

## **MODELOS HIDRODINÁMICOS Y DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS**

**Iñigo J. Losada, Raúl Medina, Miguel A. Losada y César Vidal**

Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas. Universidad de Cantabria  
Dpto. de Ciencias y Técnicas del Agua y del Medio Ambiente  
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Avda. de los Castros, s/n. 39005 Santander  
Tfno.: 942 / 20.18.10 ; Fax: 942 / 20.18.60

### **INTRODUCCIÓN GENERAL**

Uno de los fines más importantes de la Ingeniería de Costas es la predicción de la evolución de la línea de costa con o sin la presencia de estructuras costeras. Sin embargo, la construcción de un modelo de predicción semejante precisa del conocimiento de la interacción entre el oleaje y la batimetría, así como de los mecanismos que inducen el transporte de sedimentos fuera y en el interior de la zona de rompientes. El modelo ideal debería estar constituido por diversos elementos. Un primer elemento lo constituiría el módulo de propagación de oleaje, cuyo fin sería llevar un oleaje, definido por su espectro direccional, desde aguas profundas hasta la costa, incluyendo refracción, difracción, asomeramiento, rotura e interacción ola-corriente. El segundo elemento, alimentado con los resultados del módulo anterior, debería ser capaz de reproducir la hidrodinámica en la zona de rompientes, determinando el sistema de corrientes inducido por el oleaje en tres dimensiones e incluyendo la corriente de resaca ("undertow"). A continuación, sería precisa la inclusión de un modelo de transporte de sedimentos que, a partir de las corrientes calculadas anteriormente, evaluara el transporte de sedimentos en suspensión y por fondo en todas las direcciones y a cualquier profundidad. Por último, un módulo en el que se planteara la ecuación de conservación del sedimento relacionaría el transporte anteriormente calculado con la evolución del lecho.

A primera vista, se puede observar que una de las principales dificultades que presenta este "modelo ideal" radica en las diferentes escalas temporales que rigen los fenómenos hidrodinámicos y los relacionados

con el transporte de sedimentos y evolución de la línea de costa, puesto que éstos últimos son varios órdenes de

magnitud más lentos. Cada uno de estos módulos ha evolucionado de distinta forma y su integración plantea aún serias dificultades.

De forma general, se puede decir que el estudio de la evolución de la línea de costa se ha abordado desde tres direcciones diferentes,

- Los modelos llamados de sedimentación/erosión inicial que básicamente realizan el cálculo del sistema de corrientes y del transporte de sedimentos en una batimetría que se asume permanece constante, y determinan al tasa de sedimentación o erosión en cada punto de la batimetría dada. Son los más utilizados en la actualidad, dado que son de fácil implementación y a muy bajo coste, pero son solo válidos para modelar procesos mucho más cortos que la escala del proceso morfológico (p.e. escala de un temporal).
- Los modelos morfodinámicos de medio plazo en los que la nueva batimetría vuelve a alimentar el modelo de propagación, iniciando, de nuevo, el ciclo. Estos modelos describen, fundamentalmente, las variaciones del lecho y sus escala de tiempo es muy próxima a la correspondiente a los procesos hidrodinámicos. Sus resultados no son extrapolables a escalas de tiempo superiores.
- Los modelos morfodinámicos de largo plazo en los que las ecuaciones constitutivas del modelo no describen los procesos físicos individuales sino que integran estos procesos a un más alto nivel,

mediante procesos matemáticos (promediado temporal), y razonamientos físicos y empíricos. Las escalas de tiempo correspondientes a estos modelos son incluso mayores que las escalas de los procesos morfodinámicos predominantes. El ejemplo más característico del uso de este tipo de modelo es la determinación del impacto morfológico inducido por la sobre elevación del nivel medio del mar.

**MODELOS DE PROPAGACIÓN DE ONDAS**

**Introducción**

La determinación del oleaje es absolutamente necesaria para el Ingeniero de Costas, dado que ese constituye la sollicitación fundamental a la que se ve sometida el elemento en estudio, ya sea natural o artificial.

Los datos de partida son obtenidos, generalmente, en aguas profundas y es necesaria su transformación hasta la zona de interés considerando procesos tales como asomeramiento, refracción, difracción, disipación u otros procesos que puedan afectar a la onda en su proceso de propagación hacia la costa.

Los modelos de propagación existentes se basan en:

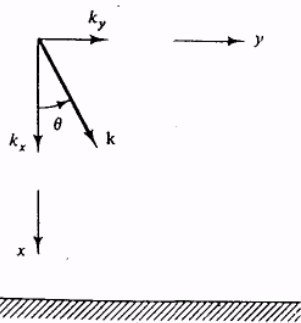
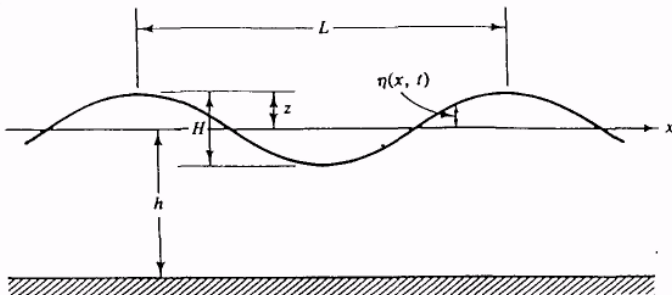


Figura 1 Definición de los parámetros de la onda y sistema de referencia

- Teorías matemáticas de ondas
- Modelos basados en la ecuación de la "mild-slope" (pendiente suave).

Solución de la ecuación en forma elíptica.

Solución de la ecuación en forma parabólica.

Solución de la ecuación como un sistema de ecuaciones hiperbólicas.

- Modelos basados en las ecuaciones de conservación

Conservación de la acción de onda

Irrotacionalidad del número de onda

**Conceptos Básicos**

El modelo más simple de propagación de oleaje es el debido a Airy, que estableció que la superficie libre de una onda propagándose en la dirección positiva del eje x es (en z=0),

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \sigma t) \tag{1}$$

donde a es la amplitud de la onda, k es el número de onda, que se define como  $k = 2\pi / L$ , donde L es la longitud de onda, y  $\sigma = 2\pi / T$  es la frecuencia angular asociada a la onda, y T su período (Figura 1).

Si la onda se propaga en una dirección arbitraria, la forma de la superficie libre se expresa como,

$$\eta(x, y, t) = a \cos(k \cos \theta x + k \sin \theta y - \sigma t) = a \cos S(x, y, t) \tag{2}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia que el tren de ondas forma con el eje x (Figura 1). El argumento de la función coseno, S(x,y,t), es llamado fase de la onda. Si definimos el vector número de onda por sus componentes en los ejes (x,y),  $\vec{k} = (k \cos \theta, k \sin \theta)$  y  $\vec{x} = (x,y)$ , tenemos que  $S = \vec{k}\vec{x} - \sigma t$ .

A medida que el tren se propaga pasando de una profundidad a otra, se produce la refracción y asomeramiento ("shoaling") del frente, dado que la longitud de onda L (y por tanto la celeridad de la onda  $C = L/T$ ), cambia con la profundidad. La longitud de onda local para teoría lineal se relaciona con la profundidad local, h, para un período dado, mediante la ecuación de la dispersión que puede ser expresada de formas diferentes:

$$L = L_0 \tanh kh \tag{3}$$

donde  $L_0 = gT^2/2\pi$  es la longitud de ondas en profundidades indefinidas.

Introduciendo  $k$  y  $\sigma$

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (4)$$

La ecuación de la dispersión (3) ó (4) indica que la longitud de onda es siempre más corta en profundidades reducidas que en indefinidas,  $L_0$ , donde solamente depende del período,  $T$ . Como puede observarse, la ecuación de la dispersión es trascendente, por lo que es necesario utilizar una técnica iterativa, tipo Newton-Raphson, para su resolución.

Para el caso de ondas propagándose en presencia de una corriente y asumiendo, como primera aproximación, que la corriente es uniforme en la profundidad y que fluye en la dirección del oleaje, se llega a la siguiente ecuación de la dispersión,

$$\omega = \bar{k} \bar{U} + \sigma \quad (5)$$

donde  $\bar{U}$  es la corriente y  $\sigma$  la frecuencia intrínseca asociada a unos ejes moviéndose con la corriente y que se obtiene de la ec. (4).  $\omega$  es la frecuencia absoluta,  $2\pi/T$ .

La celeridad de la onda  $C = L/T$ , se puede expresar para el caso sin corriente, a partir de (4), como:

$$C = C_0 \tanh kh \quad (6)$$

donde  $C_0$  es la celeridad de la onda en profundidades indefinidas ( $C_0 = gT/2\pi$ ).

Las ondas de pequeña amplitud no transportan masa, puesto que las trayectorias de sus partículas son cerradas. Sin embargo, es evidente que sí transportan energía, lo que hacen a una velocidad  $C_g$ , llamada celeridad de grupo, que se define como:

$$C_g = n C = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sin 2kh} \right) C \quad (7)$$

El factor  $n$  es igual a  $1/2$  en profundidades indefinidas y a  $1$  en profundidades reducidas.

A partir de la ecuación de la energía mecánica se deriva, para ondas propagándose sobre fondo horizontal, la siguiente expresión,

$$(E)_t + \nabla_h (E \bar{C}_g) = 0 \quad (8)$$

Esta ecuación de la conservación de la energía, no es válida para el caso de la existencia de una corriente o de disipación.

La ec. (8), puede extenderse al caso de fondo suavemente variable, para el que se obtiene,

$$\frac{\partial(E/\sigma)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{E}{\sigma} \bar{C}_g \right) = 0 \quad (9)$$

En este caso la magnitud que se conserva es la acción de onda,  $E/\sigma$ . Es evidente que si la  $\sigma$  se mantiene

constante, la ecuación de conservación de la onda se reduce a (8).

Finalmente, la ec. (9), puede extenderse al caso de la presencia de una corriente,  $\bar{U}$ :

$$\frac{\partial(E/\sigma)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{E}{\sigma} (\bar{U} + \bar{C}_g) \right) = 0 \quad (10)$$

Para el caso estacionario, y donde la frecuencia del tren de ondas es constante, la conservación de la energía se reduce a:

$$EC_g = (EC_g)_0 \quad (11)$$

lo que conduce a,

$$H = H_0 \sqrt{\frac{C_{g,0}}{C_g}} = H_0 K_s \quad (12)$$

donde  $K_x$  es el coeficiente de asomeramiento o "shoaling".

La introducción de disipación de energía inducida por efectos de rotura o fricción en el fondo puede incluirse en la ecuación de la conservación de la energía mediante un término adicional. Para el caso estacionario y fondo variable,

$$\nabla \cdot \left( \frac{E}{\sigma} \bar{C}_g \right) = -\epsilon_d \quad (13)$$

donde  $\epsilon_d$  tiene distintas expresiones según se trate de introducir efectos de la fricción por fondo, propagación sobre medios porosos o rotura debida a oleaje regular o irregular.

El fenómeno de la refracción tiene lugar cuando un tren de ondas incidiendo oblicuamente sobre la costa encuentra un cambio de profundidad. En ese caso, una parte del frente de la onda viaja en aguas más someras que el resto de la cresta, con una consiguiente reducción en la velocidad de propagación, lo cual produce el giro del frente.

Este tipo de fenómeno se presenta, asimismo, cuando el frente de la onda se encuentra con una corriente. Varias han sido las técnicas desarrolladas para el estudio de este fenómeno.

Para batimetría recta y paralela, la ley de Snell, derivada en óptica, nos da la información relativa a la dirección de incidencia en profundidades reducidas,  $\theta_2$ :

$$\frac{\sin \theta_1}{C_1} = \frac{\sin \theta_2}{C_2} \quad (14)$$

Esta ecuación tan simple nos sirve para calcular el ángulo de incidencia del frente de ondas propagado, en profundidades reducidas, sin más que calcular las celeridades correspondientes a profundidades reducidas,  $C_2$ , e indefinidas,  $C_1$ .

Hay, sin embargo, que hacer notar que este método no tiene en cuenta la forma del perfil que une los dos puntos de estudio.

En el caso de que la batimetría no sea recta y paralela, puede aplicarse la teoría del rayo y, de hecho, ésta ha sido la técnica más utilizada hasta hace unos pocos años. Esta técnica consiste en asumir batimetría recta y paralela en cada punto de las batimétricas, aplicando la ley de Snell localmente para trazar un rayo desde profundidades indefinidas hasta aguas someras.

Finalmente, para una batimetría irregular, para la cual asumir batimetría recta y paralela pudiera conducir a resultados erróneos, es de aplicación la irrotacionalidad del número de onda, como una generalización de la Ley de Snell. Esta ecuación se deriva a partir de la definición de la fase de la onda,  $S$ , y teniendo en cuenta que

$$\bar{k} = \nabla S(x, y, t) \quad (15)$$

$$\sigma = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (16)$$

de donde fácilmente se deduce

$$\nabla x \bar{k} = \bar{0} = \frac{\partial k \sin \theta}{\partial x} - \frac{\partial k \cos \theta}{\partial y} \quad (17)$$

Para batimetría recta y paralela, las derivadas en la dirección y son nulas, con lo que la irrotacionalidad del número de onda se reduce a la Ley de Snell. Para una batimetría real esta ecuación puede resolverse de diversas formas.

Una de ellas es la teoría del rayo. Mediante un cambio de variable, a unos ejes tangente y normal al rayo (Figura 2), (Dean y Dalrymple, 1984), convirtieron la ec. (17) en:

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial n} \quad (18)$$

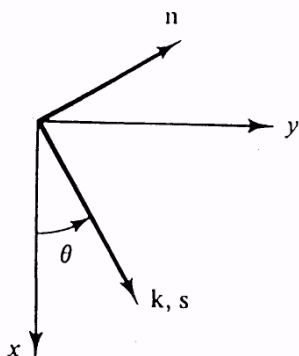


Figura 2. Sistema de referencia asociado a los ejes

donde,  $s$  y  $n$  son las coordenadas tangente y normal al dique. Esta ecuación es el Principio de Fermat que, tomada de la óptica, establece que la luz siempre sigue la trayectoria más corta entre dos puntos.

Asociada a este cambio de dirección, se produce una variación de la altura de ola debido a la convergencia o divergencia de los rayos. Si llamamos,  $b_0$ , a la separación inicial entre rayos y  $b$  a la separación en la zona de estudio, a partir de los gráficos obtenidos mediante la propagación de los rayos se puede obtener el coeficiente de refracción,  $K_r$  como:

$$K_r = \sqrt{\frac{b_0}{b}} \quad (19)$$

Munk y Arthur (1952) desarrollaron unas ecuaciones para establecer la separación entre rayos y, por tanto, la variación de la altura de ola, analíticamente. Para  $\beta = b/b_0$ , puede establecerse la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + p \frac{\partial \beta}{\partial s} + q \beta = 0 \quad (20)$$

donde,

$$p = -\frac{\cos^2 \theta}{C} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\sin \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (21)$$

$$q = -\frac{\sin^2 \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\sin 2\theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\cos^2 \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

La altura de ola local se calcula como,

$$H = H_0 \sqrt{\frac{C_0}{2C_g}} \sqrt{\frac{1}{\beta}} \quad (22)$$

donde  $C_g$  es la celeridad de grupo local.

Con el fin de mecanizar el procedimiento, se ha escrito varios programas utilizando la teoría del rayo. El mejor ejemplo es, probablemente, el de Noda (1974), que aborda el problema de la refracción y asomeramiento, resolviendo simultáneamente el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \cos \theta & ; & & \frac{\partial y}{\partial s} &= \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{1}{C} \left[ \sin \theta \frac{\partial C}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial \beta}{\partial s} &= r & ; & & \frac{\partial r}{\partial s} &= -pr - q\beta \end{aligned}$$

donde las dos últimas ecuaciones se obtienen al convertirla ecuación diferencial de segundo orden (20) en dos ecuaciones de primer orden.

La Figura 3, muestra los resultados obtenidos por Noda para la batimetría descrita analíticamente en la gráfica. La línea de rotura se obtiene aplicando un criterio de rotura que compara la profundidad con la altura de ola resultante de la propagación en ese punto.

Sin embargo la teoría del rayo presenta varios problemas, como son:

- No garantiza una densidad de rayos suficiente en la zona donde deseamos realizar nuestro diseño, dado que, a priori, desconocemos la dirección que seguirá cada rayo.
- La obtención de datos de partida para programas basados en mallas, para cálculo de corrientes o transporte de sedimentos, resultaría terriblemente tediosa.
- Se produce el corte de los rayos propagados, lo cual implicaría altura de ola infinita.

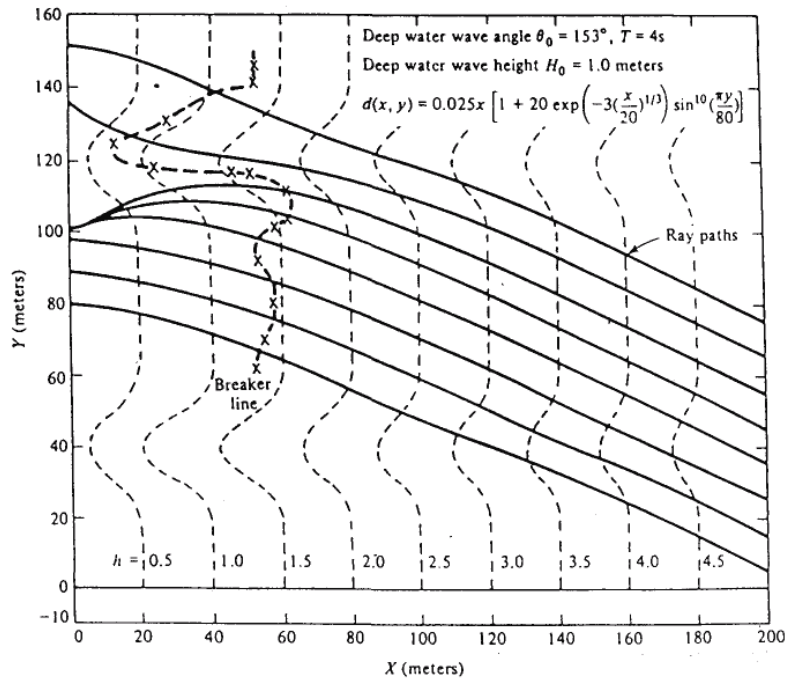


Figura 3. Rayos obtenidos para un tren de ondas incidiendo oblicuamente en una playa. (Noda, 1974)

Cierto es que el primer problema, puede resolverse calculando el rayo desde nuestro punto de diseño en la dirección opuesta a la propagación; sin embargo, el segundo punto, de gran importancia para el desarrollo de un "modelo ideal", es insalvable si no fuera por la utilización de modelos sobre mallas.

Por estos problemas, los programas basados en la teoría del rayo, aunque muy utilizados hace una década, han caído en desuso.

Más recientemente, la refracción ha sido estudiada mediante la resolución de la ecuación de la irrotacionalidad del número de onda sobre una malla rectangular (Perlin y Dean, 1983; Dalrymple, 1988 y 1991). Como ya hemos dicho, la ventaja principal de este tipo de modelos es que los resultados obtenidos en cada nodo de la malla pueden ser empleados como datos de partida en modelos secundarios.

El punto de partida es la generación de una malla sobre el área de interés. Posteriormente, la ec. (17) se resuelve mediante diferencias finitas, obteniéndose como resultado la dirección de la onda en cada punto de la malla. La altura de ola puede calcularse a partir de la ecuación de la conservación de la energía o de conservación de la acción de onda. Para el caso de ola—corriente, la conservación de la energía se reemplaza por la ecuación de la conservación de la acción de onda:

$$\frac{\partial(E/\sigma)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{E}{\sigma} (\bar{U} + \bar{C}_g) \right) = 0 \quad (23)$$

donde  $\sigma$  es la frecuencia intrínseca asociada a unos ejes desplazándose con la corriente,

$$\sigma = \omega - \bar{k} \cdot \bar{U} \quad (24)$$

La Figura 4 presenta un caso de aplicación del modelo REFRACT, Dalrymple (1988).

Los modelos analizados hasta ahora son capaces de predecir los fenómenos de refracción, asome\ramiento y rotura incluyendo un criterio de rotura, sin embargo, están limitados, dado que no son capaces de modelar la difracción en las zonas próximas a obstáculos, ni el fenómeno que tiene lugar cuando se produce la intersección entre dos rayos, lo cual conduciría a alturas de ola infinitas.

Para explicar este fenómeno es necesario introducir el concepto de la difracción.

El proceso de difracción se pone de manifiesto como la cesión lateral de energía, perpendicularmente a la dirección dominante de propagación. La mejor visualización de este proceso la configura la propagación de un tren de ondas, interrumpida por la presencia de un dique. Si no se produjera la cesión lateral de energía, la zona a sotavento del dique permanecería en calma, mientras que el frente continuaría propagándose sin variar ni su forma, ni altura de ola. Esto daría lugar a una discontinuidad.

## BATIMETRÍA GRANADILLA

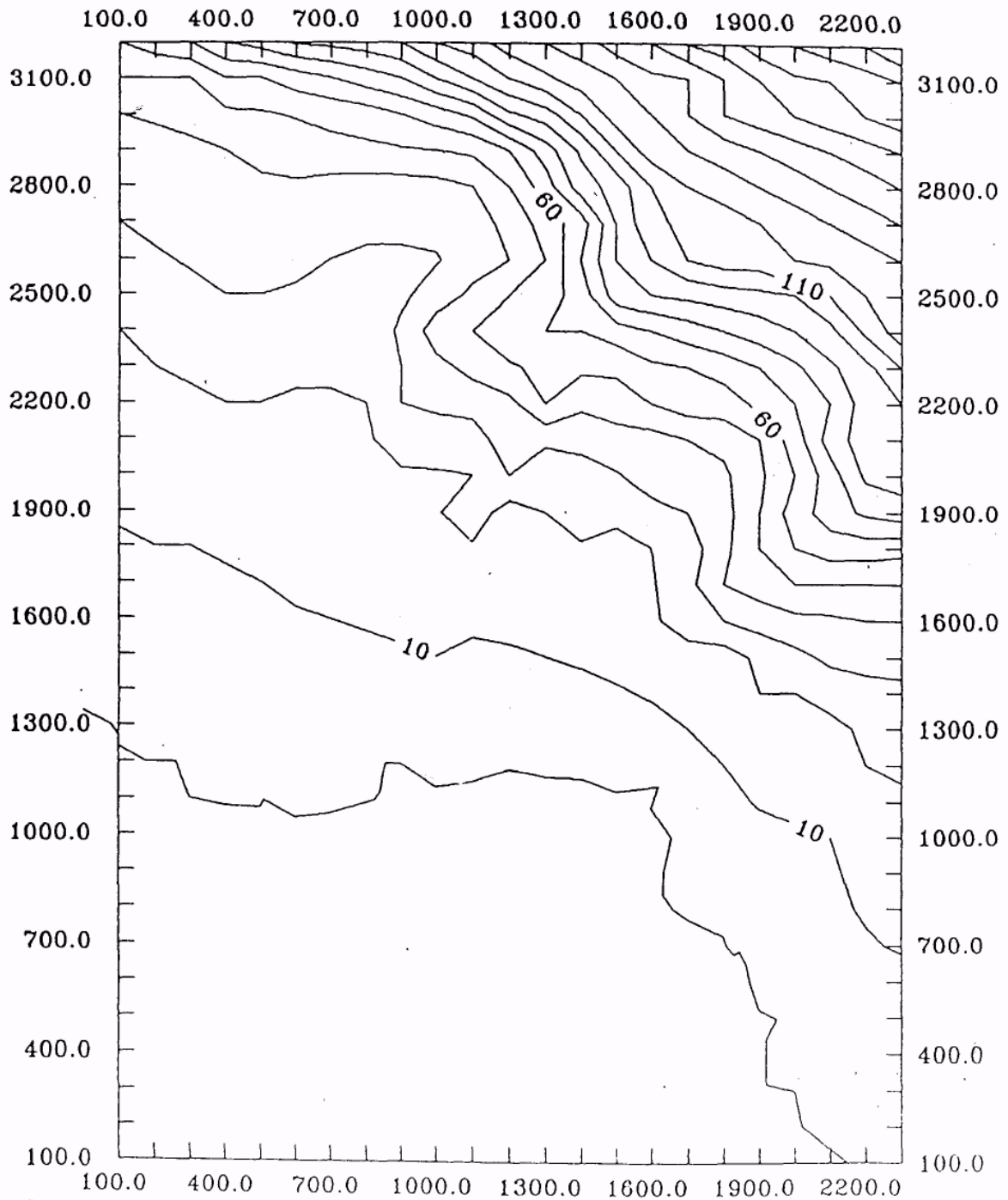


Figura 4.a. Batimetría resultante del programa **REFRACT** aplicado a la costa de Granadilla (Tenerife).  $T = 12$ , dirección: SE,  $H = 1$  m, marea = 2.4 m.

REF2VEC    RESULTADOS AMPLITUD Y DIRECCIÓN    ESCALA H = 1.0  
 T = 9.0 sg.    DIR = SE    MAREA = 2.4 m.    ESCALA V = 1.0

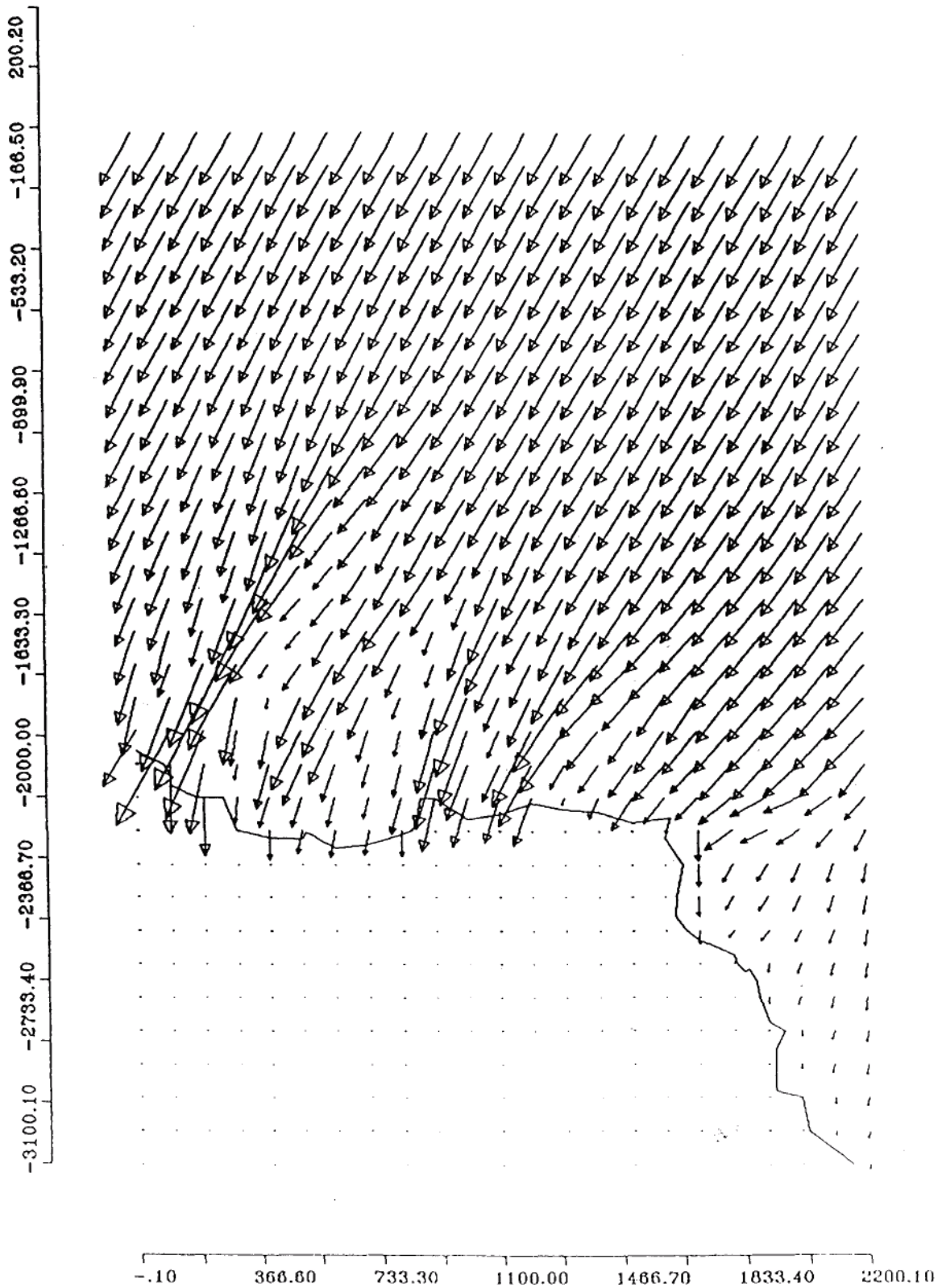


Figura 4.b. Diagrama de vectores (amplitud y dirección) resultante del programa **REFRACT** aplicado a la costa de Granadilla (Tenerife). T = 12, dirección: SE, H = 1 m, marea = 2.4 m.

La difracción es también importante para el caso de propagación de ondas en largas distancias. En dichos casos, considerar, únicamente, los efectos de la refracción daría lugar a zonas de alta concentración de energía. Es por ello necesario, introducir la difracción, con el fin de reproducir la cesión lateral de energía donde se cortan los rayos.

La solución teórica a la difracción en un dique semi-infinito fue formulada por Sommerfeld y se basa en la resolución de la ecuación de Laplace con sus correspondientes condiciones de contorno, una vez asumido fluido incompresible y flujo irrotacional:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (25)$$

Si asumimos,

$$\phi = A(x,y) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i\sigma t} \quad (26)$$

donde A(x,y) es una amplitud que varía en el espacio, llegamos a la ecuación de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 A = 0 \quad (27)$$

Esta ecuación de tipo elíptico debe ser resuelta con sus correspondientes condiciones de contorno. La solución teórica para dique finito fue obtenida por Penney y Price (1952) como la suma de la difracción debida a cada uno de los extremos del dique.

El SPM contiene una serie de diagramas mediante los cuales puede obtenerse el coeficiente de difracción asociado a distintos tipos de estructuras y para diferentes ángulos de incidencia para fondo horizontal. La Figura 5 muestra una de los gráficos incluidos en el SPM.

**Ecuación de la "Mild Slope"**

La ecuación de la "mild slope", fue introducida por Berkhoff (1972) para estudiar la propagación de ondas sobre fondos suavemente variables. Definiendo el potencial total como,

$$\phi = \bar{\phi} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \quad (28)$$

Berkhoff realizó la siguiente integración,

$$\int_{-h}^{\eta} w(z) \nabla^2 \phi dz = 0 \quad (29)$$

donde,

$$w(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (30)$$

La ecuación en 3-D de Laplace se transforma en la siguiente ecuación aproximada en 2-D:

Si sustituimos  $\vec{\phi} = A(x,y) e^{iS(x,y)}$ , donde la amplitud, A,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( CC_g \frac{\bar{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( CC_g \frac{\bar{\phi}}{\partial y} \right) + k^2 CC_g \bar{\phi} = 0 \quad (31)$$

y la fase, S, son reales, en la ec. (31), podemos separar la ecuación de la "mild slope" en dos ecuaciones,

$$k^2 - |\nabla S|^2 + \frac{\nabla \cdot CC_g \nabla A}{CC_g A} = 0 \quad (32)$$

$$\nabla \cdot \left( C_g A^2 \sigma \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \right) = \nabla \cdot \left( \bar{C}_g \frac{E}{\sigma} \right) = 0 \quad (33)$$

La primera ecuación consta de dos componentes. La primera componente nos da el número de onda real, VS, en función del número de onda k obtenido de la ecuación de la dispersión (4), más un término corrector debido a la difracción, resultante de los gradientes locales de amplitud y celeridad de la onda. La segunda ecuación, (33), es la conservación de la acción de onda.

Por tanto, la ecuación de la "mild slope" es una herramienta poderosa para el estudio conjunto de los efectos de la refracción y difracción.

La ecuación (30) ha sido resuelta de maneras diversas. La primera aproximación al problema se realizó mediante el método de los elementos finitos (Berkhoff, 1972, Bettes y Zienkiewicz, 1977, Houston, 1981), resolviendo la ecuación en su forma elíptica.

El Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas de la Universidad de Cantabria generó su propio programa, llamado, MSP, para la resolución completa de dicha ecuación. La solución del problema elíptico requiere la determinación de las condiciones de contorno en todo el dominio.

Esta cuestión plantea grandes problemas, sobre todo en las condiciones de absorción para incidencia oblicua puesto que aparecen reflexiones no deseadas, propias del modelado numérico.

Más aún, para propagación en superficies muy grandes, el método de los elementos finitos exige el uso de grandes mallas, y por tanto, la inversión de grandes matrices que precisan de mucho tiempo de computación. Esto hace recomendable su uso, fundamentalmente, para el estudio de resonancia en dársenas.

Frente a este problema, Radder (1979) introdujo la aproximación parabólica de la ecuación de la "mild slope", que tiene la ventaja fundamental de no precisar el uso de la condición de contorno en la costa, casi siempre desconocida. Por otro lado, simplifica notablemente la resolución numérica del problema.



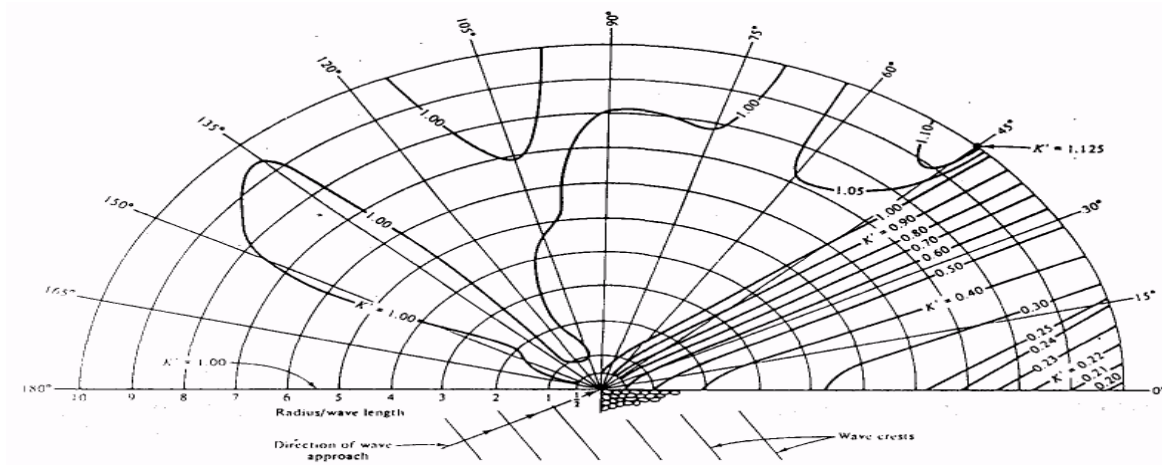


Figura 5. Coeficientes de difracción en un dique semi-infinito impermeable para una incidencia de 30° SPM

La aproximación parabólica introduce la hipótesis de que las ondas se propagan en una dirección predominante respecto a uno de los ejes coordenados del sistema de referencia en el que se resuelve la ecuación. Esto se traduce en una limitación del ángulo de incidencia que obliga, en algunos casos, a utilizar más de una malla para una misma localización.

Volviendo al caso de fondo horizontal plano, si examinamos la forma del potencial  $\phi$ , que hemos utilizado en el estudio de la difracción, podremos hacer la hipótesis de que la amplitud,  $A$ , debe variar rápidamente en la dirección del eje  $x$ , dado que ésta es la dirección en la que hemos asumido el comportamiento ondulatorio del tren de ondas. Para ondas propagándose en esta dirección, este comportamiento se expresa mediante una función de la forma  $e^{ikx}$ . Por tanto, para ondas propagándose fundamentalmente en la dirección del eje  $x$ , esta función contendrá la mayor parte de la información relativa a la oscilación. En este caso, el potencial puede expresarse como,

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{A}(x, y) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{ikx} e^{-i\sigma t} \quad (34)$$

En este caso,  $A(x, y)$  varía lentamente en  $x$ . Substituyendo esta expresión en la ecuación de Laplace y asumiendo profundidad constante, llegamos a:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} = 0 \quad (35)$$

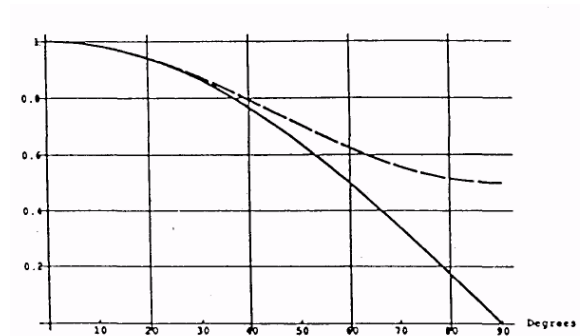


Figura 6. Error entre la solución parabólica y la solución elíptica

Se puede demostrar que para pequeños ángulos de incidencia el primer término es despreciable respecto a los dos siguientes con lo que llegamos a la aproximación parabólica para profundidad constante,

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial y^2} \quad (36)$$

Para onda plana, se obtiene la siguiente solución a la ec. (36),

$$\bar{A}(x, y) = ae^{-\frac{ik}{2} \sin^2 \theta x + ik \sin \theta y} \quad (37)$$

Si comparamos la solución aproximada,  $A(x, y) e^{ikx}$ , con la solución de onda plana obtenida para la ecuación elíptica (27).

$$A(x, y) = ae^{ik \cos \theta x + ik \sin \theta y} \quad (38)$$

tenemos:

$$ae^{-ik \cos \theta x + ik \sin \theta y}$$

frente a

$$ae^{ik \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) x + ik \sin \theta y} \quad (39)$$

Esto demuestra que la aproximación parabólica para ondas planas aproxima  $\cos \theta = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2}$  por los dos primeros términos de su desarrollo en serie,  $(1 - 1/2 \sin^2 \theta)$ . Para pequeños valores de  $\theta$ , el error cometido es prácticamente despreciable; sin embargo, para ángulos mayores de  $45^\circ$ , los errores cometidos pueden ser importantes (Figura 6), lo cual delimita el campo de aplicación de la aproximación parabólica.

Kirby y Dalrymple (1983) introdujeron una aproximación parabólica no lineal, que incluye la corrección de la celeridad de la onda hasta el orden de Stokes III. Este modelo llamado REF/DIF, y que no incluye reflexión, ha mostrado resultados excelentes a la hora de comparar los mismos con los resultados experimentales de Berkhoff, Booij y Radder (1982). Partiendo de este modelo, el Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas de la Universidad de Cantabria ha realizado una serie de modificaciones al programa que optimizan su rendimiento y mejoran su aplicabilidad a casos reales. De la experiencia adquirida mediante estas aplicaciones se ha observado que el modelo trabaja muy satisfactoriamente para ángulos de incidencia menores de  $45^\circ$ . Para ángulos mayores, es necesario orientar la malla hasta alcanzar ángulos en el rango especificado. El programa REF/DIF incluye, asimismo, la rotura mediante la inclusión del modelos de Daily, Dean y Dalrymple (1985). Este modelo asume que después del proceso de rotura existe una altura de ola estable igual a una determinada fracción de la profundidad y que la tasa de disipación de energía en la zona de rotura es proporcional a la diferencia entre el flujo de energía real y el flujo de energía estable.

REF/DIF incluye, además, diferentes modelos para la disipación por fondo incluyendo efectos de capa límite o propagación sobre fangos o lechos arenosos.

La Figura 7 incluye la batimetría y resultados de superficie libre e isoclinas de altura de ola máxima obtenidos de la aplicación del modelo REF/DIF a la playa de Plencia (Vizcaya) para un oleaje incidente de  $T = 18$  s y dirección NW,  $H = 4$  m y media marea.

Siguiendo esta misma línea, basada en la aproximación parabólica de la ecuación de la "mild-slope" linealizada, Grassa (1992) desarrolló un modelo numérico semejante al anterior, pero con un algoritmo

numérico distinto y variando alguna de las condiciones de contorno. Posteriormente, se ha realizado algunos códigos nuevos basados en las mismas ecuaciones, García (1994).

Con el fin de ampliar el rango de validez angular de las aproximaciones parabólicas, Kirby (1986), con base en una aproximación minimax extendió la solución hasta ángulos de  $70^\circ$ .

Existen otros modelos de propagación que se basan en la programación no de la ecuación de la "mild slope" en su forma parabólica o elíptica sino en la implementación de las ecuaciones de conservación. Ebersole (1985) desarrolló un modelo de propagación, RCPWAVE, que resuelve las ecuaciones (32) (33) y (17) sobre una malla en diferencias finitas. A pesar de que este modelo no tiene la limitación del ángulo, presente en los modelos parabólicos, sí tiene algunos inconvenientes. Básicamente, cualquier modelo que utiliza estas ecuaciones no predice de forma adecuada los efectos que se producen en zonas donde la refracción-difracción es importante o, en general, en zonas donde la intersección de los frentes da lugar a puntos donde la superficie libre se anula.

Basándose en las ecuaciones de conservación, los miembros del Laboratorio de Ingeniería Marítima (LIM) de la UPC han desarrollado un modelo de propagación, Rivero et al. (1993).

### Modelos en profundidades reducidas

Hasta ahora, todos los modelos planteados, tanto matemáticos como numéricos, han tratado de resolver la ecuación de Laplace o de la "mild slope". Sin embargo, es sabido que la propagación de ondas en profundidades reducidas,  $kh < \pi/10$  o  $h/L < 1/20$ , se modela más eficientemente mediante la utilización de otras teorías. Básicamente, las ecuaciones que modelan la propagación en este caso son las ecuaciones de Boussinesq, que para fondo constante tienen como solución las conocidas onda solitaria y onda cnoidal. Para fondo variable, las ecuaciones no lineales que gobiernan el fenómeno son (Peregrine, 1967),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} + \dots \quad (40)$$

$$\dots + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( h \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(h + \eta)u}{\partial x} = 0 \quad (41)$$

Existen varias soluciones numéricas para problemas en dos dimensiones y fondo irregular que han dado lugar a diferentes programas. La aplicación de estos modelos tipo Boussinesq a casos reales ha mostrado un correcto funcionamiento para oleajes incidiendo normalmente a la playa, Freilich y Guza (1984).

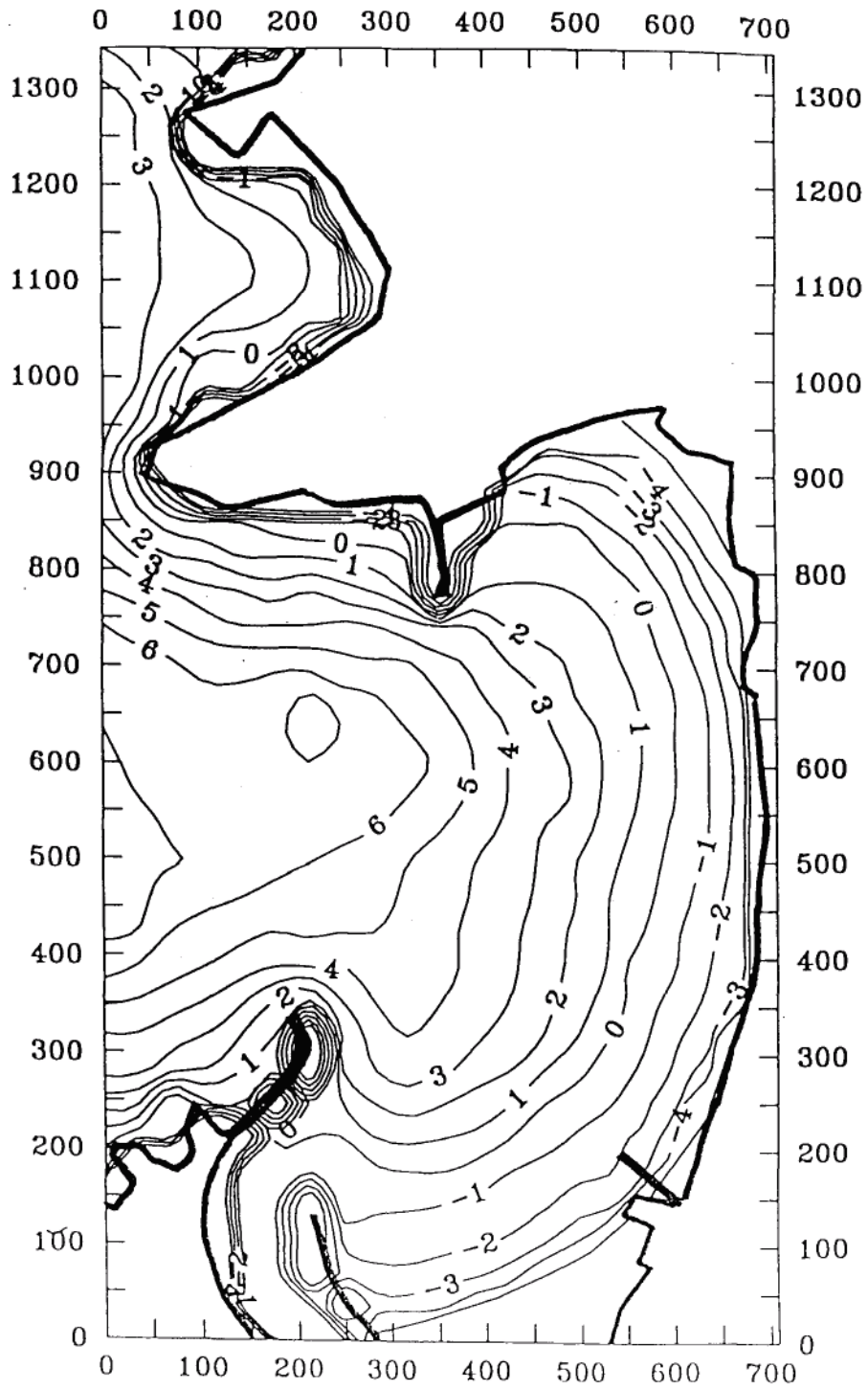


Figura 7.a. Plencia (Vizcaya). Batimetría

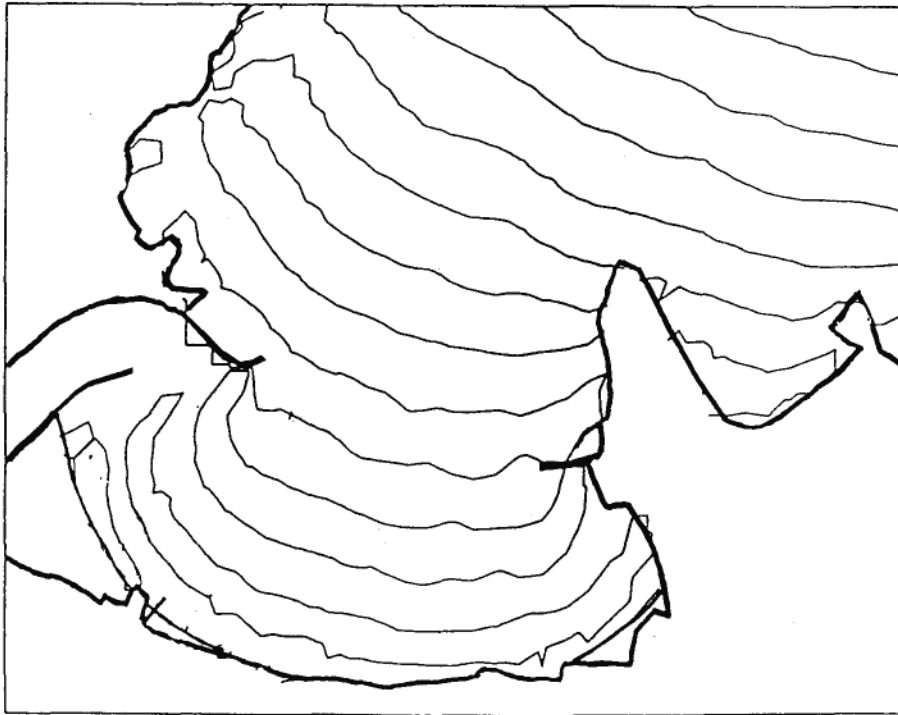


Figura 7.b. Plencia (Vizcaya). Superficie libre.  $T = 18$  s, NW,  $H = 4$  m, marea de 2.2 m.

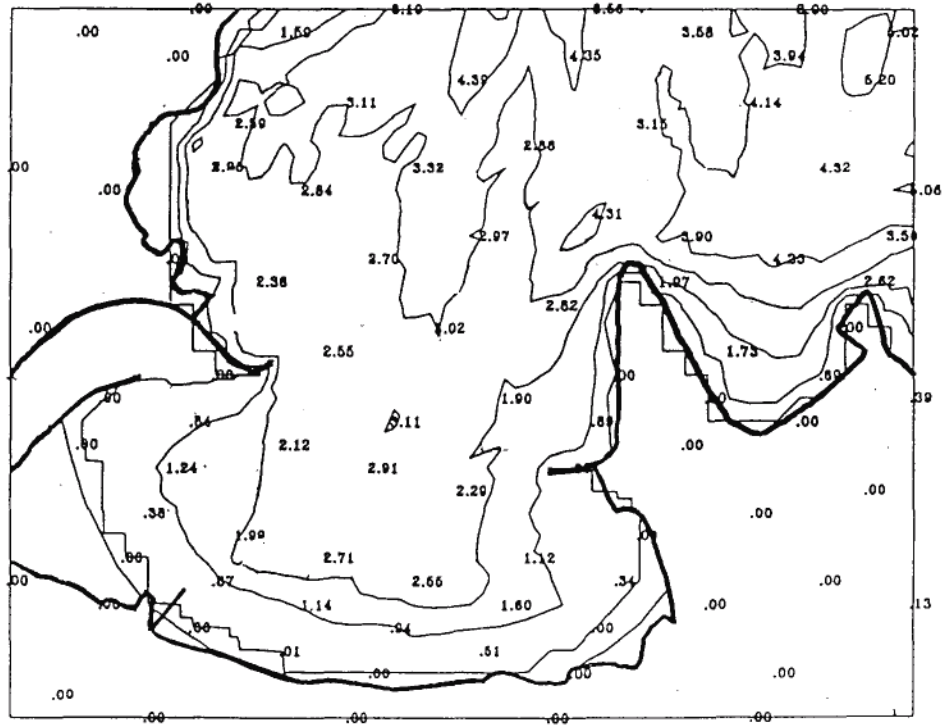


Figura 7.c. Plencia (Vizcaya). Isolíneas de altura de ola máxima.  $T = 18$  s, NW,  $H = 4$  m, marea de 2.2 m.

Estos modelos se han extendido también al caso de oleaje direccional introduciendo una aproximación parabólica de las ecuaciones, Liu, Yoon y Kirby (1985). Asimismo, existen modelos que incluyen los efectos de la rotura, fricción e incidencia oblicua.

En España, el LIM de la UPC ha desarrollado un programa que resuelve las ecuaciones de Boussinesq incluyendo oleaje irregular y con especial aplicación al estudio de la agitación portuaria.

**Modelos para oleaje irregular**

Es sabido que en la realidad la superficie del mar se compone de un conjunto de trenes de ondas con diferentes frecuencias y direcciones. En ese caso, el oleaje puede ser representado mediante la introducción de un espectro de energía, S(f,θ).

Una vez definido el espectro representativo del estado de mar que se desea modelar, la propagación del mismo puede abordarse por dos vías diferentes. La primera se basa en asumir que el espectro puede ser discretizado. Para ello, se parte de un espectro bidimensional formado por un espectro frecuencial y una función de dispersión angular y se discretiza obteniendo componentes individuales que se caracterizan por un periodo y una dirección asociadas. Posteriormente, utilizando uno de los modelos lineales, monocromáticos, anteriormente descritos, se propaga cada una de las componentes de forma simultánea sin interacción entre ellas. Una vez realizada la propagación en cada punto de la malla definida, se puede obtener parámetros estadísticos tales como H<sub>1/3</sub> o H<sub>ms</sub> a partir de las amplitudes obtenidas para cada componente.

Estos modelos pueden incluir también efectos tales como la rotura mediante la introducción de modelos de rotura para oleaje irregular. Battjes y Janssen (1978), asumiendo una distribución de alturas de ola tipo Rayleigh, truncaron dicha distribución en la altura de ola de rotura y utilizaron un modelo de disipación basado en un "bore" turbulento, semejante a un resalto hidráulico. Thornton y Guza (1983), introdujeron funciones de distribución de la altura de ola en rotura obtenidas teóricamente, que posteriormente compararon con datos de campo. Presentaron dos expresiones, la primera (42), más simple, permite una solución analítica, la segunda (43), más compleja, consigue un mejor ajuste a los datos.

$$\epsilon_d = \frac{3}{32\sqrt{\pi}} \rho g \frac{B^3 \sigma}{Y^4 h^5} H_{rms}^7 \tag{42}$$

$$\epsilon_d = \frac{3}{32\sqrt{\pi}} \rho g \frac{B^3 \sigma}{Y^2 h^3} H_{rms}^5 \left[ 1 - \frac{1}{(1 + (H_{rms} / y h^2)^{5/2})} \right] \tag{43}$$

γ es un parámetro empírico, índice de rotura en régimen de saturación, para el que se suele tomar 0.42.

Todos los modelos numéricos incluidos en el apartado *Ecuación de la "MildSlope"* incluyen la posibilidad de propagar oleaje irregular siguiendo el esquema aquí expuesto, salvo pequeñas diferencias en el tratamiento de la discretización y de la rotura.

La segunda aproximación al problema del oleaje es mediante la propagación del espectro directamente.

Para batimetría recta y paralela, LeMéhaute y Wang (1982) demostraron que el asomeramiento sufrido por un espectro S(σ,θ) puede obtenerse como,

$$S(\sigma, \theta) = \frac{k C_{go}}{k_0 C_g} S_0 \left[ \sigma, \sin^{-1} \left( \frac{k}{k_0} \sin \theta \right) \right] \tag{44}$$

Aunque este modelo tan simple no considera la interacción entre componentes, Freilich, Guza y Elgar (1990) demostraron que funciona razonablemente bien para procesos de asomeramiento entre 10 m y 4 m.

En esta línea, los modelos se han ido sofisticando, apareciendo modelos en diferencias finitas que, resolviendo la conservación de la acción de ondas, incluyen tanto la refracción inducida por el fondo como por la comente, Sakai, Koseki e Iwake (1983), Holthuijsen y Booij (1990).

Actualmente se sigue trabajando en modelos espectrales de este tipo aunque todavía, para aplicaciones ingenieriles, el oleaje irregular sigue tratándose como superposición lineal de ondas.

**MODELOS DE HIDRODINÁMICA EN LA ZONA DE ROMPIENTES**

El sistema circulatorio en la zona de rompientes es dominado por las fuerzas inducidas por el oleaje y asociadas a la rotura del mismo. El modelado del sistema circulatorio en la zona de rompientes es necesario para resolver el transporte de sedimentos y las variaciones morfológicas en la línea de costa.

Estos modelos se basan fundamentalmente en la resolución de las ecuaciones promediadas del movimiento y la ecuación de la continuidad. Sin embargo, estas ecuaciones pueden ser resueltas con diferentes grados de complejidad. En cualquier caso, la utilización de las ecuaciones promediadas precisa unas expresiones para las tensiones tangenciales y turbulentas que obligan a introducir una serie de ecuaciones de cierre.

El modelo más completo es el tridimensional (3-D) que resuelve las ecuaciones en una malla tridimensional y, por tanto, las características del sistema circulatorio en toda la columna de agua, a lo largo y perpendicularmente a la costa. Este tipo de modelo está todavía en fase de desarrollo y no es usado con mucha frecuencia, dada su complejidad y sus elevados costes de computación.

Con el fin de simplificar el modelo circulatorio, se reduce una dimensión, pasando a los modelos bidimensionales (2-D). La técnica de resolución numérica más comúnmente utilizada es diferencias finitas y, especialmente, esquemas de tipo implícito, dado que estos reducen las inestabilidades numéricas.

Existen dos aproximaciones diferentes a estos modelos, los puramente 2-D (2-DV) y los modelos integrados en vertical (2-DH). En el primer caso (2-DV), (Daily y Dean (1984), Stivey Battjes (1984)), se asume que las velocidades y gradientes en la dirección paralela a la costa son nulos y los resultados obtenidos son velocidad y niveles.

Los modelos (2-DH), (Basco (1983), de Vriend (1987)) resuelven las ecuaciones del movimiento y de continuidad integradas en vertical sobre una malla y como resultado se obtiene niveles y las dos componentes horizontales de la velocidad, sin embargo, presentan el inconveniente de perder la estructura vertical del flujo. Toda la estructura vertical del flujo queda embebida en la expresión de la fricción en el fondo.

El Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas de la Universidad de Cantabria ha desarrollado un modelo 2-DH, llamado COPLA (CORrientes en PLAyas) para PC, que utilizando los resultados del modelo REF/DIF de propagación, calcula los tensores de radiación como agentes impulsores de las corrientes. El modelo también puede utilizar el viento o la marea como agentes impulsores. Los resultados obtenidos de este programa, que numéricamente resuelve las ecuaciones del movimiento promediadas en el período de la onda e integradas en vertical, son niveles ("set-up" y "set-down"), así como el sistema de corrientes.

Asumiendo un sistema de ejes cartesianos en los que x indica la dirección transversal a la playa, y la dirección longitudinal y z la profundidad, las ecuaciones que resuelve el modelo COPLA son las siguientes:

Continuidad:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(UH)}{\partial x} + \frac{\partial(VH)}{\partial y} = 0 \quad (45)$$

Ecuaciones del Movimiento:

$$\begin{aligned} x: \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \dots \\ \dots + \frac{1}{\rho H} \frac{\partial}{\partial x} (S_{xx}) + \frac{1}{\rho H} \frac{\partial}{\partial y} (S_{xy}) + \dots \\ \dots + \frac{gU}{c^2 H} (U^2 + V^2)^{1/2} - \epsilon \left[ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} y: \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots \\ \dots + \frac{1}{\rho H} \frac{\partial}{\partial x} (S_{xy}) + \frac{1}{\rho H} \frac{\partial}{\partial y} (S_{yy}) + \dots \\ \dots + \frac{gV}{c^2 H} (U^2 + V^2)^{1/2} - \epsilon \left[ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

donde

$$H = \eta + h \quad (48)$$

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} (\rho u^2 + p) dz dt - \frac{1}{T} \int_{-h}^{t+T} \int_{-h}^0 P_0 dz dt \\ S_{yy} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} (\rho v^2 + p) dz dt - \frac{1}{T} \int_{-h}^{t+T} \int_{-h}^0 P_0 dz dt \\ S_{xy} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} (\rho uv + p) dz dt \\ \eta &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta(x, y, t') dt' \\ U &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} u(x, y, z, t) dz dt \\ V &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} v(x, y, z, t) dz dt \end{aligned}$$

donde h es el calado hasta el nivel de referencia, H calado total, T período del oleaje,  $S_{xx}$   $S_{xy}$ ,  $S_{yx}$   $S_{yy}$  son las componentes del tensor de radiación, c el coeficiente de fricción, ε el coeficiente de viscosidad turbulenta, p es la presión total y  $p_0$  la presión estática a partir del nivel medio.

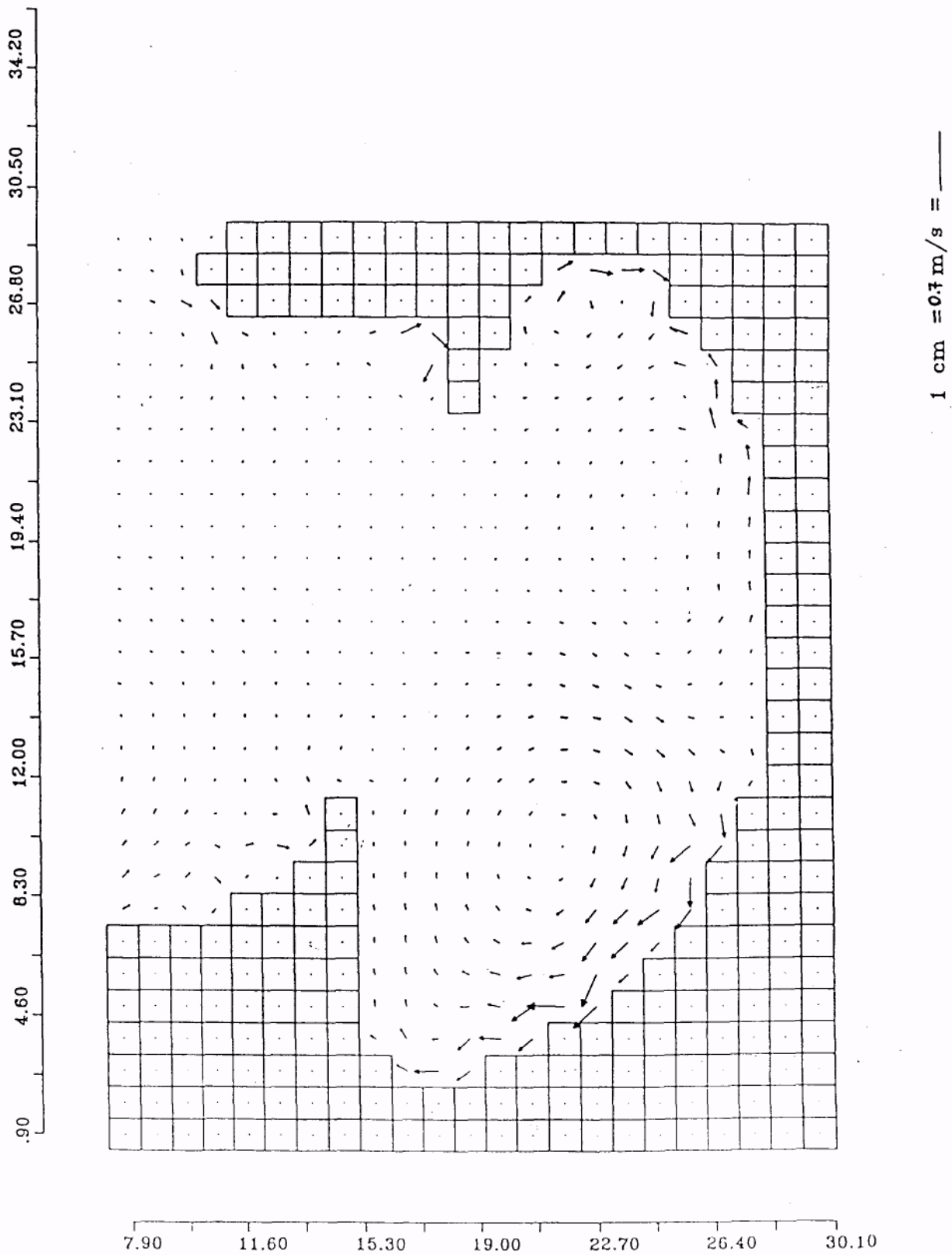


Figura 8. Corrientes en la playa de Plencia. T-18 s, NW, H-5 m, pleamar

Dado que el modelo depende de una serie de parámetros, como son la viscosidad turbulenta o el coeficiente de fricción, para su uso en Proyecto es conveniente realizar campañas de medida de corta duración, que permitan estimar los parámetros locales. No obstante, para diseño, este modelo constituye una herramienta fundamental para entender los procesos morfodinámicos que se producen en una playa o tramo de costa. Su virtud principal es su fácil manejo y la posibilidad de introducir variaciones de manera sencilla, permitiendo estudiar un amplio espectro de condiciones diferentes (batimetría, marea, oleaje).

La Figura 8 presenta resultado de corrientes en playas obtenidos mediante el modelo **COPLA** para Plencia.

Evidentemente, de cara a un modelado adecuado del transporte del sedimentos, sería necesario introducir cierta estructura vertical al flujo. Para ello, una primera solución puede ser la utilización de modelos 2-DH en distintas capas horizontales del fluido.

Sin embargo, la solución más extendida y en la que más se trabaja en la actualidad es la de los modelos denominados cuasi-tridimensionales (Q3-D), Briand y Kamphuis (1990), Katapodi y Ribberink (1990). Se basan en las ecuaciones del 2-DH pero se introduce la estructura vertical del flujo, ya sea mediante los resultados obtenidos a partir de un modelo 2-DV o, más frecuentemente, mediante la introducción de expresiones analíticas de la distribución vertical de velocidades. La introducción de la distribución vertical del flujo no es trivial, dado que en la estructura vertical hay que diferenciar tres zonas: una próxima al fondo, caracterizada por la presencia de la capa límite, una central, mucho más ancha hasta el nivel del seno de las ondas, que ha sido sin duda a más estudiada, y la superior, hasta la superficie libre, donde el transporte de masa y los procesos de rotura son predominantes.

La UPC ha elaborado un modelo tipo Q3-D dividiendo la corriente en 2 componentes: la corriente primaria, descrita mediante un modelo tipo 2-DH, y la corriente secundaria, descrita mediante un modelo 1-DV de perfil vertical, Sánchez-Arcilla et al. (1990).

Por último, es necesario hacer hincapié en que, para cualquiera de los modelos expuestos, la adecuada determinación de la fricción o de las tensiones turbulentas constituye el elemento clave es el que es necesario progresar todavía mucho más.

## MODELOS DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

Una vez obtenida una descripción adecuada de la hidrodinámica del sistema, es necesario determinar el transporte de sedimentos en suspensión y por el lecho. Para realizar el cálculo del transporte de sedimentos es necesario introducir unas funciones en los modelos

hidrodinámicos que tengan en cuenta los efectos de las formas de lecho, las aceleraciones que se producen en el fluido y la licuefacción del lecho. El problema fundamental radica en que la mayor parte de nuestro conocimiento científico del transporte de sedimentos se basa en resultados para flujo unidireccional sobre lechos no rugosos, lo cual, a priori, dista mucho de las condiciones que nos interesan. La determinación de la tasa de transporte de sedimentos,  $Q$ , es el elemento más importante de este módulo del "modelo ideal", dado que los gradientes espaciales de esta magnitud forman parte de la ecuación de conservación global del sedimento, ecuación en la que se basa el módulo de evolución de costa.

La complejidad de los modelos de transporte de sedimentos está asociada al nivel de sofisticación del modelo hidrodinámico utilizado. Es decir, si se utiliza un modelo 3-D o cuasi 3-D será preciso dar una estructura vertical al transporte de sedimentos. Para ello, bajo la hipótesis de que el sedimento viaja a la velocidad del fluido, es preciso definir unos perfiles de concentración de sedimento que, multiplicados por los perfiles locales de velocidad e integrados en toda la columna de agua, den lugar a la tasa local de transporte de sedimentos,  $Q$ , tanto para el material transportado en suspensión como por el lecho. Es decir,

$$Q_{si} = \int_{z=0}^h u_i(z)C(z)dz \quad (49)$$

donde  $Q$  es la tasa de transporte de sedimento en la dirección  $i$ ,  $u_i$  el perfil local de velocidades en la dirección  $i$  y  $C(z)$  representa el perfil vertical de variación de la concentración del sedimento. Evidentemente, este perfil es tan complicado como se desee y debe tener en cuenta factores tales como la capa límite en el fondo, tensión tangencial en el fondo inducida por la interacción ola-corriente o los efectos turbulentos generados por la rotura.

Para modelos integrados en vertical, 2-DH, la determinación de la tasa de transporte puede realizarse mediante fórmulas específicas que sean función de una velocidad representativa de la corriente longitudinal,  $V$ . Kraus et al. (1982) demostraron que una formulación adecuada es,

$$Q = 0.024H_b^2 V \quad (50)$$

donde  $Q$  es la tasa de transporte de sedimentos en  $m^3/año$ , y  $H_b$  la altura de ola significativa en rotura.

Para modelos más sencillos (p.e. 1-D), en los que se asume la presencia de transporte longitudinal, únicamente, la tasa de transporte de sedimentos puede determinarse a partir de fórmulas como la del CERC (SPM, 1984)



$$Q = K_c H_{sb}^{5/2} \sin 2\alpha_b \quad (51)$$

donde  $H_{sb}$  es la altura de ola significativa en rotura, y  $\alpha_b$  el ángulo de incidencia en rotura.  $K_c$  es una constante función del índice de rotura, densidad del agua y del sedimento, diámetro medio del sedimento y de la porosidad de la playa.

Existen otras fórmulas semejantes como la de Kamphuis (1991a),

$$Q = KH_{sb}^2 T_p^{1.5} m_b^{0.75} D_{50}^{-0.25} \sin^{0.6}(2\alpha_b) \quad (52)$$

donde  $T_p$  es el periodo de pico,  $m_b$ , la pendiente de la playa en la zona de rompientes y  $D_{50}$  el diámetro medio del material en la playa. Para este caso,  $K = 6.4 \times 10^4$  para una arena de porosidad 0.32.

**MODELOS DE LA EVOLUCIÓN DE LA LÍNEA DE COSTA**

**Introducción**

Como ya se dijo anteriormente, la predicción de la evolución de la línea de costa constituye uno de los fines más importantes de Ingeniería de Costas.

Una vez determinado el transporte de sedimentos por suspensión y por el lecho, idealmente en todas direcciones, es necesario introducir una ecuación de conservación del sedimento que relacione el transporte con las variaciones en la batimetría. Los modelos de evolución de la línea de costa pueden dividirse en dos, los modelos de líneas y los modelos sobre mallas. Los modelos de líneas predicen la evolución de una o N batimétricas en el tiempo, mientras que los modelos sobre mallas calculan la evolución de la profundidad en cada punto de la malla.

**Modelos de líneas**

El primer modelo de línea fue el modelo analítico desarrollado por Pelnard-Considére que, tras varias hipótesis simplificativas, obtuvo que la posición e la línea de costa,  $y(x)$ , puede representarse mediante la siguiente ecuación de la difusión

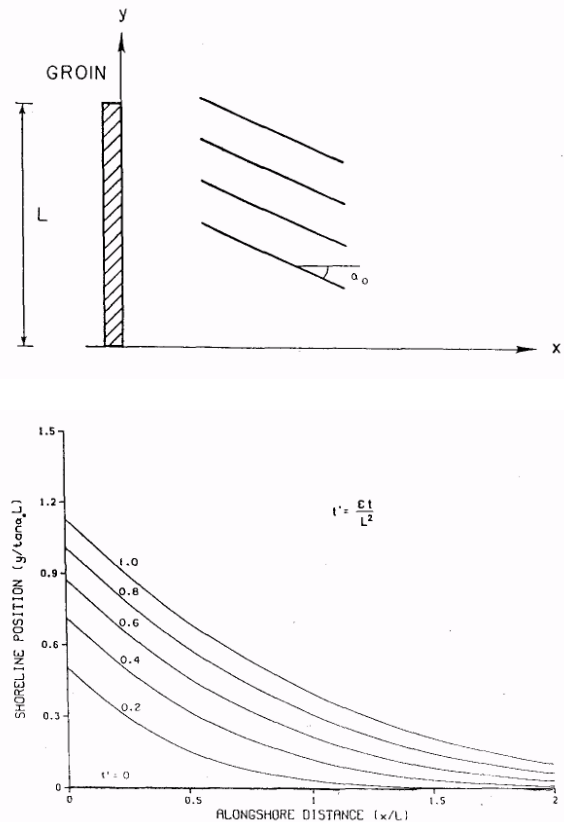
$$\frac{\partial y}{\partial t} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (53)$$

donde  $K$  es una constante, que depende de la profundidad de cierre (profundidad máxima hasta la que se produce transporte de sedimentos) y de la magnitud

del transporte litoral,  $x$  e  $y$  representan las direcciones paralela y perpendicular a la costa, respectivamente y  $t$  es la variable tiempo.

Este modelo puede enmarcarse dentro de los modelos de una línea, dado que predice la evolución de la línea de costa, únicamente. Los modelos de líneas tienen por objeto describir las variaciones a largo plazo considerando las variaciones a corto plazo (p.e., consecuencia de un temporal) como perturbaciones despreciables frente a tendencia general de evolución. Le Méhauté y Soldate (1977) y Dean (1984) utilizaron el modelo de una línea para estudiar la evolución de un relleno artificial. Larson, Hanson y Kraus (1987) presentaron un extenso resumen de soluciones analíticas del modelo de una línea incluyendo los efectos inducidos por espigones, rellenos o desembocaduras.

La Figura 9 presenta la evolución de la línea de costa aguas arriba de un dique que interrumpe el transporte longitudinal completamente, según la solución analítica obtenida por Larson, Hanson y Kraus (1987).



**Figura 9.** Evolución de la línea de costa aguas arriba de un dique que interrumpe el transporte longitudinal completamente

Asumiendo que el perfil de playa mantiene un perfil de equilibrio, Bakker (1968) desarrolló un modelo de dos líneas utilizando como segunda línea una batimétrica distinta de la línea de costa. Perlin y Dean (1985) presentaron un modelo de N líneas que describe la evolución en el tiempo de N batimétricas. Este modelo, teniendo en cuenta la conservación del sedimento, es utilizado para analizar la distribución del transporte de sedimentos en la zona de rompientes, el transporte en la dirección perpendicular a la playa e incluso para analizar la evolución de playas con barras.

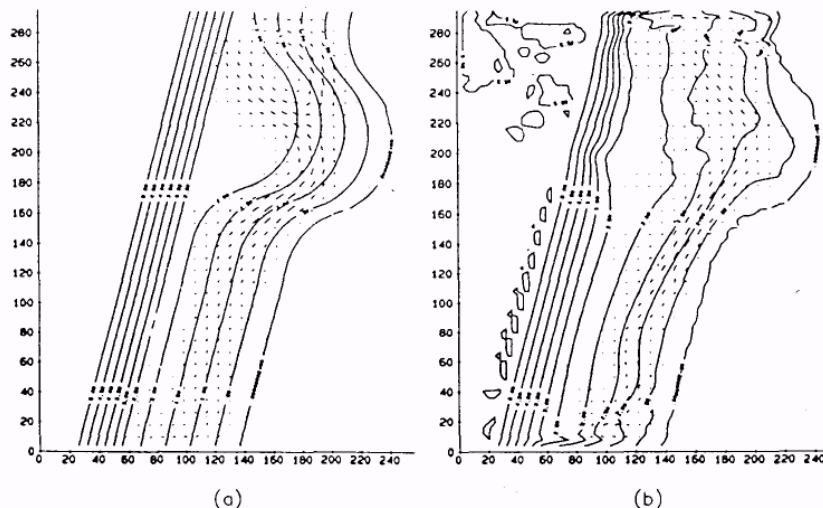
**Modelos sobre mallas**

Estos constituyen el último eslabón del "modelo ideal" numérico. Sobre la malla definida en la zona de estudio y una vez ejecutado el modelo de propagación, corrientes y sedimentos, este módulo calcula la variación del fondo en un intervalo de tiempo determinado, en cada punto de la malla, aplicando la ecuación de conservación del sedimento

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{A} \nabla Q = 0 \quad (54)$$

donde h es la profundidad, A el área de cada elemento de la malla y Q la tasa del transporte de sedimentos.

Existen numerosos modelos de este tipo, de Vriend y Ribberink (1988), Briand y Kamphuis (1990). e Vriend (1992) hace un extenso resumen de los modelos de evolución de costa existentes. La Figura 10 muestra los resultados de un modelo evolución 3-D obtenidos por de Vriend.



**Figura 10.** Evolución de la batimetría obtenida mediante un modelo 3-D. (a) Batimetría y esquema de transporte inicial, (b) Batimetría y esquema de transporte a los 5 días.

**CONCLUSIONES**

El modelado de los diferentes fenómenos implicados en la evolución de la línea de costa puede realizarse con diferentes escalas de tiempo y espacio, así como diferentes escalas de complejidad. La propagación de ondas, ya sea mediante un modelo basado en las ecuaciones de conservación o en la ecuación de la "mild slope", parece quedar bien modelada.

Sin embargo, en este campo queda mucho trabajo por realizar en el ámbito del oleaje y de la propagación en profundidades reducidas. En la actualidad, se está realizando un gran esfuerzo en la hidrodinámica de la zona de rompientes. Aunque los modelos, ya sea integrados en vertical o cuasi 3-D, se encuentran muy desarrollados, es necesaria una mayor investigación para representar adecuadamente factores de los que estos modelos dependen de forma importante, tales como la viscosidad de remolino o la fricción en el fondo.

El área del transporte de sedimentos es, sin duda, donde más queda por hacer. La sofisticación de los modelos que se utilizan para la hidrodinámica es desproporcionada con las mucho más simples formulaciones que se emplean para modelar el transporte de sedimentos.

Por último, el modelado de la línea de costa puede realizarse con modelos sencillos, como el de una línea, tendentes a buscar una situación de equilibrio, o mediante los modelos más completos 3-D.

A nuestro parecer, y desde un punto de vista ingenieril, mientras los modelos 3-D no evolucionen hasta ser más operativos y reduzcan su coste, la información obtenida a partir de modelos integrados en vertical unidos a modelos de líneas constituye una herramienta adecuada, fácil de calibrar y adecuada para medio y largo plazo. Hasta ahora, la utilización de modelos cuasi 3-D no ha aportado nueva información aplicable a nivel ingenieril.

Parece claro que la evolución de la computación en paralelo u otros sistemas capaces de reducir los tiempos de cálculo pondrán en manos de los Ingenieros de Costas modelos en 3-D capaces que, en principio, ayudarán a mejorar diseños y proyectos.

## BIBLIOGRAFÍA

- Bakker, W.T., 1968. The Dynamics of a Coast with a Groyne System. Proc. 11<sup>th</sup> Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE. pp. 429-517.
- Basco, D.R., 1983. Surfzone Currents. Coastal Engineering, ELSEVIER, 7, pp. 331-357.
- Battjes, J.A., Janssen, J.P.F.M., 1978. Energy Loss and Set-up due to Breaking of Random Waves. Proc. 16<sup>th</sup> Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE.
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of Combined Refraction-diffraction. Proc. 13<sup>th</sup> Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE, Vancouver, pp. 471-490.
- Berkhoff, J.C.W., Booij, N.C., Radder, A.C., 1982. Verification of Numerical Wave Propagation Models for simple Harmonic Linear Water Waves. Coastal Engineering Conference, ELSEVIER, 6, pp. 255-279.
- Bettes, P., Zienkiewicz, O.C., 1977. Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements. Intl. Journal Num. Methods in Engineering, 2, pp. 1221-1290.
- Briand, M.H.G., Kamphuis, J.W., 1990. A Micro Computer based quasi 3-D Sediment Transport Model. Proc. 22<sup>th</sup> Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE. pp. 2159-2172.
- Daily, W.R., Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1985. Wave Height Variations Across Beaches of Arbitrary Profile. J. Geophysical Research, 90, C6, pp. 11917-11927.
- Dalrymple, R.A., 1988. Model for Refraction of Water Waves. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, 114, 4, pp. 423-435.
- Dalrymple, R.A., 1991. REFRACT: A Refraction Program for Water Waves. Center for Applied Coastal Research. Technical Report, 91-09, University of Delaware.
- Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1984. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists, Prentice-Hall.
- de Vriend, H.J., 1987. Two- and three-dimensional mathematical modelling of coastal morphology. Delft Hydraulics Communications, No. 377.
- de Vriend, H.J., 1992. Mathematical Modelling of 3D coastal Morphology. Design and Reliability of Coastal Structures, Short Course ICCE'92. pp. 259-285.
- de Vriend, H.J., Ribberink, J.S., 1988 Proc. 21<sup>th</sup> Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE. pp. 1689-1703.
- Ebersole, B.A., 1985. Refraction-Diffraction Model for Linear Water Waves. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, 111, pp. 939-953.
- Freilich, M.H., Guza, R.T., 1984. Nonlinear Effects on Shoaling Surface Gravity Waves. Trans. Royal Society London, A, 31, pp. 1-41.
- Freilich, M.H., Guza, R.T., Elgar, S.L., 1990. Observations of Nonlinear Effects in Directional Spectra of Shoaling Gravity Waves. J. Geophysical Research, 95, C6, pp. 9645-9656.
- García, V., 1994. Propagación del Oleaje: Aproximación parabólica de la Ecuación para Pendientes Suaves. Tesina de Especialidad. E.T.S.I.C.C.Y.P. Universidad Pol. de Cataluña. 122 pp.
- G.I.O.C. U.C., 199. Manual del Modelo MSP. E.T.S.I.C.C.C.Y.P. Universidad de Cantabria. 250 pp.
- G.I.O.C. U.C., 199. Manual del Modelo de Corrientes en Playas (COPLA). E.T.S.I.C.C.C.Y.P. Universidad de Cantabria. 50 pp.
- Grassa, J.M., 1992. Modelos parabólicos de Propagación de Oleaje. Cuadernos de Investigación. CEDEX. MOPT.66 pp.
- Holthuijsen, L., Booij, N., 1986. Grid Model for Shallow Water Waves. Proc. 20th Intl. Coastal Eng. Conference, ASCE, Taipei, pp. 247-260.
- Houston, J.R., 1981. Combined Refraction-Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method. Applied Ocean Research, 3, pp. 163-170.
- Horikawa, K., Kuo, C.T., 1966. A Study of Wave Transformation Inside Surf Zone. Proc. 10th Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE.
- Kamphuis, J.W., 1991a. Alongshore Sediment Transport Rate. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, 117, pp. 624-640.
- Katapodi, I., Ribberink, K., 1990. A Quasi-3D Model for suspended Sediment Transport by Currents and Waves. Proc. 22th Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE. pp. 2131-2144.

- Kirby, J.T., 1986. Rational Approximations in the Parabolic Equation Method for Water Waves. Coastal Engineering, ELSEVIER, 10, pp. 355-378.
- Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 1983. A Parabolic Equation for the Combined Refraction-Diffraction of Stokes Waves by mildly varying Topography. J. of Fluid Mechanics, 136, pp. 453-466.
- Kraus, N.C., Isobe, M., Igarashi, H., Sasaki, T.O., Horikawa, K., 1982. Field Experiments on longshore Sand Transport in the Surf Zone. Proc. 18 th Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE. pp. 969-988.
- Larson, M., Hanson, H., Kraus, N.C., 1987. Analytical Solutions of the one-line Model of Shoreline Change. CERC Report 87-15. U.S. Corps of Engineers. Vicksburg. 72 pp.
- Le Méhauté, B., Soldate, M., 1978. Mathematical Modelling of Shoreline Evolution. Proc. 16 th Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE. pp. 1163-1179.
- Le Méhauté, B., Wang, J.D., 1982. Wave Spectrum Changes on Sloped Beach. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, 108, pp. 33-47.
- Liu, P.L.-F., Yoon, S.B., Kirby, J.T., 1985. Nonlinear Refraction-Diffraction of Waves in Shallow Water. J. Fluid Mechanics, 153, pp. 184-201.
- Munk, W.H., Arthur, R.S., 1952. Wave Intensity along a Refracted Ray in Gravity Waves. National Br. Standards Circ., 521. Washington, D.C.
- Noda, E.K., 1974. Wave-induced Nearshore Circulation. J. Geophysical Research, 79, 27, pp. 4097-4106.
- Penney, W.G., Price, A.T., 1952. The Diffraction Theory of Sea Waves and the Shelter Afforded by Breakwaters. Philos. Trans. Roy. Soc., A, 224(882), pp. 236-253.
- Peregrine, D.H., 1967. Long Waves on a Beach. J. of Fluid Mechanics, 27, pp. 815-827.
- Perlin, M., Dean, R.G., 1983. An efficient numerical Algorithm for Wave Refraction/Shoaling Problems. Proc. Coastal Structures, 83, ASCE, Arlington, pp. 988-1010.
- Perlin, M., Dean, R.G., 1985. 3-D Model of bathymetric Response to Structures. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, 111, 2, pp. 153-170.
- Radder, A.C., 1979. On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation. J. of Fluid Mechanics, 95, pp. 159-176.
- Rivero, F., Rodriguez, M., Sánchez-Arcilla, A., 1993. Propagación del Oleaje sobre Fondos variables en Presencia de Corrientes. II Jornadas Españolas de Ingeniería de Costas, pp. 187-204.
- Sakai, T. Koseki, M., Iwagaki, Y., 1983. Irregular Wave Diffraction due to Current. J. Hydraulic Engineering, ASCE, 109, 9, pp. 1203-1215.
- Sánchez-Arcilla, A., Collado, F., Lemos, C., Rivero, F., 1990. Another Quasi-3D Model for Surfzone Flows. Proc. 22 th Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE. pp. 316-329.
- Stive, M.J.F., Battjes, J.A., 1984. A Model for Offshore Sediment Transport. Proc. 19th Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE. pp. 1420-1436.
- Thornton, E.B., Guza, R.T., 1983. Transformation of Wave Height Distribution. J. Geophysical Research, 88, C10, pp. 5925-5938.
- U.S. Army Corps of Engineers, 1984. Shore Protection Manual Coastal Engineering Research Center, Washington, D.C. 2 Vol.