

# ***SIMULACIÓN DE FLUJO TRANSITORIO EN CAUCES NATURALES***

**Pilar García, Francisco Alcrudo**

Departamento de Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos

Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza

**RESUMEN:** En este trabajo se plantea la simulación matemática del flujo no estacionario en lámina libre. Ello requiere la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico que constituye la base del modelo unidimensional. Esta resolución es realizable, en el caso general, únicamente mediante técnicas numéricas que necesitan de la ayuda de ordenadores de cierta potencia y capacidad de memoria. La elaboración y desarrollo de los programas necesarios presupone un conocimiento tanto de dichas ecuaciones y de las hipótesis en las que se fundamentan como de las limitaciones que vienen impuestas por tales hipótesis de trabajo y por el grado de fiabilidad de los datos disponibles para caracterizar el sistema físico bajo estudio.

## **INTRODUCCIÓN**

Es muy conocido el interés actual de la Hidráulica en los modelos físicos y el notable incremento que está experimentando su uso en el campo de la Ingeniería Civil. La demanda de modelos de predicción más rápidos, más precisos, más operativos y elaborados es creciente. La posibilidad de disponer de ordenadores personales de considerable capacidad de cálculo y de alta velocidad ha llevado, paralelamente, a popularizar y hacer accesibles programas de rodaje hidrológico que hace bien poco estaban reservados a unos pocos grandes grupos de trabajo, generalmente asociados a Universidades o a importantes Empresas de Ingeniería.

Como consecuencia de todo ello, se está exigiendo, y ello se detecta claramente en la literatura científica y técnica (Gunaratnam y Perkins, 1970, Cunge et al. 1980), una mayor versatilidad y capacidad de los modelos matemáticos para atacar situaciones cada vez más complejas pero que están bien identificadas y establecidas en Ingeniería Hidráulica. Como en todo problema de integración de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales, hay que examinar con cuidado los niveles de dificultad asociados a cada uno de los aspectos del referido problema. Y hay que establecer con claridad las prioridades que han guiado el presente estudio.

Para comenzar, diremos que el primer problema es la elección del esquema numérico de integración. En

general, puede decirse que se dispone en el momento presente de un buen número de esquemas apropiados para la resolución de problemas en régimen subsónico o subcrítico. No puede afirmarse tan tajantemente lo mismo en el caso de flujos supercríticos. Existen muy buenos esquemas, desarrollados en principio para tratar problemas de Dinámica de Gases, capaces de manejar complejos sistemas de discontinuidades u ondas de choque (Hirsch, 1990, MacCormack, 1971, Roe, 1989). Su adaptación a la Hidráulica no es inmediata porque ésta tiene que contar con la inevitable presencia de una frecuentemente compleja y numéricamente indeseable topografía. Aunque esta situación plantea dificultades numéricas, debe decirse que éstas afectan más a la operatividad final de los paquetes de cálculo que se pretendan construir, que al funcionamiento básico del método numérico.

Un problema que plantea grandes dificultades gira en torno al tratamiento de las condiciones de contorno que rigen cada particular problema de integración. Es bien conocido de la bibliografía que es posible tratar adecuadamente los problemas de contorno en aquellas situaciones hidráulicas en las que se tiene la seguridad a priori de que el flujo va a permanecer siempre subcrítico. De hecho, paquetes de cálculo muy eficientes para el rodaje de avenidas poseen controles internos que detienen el cálculo cuando se presentan situaciones localmente supercríticas. En regiones de flujo rápidamente variado, roturas de presas,

---

Artículo recibido el **26 de Enero de 1995** y aceptado para su publicación el **21 de Febrero de 1995**. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo. En el caso de ser aceptadas, las discusiones serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores en el primer número de la revista que aparezca una vez transcurrido el plazo indicado.

oscilaciones en canales, y, en general, en condiciones de fuerte no-estacionariedad, es frecuente que se presenten estos estados locales supercríticos y regiones de flujo mixto con discontinuidades (Stoker, 1957). En general estas situaciones dependen fuertemente de las condiciones de contorno y de las iniciales. A pesar de ser corrientes en la práctica hidrológica, la bibliografía no registra resultados que hagan referencia estricta al modo de plantear este tipo de problemas de contorno, con la excepción obvia de algunos casos muy sencillos.

El uso de las ecuaciones de evolución permite una descripción más rápida y precisa de muchas situaciones corrientes, incluso de aquellas de las que el Ingeniero necesita o busca sólo información acerca de estados finales estacionarios. Esta afirmación puede matizarse con un ejemplo práctico tomado de las técnicas de rodaje de una crecida en un cauce natural a lo largo del cual existe cierto número de estructuras hidráulicas que operan como secciones de control. Es práctica corriente en Ingeniería comenzar por dividir el cauce en tramos limitados por las referidas secciones. El trabajo de determinar, p.ej., los perfiles estacionarios de la lámina de agua a lo largo del cauce completo está asociado al trazado de los perfiles individuales de cada tramo y a su posterior proceso de compatibilización en las secciones que los dividen.

La técnica es bien conocida, pero también lo es que ese proceder conlleva frecuentes tomas de decisión para el ingeniero y no pocos procesos de ensayo y error. En definitiva, tiempo y dinero, aparte de dificultades a la hora de adquirir toda la información contenida en la solución estacionaria, en la fase de calibrado del modelo y en la estimación de la influencia de algunas modificaciones menores en la topografía o en las propias estructuras hidráulicas.

Las ventajas del empleo de un modelo no-estacionario radican en parte en que la idea de sección de control queda englobada dentro de la más general de condiciones de contorno, tanto externas como internas (García-Navarro, 1989). De esta forma es posible, en principio, reducir notablemente e incluso eliminar la subdivisión del cauce en tramos. Es obvio que tal situación debe permitir un rodaje de la totalidad del cauce y, como consecuencia, deducir el estado de calados y caudales, estacionarios o no, en todo el recorrido. Esto además de, como es lógico, acomodar de forma natural la existencia de flujos sub y/o supercríticos. Es indudable que esta filosofía tiene una notable incidencia práctica. Su éxito depende de que se sea capaz de formular propiamente las condiciones de contorno que corresponden, en cada sección particular del río, al estado dinámico y sónico del flujo.

En esta línea, es posible incluir en la simulación un buen número de situaciones hidráulicas. Entre otras, el

flujo confinado o libre en canales, flujo sobre vertederos de pared simples o múltiples, con o sin saltos hidráulicos, propagación, reflexión y superposición de ondas positivas y negativas, flujo no estacionario en cauces con aportaciones laterales continuas o locales, procesos de rotura de presas y algunas otras aplicaciones representativas.

En lo referente al tema importante de la rotura de una presa, puede destacarse el resultado de que, una vez dadas las condiciones iniciales del flujo y la ley temporal (estimada) para la formación de la grieta, que es la forma habitual en que se formula el problema en la bibliografía, el cálculo permite obtener automáticamente la evolución de la avenida aguas abajo y da, simultáneamente, el perfil de la lámina aguas arriba de la presa. A diferencia de otras técnicas de cálculo incorporadas en paquetes de uso corriente (p.ej. DAMBRK Fread 1979), el procedimiento descrito en el presente trabajo hace posible manejar muy operativamente la presencia de condiciones locales supercríticas, en cualquier localización a lo largo del cauce.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Algunas situaciones hidráulicas pueden ser descritas por medio de un modelo unidimensional, bien sea porque no es necesaria la resolución precisa de los detalles del flujo o porque la naturaleza de éste es marcadamente unidimensional. En cualquier caso el estudio de las ecuaciones que rigen el flujo unidimensional es muy interesante por dos razones: Primero, porque es de esperar que soluciones típicas en una dimensión tengan una extensión más o menos próxima bidimensional y, segundo, porque es mucho más fácil obtener buenos métodos numéricos para las ecuaciones en una dimensión y extenderlos posteriormente a dos que atacar directamente el diseño de esquemas genuinamente bidimensionales (Alcrudo, 1992). Debe señalarse, no obstante, que esta última estrategia, aunque ciertamente más complicada, presenta mayores posibilidades de avance en un futuro. Las hipótesis fundamentales implicadas en la simulación matemática de ríos se formalizan en las ecuaciones del flujo no estacionario en canales abiertos. Son un modelo simple de fenómenos muy complejos, que incorpora solamente las influencias más importantes.

Como primera suposición, empezaremos considerando el flujo estrictamente unidimensional, aunque conscientes de que esto no existe en la naturaleza, y especificaremos que los casos especiales tales como ríos de curso pronunciadamente curvilíneo o aquellos que cuentan con secciones de inundación deben ser tratados con modelos bidimensionales apropiados (Katopodes y Strelkoff, 1978). Es importante establecer a qué llamamos una situación unidimensional, que pueda

ser aceptablemente simulada sin violar los conceptos básicos en los que se fundamentan las ecuaciones del modelo.

Estas hipótesis, conocidas como de St. Venant (Cunge et al., 1980), son:

- a. El flujo es unidimensional. La velocidad se supone uniforme sobre cada sección transversal y el nivel de agua en la superficie, horizontal a través de la misma.
- b. La curvatura de las líneas de corriente es pequeña y las aceleraciones verticales son despreciables. La distribución de presión es simplemente hidrostática.
- c. Las fuerzas de fricción con las paredes pueden ser descritas mediante leyes similares a las utilizadas para flujo estacionario.
- d. La pendiente media del fondo ( $\theta$ ) es pequeña, de modo que son aceptables las aproximaciones:

$$\cos(\theta) \cong 1 \quad , \quad \text{sen}(\theta) \cong \text{tg}\theta \cong \theta$$

Démonos cuenta de que todavía no se ha impuesto ninguna restricción sobre la forma de las secciones transversales. En principio puede ser cualquiera y variar a lo largo del canal (canales no prismáticos). Es decir, siempre que podamos expresarla como una función de la coordenada longitudinal  $x$  y el calado  $h$ ,  $A=A(x,h)$ , (analítica o numérica) creciente con  $h$ , que no viole la hipótesis b.

**ECUACIONES**

Supuesta constante la densidad del agua, el flujo unidimensional puede ser descrito por 2 variables, por ejemplo calado,  $h(x,t)$ , o área transversal,  $A(x,t)$ , y caudal,  $Q(x,t)$ , en cada sección. Estas variables dependientes definen el estado de movimiento del fluido en cada punto y en cada instante. Podemos escoger diferentes parejas de variables dependientes en función del problema que nos planteemos resolver. Las ecuaciones serán distintas, pero se basarán en los mismos conceptos físicos.

En los modelos unidimensionales, se ignoran generalmente los efectos de Coriolis y de arrastre del viento. Los términos de fricción viscosa contienen derivadas sólo en la dirección del flujo y su efecto es despreciado o englobado en la fricción con el fondo.

Con el fin de obtener las ecuaciones capaces de describir situaciones hidráulicas unidimensionales reales, es conveniente partir de los principios básicos de conservación de masa y momento, aplicados a un volumen de control. Para ello se considerará un tramo del cauce entre dos estaciones  $x_1$  y  $x_2$  como se muestra en la Figura 1. Si  $A(x,t)$  es el área de la sección normal al flujo, y suponiendo, que la velocidad  $u(x,t)$

es uniforme en toda la sección, se pueden expresar las siguientes relaciones de conservación (Cunge et al. 1980):

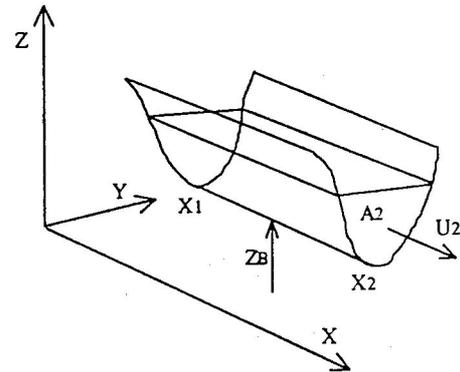


Figura 1. Descripción de un flujo unidimensional en cauce de sección arbitraria.

**Conservación de la masa**

Si  $u(x,t)$  es uniforme para cada  $x$ , el flujo que cruza una sección vale  $\rho Au$  y por tanto la conservación de la masa de agua en el tramo considerado se puede escribir:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx = \int_{t_1}^{t_2} [(\rho Au)_{x_1} - (\rho Au)_{x_2}] dt \quad (1)$$

Expresando la diferencia de una función como la integral definida de su derivada según:

$$f(\zeta_2) = f(\zeta_1) + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta \quad (2)$$

siendo  $f$  una función arbitraria (continua) que depende de una variable cualquiera  $z$ , la ecuación (1) puede escribirse en la forma:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_2 \\ t_1 \rightarrow t_2}} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Au)}{\partial t} dt = 0 \quad (3)$$

Para cualquier  $x_1, t_1$  indicando que el integrando debe ser nulo, con lo que se obtiene la ecuación diferencial de conservación de la masa. La variación de la masa contenida en el volumen será la integral espacial de las variaciones de masa contenida en cada  $dx$  a lo largo de ese período de tiempo.

**Conservación del momento lineal**

La conservación del momento lineal a lo largo del eje  $x$  se plantea del siguiente modo: la variación del momento lineal contenido en el volumen de control entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  ha de ser igual a la suma de las fuerzas exteriores que actúan en esa dirección más

el flujo neto de momento que entra en el volumen de control, a lo largo del mismo período de tiempo.

En este punto hay que precisar que se está identificando el eje x con la dirección dada por el fondo del cauce, de tal forma que su eje ortogonal, y, forma un ángulo  $\theta$  con la dirección en la que se miden los calados. Esto es consecuencia de la hipótesis realizada acerca del tamaño del ángulo y será una aproximación tanto mejor cuanto menor sea la pendiente del fondo. Se procede de forma análoga a la anterior. El cambio en la cantidad de momento en un intervalo de tiempo  $t_2-t_1$  entre dos puntos  $x_1, x_2$  es:

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho Au]_{t_2} - (\rho Au)_{x_2} dx \quad (4)$$

y el flujo neto de momento hacia el interior del tramo  $[x_1, x_2]$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho Au^2)_{x_2} - (\rho Au^2)_{x_1}] dt \quad (5)$$

Además se debe tener en cuenta el flujo de momento introducido en el tramo por las fuerzas exteriores. Pasemos a evaluar las fuerzas que actúan. Supondremos que las únicas relevantes son la fuerza del peso, la de la presión y la de fricción con las paredes, y despreciaremos la acción de cualquier otra fuerza existente.

Teniendo en cuenta la Figura 2, el flujo de momento debido a las fuerzas de presión hidrostática es consecuencia de la diferencia de las fuerzas que actúan sobre las secciones  $x_1$  y  $x_2$ .

$$P_{extremos} = \rho g \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} - (I_2)_{x_2}] dt \quad (6)$$

con  $I_1 = \int_0^h (h-\eta)\sigma(x,\eta) d\eta$

donde  $\sigma(h)$  es la anchura del cauce para una profundidad  $h$ , o  $\sigma(h)=\partial A/\partial h$ .

Las fuerzas de presión también pueden tener una componente debida a la reacción de las paredes por causa de variaciones de la anchura del canal con la distancia. Esta fuerza dependerá de la variación de la sección para  $h=cte$ . La contribución debida a las fuerzas de presión laterales:

$$P_{lateral} = \rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx I_2 \quad (7)$$

con  $I_1 = \int_0^h (h-\eta) \frac{\partial \sigma}{\partial x} d\eta$

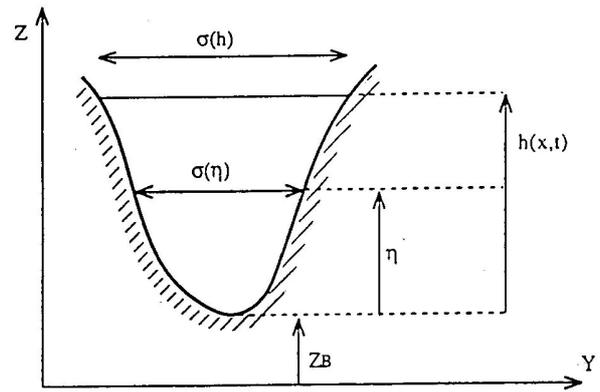


Figura 2. Nomenclatura de la descripción de la sección de un cauce

Hagamos una observación en el sentido de que lo anterior solamente es válido cuando la variación en el tamaño de la sección es gradual. En caso de ensanchamientos o estrechamientos bruscos, el tratamiento no puede realizarse del mismo modo, pues existen fuerzas extras que han de ser tenidas en cuenta. Además, en tal caso la curvatura de las líneas de corriente no sería despreciable.

Las fuerzas debidas a la pendiente del fondo son la proyección del peso de la columna líquida sobre la tangente al lecho del cauce y dan una contribución que vale:

$$\rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx AS_0 \quad (8)$$

Por último, la fuerza de fricción es debida al rozamiento entre el agua y las paredes del cauce. Este término, por unidad de longitud puede ser expresado de la forma  $\rho g AS_f$ , donde  $S_f$  representa la pendiente de la línea de energía (gradiente de energía necesario para equilibrar la fricción en el flujo estacionario) y puede evaluarse a partir de la relación (empírica) de Manning (French, 1985):

$$\rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx AS_f \quad (9)$$

$$S_f = \frac{n^2 u^2}{R^{4/3}} \quad (10)$$

donde  $n$  es el coeficiente de Manning, y  $R$  el radio hidráulico, definido como el área de la sección mojada del cauce dividida por el perímetro mojado,  $P$ :  $R=A/P$ .

Los distintos términos son agrupados para expresar la conservación de la cantidad de momento lineal en el tramo  $[x_1, x_2]$  entre  $t_1$  y  $t_2$  según sigue:

$$\begin{aligned} \text{Variación} &= \text{Flujo de} + \text{Fuerzas en} + \dots \\ \text{momento} &= \text{Momento} + \text{los extremos} \\ \dots + & \text{Fuerzas} + \text{Pendiente} + \text{Fuerzas de} \\ & \text{Laterales} + \text{del Fondo} + \text{Rozamiento} \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de la ecuación de conservación de la masa, se expresa la diferencia de una función como la integral definida de su derivada. según la ecuación 1.5.3, con lo que el balance total de momento se escribe:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_2 \\ t_1 \rightarrow t_2}} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial(Au)}{\partial t} &= \quad (11) \\ = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_2 \\ t_1 \rightarrow t_2}} \int_{t_1}^{t_2} dx \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial(Au^2)}{\partial t} - g \frac{\partial I_1}{\partial x} + gI_2 + gA(S_0 - S_f) \right) \end{aligned}$$

De donde se ve que para  $x_1, t_1$  arbitrarios los integrandos a ambos lados de la igualdad han de ser idénticos. Reorganizando los distintos términos se obtiene la ecuación diferencial de conservación del momento que, junto con la correspondiente a la masa, forman el sistema de conservación buscado que rige el flujo unidimensional en cauces de sección arbitraria:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Au \\ Au^2 + gI_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Aplicando la regla de Leibnitz a la derivada  $\partial I_1 / \partial x$  se obtiene:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = I_2 + A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (13)$$

con lo que la ecuación del momento puede escribirse en forma no conservativa como:

$$\frac{\partial(Au)}{\partial t} + \frac{\partial(Au^2)}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f) \quad (14)$$

Es una nueva expresión, más corriente en la práctica y más manejable a la hora de la resolución si no se han de reproducir ‘choques’, que se conoce con el nombre de ecuación dinámica.

En el caso de canales rectangulares y prismáticos ( $A/b=h, \partial A/\partial x=0$ ), se reduce a la forma original de las ecuaciones planteadas por St. Venant en 1871:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Este sistema describe el flujo en canales unidimensionales rectangulares de anchura unidad y por tanto su aplicación práctica es restringida. Sin embargo, gracias a su simplicidad, es posible obtener

soluciones exactas en ciertos casos, que pueden servir para comprobar la capacidad de los métodos numéricos empleados en la resolución de situaciones más complejas. En este sentido, hay que señalar que el carácter fuertemente no lineal de la convección se mantiene, por lo que el sistema (15) es capaz de producir soluciones discontinuas tipo salto hidráulico (Lax and Wendroff, 1960). Son abundantes los métodos numéricos existentes en la literatura capaces de ser utilizados para la resolución de las ecuaciones (Priestley 1989,1990, Glaister 1988, García-Navarro y Savirón 1990, Alcrudo y García-Navarro 1992). Los métodos de características y los de diferencias finitas explícitos están sometidos a incómodas restricciones sobre el tamaño del paso temporal en las iteraciones por razones de estabilidad. Los implícitos, por el contrario, son incondicionalmente estables pero exigen un considerable esfuerzo de programación y, en ocasiones (esquema de Preissmann), presentan muchos inconvenientes para la simulación de flujos mixtos así como soluciones oscilatorias cuando se trata de regímenes supercríticos.

Si se tiene interés en lograr la correcta simulación de problemas que pudieran incluir discontinuidades hidráulicas de tipo onda de avenida o salto hidráulico se ha de recurrir a una determinada clase de estos métodos: Las técnicas *shock-capturing* o *through methods*, son capaces de progresar hacia una solución débil (discontinua) de las ecuaciones de una forma natural (Alcrudo 1992, García-Navarro y Alcrudo 1992). Y esto es debido a su inherente disipación numérica. Los métodos de características resultan inadecuados para este tipo de flujos porque no permiten una resolución directa y continua de las ecuaciones en todo el dominio.

El esquema explícito de McCormack (predictor-corrector) (MacCormack 1971) en particular, se trata de un método de diferencias finitas no centrado especialmente adecuado por su resolución en problemas con choques de un intensidad moderada. Presenta dos versiones según se realice la aproximación de la derivada espacial y cada una de ellas es preferible a la otra según sea el sentido de propagación del frente en cuestión. Es consistente y condicionalmente estable. Para problemas lineales se reduce al esquema de Lax-Wendroff y, por tanto, el criterio que garantiza la estabilidad numérica en ese caso es el de Courant-Friedrich-Lewy. La calidad de la solución es muy sensible al tamaño del paso temporal escogido, de tal forma que empeora a medida que nos adentramos en la región de estabilidad (cuando disminuye el  $n^\circ$  de Courant) en problemas con choques. Existe amplia información de sus propiedades en la literatura (García y Kahawita 1986, García-Navarro y Zorraquino, 1993) y se ha utilizado para los ejemplos numéricos de este trabajo.

## SIMULACION EN CAUCES NATURALES

Esta es una de las aplicaciones prácticas más importantes del modelo. La predicción de la evolución en el tiempo de los perfiles del flujo y de la propagación de las ondas en corrientes naturales es el problema que motiva el presente trabajo. A su vez constituye una tarea dificultosa.

En muchos países, la determinación de los parámetros de la onda que se produciría tras la ruptura de cada gran presa es un requisito exigido por la ley (Molinero P. 1991, Betamio de Almeida 1993), y su estudio sistemático es obligatorio. Existen trabajos basados en modelos físicos, realizados a escala, de los valles naturales, pero suponen esfuerzos demasiado costosos y plantean excesivos problemas relacionados con la adecuación de las escalas.

Es, por tanto, una necesidad el desarrollo de modelos matemáticos adecuados y capaces de reproducir las situaciones originadas por las irregularidades de un cauce no prismático. Es preciso delimitar los criterios de aplicabilidad de los modelos aproximados, ante la dificultad existente de conseguir una simulación basada en las ecuaciones completas que funcione sin interrupciones causadas por el carácter irregular de los datos.

El esquema numérico aplicado a la resolución de las ecuaciones de conservación de masa y momento, ha de ser capaz de reproducir los choques que se puedan originar a causa de la propia geometría o por las estructuras hidráulicas existentes a lo largo del río.

Evidentemente, la generalización del método plantea una dificultad nueva e importante. Con independencia de cual sea la situación particular a simular es preciso un tratamiento y almacenamiento previo de los datos hidráulicos del cauce. La resolución de las ecuaciones permite la utilización de los mismos en forma de tablas que constituyen funciones numéricas. Estas son utilizadas por el programa de cálculo para suministrar la información que las ecuaciones necesitan en cada momento a través de un proceso de interpolación adecuado.

### Datos Hidráulicos

El modelo unidimensional exige la selección de una serie de perfiles transversales a lo largo del curso fluvial de forma que cada uno de los perfiles pueda considerarse representativo de un tramo físico elemental del cauce. Se suelen tomar en todos aquellos puntos que, por su topografía, pudieran suponer una discontinuidad en la capacidad portante del río, y en todos los puntos en los que se pretenda obtener resultados numéricos directos.

Los datos de los ejemplos se generaron a partir de los planos de las secciones distribuidas a lo largo del río. Suponiendo cada sección transversal compuesta por una serie de trapecios yuxtapuestos, se simplifica el cálculo sistemático de los valores de áreas, anchuras de la lámina de la superficie y perímetros mojados como funciones del calado creciente, al mismo tiempo que se asegura la consistencia de los datos, porque es bien conocido que las medidas independientes de las funciones área transversal ( $A$ ) y anchura de la lámina ( $b$ ) conducen a inestabilidades numéricas (Bento Franco, 1991).

Así, el cálculo parte de las características topográficas definidas mediante funciones numéricas o tablas de datos en función del calado y la coordenada longitudinal:

$$A = A(x,y)$$

$$b = b(x,y)$$

$$P = P(x,y)$$

Consisten en tres matrices de dimensiones ( $n^\circ$  de secciones transversales  $\times$   $n^\circ$  de niveles sucesivos de calado) dadas por la información extraída de los perfiles del cauce y vega del río. El valor concreto de una de estas funciones en cada nudo de la red de computación y para un calado arbitrario se puede obtener mediante interpolación cada vez que es necesario.

Para realizar esto se puede utilizar un método de splines bidimensional en  $(x,y)$ . Tales algoritmos permiten la elección libre del orden del polinomio interpolador entre cada dos datos. Se escogió el orden 2 (interpolación lineal) en ambas direcciones tras un proceso de ensayo con polinomios de mayor orden. La habitual escasez de los datos del terreno de partida y su distribución, puede conducir a los polinomios de alto grado a curvaturas forzadas que generan, en ocasiones, datos absurdos (funciones decrecientes con el calado). Cualquier proceso de interpolación introduce errores en el cálculo y, en principio, dados los datos de partida, no sabemos nada acerca de la tendencia de las funciones en las zonas intermedias. Por lo tanto es lógico desechar los procedimientos que, aunque suavizando la tendencia de los datos, son fuente de nuevas dificultades.

Para la determinación de las pendientes se hace uso de los valores de las cotas del fondo de las mencionadas secciones. Las pérdidas por fricción se incluyen en las ecuaciones a través del término no lineal dependiente del coeficiente de Manning.

### Limitaciones y Aproximaciones

Una vez superados los problemas técnicos de elaboración y almacenamiento de tablas de datos necesarios en memoria, la aplicación del método

basado en las ecuaciones de conservación (necesarias si pretendemos simular flujos con posibles discontinuidades) requiere nuevas hipótesis. Recordemos que en las mencionadas ecuaciones aparecían términos que contenían integrales del tipo:

$$I_1 = \int_0^{h(x)} (h(x) - y) b(x, y) dy$$

$$I_2 = \int_0^{h(x)} (h(x) - y) \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} dy \quad (16)$$

cuya evaluación en un caso prismático de geometría sencilla es directa. El carácter irregular de las secciones naturales precisa de alguna aproximación. Mediante la regla trapezoidal de integración se estiman los valores:

$$I_1 \cong \frac{1}{2} b(x, \bar{h}) h^2(x); \quad I_2 \cong \frac{1}{2} \frac{\partial b(x, \bar{h})}{\partial x} h^2(x) \quad (17)$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2} h(x)$$

En la búsqueda de un procedimiento que automatizase de algún modo el control de la estabilidad numérica, se comprobó que un criterio procedente del término de fricción suponía una condición mucho más restrictiva que la que se sigue del de Courant para este problema concreto y, por tanto, mucho más controladora. Tanto que resultaba excesiva. Las inestabilidades de nuestro problema respondían a las descritas por Koren (Huang y Song, 1985) y, por tanto, la solución se encontró en la utilización de un  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \left( \frac{v + c}{\Delta x} + \frac{gFS_0/v_0}{\sqrt{1 + 2F - 1}} \right)^{-1} \quad (18)$$

Esta limitación se puede relajar si el término de fricción en las ecuaciones se discretiza de un modo semiimplícito:

$$S_{fi} = \frac{|Q_i^n|}{(K_i^n)^2} \left[ \theta Q_i^n + (1 - \theta) Q_i^n \right] \quad (19)$$

con  $K = AR^{2/3}/n$  y  $0 \leq \theta \leq 1$  (siendo  $\theta = 0$  el valor correspondiente a la situación más estable). De este modo, se consigue la estabilidad con pasos temporales de un tamaño aproximadamente doble del dado por el criterio de la fricción.

Por otra parte es preciso señalar que, dentro del modelo unidimensional, se están aplicando valores únicos del coeficiente de rugosidad en cada sección considerada. Asimismo, la velocidad del agua es única en cauce y vega inundada y se toma una sola distancia entre perfiles transversales. Estas limitaciones del modelo llevan a utilizar valores medios y exige un cuidadoso análisis de los resultados.

El lecho del cauce se considera fijo, no incluyendo fenómenos de transporte de sólidos en suspensión, arrastre o sedimentación de los mismos. No creemos que estos fenómenos influyan en los resultados de altura máxima alcanzada por las ondas.

RESULTADOS

Desde un punto de vista práctico, las aplicaciones son muchas. Es accesible casi toda la información concerniente a previsiones o predicciones, ya que el punto de partida son las ecuaciones dependientes del tiempo.

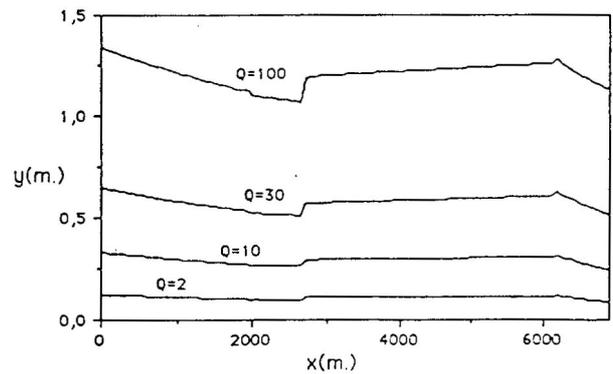


Figura 3. Perfiles de equilibrio para distintos caudales del río Segre. A partir de  $Q=10$  coexisten los regímenes sub y supercrítico.

Como caso particular se pueden estudiar los regímenes permanentes aunque, en principio, pueda parecer innecesaria esta técnica no estacionaria. Ciertamente, se conoce la existencia de otras más simples en diseño y desarrollo. La ventaja que aporta el nuevo tratamiento consiste en su capacidad para determinar el estado de equilibrio con independencia de que éste sea subcrítico, supercrítico o combinado (conteniendo saltos hidráulicos). Esto supone un avance sobre los métodos anteriores que encontraban dificultades en este punto. Contando con esta facilidad, podemos disponer del perfil de equilibrio correspondiente a un cierto tramo con sus características particulares. La información que podemos extraer incluye los valores que alcanzará la cota de la superficie del agua en cada punto en función del caudal circulante, con las posibles conclusiones que de ahí se puedan extraer. Así, los riesgos de desbordamiento, las situaciones tolerables o el establecimiento de cotas de seguridad en cada caso responderán a criterios que dependerán del problema en estudio.

Sobre la Figura 3 se representa una serie de perfiles de equilibrio para diferentes caudales (en aumento) dentro de un tramo de 7 Km en la cabecera del río Segre. La discretización espacial escogida fue  $\Delta x = 60m$  (116 nudos) y, el paso temporal, el máximo permitido compatible con la estabilidad numérica. No se ha representado el

perfil del fondo por tratarse de un tramo suficientemente largo como para que, dadas las pendientes, se plantease un problema de escalas.

Las condiciones iniciales empleadas en cada caso consistieron en caudal uniforme (igual al del equilibrio) y calado 'normal' procedente de los datos de un fichero que lo determina en cada caso previamente. Aguas arriba se mantuvieron constantes los caudales mientras que, aguas abajo, la condición de contorno fue de  $y_N = cte$ .

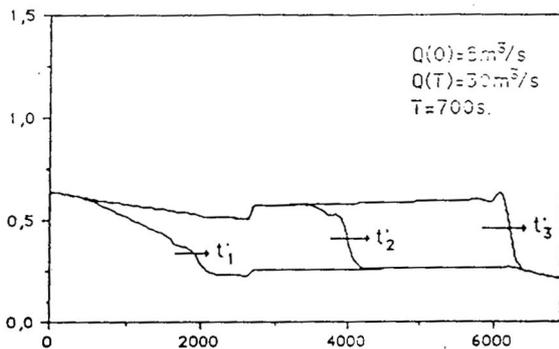


Figura 4. Estados de la lámina libre correspondientes a instantes sucesivos en la propagación de una onda de avenida sobre flujo estacionario.

Podemos incluir también los fenómenos transitorios que muestran una clara e importante dependencia temporal bajo la forma de hidrogramas de entrada  $Q = Q(t)$  o crecidas en la cabecera del tramo. La predicción de su evolución es la finalidad del método. La evaluación de las variables en todos los puntos y para cada instante nos permite seguir la propagación aguas abajo de lo que suceda en el origen. Desde un punto de vista matemático, el tránsito de un valor del caudal de entrada a otro superior puede llevarse a cabo de infinitas formas y, si se trata de la ruptura de una presa, la forma en que se produzca será un factor de importancia. Todas ellas no se corresponden, evidentemente, con algún proceso natural, pero el estudio de algunas puede permitirnos extraer conclusiones.

Así, la hipótesis de un crecimiento del caudal lineal, con un parámetro de tiempo de crecida  $T$  característico, puede servirnos. Partiendo de un  $T=0$ , que correspondería a una transición brusca (situación poco frecuente que hay que simular mediante la utilización de las ecuaciones de la discontinuidad como se indicó en el punto 1) y yendo hacia valores de  $T$  del orden del tiempo de tránsito total de una partícula, pueden analizarse aspectos y consecuencias de la influencia de esta variable.

En la Figura 4 podemos ver varios perfiles correspondientes a los tiempos  $t_1=804.2s$ ,  $t_2=1602.8s$ ,

y  $t_3=2400.8s$ , en la propagación de una onda debida a un incremento de  $Q=8m^3/s$  a  $Q=30m^3/s$ . en  $T=700s$ . (aproximadamente la mitad del tiempo de tránsito de una partícula en este caso). El aumento rápido origina la aparición de un frente que suele desembocar en la aparición de una onda de choque.

Otra ventaja a tener en cuenta es la posibilidad que ofrecen las ecuaciones para la incorporación de pérdidas y aportes de caudal laterales si es preciso. De este modo, con bastante naturalidad podemos permitirnos la simulación de los efectos de aliviaderos y lluvias sobre los perfiles de equilibrio originales del tramo. Siguiendo en la línea de previsión de riesgos, es posible evaluar las consecuencias de lluvias de intensidad variable (en el tiempo y/o en el espacio) con el fin de averiguar qué niveles de precipitación suponen situaciones de riesgo añadido.

Por último, como caso límite de aplicación de métodos numéricos de simulación al flujo transitorio en cauces naturales, mencionaremos algunos detalles relacionados con un ejemplo de cálculo de onda subsecuente a la ruptura de una presa. El objetivo del estudio era la estimación de los daños que se podrían producir en las riberas de los ríos Aragón y Ebro para distintas hipótesis de fallo estructural de la presa de Yesa, situada en el límite de las provincias de Zaragoza y Navarra. Dos hipótesis para la presa en su estado actual (capacidad de  $450 \text{ Hm}^3$ ) y dos para la presa recrecida en proyecto (capacidad prevista  $1.490 \text{ Hm}^3$ ). El río Aragón desemboca en el Ebro unos 20 Km. aguas arriba de Tudela, siendo su recorrido desde el embalse de Yesa hasta la desembocadura de 85 Km y pasando por 11 poblaciones. El cálculo de la onda de avenida en cada caso habría de servir para estimar las horas de tránsito así como la evolución de los caudales y alturas en el tiempo y a lo largo del cauce. Con esa información, poder dar los avisos oportunos a las poblaciones y maniobrar convenientemente los embalses de Mequinzenza y Ribarroja aguas abajo del río Ebro.

Las hipótesis de rotura fueron, para la presa actual, una más desfavorable de desaparición completa en un tiempo mínimo (caudal punta resultante de  $109.000m^3/s$  y tiempo de vaciado del embalse de 4h) y otra más probable de rotura parcial con desprendimiento de un bloque de 12m de ancho en el centro de la presa (caudal punta de  $8.100m^3/s$  y tiempo de vaciado del embalse de 30h). En cuanto a la futura presa recrecida, una hipótesis de formación de brecha de 400 m de ancho en un tiempo de 12h (caudal punta de  $39.300m^3/s$  y tiempo de vaciado del embalse de 20h) y otra de rotura progresiva, parcial y rápida con formación de una brecha de 50m de ancho en 4h (caudal punta de  $33.700m^3/s$  y tiempo de vaciado del embalse de 48h). Se hubieran podido suponer fallos diferentes o mas sofisticados pero no se consideró necesario excepto para las zonas más próximas a la presa. Puesto que la

simulación numérica aplicada requiere y permite conocer alturas y caudales en todos los puntos y para todos los tiempos, se almacenó toda esta información intermedia a pesar de que el proyecto inicial solo exigía presentación de hidrogramas completos en Yesa (perfila primero del río Aragón), en Zaragoza y en la entrada del embalse de Mequinenza, exigiendo sólo valores máximos y tiempos de tránsito para el resto de los perfiles. Los hidrogramas (Q-t) y limnigramas (h-t) así almacenados proporcionan un punto de vista estático como el que tendría una persona que durante toda la avenida estuviera en uno solo de los puntos. Igualmente obtenible de nuestros cálculos es la observación global del estado de las variables para tiempos diferentes. Así, perfiles de la lámina de agua a lo largo del cauce para instantes sucesivos (Figuras 5, 6 y 7). La representación de estos perfiles utiliza la cota que se toma como fondo de cauce y que corresponde a la de la superficie del agua en el momento en que se tomaron los fotogramas para la realización de la cartografía 1/50.000 (Octubre 1984).

Es interesante la comparación con las avenidas históricas de origen meteorológico tomadas de 1960, 1961, 1966 y 1978. Las Figuras (8 y 9) muestran los limnigramas en los puntos correspondientes a Castejón y Zaragoza. Se pueden apreciar diferencias notables debidas a que las ondas de tipo meteorológico y puntual presentan características muy distintas.

**CONCLUSIONES**

La simulación matemática del flujo no estacionario en lámina libre es complicada, y las dificultades crecen conforme lo hacen las pretensiones de obtener soluciones de mejor calidad o mayor generalidad en el

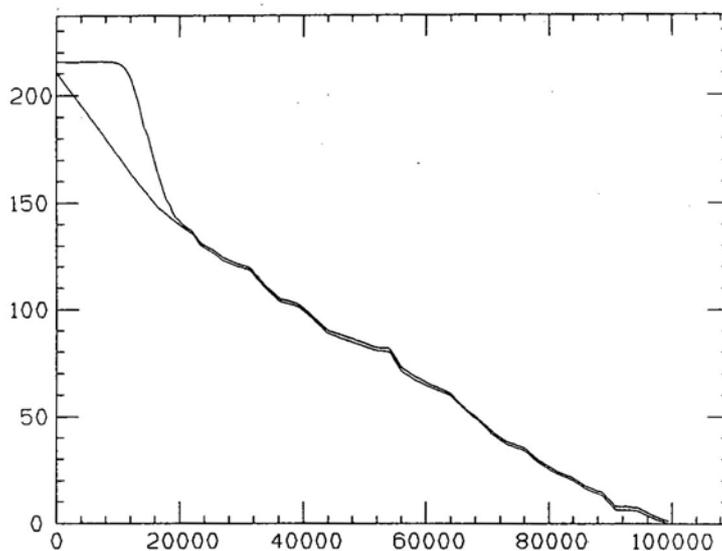
campo de aplicación.

En líneas generales podría decirse que es difícil contar con un solo programa capaz de reproducir con precisión cualquier situación general de una manera automática. Cada problema ha de ser estudiado cuidadosamente antes de poder confiar en los resultados obtenidos de un rodaje hidrológico.

La mayor parte de los sistemas seleccionados en este trabajo contienen flujos supercríticos que el esquema adoptado incorpora al cálculo sin problemas. Además de simulaciones en canales prismáticos (de secciones rectangular y trapezoidal), se han utilizado datos topográficos de un tramo de la cabecera del río Segre para mostrar la posibilidad de incluir sistemas de geometría irregular en las ecuaciones del modelo. Las funciones caracterizadoras del cauce (área mojada transversal, perímetro mojado, radio hidráulico, término de fricción) se han incorporado a la resolución como variables numéricas obtenidas de los datos de partida a base de interpolaciones mediante *splines* de segundo orden.

De este modo nos ha sido posible reproducir perfiles de equilibrio para distintos caudales en este tramo, simulaciones de crecidas y ondas de caudal en la cabecera así como de aporte lateral de caudal en forma de lluvia regularmente distribuida (esto último sin más que añadir un término suplementario a la ecuación de continuidad).

Como resumen final puede concluirse que el presente trabajo ha conducido a la construcción de un paquete de cálculo que permite el *tratamiento conjunto* de una red fluvial que incorpore un buen número de estructuras hidráulicas más o menos usuales, desde unas condiciones de contorno discontinuas en la



**Figura 5.** Perfil de la superficie del agua 1.65 minutos después de la ruptura de la presa de Yesa en el río Aragón en la hipótesis 1

cabecera y que parta incluso de la condición de cauce seco, hasta la situación final estacionaria. La selección de las referidas estructuras se ha realizado atendiendo a lo complejo de su comportamiento fuera del equilibrio. Por esa razón se han descartado muchas de las que, normalmente, se encuentran en los tramos subcríticos de los cauces y cuyo conocimiento es general.

Ha quedado claro durante el trabajo que las técnicas numéricas de resolución de sistemas de ecuaciones en

derivadas parciales en general, y las de diferencias finitas en particular, constituyen un campo de estudio de gran interés, en desarrollo. Su aplicación a las ecuaciones del flujo no estacionario en canales abiertos constituye un capítulo apasionante tanto desde el punto de vista teórico como en cuanto a sus posibles aplicaciones prácticas. La dificultad inherente a la simulación correcta de las condiciones reales supone un reto que necesita un constante esfuerzo y continuas aportaciones.

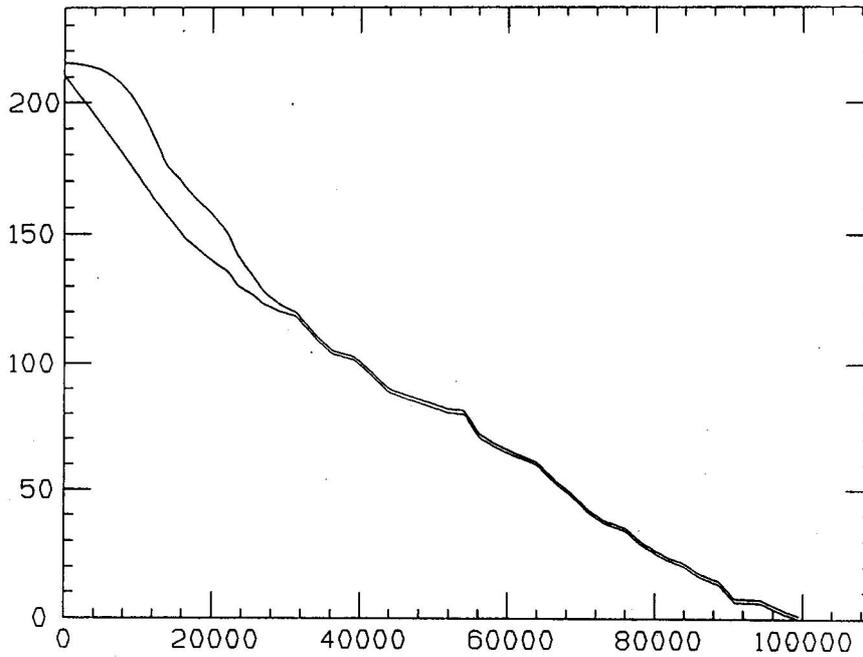


Figura 6. Perfil de la superficie del agua 17 minutos después de la ruptura de la presa de Yesa el río Aragón en la hipótesis 1

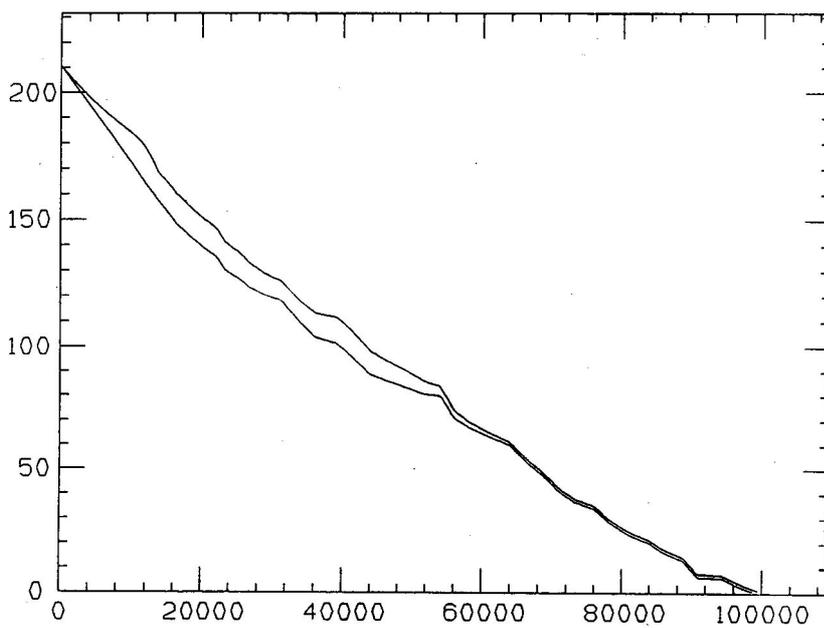


Figura 7. Perfil de la superficie del agua 167 minutos después de la ruptura de la presa de Yesa en el río Aragón en la hipótesis 1

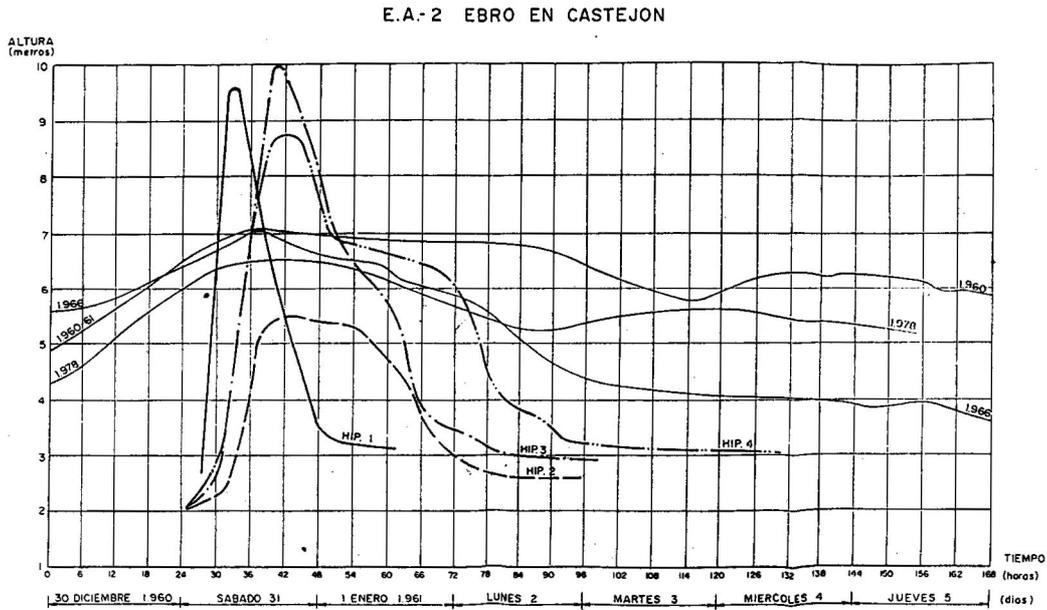


Figura 8. Comparación de los limnigramas de inundación meteorológica (registrados) y por ruptura de presa (calculados) en la estación de Castejón (río Ebro)

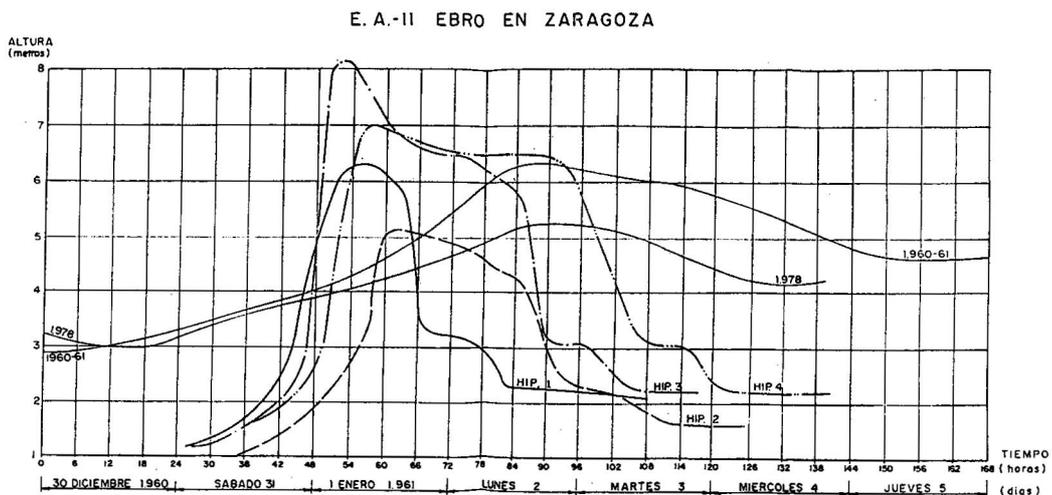


Figura 9. Comparación de los limnigramas de inundación meteorológica (registrados) y por ruptura de presa (calculados) en la estación de Zaragoza (río Ebro)

REFERENCIAS

Alcrudo F. (1992), Esquemas numéricos de Variación Total Decreciente para la simulación de flujos discontinuos de superficie libre. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.

Alcrudo F., García-Navarro P. (1992), Flux difference splitting for 1D open channel flow equations, Int. J. for Numerical Methods in Fluids. Vol.14, pp. 1009-1018.

Bento Franco A., Betamio A. (1991), Simulação uni e bidimensional de chelas provocadas por roturas de barragens em planicies de inundacao, V Simposio Luso-Brasileiro de Hidraulica e Recursos Hidricos SILUSB-.

Betamio A., Bento Franco A. (1993), Modeling of Dam Break Flows, Computer Modeling of Free Surface and Pressurized Flows. Ed. M.H. Chaudhry y L.W. Mays, NATO ASI Series.

- Cunge J.A., Holly F.M. and Verwey A., (1980), Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Pitman, London, U.K.
- Fread D.L. (1979), DAMBRK: The NWS Dam-Break Flood Forecasting Model, Office of Hydrology, National Weather Service, Silver Spring, Maryland 20910.
- French R.H., (1985), Open-channel hydraulics, McGraw-Hill, New York.
- García R., Kahawita R.A. (1986), *Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite difference scheme*, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol.6, pp.259-274.
- García-Navarro P., (1989), Estudio de la propagación de ondas en cursos fluviales. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, España.
- García-Navarro P. and Savirón J.M., (1992), *McCormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow*, Journal of Hydraulic Research. Vol. 30, pp. 95-105.
- García-Navarro P, Saviron J.M. (1992), *Numerical simulation of unsteady open channel flow at junction*, Journal of Hydraulic Research Vol.30, No.5, pp.595-609.
- García-Navarro P., Alcrudo F.(1992), *ID open channel flow simulation using TVD McCormack scheme*, J.of Hydraulic Engineering. ASCE.
- García Navarro P, Zorraquino V. (1993), *Numerical modelling of flood propagation through a system of reservoirs*, Vol.119, No.3, Journal of the Hydraulic Division, American Society of Civil Engineering.
- Glaister P., (1988) *Approximate Riemann solutions of the shallow water equations*, Journal of Hydraulic Research, Vol.26 (No.3), pp.293-306.
- Gunaratnam D.J., Perkins F.E., 1970) *Numerical solution of unsteady flows in open channels* Report No. 127, Department of Civil Engineering, MIT.
- Hirsch Ch., (1990), Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol.2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, John Wiley & Sons, Chichester, U.K.
- Huang J., Song C.C.S., (1985) *Stability of dynamic flood routing schemes*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.111 (No.12), pp.1497-1505.
- Katopodes N., Strelkoff T. (1978), *Computing two-dimensional dam-break flood waves*, J. of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.104, No.HY9, pp. 1269-1288. Lax P. and Wendroff B., (1960), 'Systems of conservation laws', Comm. Pure and Applied Mathematics. Vol.XIII, pp.217-237.
- McCormack R.W., (1971), *Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer*, in Proceedings 2nd International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, ed. M.Holt, Springer-Verlag, Berlin, pp.151-163.
- Molinaro P.(1991), *Dam-Break Analysis: A State of the Art*, Computational Water Resources Ed. D. Bensari, C.A. Brebbia y D.Ovazar, C.M.P.
- Priestley A., (1989), *Roe type schemes for supercritical flows in rivers*, Numerical Analysis Report, University of Reading. U.K.
- Priestley A., (1990), 'A quasi-Riemann method for the solution of one-dimensional shallow water flow', Numerical Analysis Report. University of Reading. U.K.
- Roe P.L., (1989) *A survey on upwind differencing techniques*, Lecture Series in CFD, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Belgium, Marzo 1989.
- Stoker J.J., (1957), Water Waves, Interscience, New York.