

Tras plantear una formulación teórica de este problema, se aplica esta formulación a un caso de estudio de una fábrica de 100 trabajadores en un periodo de 6 meses con encargos de 12 tipos diferentes de DouGong. La obtención de la solución óptima para este caso de estudio con diversas herramientas informáticas permitirá mostrar la complejidad del problema planteado.

Palabras clave:

- Arquitectura tradicional china.
- DouGong.
- Optimización.
- Programación Lineal Entera.
- Planificación de producción.
- Beneficios.

Abstract

The DouGong is a structure of the traditional Chinese architecture consisting of a set of pieces of wood that fit together without adhesives or nails and with a double mission, to support the weight by the columns and the decorative one. In the ancient China this type of structure was reserved for imperial buildings and temples, but nowadays it is also used to imitate ancient buildings.

In this Final Master's Project, after making an exhaustive study of the various types of existing DouGong, their technical characteristics, the dimensions and functions of the different pieces that compose them, and the steps of their handmade manufacture, the characteristics of a DouGong factory is modeled mathematically by using Integer Linear Programming, with all its constraints (order book of different types of DouGong, labor force, materials and their cost, time of manufacture of each type of DouGong, sale prices, etc.), with the object of maximizing the profits obtained by the factory in a certain period of time.

After proposing a theoretical formulation of this problem, this formulation is applied to a case study of a factory with 100 workers in a period of 6 months and with orders of 12 different types of DouGong. Obtaining the optimal solution to this case study with various computer tools will show the complexity of the problem.

Keywords:

- Traditional Chinese architecture.
- DouGong.
- Optimization.
- Integer Linear Programming.
- Production planning.
- Benefits.

Resum

El DouGong és una estructura de l'arquitectura tradicional xinesa consistent en un conjunt de peces de fusta que s'encaixen entre si sense adhesius ni claus i amb doble missió, la de suportar el pes per part de les columnes i la decorativa. En l'antiga Xina aquest tipus d'estructura estava reservada per a edificis imperials i temples, però en l'actualitat s'usa també per a imitar edificis antics.

En aquest Treball Final de Màster, després de fer un estudi exhaustiu dels diversos tipus de DouGong existents, de les seues característiques tècniques, les dimensions i funcions de les diferents peces que els componen i els passos de la seua fabricació artesanal, es modelitza matemàticament mitjançant Programació Lineal Entera les característiques d'una fàbrica de DouGong, amb tots els seus condicionants (cartera de comandes de diferents tipus de DouGong, mà d'obra, materials i el seu cost, temps de fabricació de cada tipus de DouGong, preus de venda, etc.), a fi de maximitzar els beneficis obtinguts per la fàbrica en un cert període de temps.

Després de plantejar una formulació teòrica d'aquest problema, s'aplica aquesta formulació a un cas d'estudi d'una fàbrica de 100 treballadors en un període de 6 mesos amb encàrrecs de 12 tipus diferents de DouGong. L'obtenció de la solució òptima per a aquest cas d'estudi amb diverses eines informàtiques permetrà mostrar la complexitat del problema plantejat.

Paraules clau:

- Arquitectura tradicional xinesa.
- DouGong.
- Optimització.
- Programació Lineal Entera.
- Planificació de producció.
- Beneficis.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. OBJETIVOS	7 -
CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN	9 -
CAPÍTULO 3. CARACTERÍSTICAS DEL DOUGONG	13 -
3.1. Clasificaciones y funciones del DouGong	13 -
3.2. Composiciones y dimensiones del DouGong	17 -
3.3. Fabricación de DouGong	28 -
CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN DE DOUGONG	39 -
4.1. Nociones generales de Programación Lineal.....	39 -
4.2. Planteamiento del problema	42 -
CAPÍTULO 5. CASO DE ESTUDIO	47 -
5.1. La fábrica y el plan de producción.....	47 -
5.2. Formulación del problema de P.L.E.	63 -
5.3. Resolución.....	65 -
5.3.1. Con Maximize de <i>Mathematica</i>	66 -
5.3.2. Con LinearProgramming de <i>Mathematica</i>	67 -
5.3.3. Con Solver de <i>Excel</i>	69 -
5.4. Resumen comparativo de las tres soluciones	72 -
5.5. Una nota sobre la complejidad del problema planteado	73 -
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES	75 -
CAPÍTULO 7. AUTORÍA DE LAS FIGURAS	77 -
CAPÍTULO 8. REFERENCIAS	83 -

CAPÍTULO 1. OBJETIVOS

El DouGong es una estructura única en la arquitectura china. Esta estructura fue ampliamente utilizada en la antigua China durante el período llamado Primaveras y Otoños (770-476 a. C.), consistiendo en un complejo conjunto de piezas de madera intersecadas, especialmente en los periodos Tang (618 - 907) y Song (960 - 1279). Las piezas se encajan sin adhesivos ni clavos, gracias a un preciso trabajo de carpintería artesanal.

El DouGong se coloca encima de las columnas para soportar a las vigas y normalmente cada una de sus piezas cumple su función en la estructura. Hay muchos tipos diferentes de DouGong, según el tipo de edificio al que se destina o la parte del edificio en que se coloca. Cumple una doble función, la de soporte del peso por parte de las columnas, incluso resistiendo a movimientos sísmicos, y la decorativa. De hecho, esta última función hace que el DouGong sea característico de edificios imperiales, templos o de edificios pertenecientes a personas de alto grado social en la antigua China.

Como se ha dicho antes, el DouGong se fabrica en madera, de forma 100% artesanal, y dada su complejidad, la producción de una única unidad suele equivaler incluso a la mano de obra de un obrero durante dos o tres semanas.

El objetivo de este Trabajo Final de Máster es doble. Por un lado, recopilar información sobre la historia, funcionalidad, tipos y características técnicas del DouGong, haciendo especial hincapié en dos aspectos fundamentales: las diferentes piezas que lo componen y sus funciones y dimensiones dentro del DouGong, y el cómo se fabrica artesanalmente un DouGong (el proceso y las herramientas utilizadas). Estos dos aspectos fundamentales, piezas y fabricación, serán el preludeo del segundo objetivo

de este TFM, que es el más importante, y que consiste en simular las características de una fábrica de DouGong en China, planificando la producción de diversos tipos de DouGong en un periodo determinado de tiempo, en función de los pedidos solicitados y de otros condicionantes, como número de trabajadores, material disponible, costes laborales y de los materiales, tiempos de ejecución, etc., de manera que se maximice el beneficio de la venta de esa producción. Para ello, se modelizará este problema real en su forma general como un problema matemático de Programación Lineal Entera (PLE), particularizando por último a un caso concreto con datos reales, de un supuesto de fabricación de 15 tipos de DouGong en un plazo de 6 meses. Para la obtención de la solución óptima en este caso práctico, se utilizarán dos programas informáticos al alcance de un alumno de máster en la UPV, *Mathematica* y *Excel*, para comparar resultados y tiempos de ejecución. El tiempo de ejecución requerido por el ordenador para la resolución óptima del problema aquí planteado dará muestra de su complejidad y de la práctica imposibilidad de abordarlo sin el conocimiento de PLE y el uso de programas de ordenador específicos para esta programación.

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN

Los DouGong son unas estructuras únicas de la arquitectura tradicional china. Situados en la intersección de una columna y una viga y con diversas funciones, entre las que destacan soportar el peso por parte de las columnas y la decorativa, eran ampliamente utilizados en la antigua China durante el período llamado Primavera y Otoños (770-476 a. C.) y desarrollaron un complejo conjunto de piezas intersecadas especialmente en los periodos Tang (618 - 907) y Song (960 - 1279). Las piezas se encajan sin adhesivos ni clavos, gracias a un preciso trabajo de carpintería artesanal. En la actualidad también se usan en edificios para imitar los edificios antiguos y los edificios icónicos. En la antigua China, el uso de DouGong estaba reservado solo para los edificios imperiales y los templos importantes. La Figura 1 muestra un ejemplo de DouGong pintado, aunque a lo largo de este trabajo se mostrarán otros tipos de DouGong. A través de la Figura 1 se puede comprobar la dificultad y laboriosidad de la fabricación de un DouGong, 100% artesanal como ya se indicó.

El proceso evolutivo del DouGong se puede dividir en tres fases. La primera fase va de la dinastía XI ZHOU (c.1046 - 771 aC) a la dinastía NAN BEI (420-589). La segunda fase va de la dinastía TANG (618 - 907) a la dinastía YUAN (1271-1368). Por último, la tercera fase se encuentra entre las dinastías MING (1368 – 1644) y QING (1616 - 1912). A través del desarrollo de la historia, el uso de DouGong ha evolucionado mucho, y aparecen muchos tipos diferentes de DouGong.



Figura 1. Un Jiaoke DouGong.

El Capítulo 3 permitirá familiarizarse con el DouGong, centrándose en el estudio de sus características, técnicas principalmente. Por un lado se describirán diversos tipos de DouGong en función de su uso y su ubicación en el edificio. Posteriormente, se analizará exhaustivamente la composición de un DouGong. Cada pieza que lo compone tiene una misión específica y las dimensiones de las mismas están interrelacionadas. A título de ejemplo se mostrará el despiece de dos tipos de DouGong habituales: un Pingshenke DouGong y un Zhutouke DouGong. Por último, en este capítulo se mostrarán los diversos pasos en la fabricación artesanal de un DouGong y las herramientas usadas en cada uno de esos pasos, pues como se ha dicho en el capítulo de objetivos, el principal objetivo de este TFM es aplicar la herramienta matemática conocida como PLE para modelizar un problema real de fabricación de DouGong, siendo su objetivo el maximizar los beneficios obtenidos por la fábrica en un periodo de tiempo, considerando los diversos condicionantes de esta fabricación:

cartera de pedidos de diferentes tipos de DouGong, mano de obra, materiales y su coste, tiempo de fabricación de cada tipo de DouGong, etc.

Para este propósito, el Capítulo 4 comenzará con una introducción a lo que significa un PLE, que desde el punto de vista de complejidad algorítmica es un problema muy difícil, siendo imprevisible el tiempo de resolución del mismo, incluso siglos para problemas grandes. Los diversos paquetes informáticos existentes actualmente en el mercado para la resolución de este problema, así como sus costes, darán cuenta de la importancia de la PLE para resolver problemas en la práctica totalidad de los campos de la ciencia y la tecnología. Posteriormente, y como parte teórica de este TFM se formulará como PLE el problema general antes mencionado de optimización de beneficios en una fábrica de DouGong. Cabe mencionar que se han introducido los condicionantes considerados como más importantes o usuales, pero la formulación obtenida en este capítulo no está cerrada, sino que permite incorporar cualquier otro tipo de restricciones (siempre que sea lineal) que se pueda considerar en una fábrica concreta, de forma que se ajuste el modelo matemático lo más posible a la realidad.

En el Capítulo 5 se aplicará esta formulación general a un caso concreto, que simula una fábrica de DouGong. Concretamente se considerará un periodo de fabricación de 6 meses y se considerarán 15 tipos de DouGong. Es importante destacar que, aunque la fábrica es simulada y tiene por objetivo ver cómo se aplica la formulación teórica del capítulo anterior, todos los datos relevantes son reales, resultado de una búsqueda minuciosa de información (volumetría, precio de la madera, de la mano de obra, tiempo de fabricación de cada tipo de DouGong, etc., etc.).

Puesto que la Universitat Politècnica de València no dispone de licencias para alumnos de los paquetes informáticos específicos de resolución de PLE citados en el Capítulo 4, usaremos dos herramientas, que para problemas de tamaño relativamente pequeño (existen problemas de PLE reales con miles de restricciones y miles de variables) son útiles: *Mathematica* y el complemento *Solver* de *Excel*. Será interesante comprobar los cientos de billones de operaciones que deberá realizar el ordenador para obtener

la solución óptima, lo que demostrará la complejidad del problema de optimización resuelto en este TFM.

Finalmente, en el Capítulo 6 se darán algunas conclusiones sobre este trabajo.

CAPÍTULO 3. CARACTERÍSTICAS DEL DOUGONG

3.1. Clasificaciones y funciones del DouGong

Por un lado, los DouGong se clasifican por su ubicación en el edificio. Así, tenemos por ejemplo los Neiyang DouGong (interior del edificio) y Waiyang DouGong (exterior del edificio).

Las Figuras 2 y 3 muestran dos tipos de Neiyang DouGong : Pinzike DouGong (Figura 2) y Gejia DouGong (Figura 3).

La Figura 4 muestra tres tipos de Waiyang DouGong en una misma construcción: Zhutouke DouGong, Jiaoke DouGong y Pingshenke DouGong. La estructura de Jiaoke DouGong es mucho más compleja que la de los otros dos.

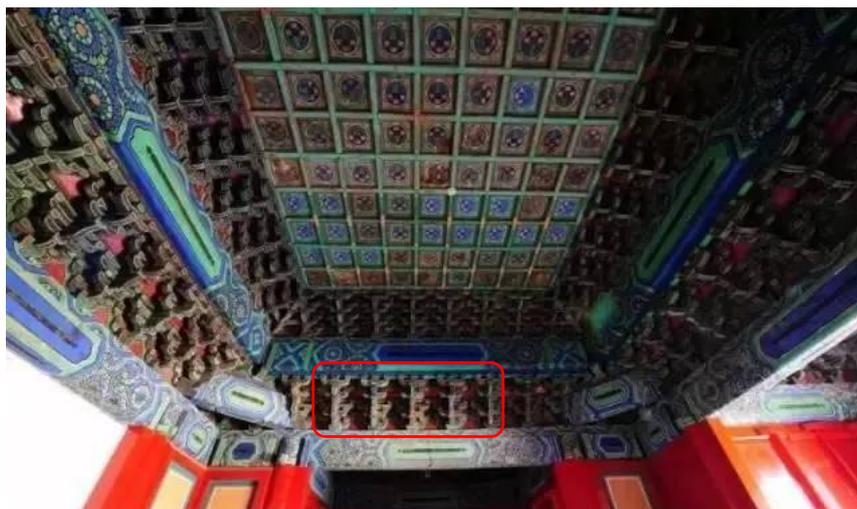


Figura 2. Pinzike DouGong.

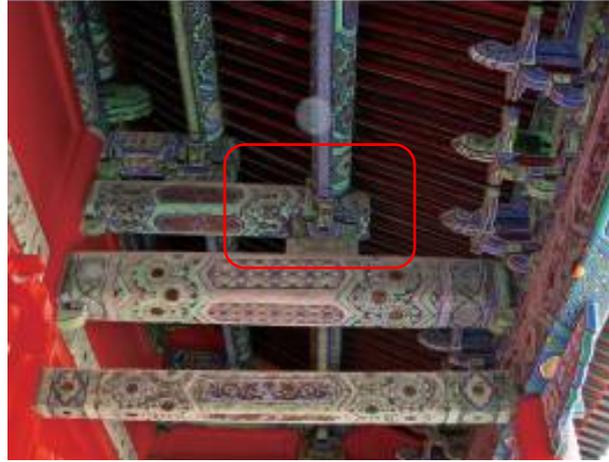
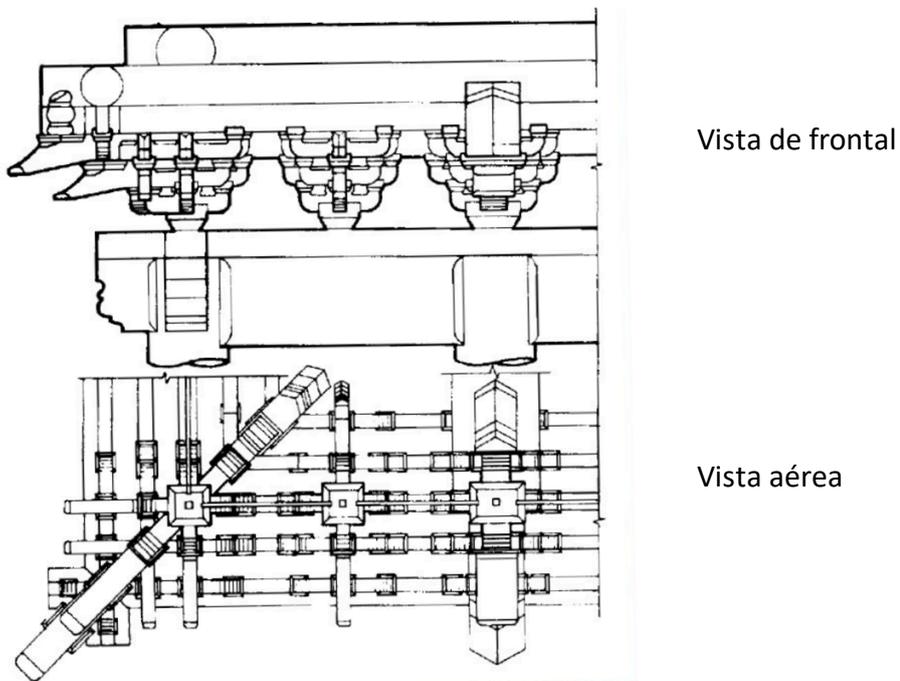


Figura 3. Gejia DouGong.



Vista de frontal

Vista aérea

Figura 4. De izquierda a derecha : Jiaoke DouGong, Pingshenke DouGong y Zhutouke DouGong.

Por otro lado, se clasifican por el tipo de edificio. Así, tenemos por ejemplo los Angqiao DouGong (Figura 5), Liujin Dougong (Figura 6 y Figura 7), Pingzuo DouGong (Figura 8) y Pailou DouGong (Figura 9), Zaojing DouGong (Figura 10), etc. A continuación se exponen los tipos de edificios en que son usados como norma general:

- Los Angqiao DouGong normalmente se usan para exteriores de los palacios y los templos.
- Los Liujin DouGong también se usan en los palacios y los templos, pero son más largos que la mayoría del resto de DouGong.
- Los Pingzuo DouGong se usa en los edificios de Louge, que son edificios de varios pisos en la arquitectura china antigua.
- Los Pailou DouGong para los Pailou (un tipo de la arquitectura tradicional china).
- Los Zaojing DouGong se usan para los techos de los edificios de altares y templos.



Figura 5. Angqiao DouGong.



Figura 6. Liujin DouGong.



Figura 7. Liujin DouGong en un edificio.



Figura 8. Pingzuo DouGong.



Figura 9. Pailou DouGong.



Figura 10. Zaojing Dougong.

Los DouGong tiene diferentes funciones:

1. Resistir el peso. Está entre la columna y la viga. La carga transmitida desde el techo y el bastidor superior se transmite a la columna a través del DouGong y luego se transmite a la cimentación a través de la columna.
2. Resistencia al terremoto. La estructura de DouGong es un tipo de SunMao: puede consumir energía de los terremotos.
3. Decorativa. Está exquisitamente construido y tiene una forma hermosa, como un bonsái, una cesta de flores, es un buen componente decorativo.
4. Aumentar la distancia. Se puede aumentar la distancia de cobertizo de un edificio, hacer el edificio más bello y espectacular.
5. Símbolo de grado social. En la antigua China, el DouGong solo se usaba en los edificios imperiales y los templos importantes.

3.2. Composiciones y dimensiones del DouGong

Como ya se dijo en el capítulo anterior, el DouGong se sitúa en la intersección de una columna y una viga, y está compuesto por diferentes piezas que se ensamblan entre ellas cada una con su función específica: Dou, Sheng, Gong, Qiao, Ang y DaDou. Las Figuras 11 y 12 muestran estas piezas y su situación dentro de dos vistas de un mismo DouGong.

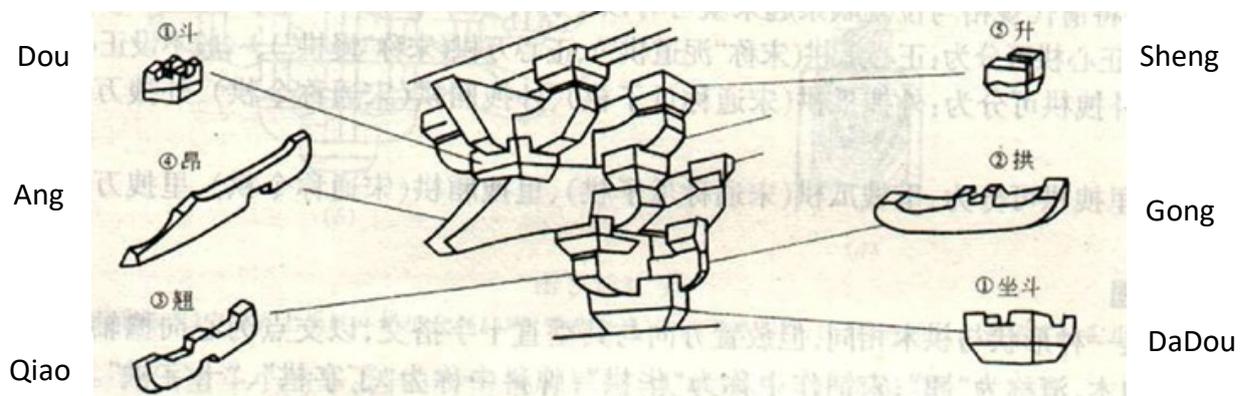


Figura 11. Vista 1, piezas específicas de Pingshenke DouGong.

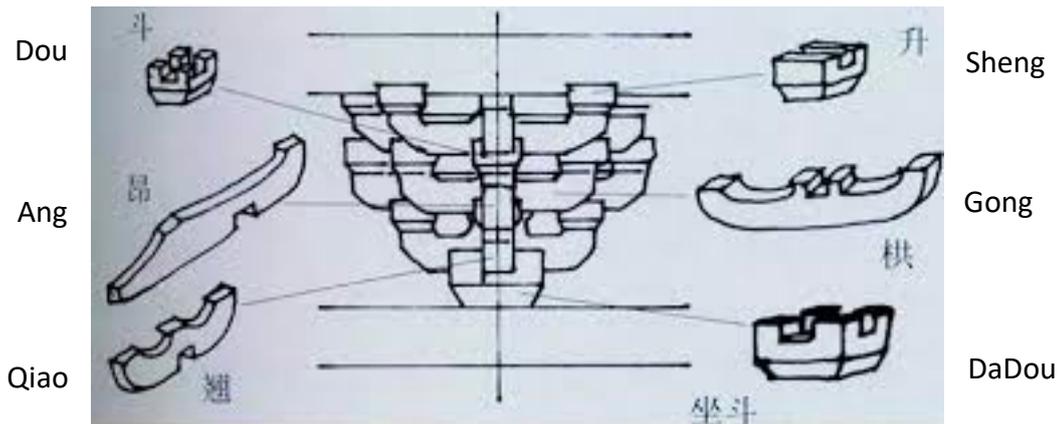


Figura 12. Vista 2, piezas específicas de Pingshenke DouGong.

Existen ciertas relaciones dimensionales de las diferentes piezas. La dimensión de un DouGong depende del DouKou, que es la distancia dentro del DaDou, marcada en la Figura 13, la cual muestra tres vistas de un DaDou. La primera pieza, desde la columna, será siempre el DaDou.

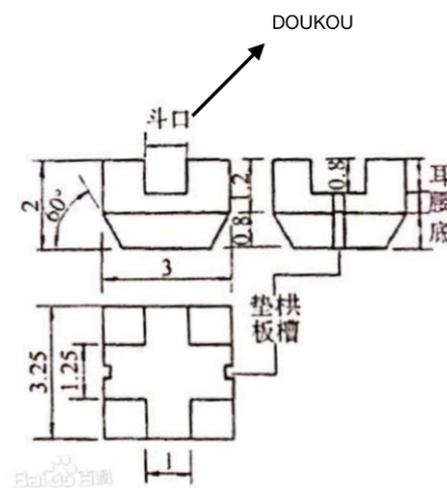


Figura 13. Tres vistas de un DaDou.

En la dinastía Qing, para controlar la magnitud de los edificios, se estableció un reglamento para la longitud de un DouKou. Existen 11 longitudes distintas de DouKou, siendo la unidad de medida un Cun, que equivale aproximadamente a 3.2cm. Los 11 tipos se muestran en la Figura 14.

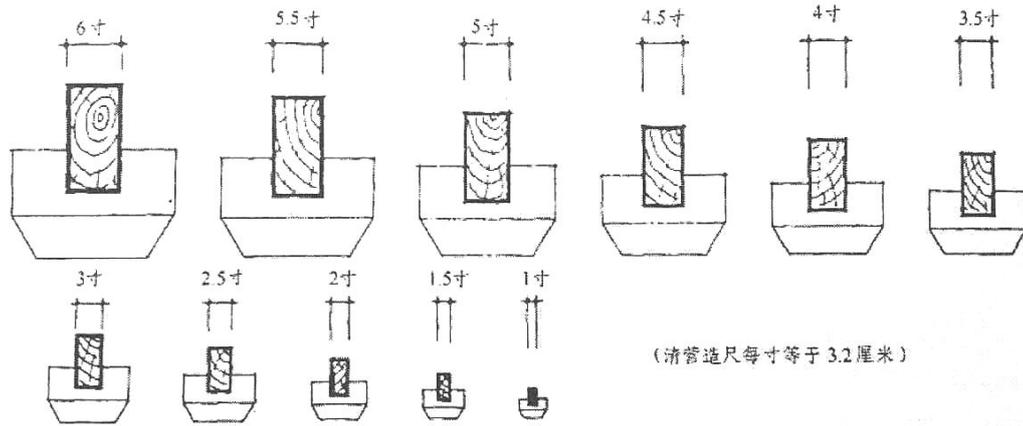


Figura 14. 11 tipos de DouKou: 6 cun, 5.5 cun, 5 cun, 4.5 cun, 4 cun, 3.5 cun, 3 cun, 2.5 cun, 2 cun, 1.5 cun y 1 cun.

Un DouKou determina la magnitud del total del edificio. Tanto el largo como el ancho de un DaDou es el triple de un DouKou. El alto de un DaDou es el doble de un DouKou. Por ejemplo: una pieza se llama Zhengxinguagong (Figura 15), el largo es 6.2 veces de un DouKou, el ancho es 1.25 veces de un DouKou, y el alto es 2 veces de un DouKou [\[1\]](#).



Figura 15. Zhengxinguagong.

En el mismo DouGong, la distancia de cada Dou tiene relación proporcional (ver Figura 16 realizada con AutoCAD, en la que se muestra un tipo de Zhutouke DouGong). Notar que en este DouGong un DouKou equivale a 100mm.

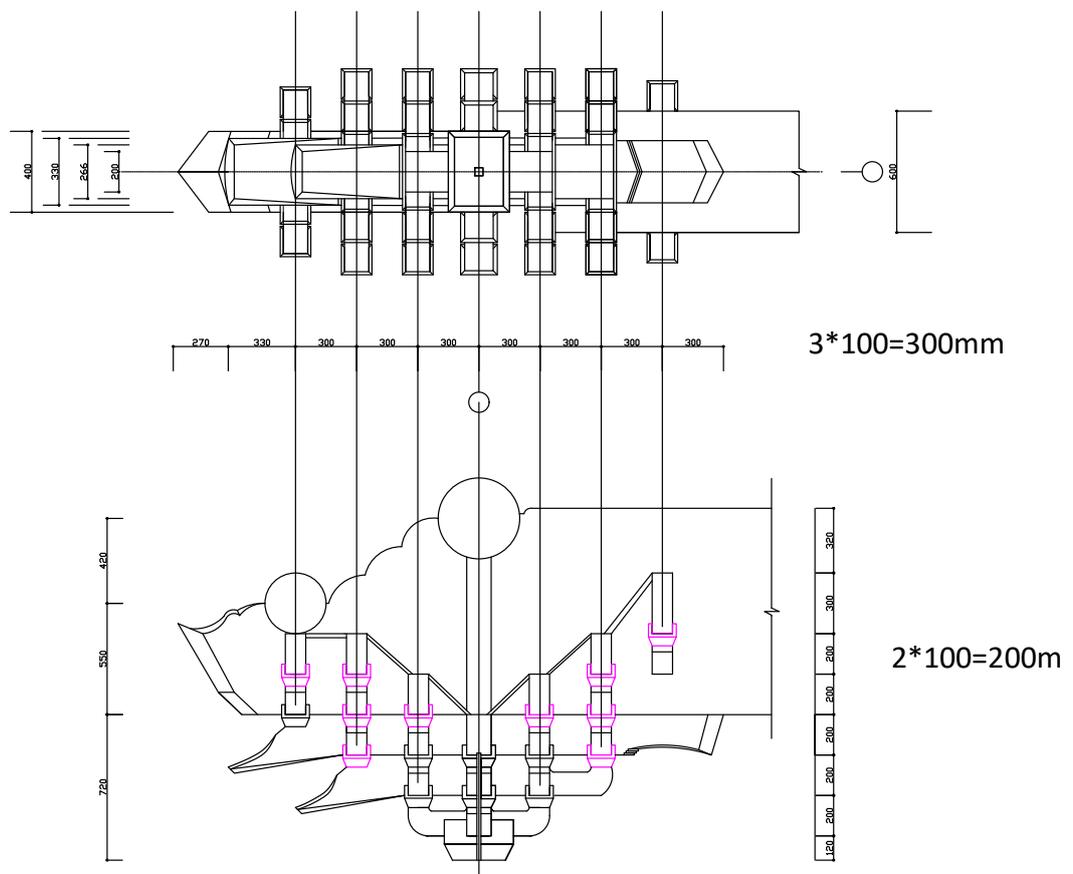
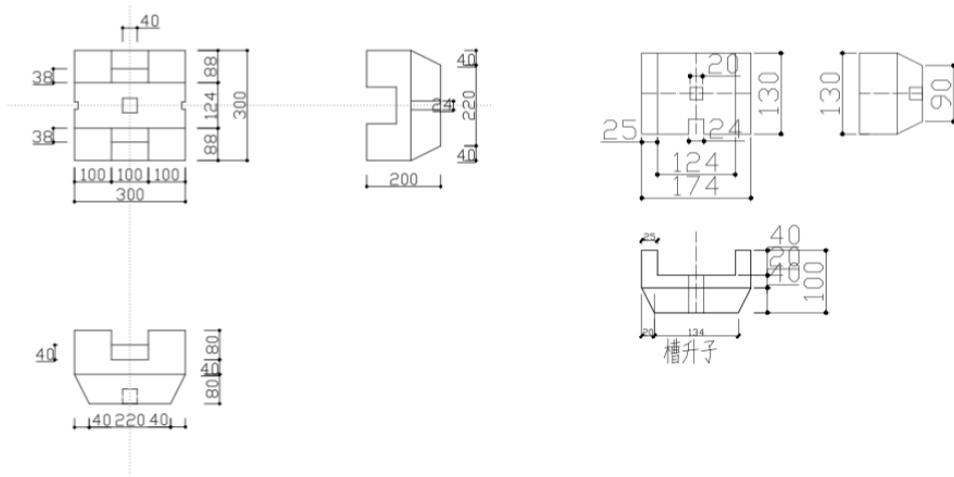


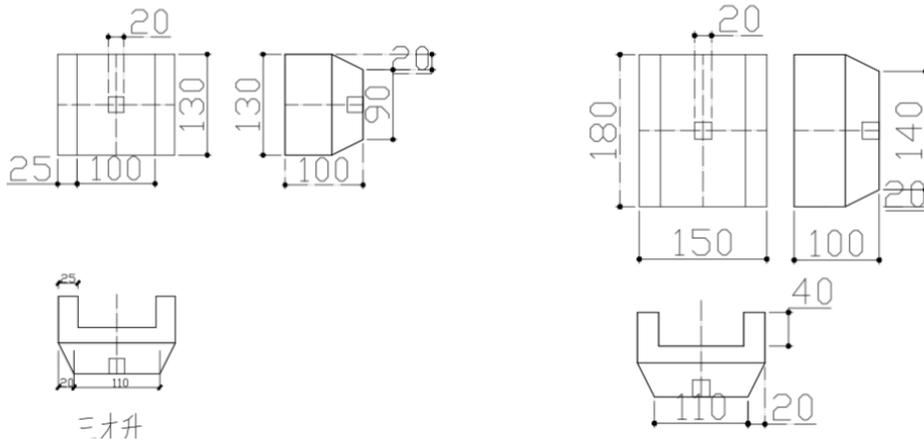
Figura 16. Vistas aérea y lateral de un DouGong.

A continuación se mostrarán dos tipos de DouGong (Pingshenke DouGong en primer lugar y Zhutouke DouGong en segundo lugar), con tanto sus vista aéreas como laterales y las vistas y dimensiones de todas las piezas que lo componen. Para no abusar de numeración de figuras, se incluirá bajo una única figura todos los dibujos asociados a un tipo de DouGong. Notar que en ambos DouGong un DouKou equivale también a 100mm.

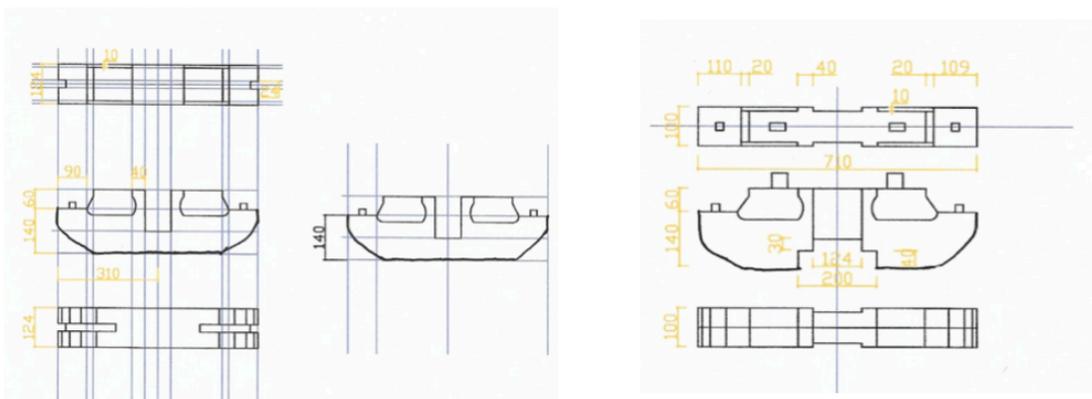
Piezas:



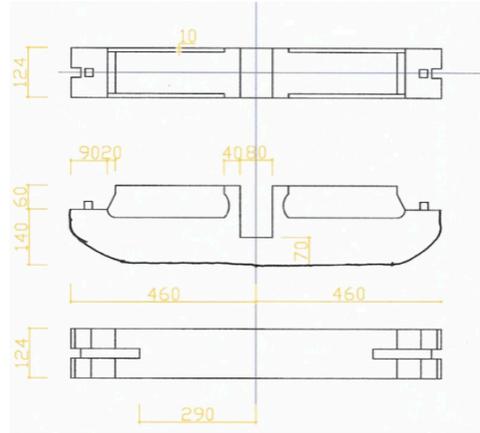
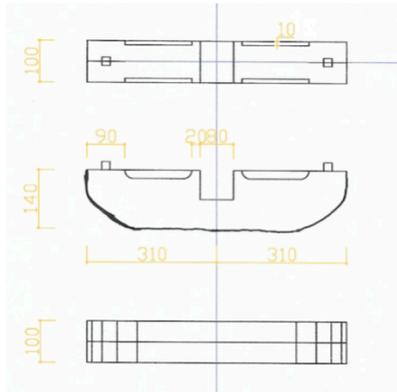
DaDou y Caoshengzi



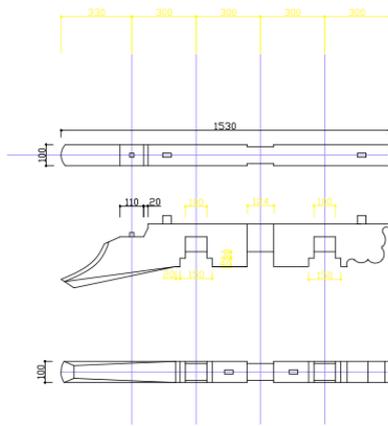
Sancaisheng y Shibadou



Zhengxinguagong y Danqiao



Dancaiguagong y Zhengxinwangong

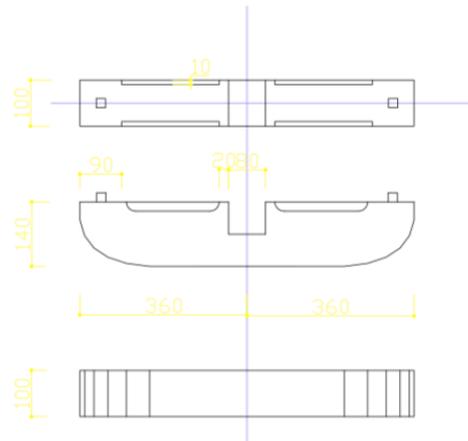


平面

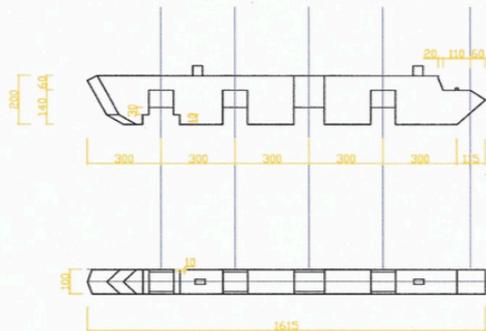
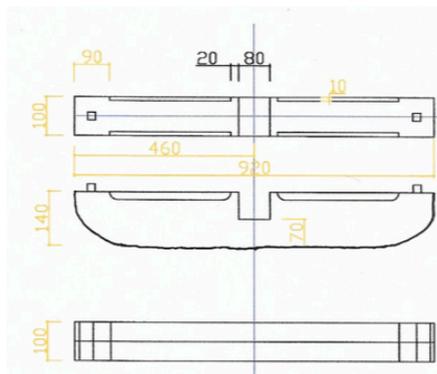
立面

仰视

单昂后带菊花头



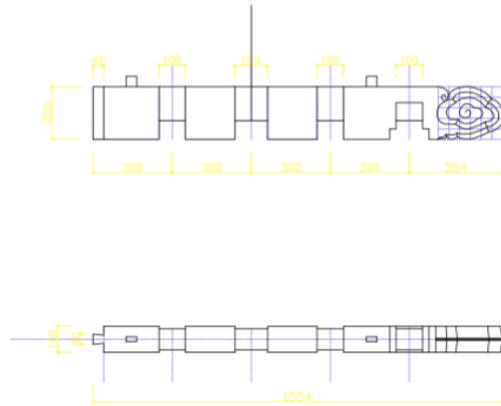
Dananghoudaijuhuatou y Xianggong



立面

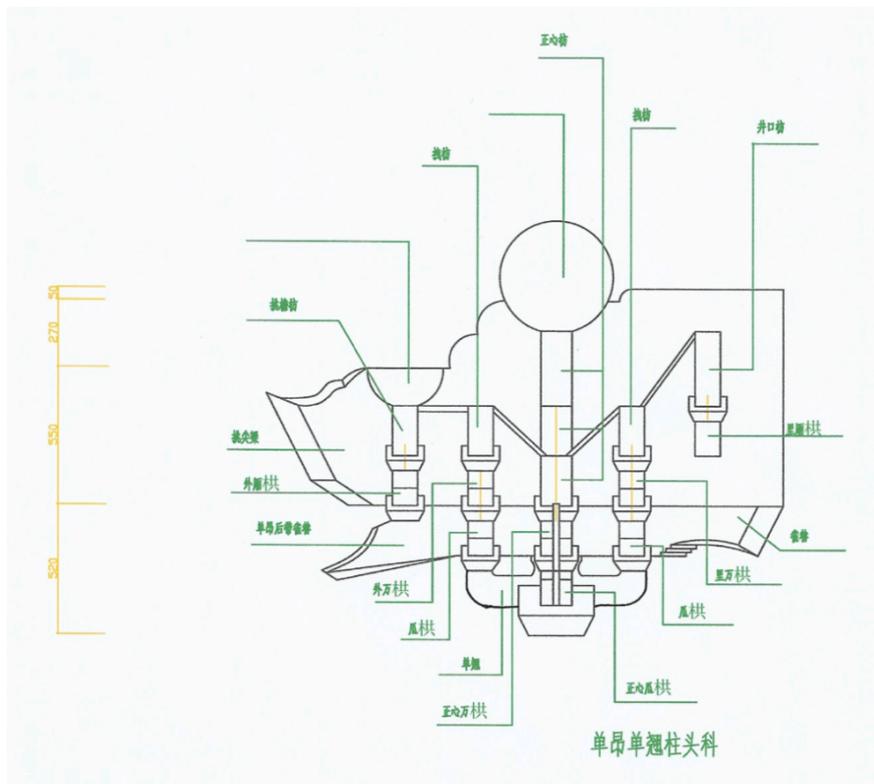
仰视

Dancai wangong y Mazhatouhoudailiufentou

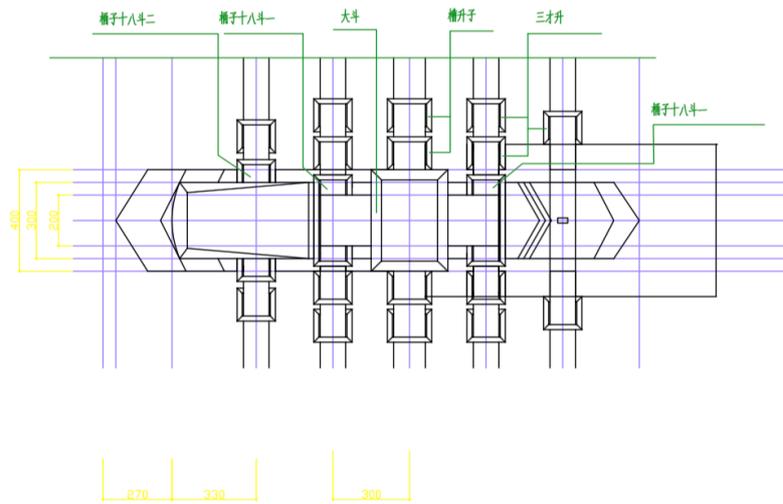


Chengtoumuhoudaimayetou

Figura 17. Vista lateral, aérea y despiece de un Pingshenke DouGong.

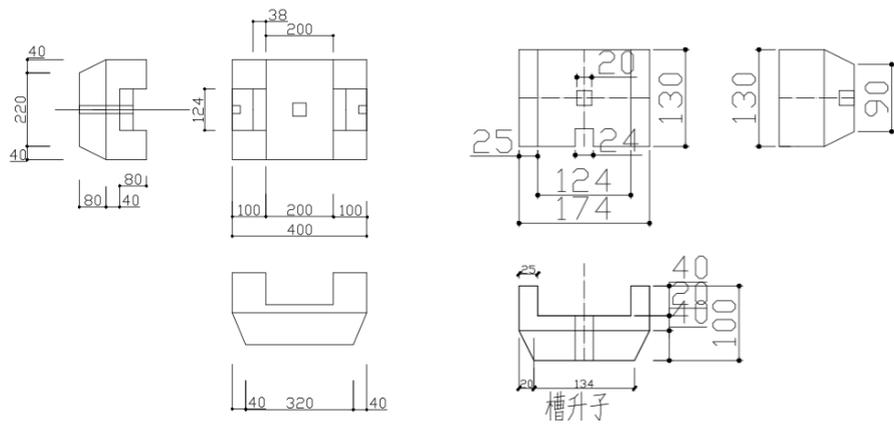


Vista lateral

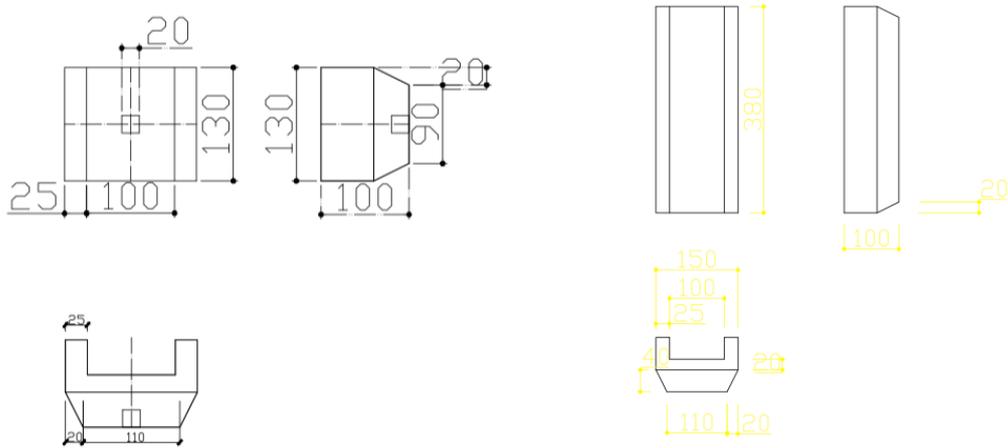


Vista aérea

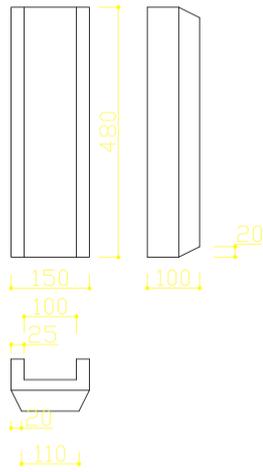
Piezas:



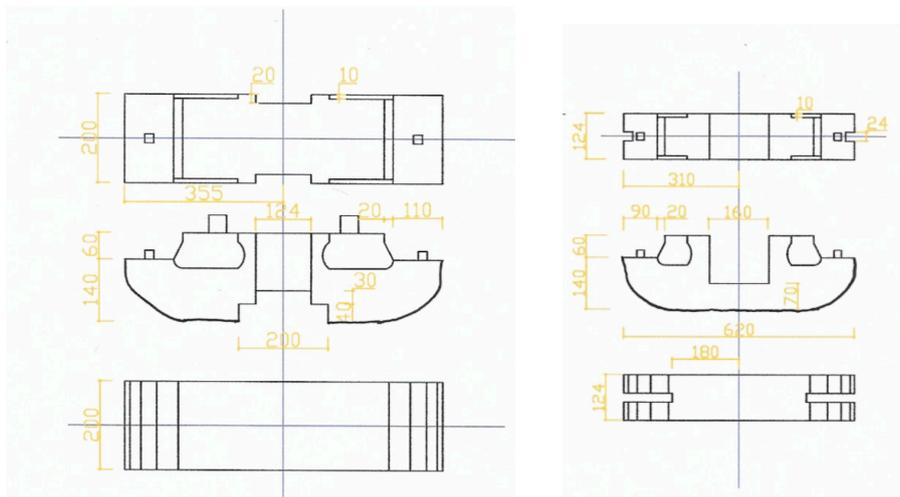
Dadou y Caoshengzi



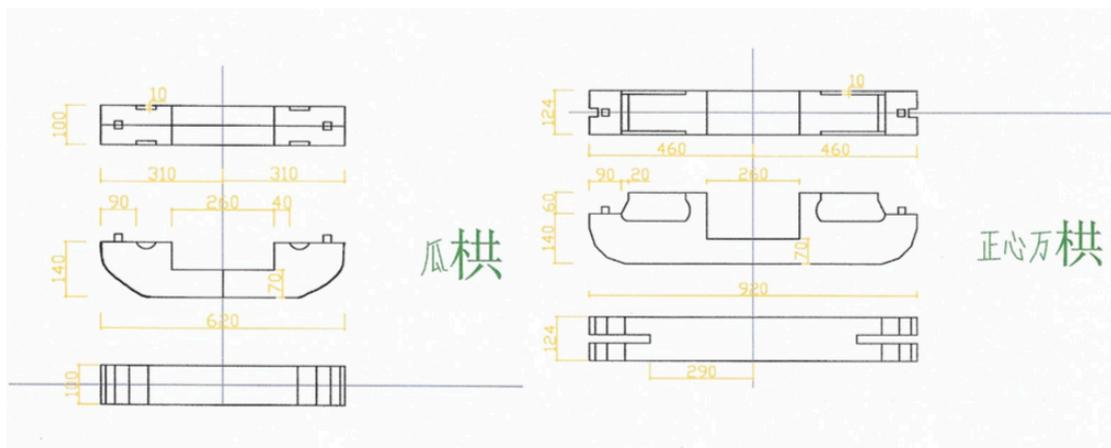
Sancaisheng y Tongzishibadou 1



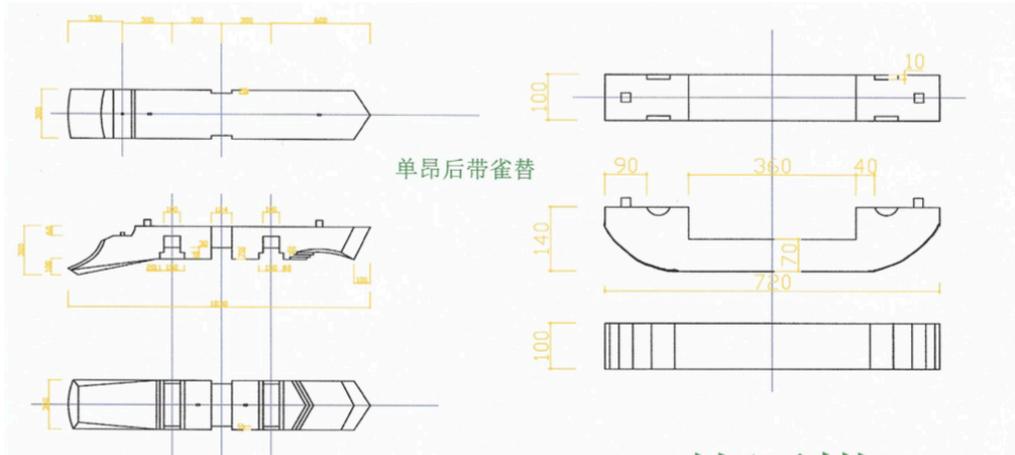
Tongzishibadou 2



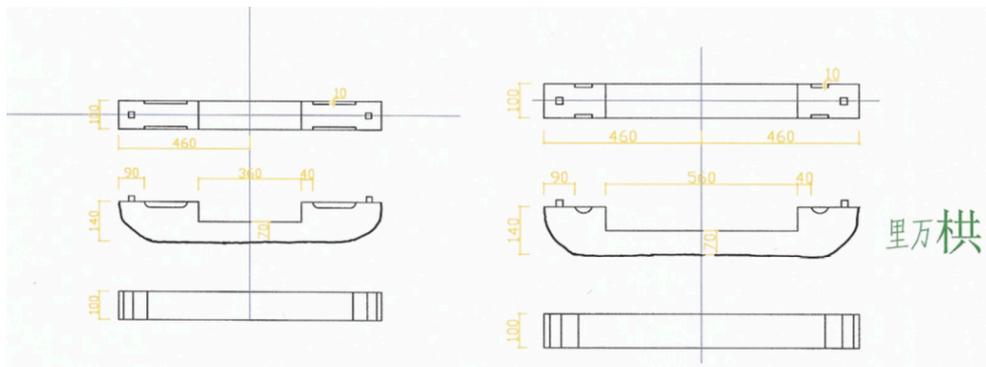
Danqiao y Zhengxingugong



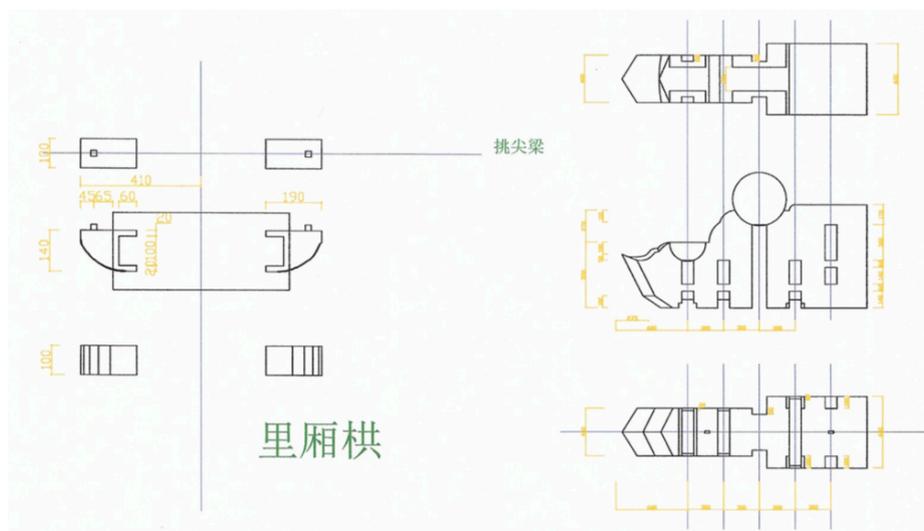
Guagong y Zhengxinwangong



Dananghoudaiqueti y Waixiangong



Waiwangong y Liwangong



Lixiangong y Tiaojianliang

Figura 18. Vista lateral, aérea y despiece de un Zhutouke DouGong.

Notar que la última pieza del Zhutouke DouGong, que se llama Tiaojianliang, es un tipo de viga que forma parte del DouGong (ver Figura 19).

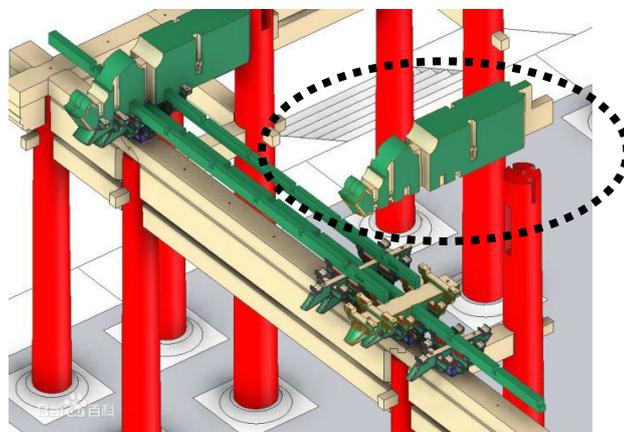


Figura 19. Modelo 3D de Tiaojianliang.

3.3. Fabricación de DouGong

Como se comentó al introducir los objetivos, la fabricación de un DouGong, y por consiguiente de todas las piezas que lo componen, es 100% artesanal, con lo que se necesitan muchas herramientas típicas de carpintería manual. Incluye hacha específica (Figura 20), diferentes tipos de cepillo, cada uno para unas determinadas funciones (Figuras 21, 22, 23, 24 y 25), MoDou (Figura 26), que sirve para trazar líneas, diferentes tipos de regla (Figuras 27 y 28), diferentes tipos de cincel (Figuras 29, 30, 31 y 32), sierra para madera (Figura 33), reglas especiales (Figuras 34 y 35), martillo (Figura 36), etc.



Figura 20. Hacha específica.



Figura 21. Cepillo largo.



Figura 22. Cepillo Gun.



Figura 23. Cepillo YiZi.



Figura 24. Cepillo Mujiaoxian.



Figura 25. Cepillo Guang.



Figura 26. MoDou.



Figura 27. Cinta métrica y regla cuadrada.



Figura 28. Regla triangular.



Figura 29. Cincel circular.



Figura 30. Cincel Cun.



Figura 31. Cincel oblicuo.



Figura 32. Cincel 2-5 Fen.



Figura 33. Sierra para madera.



Figura 34. Regla especial, QuChi.



Figura 35. Regla especial, HudieChi.



Figura 36. Martillo.

Los pasos del fabricado normalmente son:

- 1) Para diferentes piezas, dibujar las marcas de la medida especificada en las diferentes materias primas (Figuras 37 y 38).



Figura 37. Poner marcas con MoDou.



Figura 38. Poner marcas con regla y lápiz.

- 2) Utilizar herramientas profesionales para eliminar los excesos de las materias primas de cada pieza. El uso de cepillo (Figuras 39, 40, 41 y 42). El uso de hacha y cincel (Figuras 43, 44 y 45). Esculpir las piezas (Figuras 46, 47, 48 y 49). Hacerlo según sea necesario.



Figura 39. El uso de cepillo.



Figura 40. Uso de cepillo, Modou y cinta métrica.



Figura 41. El uso de cepillo.



Figura 42. El uso de cepillo.



Figura 43. El uso de hacha y cincel.



Figura 44. El uso de hacha y cincel.



Figura 45. El uso de cincel.



Figura 46. Esculpir.



Figura 47. Esculpir.



Figura 48. Esculpir.



Figura 49. Esculpir.

- 3) Montar las piezas de un DouGong para examinar los tamaños de cada uno (Figuras 50, 51, 52, 53 y 54).



Figura 50. Montar y examinar.



Figura 51. Montar y examinar.



Figura 52. Montar y examinar.



Figura 53. Montar y examinar.



Figura 54. Montar y examinar.

- 4) Realizar tratamiento de humedad y evitar las plagas del gusano de la madera (tratamiento químico).
- 5) Ponerlo en el almacén y guardarlo (Figuras 55, 56, 57 y 58).



Figura 55. Ponerlo en almacén.



Figura 56. Ponerlo en almacén.



Figura 57. Ponerlo en almacén.



Figura 58. Ponerlo en almacén.

Las Figuras 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66 y 67 muestran diferentes tipos de DouGong en madera, ya montados, antes de ser pintados y colocados en su lugar en el edificio.

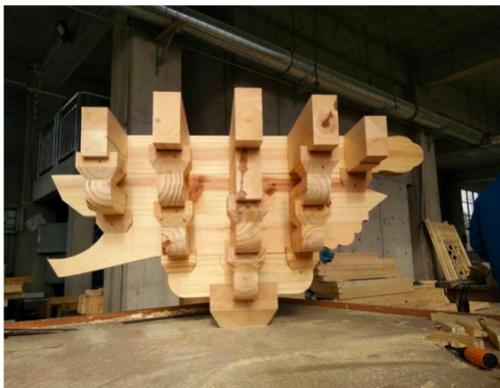


Figura 59. Un tipo de Pingshenke
DouGong.



Figura 60. Un tipo de Pingshenke
DouGong.



Figura 61. Un tipo de Pinzike
DouGong.



Figura 62. Un tipo de Pingshenke
DouGong.



Figura 63. Vista aérea de Jiaoke
DouGong.



Figura 64. Vista lateral de Jiaoke
DouGong.



Figura 65. Un tipo de Pingshenke
DouGong.



Figura 66. Un tipo de Jiaoke
DouGong.

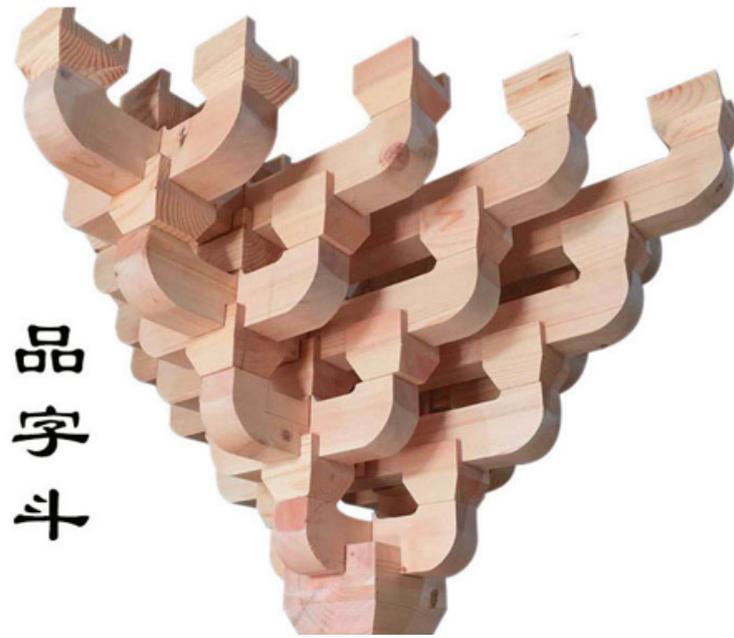


Figura 67. Un tipo de Pinzike DouGong.

CAPÍTULO 4.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN DE DOUGONG

En este capítulo se planteará y resolverá un problema general de optimización de beneficios en una fábrica de DouGong, teniendo en cuenta todos los condicionantes que envuelven este problema (pedidos, mano de obra, tiempos de fabricación, costes de material y de la mano de obra, previsiones de venta, etc.). Para ello, este problema se modelizará como un problema de PLE. Será necesario pues, en primer lugar, introducir unas nociones básicas sobre PLE, su definición, y sin entrar en detalles matemáticos sobre técnicas de resolución, hablaremos sobre la forma de resolverlo con ordenador (paquetes informáticos existentes para tal fin).

4.1. Nociones generales de Programación Lineal

Un problema de Programación Lineal (PL) [2-4] consiste en buscar un óptimo (máximo o mínimo) de una *función objetivo*, que es una función lineal de n variables x_j relacionadas entre sí por un conjunto de m *restricciones*, que son ecuaciones y/o inecuaciones lineales, donde todos los coeficientes, tanto de las restricciones como de la función objetivo son números reales.

Suponiendo $J=\{1,2,\dots,n\}$ $J=J_1\cup J_2\cup J_3$ con $J_i\cap J_j=\emptyset$ si $i\neq j$ y
 $I=\{1,2,\dots,m\}$ $I=I_1\cup I_2\cup I_3$ con $I_i\cap I_j=\emptyset$ si $i\neq j$.

Un problema de PL puede expresarse como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min (o Max)} \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{Sujeto a :} \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i \in I_1 \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in I_2 \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i \in I_3 \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \in J_1, x_j \leq 0 \quad \forall j \in J_2, x_j \text{ no restringida } \forall j \in J_3 \end{array} \right.$$

Donde x_j ($j=1, \dots, n$) representan las variables del problema, y a_{ij}, c_j, b_i ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) son números reales dados.

La forma anterior puede transformarse a la conocida como forma matricial de un PL haciendo un uso adecuado de cambios de variable y otras transformaciones matemáticas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } cx \\ \text{sujeto a :} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{donde } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad c = (c_1, \dots, c_n), \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{y} \quad 0 = 0_n.$$

Notar que en esta forma matricial la función objetivo siempre se minimiza.

La Programación Lineal ha demostrado su eficiencia para modelar matemáticamente muchos problemas del mundo real que apuntan a la maximización o minimización de una función determinada (función objetivo) que depende linealmente de un conjunto de variables relacionadas entre sí a través de un conjunto de restricciones lineales. Es bien sabido que un problema de PL tiene una complejidad polinomial cuando todas las variables son reales y continuas. Sin embargo, si todas las variables deben ser enteras (PLE) o es un caso mixto (PLM) donde existen variables tanto continuas como enteras, el problema de optimización tiene una complejidad exponencial. En los dos

últimos casos, se han desarrollado varios procedimientos iterativos para obtener la solución óptima, aunque, por supuesto, no pueden garantizar que la solución óptima se encuentre en todos los casos dentro de un tiempo razonable. Desde un punto de vista teórico se podría tardar incluso siglos o milenios en resolver un problema de PLE o PLM en un potente ordenador. Sherali y Driscoll [5] proporcionan una interesante discusión sobre la evolución de la técnica y la filosofía que conduce al estado actual de la técnica para modelizar y resolver problemas de PLE.

En problemas reales de optimización es normal considerar las variables enteras, sobre todo si se trata de un proceso de fabricación de determinados productos, para los que no tiene sentido fabricar trozos de ese producto. El problema que se plantea en este TFM será pues un problema de PLE, y por tanto de complejidad exponencial, que en su forma matricial se representa así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } cx \\ \text{s.a:} \\ Ax = b \\ x \geq 0, x \in Z^n \end{array} \right.$$

Se insiste en la forma matricial ya que será la forma de introducir datos en algunos de los programas elegidos para la resolución del caso de estudio.

En el mercado actual existen muchos paquetes informáticos para resolver problemas de PL, PLE y PLM, algunos muy potentes, capaces de resolver problemas con miles de restricciones y miles de variables, pero claro está, con licencias muy caras. Por ejemplo, el más utilizado por la comunidad científica especializada en Programación Lineal es **IBM ILOG CPLEX Optimization Studio** [6], cuyo precio, en la versión más completa es de casi 8000\$ USA mensuales. Otros paquetes informáticos bastante conocidos son: **LINDO** [7], **LINGO** [8] y **FICO XPRESS Optimization** [9]. En todos ellos se proporciona su página web, donde se explican los detalles de estos paquetes. Tanto LINDO como LINGO son confeccionados por la misma empresa (LINDO SYSTEMS INC.), con la diferencia que LINGO es más potente, en el sentido de resolver otros tipos de problemas de optimización, no solo lineales. Notar por último que en todos los casos se ofrecen versiones de prueba con un periodo de duración corta (un mes por lo

general), y como máximo con capacidad de resolución de problemas con unos cientos de variables y restricciones.

Por lo que sabemos, la Universitat Politècnica de València no tiene licencia de Campus de ninguno de estos programas, por lo que en este trabajo usaremos para la resolución del problema de PLE planteado dos herramientas: el complemento **SOLVER** de Excel [10], cuya ventaja radica en que la gran mayoría de los usuarios de ordenador tienen Excel instalado en su ordenador, pero su desventaja radica en que como máximo es capaz de resolver problemas de hasta 80 restricciones y 200 variables (suficiente para nuestro caso de estudio pero insuficiente para problemas más complejos), y el paquete de cálculo simbólico **MATHEMATICA** [11] para el que la Universitat Politècnica de València sí tiene licencia de Campus. No hemos sido capaces de encontrar la información relativa al máximo número de restricciones y variables que soporta Mathematica para un PLE, aunque en su explicación alude a “problemas de grandes dimensiones” y habla de un ejemplo con 200 variables.

4.2. Planteamiento del problema

Sea n el número de tipos diferentes de DouGong que fabrica la empresa. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se denota por:

- x_i = Número de DouGong del tipo i fabricados en el periodo establecido.
- w_i = Cantidad de madera en m^3 que consume el DouGong del tipo i , incluyendo la madera desperdiciada.
- t_i = Tiempo en días de fabricar el DouGong del tipo i .
- e_i = Gasto en CNY (yuan chino) diferente al de la mano de obra y la madera, necesario para fabricar un DouGong del tipo i . Básicamente materiales y mecánica.
- p_i = Beneficio en CNY obtenido por la venta de un DouGong del tipo i .
- l_i = Mínimo número de DouGong del tipo i a fabricar en el periodo establecido. Dependerá de varios factores como pedidos ya concertados con clientes, previsiones de ventas, stocks, capacidad de almacenaje, etc.

- u_i = Máximo número de DouGong del tipo i a fabricar en el periodo establecido. Dependerá de los mismos factores que l_i .

Además, consideramos los siguientes parámetros:

- d = Coste en CNY de la mano de obra diaria de un obrero en dicha empresa.
- c = Coste en CNY del m^3 de la madera usada.
- T = Número de jornadas totales disponibles (número de días multiplicado por el número de obreros) en el periodo establecido.
- W = Cantidad de metros cúbicos de madera disponible en el periodo establecido. Para abaratar su coste (reducción de gastos de transporte), se realiza un único pedido, que depende de las previsiones. Ese pedido puede ser suministrado en un único viaje o no, pero en cualquier caso no repercutirá en la planificación de la producción, es decir, se asume que siempre que se necesite, hay madera disponible. Notar además que la madera se sirve en piezas de dimensiones adecuadas de manera que el desperdicio de la misma en la fabricación de cada pieza es el establecido estadísticamente por la experiencia, ya contabilizado en los valores w_i .
- B = Presupuesto máximo disponible para hacer frente a todos los gastos del periodo establecido.
- P = Beneficio mínimo que se está dispuesto a conseguir en el periodo de tiempo considerado, suponiendo, claro está, que se tenga la garantía que todo lo que se produzca en dicho periodo acabara vendiéndose.

Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se denota por c_i el coste total de fabricar un DouGong del tipo i , esto es:

$$c_i = c \cdot w_i + d \cdot t_i + e_i$$

Notar que todos los nombres de las variables se han elegido, intentando ser comprensibles en una terminología internacional, pensando en una traducción al inglés de este trabajo. Así, c de cost, w de wood, t de time, b de budget, p de profit, e de expenditure, l de low, u de up y d de daily.

El problema de maximizar el beneficio de la empresa en la fabricación de DouGong durante el periodo establecido puede ser formulado como el siguiente problema de PLE:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \geq P \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i \leq T \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \leq B \quad (5)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (6)$$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (7)$$

Donde:

- (1) es la función objetivo, es decir el beneficio obtenido tras la venta de todos los DouGong fabricados.
- (2) es la restricción que garantiza que la solución óptima proporcione un mínimo beneficio P exigido por el propietario de la fábrica.
- (3) es la restricción que indica el tiempo máximo T de mano de obra disponible para fabricar DouGong en el periodo de tiempo establecido.
- (4) es la restricción que impide utilizar más cantidad de madera que la disponible W .
- (5) es la restricción que acota el gasto máximo B dispuesto a asumir por el empresario en la compra de materiales y el pago de la mano de obra en el periodo de tiempo establecido.

- Las restricciones (6) proporcionan el número mínimo y máximo, l_i y u_i respectivamente, de cada tipo i de DouGong a fabricar.
- Por último, las restricciones (7) obligan a que todas las variables sean enteras y no negativas, es decir, a fabricar unidades completas de DouGong, no teniendo sentido la aparición de decimales.

Notar que como ya se comentó en el Capítulo 2, esta formulación no está cerrada, sino que se le puede añadir cualquier otra restricción lineal que represente algún condicionante real en una empresa particular, de manera que se ajuste el máximo posible el modelo matemático al problema real.

CAPÍTULO 5. CASO DE ESTUDIO

5.1. La fábrica y el plan de producción

Se supondrá una empresa dedicada a la fabricación de DouGong con un único tipo de madera. Notar que el uso de varios tipos de maderas según el tipo de DouGong es perfectamente posible con esta modelización, aunque aumentaría el número de restricciones, separando las variables por el tipo de madera asociada.

La fábrica tiene 100 trabajadores, cada uno hace su propio trabajo, el tiempo de trabajo por día es de 6 horas, y se considera una media de 22 días laborales cada mes. El salario es de 96 ¥ por persona y día. El precio de la madera que se utiliza para la construcción de DouGong es de 3600 ¥ por metro cúbico. Se supondrá que en los próximos 6 meses hay que satisfacer los pedidos de 4 clientes. Las Tablas 1, 2, 3 y 4 muestran los tipos y cantidades de DouGong solicitados por cada cliente.

Tabla 1. Pedidos del Cliente 1.

Nombre de DouGong	Tipos		Cantidad
WUCAIDANQIAODANANG	x_1	PINGSHENKE	104
	x_2	ZHUTOUKE	26
	x_3	JIAOKE	4
QICAIDANQIAOCHONGANG	x_4	PINGSHENKE	88
	x_5	ZHUTOUKE	18
	x_6	JIAOKE	4

Tabla 2. Pedidos del Cliente 2.

Nombre de DouGong	Tipos		Cantidad
WUCAIDANQIAODANANG	x_1	PINGSHENKE	36
	x_2	ZHUTOUKE	14
	x_3	JIAOKE	4
WUCAIPINZIKE	x_7	PINGSHENKE	24
	x_8	ZHUTOUKE	8

Tabla 3. Pedidos del Cliente 3.

Nombre de DouGong	Tipos		Cantidad
QICAI	x_9	PINGSHENKE	31
DANQIAOCHONGANGPAILOU	x_{10}	JIAOKE	6

Tabla 4. Pedidos del Cliente 4.

Nombre de DouGong	Tipos		Cantidad
QICAI	x_9	PINGSHENKE	14
DANQIAOCHONGANGPAILOU	x_{10}	JIAOKE	2
JIUCAI	x_{11}	PINGSHENKE	10
DANQIAOSANANGPAILOU	x_{12}	JIAOKE	6

La Tabla 5 muestra la organización de los pedidos agrupados por variables. En total hay 12 tipos diferentes de DouGong a fabricar.

Tabla 5. Cantidades de los diferentes tipos de DouGong solicitados.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
Ciente 1	104	26	4	88	18	4	0	0	0	0	0	0
Ciente 2	36	14	4	0	0	0	24	8	0	0	0	0
Ciente 3	0	0	0	0	0	0	0	0	31	6	0	0
Ciente 4	0	0	0	0	0	0	0	0	14	2	10	6
Total	140	40	8	88	18	4	24	8	45	8	10	6

Cada tipo de DouGong necesita diferente volumen de madera, diferente cantidad de otros materiales (un material de acción química utilizado para prevenir insectos y para asegurar el secado de la madera) y diferentes costos mecánicos. Cada tipo de DouGong necesita también, obviamente, una cantidad diferente de tiempo para su fabricación por un único obrero.

Por otro lado, el estudio del mercado y la experiencia de ventas, hace que se considere la fabricación de otros tres tipos de DouGong, concretamente de Jiuchaichongqiaochongang Dougong: Pingshenke (x_{13}), Zhutouke (x_{14}), Jiaoke (x_{15}). Así pues, en total el problema a resolver contendrá 15 variables.

La cantidad de madera necesaria para fabricar cada una de las piezas diferentes de cada DouGong es la del mínimo paralelepípedo que contiene la pieza y cuyo volumen se obtiene multiplicando el volumen de la pieza por un coeficiente basado en estadísticas. Los ANG con el coeficiente 1.15 y el resto de piezas con el coeficiente 1.35 [12].

Para el cálculo del volumen de cada DouGong, hay una cuota específica. A título de ejemplo, para los dos tipos de DouGong vistos en el Capítulo anterior, Pingshenke y Zhutouke (ver Figuras 17 y 18), las Tablas 6 y 7 muestran respectivamente el número de piezas de cada tipo que lo componen y el coeficiente usado para el cálculo de madera que necesita cada tipo de pieza. Se recuerda que en las Figuras 17 y 18 aparecían las medidas largo, ancho y alto de cada una de las piezas diferentes que componían el correspondiente DouGong. Estas medidas se recopilarán en las Tablas 8 y 9.

Tabla 6. Cantidad y coeficiente de las diferentes piezas que componen un Pingshenke DouGong.

Nombres	Cantidad	Coeficiente
Dadou	1	1.35
Caoshengzi	4	1.35
Sancaisheng	12	1.35
Shibadou	4	1.35
Zhengxinguagong	1	1.35
Zhengxinwangong	1	1.35
Danqiao	1	1.35
Mazhatouhoudailiufentou	1	1.35
Chengtoumuhoudaimayetou	1	1.35
Dancaiguagong	2	1.35
Xianggong	2	1.35
Dancaiwangong	2	1.35
Dananghoudaijuhuatou	1	1.15

Tabla 7. Cantidad y coeficiente de las diferentes piezas que componen un Zhutouke DouGong.

Nombres	Cantidad	Coeficiente
Dadou	1	1.35
Caoshengzi	4	1.35
Sancaisheng	12	1.35
Tongzishibadou 1	2	1.35
Tongzishibadou 2	1	1.35
Zhengxinguagong	1	1.35
Zhengxinwangong	1	1.35
Danqiao	1	1.35
Guagong	2	1.35
Waixianggong	1	1.35
Lixianggong	1	1.35
Waiwangong	1	1.35
Liwangong	1	1.35
Dananghoudaiqueti	1	1.15

Tabla 8. Medidas y volumen de las diferentes piezas que componen un Pingshenke DouGong.

	Largo	Ancho	Alto	Volumen	Volumen	Cantidad	Coeficiente	Volumen
	mm	mm	mm	mm ³	m ³			m ³
DaDou	300	300	200	18000000	0.018	1	1.35	0.0243
Caoshengzi	174	130	100	2262000	0.002262	4	1.35	0.0122148
Sancaisheng	150	130	100	1950000	0.00195	12	1.35	0.03159
Shibadou	180	150	100	2700000	0.0027	4	1.35	0.01458
Zhengxingaugong	620	124	200	15376000	0.015376	1	1.35	0.0207576
Zhengxinwangong	920	124	200	22816000	0.022816	1	1.35	0.0308016
Danqiao	710	100	200	14200000	0.0142	1	1.35	0.01917
mazhatouhoudailiufentou	1615	100	200	32300000	0.0323	1	1.35	0.043605
Chengtoumuhoudaimayetou	1554	100	200	31080000	0.03108	1	1.35	0.041958
Dancaiguagong	620	100	140	8680000	0.00868	2	1.35	0.023436
Xianggong	720	100	140	10080000	0.01008	2	1.35	0.027216
Dancaiwangong	920	100	140	12880000	0.01288	2	1.35	0.034776
Dananghoudaijuhautou	1530	100	300	45900000	0.0459	1	1.15	0.052785
								0.37719

Tabla 9. Medidas y volumen de las diferentes piezas que componen un Zhutouke DouGong.

	Largo	Ancho	Alto	Volumen	Volumen	Cantidad	Coeficiente	Volumen
	mm	mm	mm	mm ³	m ³			m ³
DaDou	400	300	200	24000000	0.024	1	1.35	0.0324
Caoshengzi	174	130	100	2262000	0.002262	4	1.35	0.0122148
Sancaisheng	150	130	100	1950000	0.00195	12	1.35	0.03159
Tongzishibadou1	380	150	100	5700000	0.0057	2	1.35	0.01539
Tongzishibadou2	480	150	100	7200000	0.0072	1	1.35	0.00972
Zhengxingaugong	620	124	200	15376000	0.015376	1	1.35	0.0207576
Zhengxinwangong	920	124	200	22816000	0.022816	1	1.35	0.0308016
Danqiao	710	200	200	28400000	0.0284	1	1.35	0.03834
Guagong	620	100	140	8680000	0.00868	2	1.35	0.023436
Waixiangong	720	100	140	10080000	0.01008	1	1.35	0.013608
Lixiangong*2	190	100	140	5320000	0.00532	1	1.35	0.007182
Waiwangong	920	100	140	12880000	0.01288	1	1.35	0.017388
Liwangong	920	100	140	12880000	0.01288	1	1.35	0.017388
Dananghoudaiqueti	1830	300	300	164700000	0.1647	1	1.15	0.189405
								0.459621

Las Tablas 10, 11 y 12 muestran los datos necesarios para formular el problema de cantidad de madera, tiempo de fabricación, coste de mano de obra, coste de otros materiales, precios de venta, beneficios, etc., de los diferentes tipos de DouGong a fabricar [13].

Tabla 10. Cantidad de la madera, tiempo de fabricar y coste de la mano de obra de los 15 tipos de DouGong a fabricar.

			Cantidad de la madera (m ³)	Tiempo de fabricar (Dias)	Coste de la mano de obra (¥)
WUCAIDANQIAODANANG	X ₁	PINGSHENKE	0.4567	14.735	1414.56
	X ₂	ZHUTOUKE	0.5133	14.402	1382.592
	X ₃	JIAOKE	0.9192	40.556	3893.376
QICAIDANQIAOCHONGANG	X ₄	PINGSHENKE	0.7715	20.843	2000.928
	X ₅	ZHUTOUKE	0.748	21.546	2068.416
	X ₆	JIAOKE	1.8898	59.793	5740.128
WUCAIPINZIKE	X ₇	PINGSHENKE	0.4198	14.345	1377.12
	X ₈	ZHUTOUKE	0.4878	14.849	1425.504
QICAI DANQIAOCHONGANGPAILOU	X ₉	PINGSHENKE	0.1964	13.709	1316.064
	X ₁₀	JIAOKE	0.4929	52.545	5044.32
JIUCAI DANQIAOSANANGPAILOU	X ₁₁	PINGSHENKE	0.2242	17.67	1696.32
	X ₁₂	JIAOKE	0.8781	78.185	7505.76
JIUCAICHONGQIAOCHONGANG	X ₁₃	PINGSHENKE	0.9716	24.7	2371.2
	X ₁₄	ZHUTOUKE	1.0341	27.066	2598.336
	X ₁₅	JIAOKE	2.8987	82.28	7898.88

Tabla 11. Coste de materia prima, coste de otro material y gasto de mecánica de los 15 tipos de DouGong a fabricar.

			Coste de materia prima (¥)	Coste de otro material (¥)	Gasto de mecánica (¥)
WUCAIDANQIAODANANG	X ₁	PINGSHENKE	1644.12	18.63	49.04
	X ₂	ZHUTOUKE	1847.88	20.93	47.93
	X ₃	JIAOKE	3309.12	37.5	134.97
QICAIDANQIAOCHONGANG	X ₄	PINGSHENKE	2777.4	31.48	69.37
	X ₅	ZHUTOUKE	2692.8	30.52	71.71
	X ₆	JIAOKE	6803.28	77.11	199
WUCAIPINZIKE	X ₇	PINGSHENKE	1511.28	17.13	47.73
	X ₈	ZHUTOUKE	1756.08	19.9	49.41
QICAI DANQIAOCHONGANGPAILOU	X ₉	PINGSHENKE	707.04	8.01	45.62
	X ₁₀	JIAOKE	1774.44	20.11	174.87
JIUCAI DANQIAOSANANGPAILOU	X ₁₁	PINGSHENKE	807.12	9.15	58.81
	X ₁₂	JIAOKE	3161.16	35.83	260.2
JIUCAICHONGQIAOCHONGANG	X ₁₃	PINGSHENKE	3497.76	39.65	82.21
	X ₁₄	ZHUTOUKE	3722.76	42.2	90.08
	X ₁₅	JIAOKE	10435.32	118.27	273.83

Tabla 12. Precio de coste, precio de venta y beneficio de los 15 tipos de DouGong a fabricar.

			Precio de costo (¥)	Precio de venta (¥)	Beneficio(¥)
WUCAIDANQIAODANANG	X ₁	PINGSHENKE	3126.35	3751.62	625.27
	X ₂	ZHUTOUKE	3299.332	3959.1984	659.8664
	X ₃	JIAOKE	7374.966	8849.9592	1474.9932
QICAIDANQIAOCHONGANG	X ₄	PINGSHENKE	4879.178	5855.0136	975.8356
	X ₅	ZHUTOUKE	4863.446	5836.1352	972.6892
	X ₆	JIAOKE	12819.518	15383.4216	2563.9036
WUCAIPINZIKE	X ₇	PINGSHENKE	2953.26	3543.912	590.652
	X ₈	ZHUTOUKE	3250.894	3901.0728	650.1788
QICAI DANQIAOCHONGANGPAILOU	X ₉	PINGSHENKE	2076.734	2492.0808	415.3468
	X ₁₀	JIAOKE	7013.74	8416.488	1402.748
JIUCAI DANQIAOSANANGPAILOU	X ₁₁	PINGSHENKE	2571.4	3085.68	514.28
	X ₁₂	JIAOKE	10962.95	13155.54	2192.59
JIUCAICHONGQIAOCHONGANG	X ₁₃	PINGSHENKE	5990.82	7188.984	1198.164
	X ₁₄	ZHUTOUKE	6453.376	7744.0512	1290.6752
	X ₁₅	JIAOKE	18726.3	22471.56	3745.26

A través de la investigación de mercado y la experiencia de marketing a largo plazo, combinada con los pedidos de los clientes y los stocks de DouGong, se establecen unos mínimos y máximos de unidades de cada uno de los 15 tipos de DouGong a fabricar. Evidentemente, para los DouGong de los 12 primeros tipos, para los que hay unos pedidos establecidos, los mínimos establecidos nunca serán inferiores al número total de DouGong de cada tipo solicitado.

Los intervalos de unidades de fabricación para cada tipo se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
 160 \leq x_1 \leq 200, & \quad 50 \leq x_2 \leq 60, & \quad 10 \leq x_3 \leq 12, & \quad 100 \leq x_4 \leq 120, \\
 25 \leq x_5 \leq 30, & \quad 6 \leq x_6 \leq 8, & \quad 30 \leq x_7 \leq 40, & \quad 12 \leq x_8 \leq 16, \\
 55 \leq x_9 \leq 60, & \quad 10 \leq x_{10} \leq 16, & \quad 15 \leq x_{11} \leq 20, & \quad 8 \leq x_{12} \leq 12, \\
 0 \leq x_{13} \leq 30, & \quad 0 \leq x_{14} \leq 10, & \quad 0 \leq x_{15} \leq 4.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, se establece comprar 378m³ de madera para el periodo de medio año en que se debe satisfacer la demanda, resultado de sumar los datos correspondientes y de considerar los m³ que transporta cada vehículo:

$$\begin{aligned}
 & 0.4567*200+0.5133*60+0.9192*12+0.7715*120+0.748*30+1.8898*8 \\
 & +0.4198*40+0.4878*16+0.1964*60+0.4929*16+0.2242*20+0.8781*12 \\
 & +0.9716*30+1.0341*10+2.8987*4=373.679\text{m}^3. \text{ (Al transportar cada vehículo} \\
 & 21\text{m}^3, 373.679/21 \approx 17.8=18, 21*18=378)
 \end{aligned}$$

Por último, se establece que el coste máximo de inversión (gasto en material y mano de obra) para ese período es de 2600000 ¥ y que se desea unos beneficios mínimos de 500000 ¥ para considerar rentable el negocio.

A continuación se muestran todos los tipos de DouGong pedidos de cliente, junto con los tres adicionales para los que se considera su fabricación.

Notar que el número de CAI que contiene un DouGong viene reflejado en su nombre: WUCAI es 5 Cai, QICAI es 7 Cai, JIUCAI es 9 Cai . La cantidad de Cai de un DouGong es siempre un número impar. La cantidad de Cai de un DouGong representa el grado de ese DouGong. Para calcular el número de Cai de un DouGong, se cuenta el número de las columnas de Dou acumuladas en ambos lados de la línea central vertical, según la

vista lateral [14]. Por ejemplo, en la Figura 59 se ven 5 columnas (WUCAI) y en la Figura 67 se aprecian 9 columnas (JIUCAI): 5 visibles y por simetría, 4 en la parte no visible. Las Figuras 68, 69, 70, 75, 76, 77, 78, 79 y 80 son WUCAI, las Figuras 71, 72, 73, 74, 81, 82 y 83 son QICAI, las Figuras 84, 85, 86, 87 y 88 son JIUCAI.

WUCAIDANQIAODANANG PINGSHENKE, ZHUTOUKE, JIAOKE. (X_1, X_2, X_3)

En la Figura 68, las dos vistas, de izquierda a derecha: JIAOKE, PINGSHENKE, ZHUTOUKE.

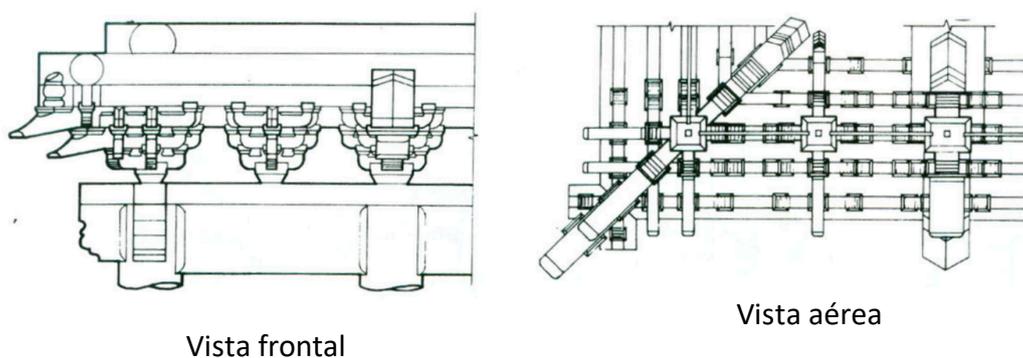


Figura 68. Vista frontal y aérea de Jiaoke, Pingshenke, Zhutouke DouGong.

Vista lateral de los tres tipos de DouGong (Figuras 69 y 70).

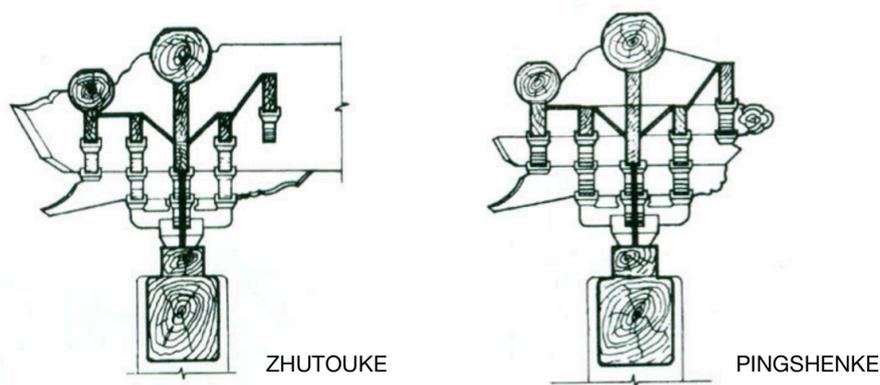


Figura 69. Vista lateral de Zhutouke y Pingshenke.

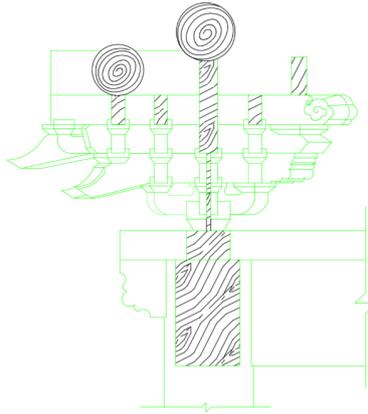


Figura 70. Vista lateral de Jiaoke.

QICAIDANQIAOCHONGANG PINGSHENKE, ZHUTOUKE, JIAOKE. (X_4 , X_5 , X_6)

En las Figuras 71 y 72, las dos vistas, de izquierda a derecha.

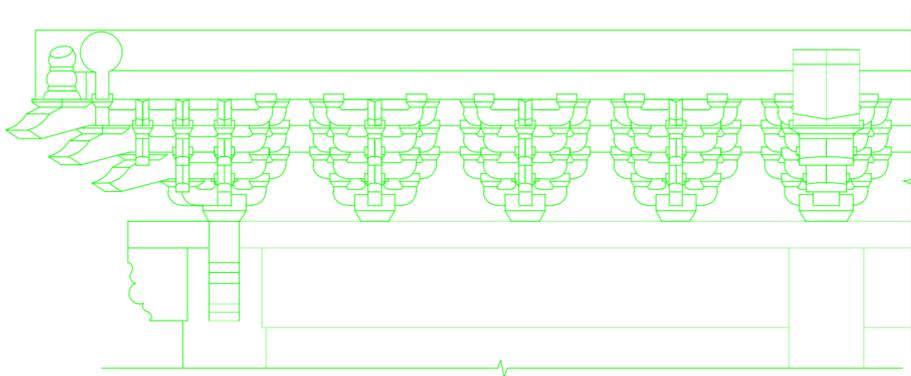


Figura 71. Vista frontal de Pingshenke, Zhutouke y Jiaoke DouGong.

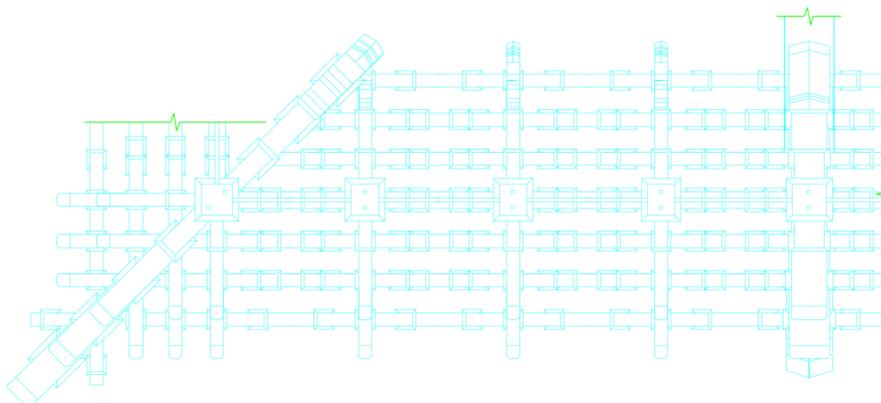


Figura 72. Vista aérea de Pingshenke, Zhutouke y Jiaoke DouGong.

En las Figuras 73 y 74, vista lateral de Zhutouke, Pingshenke y Jiaoke DouGong.

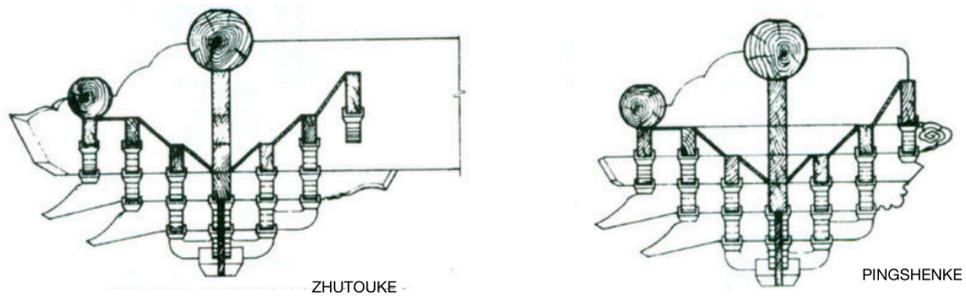


Figura 73. Vista lateral de Zhutouke y Pingshenke DouGong.

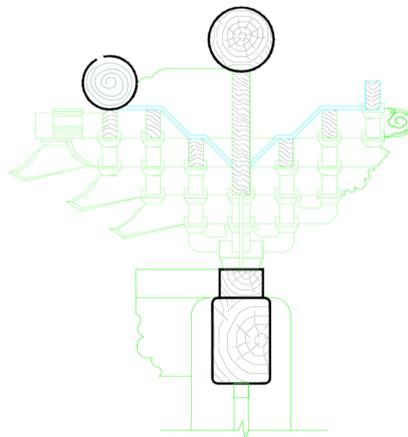


Figura 74. Vista lateral de Jiaoke DouGong.

WUCAIPINZIKE PINGSHENKE, ZHUTOUKE. (x_7 , x_8)

Las Figuras 75, 76 y 77 muestran las vistas lateral, frontal y aérea de Pingshenke.

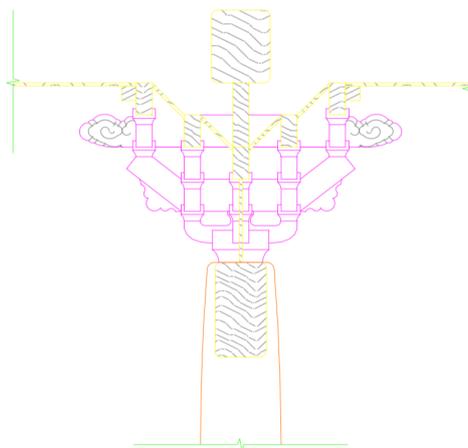


Figura 75. Vista lateral.

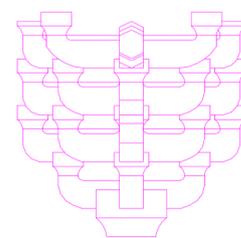


Figura 76. Vista frontal.

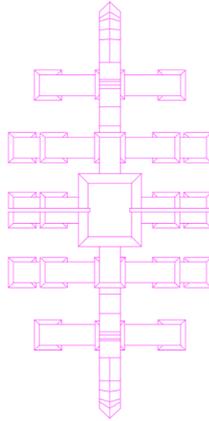


Figura 77. Vista aérea.

Las Figuras 78, 79 y 80 muestran también las vistas lateral, frontal y aérea, en este caso de Zhutouke.

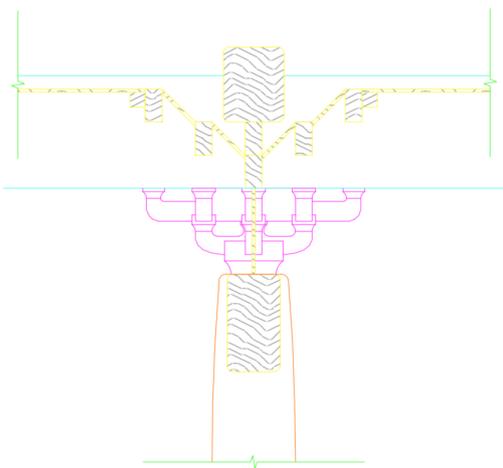


Figura 78. Vista lateral.

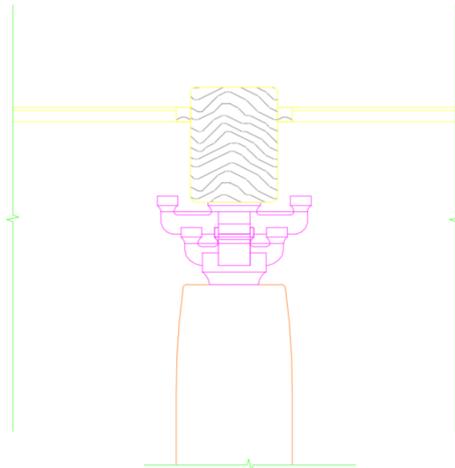


Figura 79. Vista frontal.

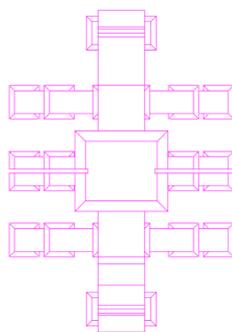


Figura 80. Vista aérea.

QICAIDANQIAOCHONGANGPAILOU PINGSHENKE, JIAOKE. (X₉, X₁₀)

Las Figuras 81, 82 y 83 muestran diversas vistas de Pingshenke, Jiaoke.

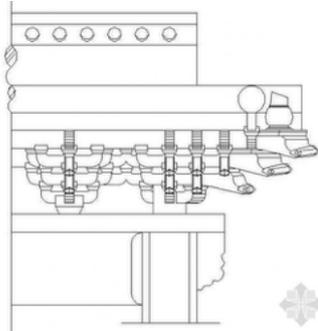


Figura 81. Vista frontal de Pingshenke y jiaoke.

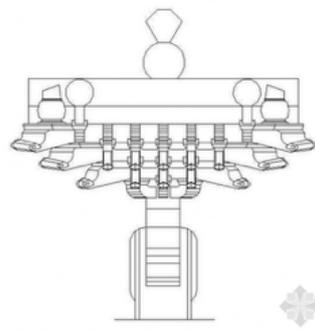


Figura 82. Vista lateral de Jiaoke.

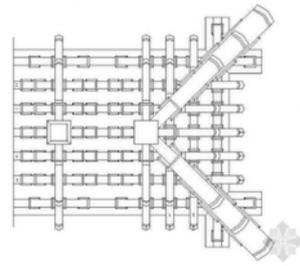


Figura 83. Vista aérea de Pingshenke y Jiaoke.

JIUCAIDANQIAOSANANGPAILOU PINGSHENKE, JIAOKE. (X₁₁, X₁₂)

En estos tipos de DouGong las vistas son similares a las de las Figuras 81, 82 y 83. Pero esos tipos son JIUCAI. Son las Figuras 84 y 85.

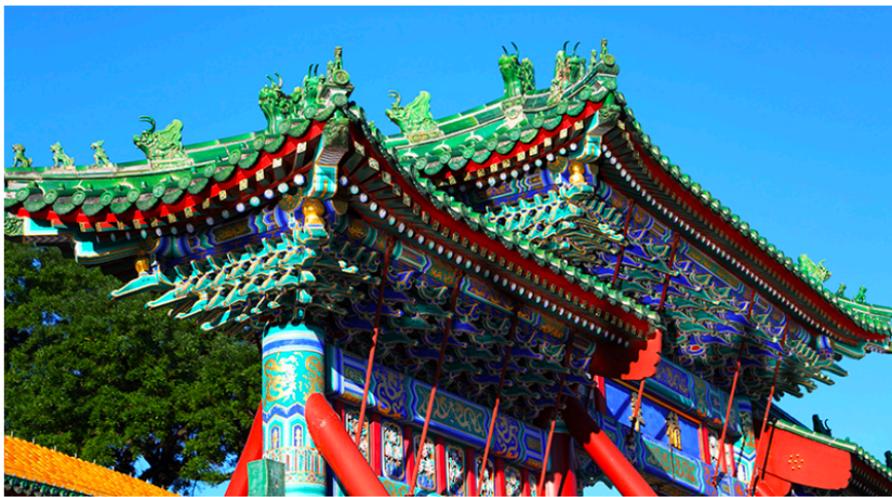


Figura 84. Vista de Jiaoke y Pingshenke de un Pailou.



Figura 85. Vista de lateral de Jiaoke de un Pailou.

JIUCAICHONGQIAOCHONGANG PINGSHENKE, ZHUTOUKE, JIAOKE. (X₁₃, X₁₄, X₁₅)

La Figura 86 muestra las vistas frontal y lateral de Pingshenke.

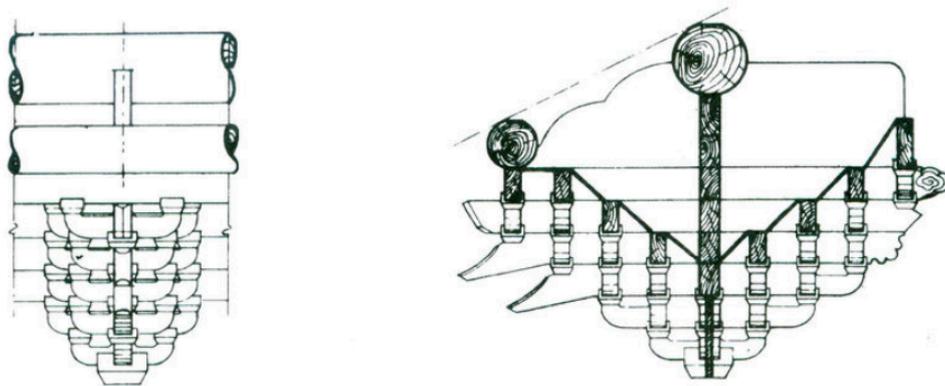


Figura 86. Vista frontal y lateral de Pingshenke DouGong.

La Figura 87 muestra las vistas frontal y lateral de Zhutouke.

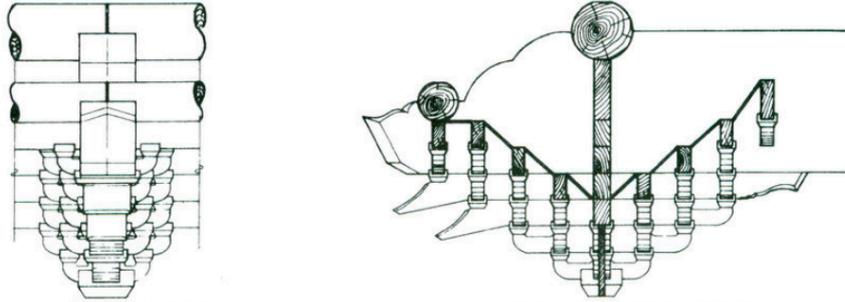


Figura 87. Vista frontal y lateral de Zhutouke DouGong.

La Figura 88 muestra las vistas frontal y aérea de Jiaoke y Pingshenke. De izquierda a derecha Jiaoke y Pingshenke.

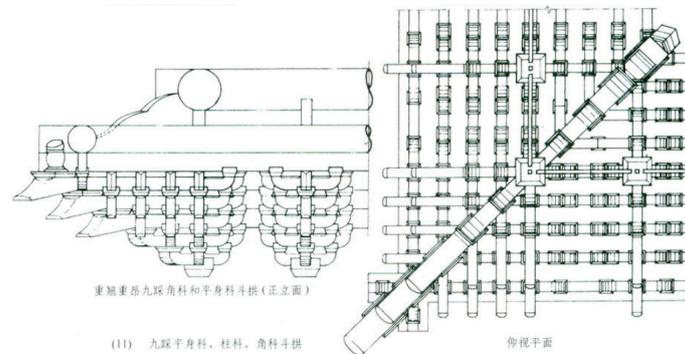


Figura 88. Vista frontal y aérea de Jiaoke y Pingshenke.

5.2. Formulación del problema de P.L.E.

Con todo lo descrito en el apartado anterior y dando respuesta a las restricciones y función objetivo del enunciado del ejercicio, se obtiene el planteamiento del problema para este caso de estudio con la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar} \quad & 625.27x_1 + 659.8664x_2 + 1474.9932x_3 + 975.8356x_4 + 972.6892x_5 \\
 & + 2563.9036x_6 + 590.652x_7 + 650.1788x_8 + 415.3468x_9 + 1402.748x_{10} + 514.28x_{11} \\
 & + 2192.59x_{12} + 1198.164x_{13} + 1290.6752x_{14} + 3745.26x_{15}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
 & 625.27x_1 + 659.8664x_2 + 1474.9932x_3 + 975.8356x_4 + 972.6892x_5 + 2563.9036x_6 \\
 & + 590.652x_7 + 650.1788x_8 + 415.3468x_9 + 1402.748x_{10} + 514.28x_{11} + 2192.59x_{12} \\
 & + 1198.164x_{13} + 1290.6752x_{14} + 3745.26x_{15} \geq 500\,000
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&14.735x_1+14.402x_2+40.556x_3+20.843x_4+21.546x_5+59.793x_6 \\
&+14.345x_7+14.849x_8+13.709x_9+52.545x_{10}+17.67x_{11}+78.185x_{12} \\
&\quad +24.7x_{13}+27.066x_{14}+82.28x_{15} \leq 13200
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&0.4567x_1+0.5133x_2+0.9192x_3+0.7715x_4+0.748x_5+1.8898x_6 \\
&+0.4198x_7+0.4878x_8+0.1964x_9+0.4929x_{10}+0.2242x_{11}+0.8781x_{12} \\
&\quad +0.9716x_{13}+1.0341x_{14}+2.8987x_{15} \leq 378
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&3126.35x_1+3299.332x_2+7374.966x_3+4879.178x_4+4863.446x_5+12819.518x_6 \\
&+2953.26x_7+3250.894x_8+2076.734x_9+7013.74x_{10}+2571.4x_{11}+10962.95x_{12} \\
&\quad +5990.82x_{13}+6453.376x_{14}+18726.3x_{15} \leq 2600000
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&160 \leq x_1 \leq 200 \\
&50 \leq x_2 \leq 60 \\
&10 \leq x_3 \leq 12 \\
&100 \leq x_4 \leq 120 \\
&25 \leq x_5 \leq 30 \\
&6 \leq x_6 \leq 8 \\
&30 \leq x_7 \leq 40 \\
&12 \leq x_8 \leq 16 \\
&55 \leq x_9 \leq 60 \\
&10 \leq x_{10} \leq 16 \\
&15 \leq x_{11} \leq 20 \\
&8 \leq x_{12} \leq 12 \\
&0 \leq x_{13} \leq 30 \\
&0 \leq x_{14} \leq 10 \\
&0 \leq x_{15} \leq 4
\end{aligned} \tag{6}$$

$$x_i \geq 0 \text{ y enteras } \forall i \in \{1, \dots, 15\} \tag{7}$$

Donde, como se dijo en el Capítulo 4:

- (1) es la función objetivo, es decir los beneficios que se obtendrán tras la venta de todos los DouGong de cada uno de los 15 tipos que la solución óptima propone fabricar en el periodo de tiempo establecido.
- (2) establece la ganancia mínima propuesta por el empresario, en este caso de 500000 ¥. Si con el resto de condicionantes no es posible obtener al menos esa ganancia, el problema será imposible y no habrá por tanto solución, debiéndose replantear el disminuir la ganancia o bien cambiar alguno de los otros condicionantes.
- (3) establece el tiempo máximo total de mano de obra en días. Notar que cada DouGong es fabricado íntegramente por un único obrero, con lo que en este caso, el número de días multiplicado ($22\text{días/mes} \times 6\text{meses}$) por el número de obreros (100) da un total de 13200 días.
- (4) restringe el volumen de madera disponible para los 6 meses de fabricación, cuyo cálculo ya se estableció en el apartado anterior en 378 m^3 .
- (5) acota el gasto máximo deseado en la fabricación de todos los DouGong en 2600000¥.
- Las restricciones (6) proporcionan el número mínimo y máximo de cada tipo i de DouGong a fabricar. Notar que para aquellos tres últimos tipos de DouGong, para los que no existen pedidos, se ha establecido un mínimo de 0 unidades, ya que no es imprescindible su fabricación.
- Por último, las restricciones (7) implican la integridad de las 15 variables en estudio.

5.3. Resolución

Para obtener la solución óptima al problema de PLE planteado en el apartado anterior, obviamente sólo será necesario ejecutarlo en uno de los programas informáticos que los resuelven. Pero como se dijo en el Capítulo 4, un problema de PLE es de complejidad exponencial y se pueden tener sorpresas relativas a un tiempo de ejecución excesivo, por lo que se ha considerado resolver el problema por cada uno

de los tres mecanismos aprendidos en la asignatura de Optimización, Simulación y Tratamiento de Datos en Edificación del Máster en Edificación, a fin de comprobar si alguno de ellos es más “rápido” o es incapaz de obtener la solución óptima en un tiempo razonable. Así pues, se resolverá el problema con la función Maximize de *Mathematica*, LinearProgramming de *Mathematica* y Solver de *Excel*, y después se compararán los resultados y los tiempos de ejecución empleados por cada uno de estos tres mecanismos.

5.3.1. Con Maximize de *Mathematica*

Timing [Maximize [{625.27 x1 + 659.8664 x2 + 1474.9932 x3 + 975.8356 x4 + 972.6892 x5 + 2563.9036 x6 + 590.652 x7 + 650.1788 x8 + 415.3468 x9 + 1402.748 x10 + 514.28 x11 + 2192.59 x12 + 1198.164 x13 + 1290.6752 x14 + 3745.26 x15,

160 <= x1 <= 200, 50 <= x2 <= 60, 10 <= x3 <= 12, 100 <= x4 <= 120, 25 <= x5 <= 30, 6 <= x6 <= 8, 30 <= x7 <= 40, 12 <= x8 <= 16, 55 <= x9 <= 60, 10 <= x10 <= 16, 15 <= x11 <= 20, 8 <= x12 <= 12, 0 <= x13 <= 30, 0 <= x14 <= 10, 0 <= x15 <= 4,

625.27 x1 + 659.8664 x2 + 1474.9932 x3 + 975.8356 x4 + 972.6892 x5 + 2563.9036 x6 + 590.652 x7 + 650.1788 x8 + 415.3468 x9 + 1402.748 x10 + 514.28 x11 + 2192.59 x12 + 1198.164 x13 + 1290.6752 x14 + 3745.26 x15 >= 500000,

14.735 x1 + 14.402 x2 + 40.556 x3 + 20.843 x4 + 21.546 x5 + 59.793 x6 + 14.345 x7 + 14.849 x8 + 13.709 x9 + 52.545 x10 + 17.67 x11 + 78.185 x12 + 24.7 x13 + 27.066 x14 + 82.28 x15 <= 13200,

0.4567 x1 + 0.5133 x2 + 0.9192 x3 + 0.7715 x4 + 0.748 x5 + 1.8898 x6 + 0.4198 x7 + 0.4878 x8 + 0.1964 x9 + 0.4929 x10 + 0.2242 x11 + 0.8781 x12 + 0.9716 x13 + 1.0341 x14 + 2.8987 x15 <= 378,

$3126.35 x_1 + 3299.332 x_2 + 7374.966 x_3 + 4879.178 x_4 + 4863.446 x_5 + 12819.518 x_6$
 $+ 2953.26 x_7 + 3250.894 x_8 + 2076.734 x_9 + 7013.74 x_{10} + 2571.4 x_{11} + 10962.95 x_{12}$
 $+ 5990.82 x_{13} + 6453.376 x_{14} + 18726.3 x_{15} \leq 2600000$ },
 {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14, x15}, Integers]]

{786.12182, {520000., {x1 -> 200, x2 -> 58, x3 -> 10, x4 -> 118, x5 -> 29, x6 -> 8, x7 ->
 37, x8 -> 15, x9 -> 58, x10 -> 16, x11 -> 19, x12 -> 12, x13 -> 30, x14 -> 10, x15 -> 4}}}

En el vector anterior, la primera componente es el tiempo que ha tardado el programa en obtener la solución óptima, unos 786 segundos (más de 13 minutos), la segunda componente es el valor de la función objetivo para la solución óptima, 520000€, una cifra no muy superior a la ganancia mínima establecida, que era de 500000€, y el resto son las asignaciones de valores a las 15 variables x_i .

5.3.2. Con LinearProgramming de Mathematica

$c = \{-625.27, -659.8664, -1474.9932, -975.8356, -972.6892, -2563.9036, -590.652,$
 $-650.1788, -415.3468, -1402.748, -514.28, -2192.59, -1198.164, -1290.6752,$
 $-3745.26\};$

$A = \{\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0\},$

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1},
{625.27, 659.8664, 1474.9932, 975.8356, 972.6892, 2563.9036, 590.652, 650.1788,
415.3468, 1402.748, 514.28, 2192.59, 1198.164, 1290.6752, 3745.26},
{14.735, 14.402, 40.556, 20.843, 21.546, 59.793, 14.345, 14.849, 13.709, 52.545,
17.67, 78.185, 24.7, 27.066, 82.28},
{0.4567, 0.5133, 0.9192, 0.7715, 0.748, 1.8898, 0.4198, 0.4878, 0.1964, 0.4929,
0.2242, 0.8781, 0.9716, 1.0341, 2.8987},
{3126.35, 3299.332, 7374.966, 4879.178, 4863.446, 12819.518, 2953.26, 3250.894,
2076.734, 7013.74, 2571.4, 10962.95, 5990.82, 6453.376, 18726.3}};
```

```
b = {{160, 1}, {200, -1}, {50, 1}, {60, -1}, {10, 1}, {12, -1}, {100, 1}, {120, -1}, {25, 1},
{30, -1}, {6, 1}, {8, -1}, {30, 1}, {40, -1}, {12, 1}, {16, -1}, {55, 1}, {60, -1}, {10, 1}, {16, -1},
{15, 1}, {20, -1}, {8, 1}, {12, -1}, {0, 1}, {30, -1}, {0, 1}, {10, -1}, {0, 1}, {4, -1}, {500000, 1},
{13200, -1}, {378, -1}, {2600000, -1}};
```

```
lu = {{0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity},
{0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity}, {0, Infinity},
{0, Infinity}, {0, Infinity}};
```

```
Timing [LinearProgramming [c, A, b, lu, Integers]]
{323.45613, {200, 58, 10, 118, 29, 8, 37, 15, 58, 16, 19, 12, 30, 10, 4}}
```

```
Timing [-c.{200, 58, 10, 118, 29, 8, 37, 15, 58, 16, 19, 12, 30, 10, 4}]
{0.000015, 520000.}
```

Con este comando de *Mathematica*, el tiempo que ha necesitado el programa para obtener la solución óptima ha sido de unos 323 segundos (poco más de 5 minutos), lo que supone menos de la mitad del tiempo necesitado con el comando Maximize. En este caso el output es un vector de 15 valores, entendiéndose que la componente *i*-

ésima de dicho vector es el valor asignado a la variable x_i en la solución óptima. Notar que ambas soluciones coinciden. Para obtener el coste de dicha solución, en este caso es necesario realizar el producto escalar del vector de costes por el vector solución, dando obviamente 520000€, al ser la misma solución.

5.3.3. Con Solver de Excel

La Tabla 13 muestra la hoja de cálculo en la que se han introducido todos los datos y aparecen también, en las celdas en color, los resultados obtenidos (en las celdas de color amarillo los valores asignados a cada variable en la solución óptima y en la de color anaranjado el coste), a falta del tiempo de ejecución. Para conocer dicho tiempo, se ha de acudir al informe que produce Solver, mostrado en la Tabla 14, siendo el tiempo de ejecución de unos 462 segundos, algo más de 7 minutos y medio (fondo amarillo).

Tabla 13. Hoja de cálculo con datos y resultados de Solver.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15			
Función Objetivo Maximizar	625.27	659.8664	1474.9932	975.8356	972.6892	2563.9036	590.652	650.1788	415.3468	1402.748	514.28	2192.59	1198.164	1290.6752	3745.26	519999.9996		
	194	60	11	120	28	8	40	14	60	16	20	12	29	9	4			
Restricción 1	1															194	≧	160
Restricción 2	1															194	≦	200
Restricción 3		1														60	≧	50
Restricción 4		1														60	≦	60
Restricción 5			1													11	≧	10
Restricción 6			1													11	≦	12
Restricción 7				1												120	≧	100
Restricción 8				1												120	≦	120
Restricción 9					1											28	≧	25
Restricción 10					1											28	≦	30
Restricción 11						1										8	≧	6
Restricción 12						1										8	≦	8
Restricción 13							1									40	≧	30
Restricción 14							1									40	≦	40
Restricción 15								1								14	≧	12
Restricción 16								1								14	≦	16
Restricción 17									1							60	≧	55
Restricción 18									1							60	≦	60
Restricción 19										1						16	≧	10
Restricción 20										1						16	≦	16
Restricción 21											1					20	≧	15
Restricción 22											1					20	≦	20
Restricción 23												1				12	≧	8
Restricción 24												1				12	≦	12
Restricción 25													1			29	≧	0
Restricción 26													1			29	≦	30
Restricción 27														1		9	≧	0
Restricción 28														1		9	≦	10
Restricción 29															1	4	≧	0
Restricción 30															1	4	≦	4
Restricción 31	625.27	659.8664	1474.9932	975.8356	972.6892	2563.9036	590.652	650.1788	415.3468	1402.748	514.28	2192.59	1198.164	1290.6752	3745.26	519999.9996	≧	500000
Restricción 32	14.735	14.402	40.556	20.843	21.546	59.793	14.345	14.849	13.709	52.545	17.67	78.185	24.7	27.066	82.28	12777.198	≦	13200
Restricción 33	0.4567	0.5133	0.9192	0.7715	0.748	1.8898	0.4198	0.4878	0.1964	0.4929	0.2242	0.8781	0.9716	1.0341	2.8987	365.5423	≦	378
Restricción 34	3126.35	3299.332	7374.966	4879.178	4863.446	12819.518	2953.26	3250.894	2076.734	7013.74	2571.4	10962.95	5990.82	6453.376	18726.3	2599999.998	≦	2600000

Tabla 14. Informe de Solver.

Microsoft Excel 16.16 运算结果报告
 工作表: [Solver,12.2的副本.xlsx]Sheet1
 报告的建立: 2019/1/9 10:16:44 上午
 结果: 规划求解找到一个在误差内的整数解。可满足所有约束。

规划求解引擎

引擎: 单纯线性规划
 求解时间: 461.742 秒。
 迭代次数: 14 子问题: 811322

规划求解选项

最大时间 无限制, 迭代 无限制, Precision 0.000001, 使用自动缩放
 最大子问题数目 无限制, 最大整数解数目 无限制, 整数允许误差 0%, 假设为非负数

目标单元格 (最大值)

单元格	名称	初值	终值
\$U\$3	Función Objetivo Maximizar	0	519999.9996

可变单元格

单元格	名称	初值	终值	整数
\$F\$4	x1	0	194	整数
\$G\$4	x2	0	60	整数
\$H\$4	x3	0	11	整数
\$I\$4	x4	0	120	整数
\$J\$4	x5	0	28	整数
\$K\$4	x6	0	8	整数
\$L\$4	x7	0	40	整数
\$M\$4	x8	0	14	整数
\$N\$4	x9	0	60	整数
\$O\$4	x10	0	16	整数
\$P\$4	x11	0	20	整数
\$Q\$4	x12	0	12	整数
\$R\$4	x13	0	29	整数
\$S\$4	x14	0	9	整数
\$T\$4	x15	0	4	整数

约束

单元格	名称	单元格值	公式	状态	型数值
\$U\$10	Restrición 6	11	\$U\$10<=\$W\$10	未到限制值	1
\$U\$11	Restrición 7	120	\$U\$11>=\$W\$11	未到限制值	20
\$U\$12	Restrición 8	120	\$U\$12<=\$W\$12	到达限制值	0
\$U\$13	Restrición 9	28	\$U\$13>=\$W\$13	未到限制值	3
\$U\$14	Restrición 10	28	\$U\$14<=\$W\$14	未到限制值	2
\$U\$15	Restrición 11	8	\$U\$15>=\$W\$15	未到限制值	2
\$U\$16	Restrición 12	8	\$U\$16<=\$W\$16	到达限制值	0
\$U\$17	Restrición 13	40	\$U\$17>=\$W\$17	未到限制值	10
\$U\$18	Restrición 14	40	\$U\$18<=\$W\$18	到达限制值	0
\$U\$19	Restrición 15	14	\$U\$19>=\$W\$19	未到限制值	2
\$U\$20	Restrición 16	14	\$U\$20<=\$W\$20	未到限制值	2
\$U\$21	Restrición 17	60	\$U\$21>=\$W\$21	未到限制值	5
\$U\$22	Restrición 18	60	\$U\$22<=\$W\$22	到达限制值	0
\$U\$23	Restrición 19	16	\$U\$23>=\$W\$23	未到限制值	6
\$U\$24	Restrición 20	16	\$U\$24<=\$W\$24	到达限制值	0
\$U\$25	Restrición 21	20	\$U\$25>=\$W\$25	未到限制值	5
\$U\$26	Restrición 22	20	\$U\$26<=\$W\$26	到达限制值	0
\$U\$27	Restrición 23	12	\$U\$27>=\$W\$27	未到限制值	4
\$U\$28	Restrición 24	12	\$U\$28<=\$W\$28	到达限制值	0
\$U\$29	Restrición 25	29	\$U\$29>=\$W\$29	未到限制值	29
\$U\$30	Restrición 26	29	\$U\$30<=\$W\$30	未到限制值	1
\$U\$31	Restrición 27	9	\$U\$31>=\$W\$31	未到限制值	9
\$U\$32	Restrición 28	9	\$U\$32<=\$W\$32	未到限制值	1
\$U\$33	Restrición 29	4	\$U\$33>=\$W\$33	未到限制值	4
\$U\$34	Restrición 30	4	\$U\$34<=\$W\$34	到达限制值	0
\$U\$35	Restrición 31	519999.9996	\$U\$35>=\$W\$35	未到限制值	19999.9996
\$U\$36	Restrición 32	12777.198	\$U\$36<=\$W\$36	未到限制值	422.802
\$U\$37	Restrición 33	365.5423	\$U\$37<=\$W\$37	未到限制值	12.4577
\$U\$38	Restrición 34	2599999.998	\$U\$38<=\$W\$38	未到限制值	0.002
\$U\$5	Restrición 1	194	\$U\$5>=\$W\$5	未到限制值	34
\$U\$6	Restrición 2	194	\$U\$6<=\$W\$6	未到限制值	6
\$U\$7	Restrición 3	60	\$U\$7>=\$W\$7	未到限制值	10
\$U\$8	Restrición 4	60	\$U\$8<=\$W\$8	到达限制值	0
\$U\$9	Restrición 5	11	\$U\$9>=\$W\$9	未到限制值	1
\$F\$4:\$T\$4= 整数					

Notar que, aunque el coste de la solución óptima difiere 4 diezmilésimas del de las dos soluciones anteriores, entendemos que ello es debido al grado de precisión o acumulación de errores en las operaciones realizadas por *Excel*, al tener todos los costes de la función objetivo hasta 4 decimales, pues el coste de toda solución óptima ha de coincidir. Lo que sí es posible es que exista más de una solución óptima, y esto es lo que ocurre casualmente en el problema aquí planteado, en que la solución óptima proporcionada por Solver no coincide con las dos anteriores.

5.4. Resumen comparativo de las tres soluciones

La Tabla 15 muestra los datos proporcionados por los tres métodos usados (*Maximize* y *LinearProgramming* de *Mathematica* y *Solver* de *Excel*), no sólo el tiempo de ejecución, coste y valor de las variables, sino también el tiempo total empleado, el volumen usado de madera y el coste de la producción en el periodo de 6 meses estudiado. Notar a este respecto que solo *Excel* proporciona estos valores en su solución, como se comprueba en las Tablas 13 y 14. En los dos comandos de *Mathematica* se han tenido que calcular estos valores sustituyendo los valores de las variables proporcionados por la solución óptima en la restricción correspondiente.

Comparando las dos soluciones obtenidas, los beneficios son todos 520000€ (519999.9996€ igual a 520000€) y los costes son todos 2600000€ (2599999.998€ igual a 2600000€). Sin embargo, la solución de Solver consume aproximadamente 23 días más de mano de obra que la solución con *Mathematica*, mientras que consume aproximadamente 0.6 m³ menos de madera que la solución con *Mathematica*. Notar que la diferencia de 23 días es sobre un máximo establecido de 13200 días, lo que representa un 0.17% de diferencia, que es insignificante, al igual que los 0.6 m³ de diferencia sobre un máximo de 378 m³, con lo que ambas soluciones son muy semejantes y no se entra a discutir cuál de ellas puede ser más atractiva al empresario, ya que se recuerda que el empresario gana y gasta lo mismo en ambas.

Tabla 15. Resultados de los tres métodos del cálculo.

	M. MAXIMIZE	M. L.P.	EXCEL SOLVER
Tiempo de cálculo	786.12182 s	323.45613 s	461.742 s
Beneficios	520000¥	520000¥	519999.9996¥
Tiempo de fabricar	12754.6 días	12754.6 días	<u>12777.198 días</u>
Volumen de madera	366.1588 m ³	366.1588 m ³	<u>365.5423 m³</u>
Coste	2600000¥	2600000¥	2599999.998¥
x ₁	200	200	<u>194</u>
x ₂	58	58	<u>60</u>
x ₃	10	10	<u>11</u>
x ₄	118	118	<u>120</u>
x ₅	29	29	<u>28</u>
x ₆	8	8	8
x ₇	37	37	<u>40</u>
x ₈	15	15	<u>14</u>
x ₉	58	58	<u>60</u>
x ₁₀	16	16	16
x ₁₁	19	19	<u>20</u>
x ₁₂	12	12	12
x ₁₃	30	30	<u>29</u>
x ₁₄	10	10	<u>9</u>
x ₁₅	4	4	4

5.5. Una nota sobre la complejidad del problema planteado

Los tres métodos de resolución anterior han sido ejecutados en un ordenador MacBook Pro, con un procesador Intel Core i5-6360U con una frecuencia de procesador de 2000 MHz.

En informática [15], las operaciones de coma flotante por segundo son una medida del rendimiento de un ordenador, especialmente en cálculos científicos que requieren

un gran uso de operaciones de coma flotante. Es más conocido su acrónimo, FLOPS (del inglés floating point operations per second).

Según las consultas realizadas, que aunque no constan en ninguna referencia oficial, sí son fiables por comparación con informaciones de otros ordenadores, el ordenador usado tiene una capacidad de realización de en torno a 800 GFLOPS (Gigaflops), es decir, que es capaz de realizar 800,000,000,000 operaciones matemáticas elementales cada segundo. Si se tiene en cuenta que en el mejor de los tres procedimientos usados, que nosotros consideramos por ser el más rápido, el comando LinearProgramming de *Mathematica*, han sido necesarios 323.45613 segundos para obtener la solución óptima, una sencilla multiplicación lleva a que, a grosso modo, el ordenador ha debido realizar en torno a 258,764,904,000,000, es decir, del entorno de 259 billones de operaciones elementales. Si una persona fuera capaz de realizar 1 operación cada segundo, cosa evidentemente imposible, le costaría más de 8 millones de años (basta dividir entre $60 \times 60 \times 24 \times 365$) obtener la solución óptima al problema aquí planteado, lo que realmente muestra su complejidad, y la necesidad del conocimiento de herramientas matemáticas adecuadas y programas informáticos para poder resolver problemas reales de optimización, particularmente en el campo de la fabricación de materiales para la edificación. Obviamente siempre se podrá encontrar una solución heurística (aproximada) al problema, pero con una probabilidad muy alta de quedar muy lejos de la solución óptima, con la consiguiente pérdida de beneficios y desperdicio de materiales, tiempo, mano de obra, etc.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En este Trabajo Final de Máster se ha presentado una modelización matemática basada en Programación Lineal Entera para simular los condicionantes de una fábrica de DouGong (una estructura de madera característica de la arquitectura tradicional china), con el objetivo de maximizar los beneficios a obtener en un periodo de fabricación determinado. Tras el estudio de las características del DouGong y su proceso de fabricación, primero se ha planteado una formulación general del problema como problema de PLE, y posteriormente se ha resuelto un caso de estudio, de una fábrica de 15 tipos de DouGong en un periodo de 6 meses. Destacar que, aunque el caso es simulado (esta fábrica concreta no existe), todos los datos usados (tipos de DouGong, volúmenes de madera, tiempo de fabricación, costes de materiales y mano de obra, etc.) son reales y actualizados, con lo que las ideas aquí expuestas pueden ser aplicadas en fábricas reales de DouGong.

El dato que nos ha sorprendido es, como se comentó al final del capítulo anterior, que es necesario realizar cientos de billones de operaciones matemáticas elementales para tener la garantía de que se obtiene la solución óptima en el caso de estudio, lo que demuestra la complejidad del problema aquí planteado.

Por otro lado, es evidente que la modelización matemática aquí expuesta puede ser extrapolable a la fabricación de otro u otros (simultáneamente) elementos constructivos, aunque sería necesario estudiar el tipo de restricciones lineales aplicables a esos otros casos, y se podrían plantear otros tipos de función objetivo, como por ejemplo minimizar el tiempo de ejecución, o la inversión necesaria.

Así pues, tres conclusiones fundamentales y generales se han extraído tras la realización de este trabajo:

- La búsqueda de la solución óptima (no heurística) en un problema de optimización relacionado con la fabricación de materiales, de construcción en particular, es una tarea muy compleja, imposible de realizar de forma manual, sin el conocimiento de herramientas del campo de las matemáticas, economía, etc., y sin el uso de paquetes informáticos específicos, que existen en el mercado, pero cuya existencia es generalmente desconocida en el campo de la Edificación. Tradicionalmente se suelen buscar soluciones a un problema, sin caer en que unos conocimientos adicionales pueden mejorar considerablemente la solución obtenida, con el consiguiente ahorro de tiempo y/o dinero.
- La Programación Lineal Entera resulta ser una herramienta matemática muy útil en estos tipos de problemas de optimización, ya que las funciones involucradas (tiempo, coste, beneficio, cantidad de material, etc.), tienen un comportamiento lineal. Además, como se ha comentado en el Capítulo 4, Excel, conocido y usado por la segura totalidad de expertos en el campo de la Edificación, tiene el complemento Solver que resuelve este y otros problemas de optimización, con lo que no es necesario acudir a paquetes específicos, complejos y caros si los problemas no son de tamaño muy grandes.
- El absoluto convencimiento de que el conocimiento y uso de la Programación Lineal Entera y de otras herramientas aprendidas en el Máster en Edificación pueden ayudar a mejorar la gestión de determinadas empresas involucradas en el proceso de la Edificación, ya que permiten, no encontrar una solución a un problema, no encontrar una buena solución a un problema, sino encontrar la mejor solución (la solución óptima), garantizada matemáticamente.

CAPÍTULO 7. AUTORÍA DE LAS FIGURAS

Figura 1 (pág. 10). <https://i2.kknews.cc/SIG=j23o21/12pp000pos252379r223.jpg>

Figura 2 (pág. 13).

http://p0.ifengimg.com/pmop/2018/0423/736157440F80F61340C6F8DFE046E4F00E938EE8_size12_w262_h201.jpeg

Figura 3 (pág. 14). <https://i1.kknews.cc/SIG=3u0v54o/12pn000s9p412q9s787q.jpg>

Figura 4 (pág. 14).

https://wkretype.bdimg.com/retype/zoom/446d8fd1b9f3f90f76c61b74?pn=33&o=jpg_6&md5sum=191c510452290e8dc869e0fec7b393ab&sign=6330fd7357&png=3815148-3941600&jpg=6736932-6962631

Figura 5 (pág. 15).

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e7/Taiwan_2009_Taipei_National_Theater_at_Chian_Kai_Shek_Cultural_Center_FRD_7293.jpg

Figura 6 (pág. 15).

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xl4khGkpoWK1HF6hhy/baike/c0%3Dbaike80%2C5%2C5%2C80%2C26/sign=3e82115fb2b7d0a26fc40ccfaa861d6c/50da81cb39dbb6fdc1d098cb0924ab18962b3757.jpg

Figura 7 (pág. 15). <https://i2.kknews.cc/SIG=3a13q9o/12p400048nn65240nr8r.jpg>

Figura 8 (pág. 16). <https://img.91ddcc.com/14375195218552.jpg>

Figura 9 (pág. 16).

http://img.mp.itc.cn/upload/20170723/daf5596cb2d64c989baa29a317b9de01_th.jpg

g

Figura 10 (pág. 16).

http://p0.ifengimg.com/pmop/2018/0728/E40FC42AE305E9F36866635FFCFCAA6E8D10486A_size184_w600_h767.jpeg

Figura 11 (pág. 17).

<http://www.hues.com.cn/upfile/pic/image/20160723/20160723135889138913.jpg>

Figura 12 (pág. 18). <https://i2.kknews.cc/SIG=32ev03c/97000025rn363313s37.jpg>

Figura 13 (pág. 18).

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xl4khGkpoWK1HF6hhy/baike/c0%3Dbaike80%2C5%2C5%2C80%2C26/sign=01f579e83efae6cd18b9a3336eda6441/eaf81a4c510fd9f941f4cdb62e2dd42a2934a40a.jpg

Figura 14 (pág. 19).

https://gss1.bdstatic.com/9vo3dSag_xl4khGkpoWK1HF6hhy/baike/c0%3Dbaike150%2C5%2C5%2C150%2C50/sign=83a155feac0f4bfb98dd960662261395/86d6277f9e2f0708299b1061e124b899a901f230.jpg

Figura 15 (pág. 19).

https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xl4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D220/sign=70f35207d21b0ef468e89f5cedc451a1/cefc1e178a82b9019ea1d91a738da9773912ef8f.jpg

Figura 16 (pág. 20), 17 (pág. 21-24) y 18 (pág. 24-27), los dibujos son de AUTOCAD.

HUBEI ZHONGLU ANCIENT GARDEN ANCIENT ARCHITECTURE LANDSCAPE DESIGN CO.LTD.*

Figura 19 (pág. 28).

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xl4khGkpoWK1HF6hhy/baike/c0%3Dbaike92%2C5%2C5%2C92%2C30/sign=97cc7540cc5c10383073c690d378f876/cc11728b4710b912b66083a4c9fdcf03934522c2.jpg

Figura 20 -36 (pág. 28-31).

<http://cxjsj.yancheng.gov.cn/xwzx/tzgg/201709/W020170904563692632340.doc>

Figura 37 (pág. 31). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/86017275.jpg?46>

- Figura 38 (pág. 32). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/9194py90.jpg?78>
- Figura 39 (pág. 32). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/kx5kx4x2.jpg?94>
- Figura 40 (pág. 32). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/3a8p1b47.jpg?84>
- Figura 41 (pág. 32). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/exc6f02x.jpg?58>
- Figura 42 (pág. 32). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/p7zb36b8.png?1500>
- Figura 43 (pág. 33). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/pfkppqey.jpg?63>
- Figura 44 (pág. 33). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/47b4yccf.png?1448>
- Figura 45 (pág. 33). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-09/8a2yf2az.jpg?75>
- Figura 46 (pág. 33). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/87e6ybdy.jpg?47>
- Figura 47 (pág. 33). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/abf0qayz.jpg?130>
- Figura 48 (pág. 33). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/e6y16pef.jpg?78>
- Figura 49 (pág. 33). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-09/ff1xa22d.jpg?144>
- Figura 50 (pág. 34). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/exppkzp5.png?1552>
- Figura 51 (pág. 34). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/2f81pq74.png?1357>
- Figura 52 (pág. 34). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/z2zc9384.jpg?85>
- Figura 53 (pág. 34). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-09/kdq87exc.jpg?107>
- Figura 54 (pág. 34). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/70acxea0.jpg?48>
- Figura 55 (pág. 35). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-09/1zy54qx6.jpg?59>
- Figura 56 (pág. 35). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-09/f890c08a.jpg?64>
- Figura 57 (pág. 35). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-09/ekxb28p2.jpg?79>
- Figura 58 (pág. 35). <http://img2.myhsw.cn/2015-12-08/c7fq2f0a.jpg?92>
- Figura 59 (pág. 35). <http://wap.heyuanjc.com/Upload/1516852719.jpg>
- Figura 60 (pág. 35). <http://img.album.toocle.com/0-0-1/2013/01/04/toocle/album/5d/50e67f4e20f5d.jpg>
- Figura 61 (pág. 36). <http://www.dymqdg.com/UploadFiles/01.jpg>
- Figura 62 (pág. 36). <http://www.dymqdg.com/UploadFiles/07.jpg>
- Figura 63 (pág. 36). <http://www.dymqdg.com/UploadFiles/014.jpg>
- Figura 64 (pág. 36). <http://www.dymqdg.com/UploadFiles/015.jpg>
- Figura 65 (pág. 36). <http://www.dymqdg.com/UploadFiles/012.jpg>
- Figura 66 (pág. 36). <http://www.dymqdg.com/UploadFiles/04.jpg>
- Figura 67 (pág. 37). <http://www.xzmdgy.com/Uploads/image/20180104/1515051474135644.jpg>

Figura 68 (pág. 57). https://tieba.baidu.com/p/504627504?red_tag=2644357164

Figura 69 (pág. 57). https://tieba.baidu.com/p/504627504?red_tag=2644357164

Figura 70 (pág. 58). AUTOCAD

HUBEI ZHONGLU ANCIENT GARDEN ANCIENT ARCHITECTURE LANDSCAPE DESIGN CO.LTD.*

Figura 71 (pág. 58). AUTOCAD

HUBEI ZHONGLU ANCIENT GARDEN ANCIENT ARCHITECTURE LANDSCAPE DESIGN CO.LTD.*

Figura 72 (pág. 58). AUTOCAD

HUBEI ZHONGLU ANCIENT GARDEN ANCIENT ARCHITECTURE LANDSCAPE DESIGN CO.LTD.*

Figura 73 (pág. 59). https://tieba.baidu.com/p/504627504?red_tag=2644357164

Figura 74 (pág. 59). AUTOCAD

HUBEI ZHONGLU ANCIENT GARDEN ANCIENT ARCHITECTURE LANDSCAPE DESIGN CO.LTD.*

Figura 75 (pág. 59). AUTOCAD

ARCHITECTURAL DESIGN AND RESEARCH INSTITUTE OF NANJING TECH UNIVERSITY

Figura_76 (pág. 59). AUTOCAD

ARCHITECTURAL DESIGN AND RESEARCH INSTITUTE OF NANJING TECH UNIVERSITY

Figura 77 (pág. 60). AUTOCAD

ARCHITECTURAL DESIGN AND RESEARCH INSTITUTE OF NANJING TECH UNIVERSITY

Figura 78 (pág. 60). AUTOCAD

ARCHITECTURAL DESIGN AND RESEARCH INSTITUTE OF NANJING TECH UNIVERSITY

Figura 79 (pág. 60). AUTOCAD

ARCHITECTURAL DESIGN AND RESEARCH INSTITUTE OF NANJING TECH UNIVERSITY

Figura 80 (pág. 60). AUTOCAD

ARCHITECTURAL DESIGN AND RESEARCH INSTITUTE OF NANJING TECH UNIVERSITY

Figura 81 (pág. 61). <http://down6.zhulong.com/tech/detailprof130700.htm>

Figura 82 (pág. 61). <http://down6.zhulong.com/tech/detailprof130700.htm>

Figura 83 (pág. 61). <http://down6.zhulong.com/tech/detailprof130700.htm>

Figura 84 (pág. 61).

http://www.zhaobeijing.com/competition_show.php?cid=8270&ccid=52

Figura 85 (pág. 62).

http://www.zhaobeijing.com/competition_show.php?cid=8271&ccid=52

Figura 86 (pág. 62). https://tieba.baidu.com/p/504627504?red_tag=2644357164

Figura 87 (pág. 63). https://tieba.baidu.com/p/504627504?red_tag=2644357164

Figura 88 (pág. 63). https://tieba.baidu.com/p/504627504?red_tag=2644357164

CAPÍTULO 8. REFERENCIAS

- [1] Qing shi ying zao ze li, Liang Sicheng, 1981.
- [2] A.Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, JohnWiley&Sons, WestSussex, 2000.
- [3] J.J.Salazar, Programación Matemática, Ed. Díaz de Santos, Tenerife, 2001.
- [4] M.S.Bazaraa, J.J.Jarvis, H.D.Sherali, Linear Programming and Network Flows, JohnWiley&Sons, Hoboken, 2010.
- [5] H.D.Sherali, P.J.Driscoll, Evolution and state-of-the-art in integer programming, J.Comput.Appl.Math. 124 (2000), 319–340.
- [6] <https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio>
- [7] <https://www.lindo.com/index.php/products/lindo-api-for-custom-optimization-application>
- [8] <https://www.lindo.com/index.php/products/lingo-and-optimization-modeling>
- [9] <https://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization>
- [10] <https://support.office.com/es-es/article/Definir-y-resolver-un-problema-con-Solver-9ed03c9f-7caf-4d99-bb6d-078f96d1652c>
- [11] Wolfram, Mathematica, <http://www.wolfram.com/mathematica>

[12] <http://www.025jianzhu.com/Html/news/2892.html>

[13] Bei jing shi jian she gong cheng ji jia yi ju – gai suan ding e, fang gu jian zhu gong cheng gai suan ding e. 2016.

[14]

<https://baike.baidu.com/item/%E6%96%97%E6%8B%B1%E5%87%BA%E8%B8%A9>

[15] https://es.wikipedia.org/wiki/Operaciones_de_coma_flotante_por_segundo