

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

**Escuela Técnica Superior de Informática Aplicada
(Sistemas)
Curso 2010--2011**

Memoria Técnica del Proyecto

**Implementación de un generador de
mosaicos regulares a partir de
imágenes adquiridas por una
cámara**

Proyecto presentado por el Alumno:

Jordi Martí Calero

Dirigido por ***Manuel Agustí Melchor***

Dpto. de Informática de Sistemas y Computadores.

*Valencia, a ____ de _____ de
2011.*

Índice de contenido

Capítulo 1: Presentación.....	7
1.1 Introducción	7
1.2 Antecedentes.....	7
1.3 Objetivo del Proyecto.....	7
Capítulo 2: Especificación de requisitos.....	8
2.1 Materiales y métodos a utilizar.....	8
2.1.1 Herramientas a utilizar.....	8
2.1.2 Instalación de la herramienta utilizada.....	8
2.1.3 Fundamentos teóricos.....	8
2.1.3.1 Elementos de una simetría.....	8
2.1.3.2 Clasificación de las isometrías del plano euclidiano.....	9
2.1.3.3 La condición de las traslaciones independientes.....	9
2.1.3.4 La condición discreta.....	9
Capítulo 3: Nomenclatura.....	10
3.1 La restricción cristalográfica.....	10
3.2 Características generales de los grupos.....	10
3.3 Definiciones previas al desarrollo e implementación.....	11
3.4 Notación en imágenes de muestra de simetría.....	12
3.5 Ejemplos de simetría.....	12
Capítulo 4: Desarrollo.....	22
4.1 ¿Cómo se va a desarrollar?.....	22
4.1.1 La idea a desarrollar.....	22
4.2 Pasos a seguir.....	22
4.3 Operaciones aritmético/lógicas con OpenCV.....	22
4.4 ¿Cómo replicar una imagen?.....	24
4.5 Síntesis de imagen a partir de los GSP.....	27
4.5.1 P1 (GSP 1).....	28
4.5.1.1 Generación del P1 a partir de la CU.....	29
4.5.2 P2 (GSP 2).....	30
4.5.2.1 Generación del P2 a partir de la CU.....	31
4.5.3 PM (GSP 3).....	32
4.5.3.1 Generación del PM a partir de la CU.....	33
4.5.4 PG (GSP 4).....	34
4.5.4.1 Generación del PG a partir de la CU.....	35
4.5.5 CM (GSP 5).....	36
4.5.5.1 Generación del CM a partir de la CU.....	37
4.5.6 PMM (GSP 6).....	38
4.5.6.1 Generación del PMM a partir de la CU.....	38
4.5.7 PMG (GSP 7).....	40
4.5.7.1 Generación del PMG a partir de la CU.....	41
4.5.8 PGG (GSP 8).....	42
4.5.8.1 Generación del PGG a partir de la CU.....	43
4.5.9 CMM (GSP 9).....	44
4.5.9.1 Generación del CMM a partir de la CU.....	45
4.5.10 P4 (GSP 10).....	46
4.5.10.1 Generación del P4 a partir de la CU.....	47
4.5.11 P4M (GSP 11).....	48
4.5.11.1 Generación del P4M a partir de la CU.....	49

4.5.12 P4G (GSP 12).....	50
4.5.12.1 Generación del P4G a partir de la CU.....	51
4.5.13 P3 (GSP 13).....	52
4.5.13.1 Generación del P3 a partir de la CU.....	53
4.5.14 P3M1 (GSP 14).....	62
4.5.14.1 Generación del P3M1 a partir de la CU.....	63
4.5.15 P31M (GSP 15).....	64
4.5.15.1 Generación del P31M a partir de la CU.....	65
4.5.16 P6 (GSP 16).....	66
4.5.16.1 Generación del P6 a partir de la CU.....	67
4.5.17 P6M (GSP 17).....	68
4.5.17.1 Generación del P6M a partir de la CU.....	69
Capítulo 5: Conclusiones y/o futuras ampliaciones.....	70
Capítulo 6: Posibles aplicaciones prácticas del PFC.....	71
Capítulo 7: Bibliografía y referencias.....	74

Índice de ilustraciones

Imagen 1: Simetría del GSP P1.....	13
Imagen 2: Simetría del GSP P2.....	13
Imagen 3: Simetría del GSP PM.....	14
Imagen 4: Simetría del GSP PG.....	14
Imagen 5: Simetría del GSP CM.....	15
Imagen 6: Simetría del GSP PMM.....	15
Imagen 7: Simetría del GSP PMG.....	16
Imagen 8: Simetría del GSP PGG.....	16
Imagen 9: Simetría del GSP CMM.....	17
Imagen 10: Simetría del GSP P4.....	17
Imagen 11: Simetría del GSP P4M.....	18
Imagen 12: Simetría del GSP P4G.....	18
Imagen 13: Simetría del GSP P3.....	19
Imagen 14: Simetría del GSP P3M1.....	19
Imagen 15: Simetría del GSP P31M.....	20
Imagen 16: Simetría del GSP P6.....	20
Imagen 17: Simetría del GSP P6M.....	21
Imagen 18: Ejemplo de réplica mediante región o área de interés.	24
Imagen 19: Ejemplo de réplica mediante el método “réplicaSetGet”.....	25
Imagen 20: Ejemplo dónde puede verse el caso en que la imagen de destino no es múltiplo de la de origen.....	26
Imagen 21: Ejemplo de réplica incompleta.....	27
Imagen 22: Ejemplo de construcción de P1.....	29
Imagen 23: Ejemplo de construcción de P2.....	31
Imagen 24: Ejemplo de construcción de PM.....	33
Imagen 25: Ejemplo de construcción de PG.....	35
Imagen 26: Ejemplo de construcción de CM.....	37
Imagen 27: Ejemplo de construcción de PMM.....	39
Imagen 28: Ejemplo de construcción de PMG.....	41
Imagen 29: Ejemplo de construcción de PGG.....	43
Imagen 30: Ejemplo de construcción de CMM.....	45
Imagen 31: Ejemplo de construcción de P4.....	47
Imagen 32: Ejemplo de construcción de P4M.....	49
Imagen 33: Ejemplo de construcción de P4G.....	51
Imagen 34: Aspecto de un PF del grupo P3.....	53
Imagen 35: Síntesis interna de un PF del grupo P3.....	53
Imagen 36: Síntesis del PF en dos triángulos equiláteros.....	54
Imagen 37: Síntesis interna del triángulo de color naranja de la imagen 36 del apartado c.....	54
Imagen 38: Triángulo isósceles.....	55
Imagen 39: Ángulos del triángulo equilátero izquierdo, de los dos en los que se divide el isósceles de la imagen 38.....	56
Imagen 40: Ancho de los triángulos equiláteros en que se divide el isósceles.....	56
Imagen 41: Proyecciones de un vector V.....	57
Imagen 42: Imagen origen	58
Imagen 43: Aplicando la máscara a la imagen de origen.....	58
Imagen 44: Muestra de la equivalencia de la imagen 39 en nuestra imagen origen con la máscara aplicada.....	59
Imagen 45: Limitaión del área recortada sobre la imagen de origen.....	59

Imagen 46: Rotación de 120° de la máscara.....	60
Imagen 47: Rotación de -120° de la máscara.....	61
Imagen 48: Ejemplo de uso de la aplicación del PFC. Fabricación de una esfera de 10 pulgadas de diámetro.....	71
Imagen 49: Imagen de un GSP P6M replicado utilizado como Wallpaper en Windows Vista.....	72
Imagen 50: Empapelado de pared decorativo.	73

Índice de tablas

Tabla 1: Características generales de los grupos de simetría en plano.....	11
Tabla 2: Notación de simetría.....	12
Tabla 3: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P1, ejemplo de PF y CU.....	23
Tabla 4: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P2, ejemplo de PF y CU.....	25
Tabla 5: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PM, ejemplo de PF y CU.....	27
Tabla 6: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PG, ejemplo de PF y CU.....	29
Tabla 7: Caracterización de las simetrías interiores del GSP CM, ejemplo de PF y CU.....	33
Tabla 8: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PMM, ejemplo de PF y CU.....	35
Tabla 9: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PMM, ejemplo de PF y CU.....	37
Tabla 10: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PGG, ejemplo de PF y CU.....	39
Tabla 11: Caracterización de las simetrías interiores del GSP CMM, ejemplo de PF y CU.....	41
Tabla 12: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P4, ejemplo de PF y CU.....	43
Tabla 13: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P4M, ejemplo de PF y CU.....	45
Tabla 14: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P4G, ejemplo de PF y CU.....	47
Tabla 15: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P3, ejemplo de PF y CU.....	49
Tabla 16: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P3M1, ejemplo de PF y CU.....	63
Tabla 17: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P31M, ejemplo de PF y CU.....	65
Tabla 18: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P6, ejemplo de PF y CU.....	67
Tabla 19: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P6M, ejemplo de PF y CU.....	69

Capítulo 1: Presentación:

Introducción:

¿Cómo construir Wallpapers de una forma más personalizada y aplicarlos a nuestro escritorio? ¿Cómo trabajar con imágenes capturadas mediante medios multimedia, o simplemente leídas desde un fichero, y aplicarlas para obtener un diseño personalizado?

Estas son algunas de las preguntas que han dado a luz al proyecto aquí planteado. La idea fundamental es dar un soplo de aire fresco al diseño multimedia de imágenes, investigando en el campo de la simetría en el plano aplicando la restricción cristalográfica. A partir de una estructura de este tipo replicaremos a modo de tapiz según nuestro propio gusto.

Ejemplos de imágenes periódicas se puede encontrar en diferentes contextos [xah2010]. En ámbitos como las matemáticas (Escher, Penrose) y la cristalografía, el diseño artístico de mosaicos (desde la época celta, pasando por ejemplos de arte Árabe/Islámico) y ornamentos, hasta los más habituales y tradicionales de nuestra cultura como pueden ser: los realizados con punto de tejer de nuestras abuelas, los enrejados de mimbre de los muebles, el textil o la cerámica. Los diseñadores crean imágenes en las que se utiliza la repetición espacial, de forma periódica, de un patrón.

En esencia es como la explicación o reducción del contenido de una imagen a una subimagen, cuya geometría define la rejilla o tamaño del PF que tesela la original. La repetida traslación de ese patrón a los "puntos" de la rejilla permite reconstruir la imagen de partida.

Antecedentes:

Actualmente existen aplicaciones tales como *Inkscape*, *GIMP* o *Kali*, de código libre, que realizan ciertas operaciones geométricas con imágenes, y que nosotros vamos a realizar también en el presente proyecto. Nosotros utilizaremos estas aplicaciones en la medida que nos simplifiquen la perspectiva que pueda alcanzar el proyecto en alguna de sus fases, y ante todo, frente a dudas o incongruencias que puedan surgir en diferentes fuentes de documentación y desarrollo.

Objetivo del proyecto:

Este proyecto aborda la construcción de imágenes de contenido periódico a partir de una muestra que se toma de la imagen adquirida con una cámara, sobre la que el usuario puede determinar una zona de interés.

Este patrón será replicado espacialmente hasta rellenar una imagen del tamaño que especifique el usuario sin solapes ni huecos. Este proceso está determinado por una serie de reglas de aplicación de simetrías sobre el patrón original, que en el ámbito matemático se denominan Grupos de Simetría. A estas imágenes se les suele llamar "Wallpaper", aunque no hay que confundir su interés con el de ser utilizadas como fondo del escritorio de un entorno de ventanas típico de un computador.

La aplicación a realizar será multiplataforma y permitirá mediante un interfaz gráfico la manipulación de los parámetros referidos a la obtención de imágenes, tamaño del patrón, simetrías a aplicar y generación de la imagen final.

Capítulo 2: Especificación de requisitos:

Material y métodos a utilizar:

Herramientas a utilizar:

- Code::Blocks
- Microsoft Visual C++ 6.0
- OpenCV 2.1.0
- Gimp 2.6.8
- Inkscape
- Kali
- OpenOffice 3.0
- Internet Explorer
- Mozilla Firefox
- Traductor de Google

Instalación de la herramienta utilizada:

Adjunto a la memoria el anexo de instalación de toda la herramienta necesaria utilizada en el desarrollo del Proyecto dónde se. El fichero adjunto, de nombre “**InstalaciónDeHerramientas.odt**”, detalla todo el proceso seguido para el correcto funcionamiento de éstas. Se ha preferido detallar esta parte como anexo a la presente memoria debido a la extensión que ya de por sí abarca esta, además de poder facilitar al usuario, una mejor explicación de los elementos instalados en la realización del presente proyecto.

Fundamentos teóricos:

Consideremos un conjunto de puntos del plano, al que llamaremos figura F, por ejemplo los puntos pueden ser los puntos pertenecientes a un triángulo o cualquier otro polígono, si bien el conjunto de puntos puede ser tan complicado como podamos imaginar. Llamaremos grupo de simetría de la figura F al conjunto de movimientos del plano que dejan invariante la figura F. Podemos encontrar esta nomenclatura en [Mosaicos2010], en la bibliografía.

Una de las formas de empapelar un plano es comenzar con un motivo simple y repetirlo según ciertas reglas. Hay diecisiete formas de empapelar el plano, que fueron clasificadas y nominadas por la Unión Internacional de Cristalografía desde 1952 ya que la simetría tiene mucho que ver con la Cristalografía.

Los métodos cristalográficos se apoyan fuertemente en el análisis de los patrones de difracción que surgen de una muestra cristalina al irradiarla con un haz de rayos X, neutrones o electrones. La estructura cristalina también puede ser estudiada por medio de microscopía electrónica. Un material cristalino es aquel en el que los átomos se estructuran en redes basadas en la repetición tridimensional de sus componentes. A la estructura que se repite se le denomina célula o celda cristalina. Los cristales se clasifican según sean las propiedades de simetría de la célula cristalina. Estas propiedades de simetría también se manifiestan en ocasiones en simetrías macroscópicas de los cristales, como formas geométricas o planos de fractura. El estudio de la cristalografía requiere un cierto conocimiento del grupo de simetría.

Elementos de una simetría:

- **Eje de simetría:** es una línea imaginaria que pasa a través del cristal, alrededor de la cual, al realizar éste un giro completo, repite dos o más veces el mismo aspecto. Los ejes pueden ser: monarios, si giran el motivo una vez (360°); binarios, si lo giran dos veces (180°); ternarios, si lo giran tres veces (120°); cuaternarios, si lo giran cuatro veces (90°); o senarios, si giran el motivo seis veces (60°). Más información en [Cristalografía-Wikipedia], de la bibliografía.
- **Plano de simetría:** es un plano imaginario que divide el cristal en dos mitades simétricas especulares,

como el reflejo en un espejo, dentro de la celda. Puede haber múltiples planos de simetría. Se representa con la letra m .

- **Centro de simetría:** es un punto dentro de la celda que, al unirlo con cualquiera de la superficie, repite al otro lado del centro y a la misma distancia un punto similar.

Cabe tener en cuenta que a veces dos categorizaciones distintas son significativas, una basada sólo en formas, y otra basada además con colores. Cuando estos son ignorados, hay que fijarse en que pueden aparecer más simetrías o las que hay pueden aparecer modificadas.

En blanco y negro, también hay 17 grupos de Wallpapers, por ejemplo, un mosaico de colores es equivalente a uno en blanco y negro con los colores codificados radialmente en una circular, "código de barras" simétrica en el centro de la masa de cada baldosa.

Matemáticamente, un grupo de Wallpapers o un grupo cristalográfico plano es un tipo de grupo topológico discreto de isometrías del plano euclidiano que contiene dos traducciones linealmente independientes. Dos grupos de isimetría son del mismo tipo (del mismo grupo de Wallpapers) si son los mismos hasta una transformación afín del plano. Así por ejemplo, una traslación del plano, no afecta al grupo de Wallpapers. Lo mismo se aplica para un cambio del ángulo entre los vectores de traslación, siempre que no se agregue o quite cualquier simetría. Al contrario que en el caso de tres dimensiones, se puede restringir el equivalente transformaciones afines a los que conservan la orientación.

Clasificación de las isometrías del plano euclidiano:

- **Traducciones:** Denotado por T_v , donde v es un vector en R^2 . Esto tiene el efecto de trasladar el plano aplicando el vector de desplazamiento.
- **Rotaciones:** Denotado por R_c, θ , donde c es un punto en el plano (el centro de la rotación), y θ es el ángulo de la rotación.
- **Reflexiones:** Reflexiones o isometrías espejo, denotado por FL , donde L es una línea en R^2 . (F es de "flip"). Esto tiene el efecto de reflejo en el plano de la línea L , llamado eje de reflexión o espejo asociado.
- **Reflexiones con desplazamiento:** Denotado por GL, d , donde L es una línea en R^2 , y d es la distancia. Esta es una combinación de una reflexión en la línea L y de traslación a lo largo de L por una distancia d .

La condición de las traslaciones independientes:

La condición de traslaciones linealmente independientes significa que no existen vectores linealmente independientes v y w (en R^2) de tal manera que el grupo contiene T_v y T_w . El propósito de esta condición es para distinguir grupos de simetría en el plano de los grupos de friso, que poseen una traslación, pero no dos linealmente independientes, y de grupos de puntos en dos dimensiones discretas, que no tienen traslación en absoluto. En otras palabras, los grupos de simetría en el plano representan patrones que se repiten en dos direcciones distintas, en contraste con friso de grupos, que sólo repiten a lo largo de un solo eje.

La condición discreta:

El propósito de esta condición es asegurar que el grupo tiene un dominio fundamental compacto, o en otras palabras, una "célula" de cero, área finita, que se repite a través del plano. Sin esta condición, podríamos tener por ejemplo un grupo que contiene el T_x de traslación para todos los números racionales x , que no corresponden a ningún patrón de fondo de pantalla razonable.

Una consecuencia importante y no trivial de la condición de discontinuidad en combinación con la condición de traducciones independientes es que el grupo sólo puede contener la rotación de orden 2, 3, 4, o 6, es decir, cada giro en el grupo debe ser una rotación de 180° , 120° , 90° o 60° . Este hecho se conoce como el teorema de restricción cristalográfica, explicado con más detalle en el siguiente capítulo, y que puede ser generalizado a los casos de dimensiones superiores.

Capítulo 3: Nomenclatura

La restricción cristalográfica:

La aplicación de los criterios de simetría dan lugar a una clasificación de los cristales en un número muy limitado de sistemas, que determinan la presencia y el comportamiento de muchas propiedades físicas de los cristales, como son la conductividad eléctrica, la elasticidad, etc. La regularidad y la simetría son unas de las cualidades más sorprendentes de los cristales, tanto a nivel externo como a nivel interno en el dominio atómico. El primer intento de explicar esta regularidad data del principio del siglo XIX, en el que el cristalógrafo Haüvy consideraba que los cristales estaban formados por apilamientos de una multitud de "minúsculos poliedros" todos idénticos. Así, la presencia de una determinada forma regular estaba justificada por el tipo de disposición interna de estos minúsculos poliedros. Cien años más tarde, esta teoría se modificó por traslaciones de una celda básica. Esta teoría fue comprobada experimentalmente a partir de la observación de las desviaciones simétricas que se producen al hacer pasar un haz de rayos X a través de los cristales [Max von Laue, 1912].

Con la aplicación de esta técnica se tuvo constancia científica de que en los cristales los átomos se ordenaban en celdas en forma de paralelepípedos repetidos en las tres direcciones espaciales. La absoluta simetría interior de los cristales hace que en las retículas cristalográficas sólo se puedan dar ángulos de 180°, 120°, 90°, 60° o sus múltiplos. Este hecho es llamado la restricción cristalográfica.

Ahora vamos a detallar cómo generamos, a partir de un motivo que el usuario nos proporciona a partir de una imagen generada por una cámara, o leída de disco, junto con su elección del grupo de simetría a utilizar, y teniendo en cuenta la restricción cristalográfica implicada, la imagen replicada.

Características generales de cada grupo:

A modo de resumen y con la intención de que sirva para identificar cada grupo de simetría representamos en la Tabla 1, [Mosaicos2010], una clasificación general en base a las características de cada grupo:

Ángulo de rotación menor	<i>¿Tiene ejes de reflexión o simetría?</i>			
	Sí		No	
Sin rotaciones	<i>¿Los ejes de reflexión y la dirección de deslizamiento són paralelos?</i>		<i>¿Tiene reflexión con deslizamiento?</i>	
	Sí	No	Sí	No
	<u>pm</u>	<u>cm</u>	<u>pg</u>	<u>p1</u>
$360^\circ/2 = 180^\circ$	<i>¿Ejes de reflexión perpendiculares?</i>		<i>¿Tiene reflexión con deslizamiento?</i>	
	Sí	No	Sí	No
	<i>¿Pasan por el centro de la figura?</i>			
	Sí	No		
	<u>pmm</u>	<u>cmm</u>	<u>pmg</u>	<u>pgg</u>
$360^\circ/3 = 120^\circ$	<i>¿Los ejes de simetría pasan por en centro?</i>			
	Sí	No		
	<u>p3m1</u>	<u>p31m</u>	<u>p3</u>	
$360^\circ/4 = 90^\circ$	<i>¿Ejes de simetría a 45°?</i>			
	Sí	No		
	<u>p4m</u>	<u>p4g</u>	<u>p4</u>	
$360^\circ/6 = 60^\circ$	<u>p6m</u>		<u>p6</u>	

Tabla 1: Características generales de los grupos de simetría en plano.

Definiciones previas al desarrollo y a la implementación:

Paralelogramo: Polígono formado por cuatro lados, cuyos lados son paralelos dos a dos.

Paralelogramo Fundamental (PF): Una parte o modelo del objeto, tan pequeña o irreductible como sea posible, que determina el objeto entero basado en la simetría. Será la parte a replicar. El paralelogramo fundamental no es único, de hecho cualquier traslación suya es de nuevo un paralelogramo fundamental.

Grupo de Simetría en el Plano (GSP): grupo de transformaciones geométricas que deja invariante cierta entidad geométrica o física.

Celda Unidad (CU): Es la mínima parte en la que se divide el PF. A partir de esta, podemos construir el PF.

Máscara: Imagen cuya función es identificar, al leer de disco la imagen de los PF o CU, que puntos son de interés y que puntos son “fondo”.

Tesela: Viene del griego τεσσερες, que significa, cuatro. Las teselas son piezas de forma cúbica, hechas de rocas calcáreas o materiales de vidrio o cerámicas muy cuidadas y elaboradas y de distintos tamaños.

Esgrafiado: El **esgrafiado** es una técnica decorativa que consiste en hacer incisiones sobre el cuerpo del objeto o pared, en la parte superficial, de manera que quede al descubierto la capa inferior, que es de otro color. Generalmente se usan plantillas para conseguir motivos geométricos de repetición.

Notación en imágenes de muestra de simetría que utilizaremos:

A continuación se procede a la descripción tanto textual como visual (mediante ejemplos) de cada uno de los 17 grupos de simetría en el plano.

En cada uno de los grupos de paralelogramo, en la imagen que describe la simetría del PF, encontraremos diferentes símbolos para los que la siguiente tabla facilita su interpretación.

	Centro de rotación de orden dos (180°).
	Centro de rotación de orden tres (120°).
	Centro de rotación de orden cuatro (90°).
	Centro de rotación de orden seis (60°).
	Eje de reflexión.
	Eje de reflexión con deslizamiento.

Tabla 2: Notación de simetría

Ejemplos de simetría:

A continuación se muestran ejemplos visuales reales, situados todos ellos en la ciudad de Segovia, recogidos de la web de la asignatura de investigación en la edificación, de la escuela de arquitectura técnica de la Universidad Politécnica de Madrid [UPM], por separado, de cada grupo de simetría en el plano. Las imágenes muestran la imagen ya replicada, para que de una manera global el usuario identifique que partes en ella se replican y de que forma. A modo de introducción, y añadiendo algunas de las características más simbólicas de cada grupo, facilitamos una breve toma de contacto con las simetrías del plano que nuestro proyecto será capaz de generar.

El área delimitada por el color rojo en las imágenes intenta determinar el PF del GSP (o área replicada).

Simetría, GSP P1:

El grupo $P1$ es el más sencillo de todos los grupos de simetría, pues los únicos movimientos que lo dejan invariable son las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela. No contiene giros, ni reflexiones, ni reflexiones deslizantes. El esgrafiado, Imagen 1, se encuentra en Segovia, en el frontal superior de la iglesia de San Nicolás.

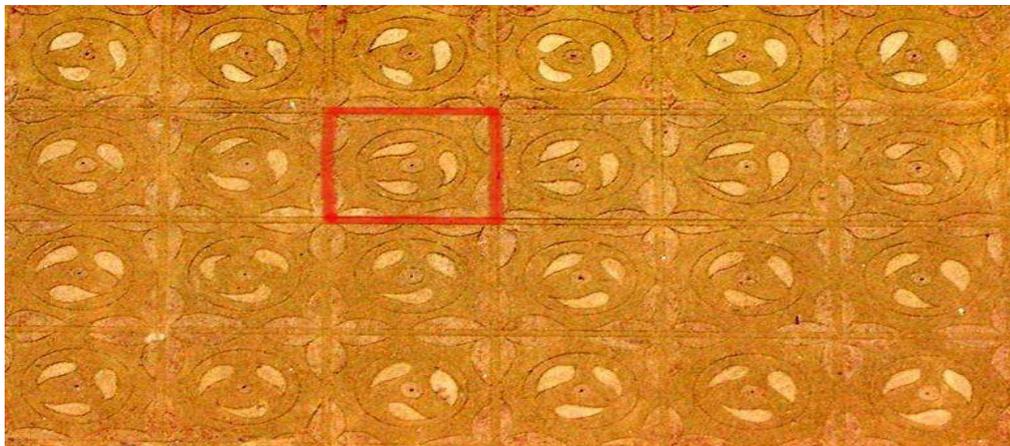


Imagen 1: Simetría del GSP P1

Simetría, GSP P2:

El grupo $P2$ contiene las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela y también contiene giros de orden 2. El esgrafiado de la Imagen 2 corresponde a la Plaza de Medina del Campo, en Segovia también. En su diseño pueden apreciarse triángulos de pequeño tamaño y burbujas que enmarcan flores de cuatro pétalos.

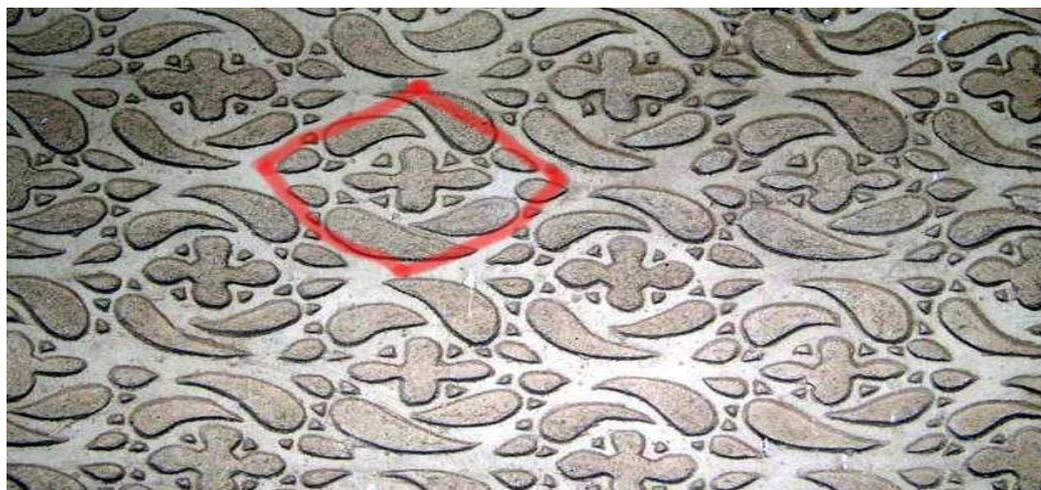


Imagen 2: Simetría del GSP P2

Simetría, GSP PM:

El grupo *PM* contiene las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela y, no contiene giros ni reflexiones deslizantes. El esgrafiado de la Imagen 3 corresponde a la fachada del edificio de la calle Juan Bravo nº24 de Segovia, siendo una combinación de flores de cuatro pétalos rodeadas de burbujas.

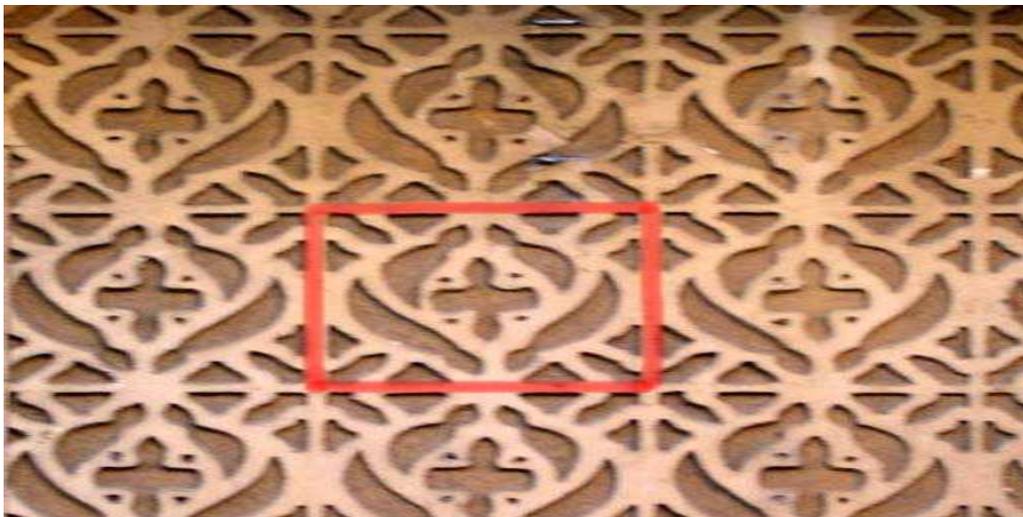


Imagen 3: Simetría del GSP PM

Simetría, GSP PG:

El grupo *PG*, además de las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, contiene reflexiones deslizantes, de ejes paralelos. El esgrafiado, Imagen 4, se encuentra en el zócalo de una vivienda situada en Abades, en la provincia de Segovia. A pesar de estar formado únicamente por dos alineaciones, contiene suficiente información como para rellenar el plano.



Imagen 4: Simetría del GSP PG

Simetría, GSP CM:

El grupo CM , además de las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, contiene reflexiones, y reflexiones deslizantes. El esgrafiado, Imagen 5, se encuentra en la fachada del edificio situado en la bajada del Carmen, nº 2, de Segovia. Su diseño es una variante de losange o red de rombos. En este caso, los lados de los rombos se modifican con líneas curvas, en los vértices se incorporan pequeños rectángulos y el interior se decora con formas vegetales.

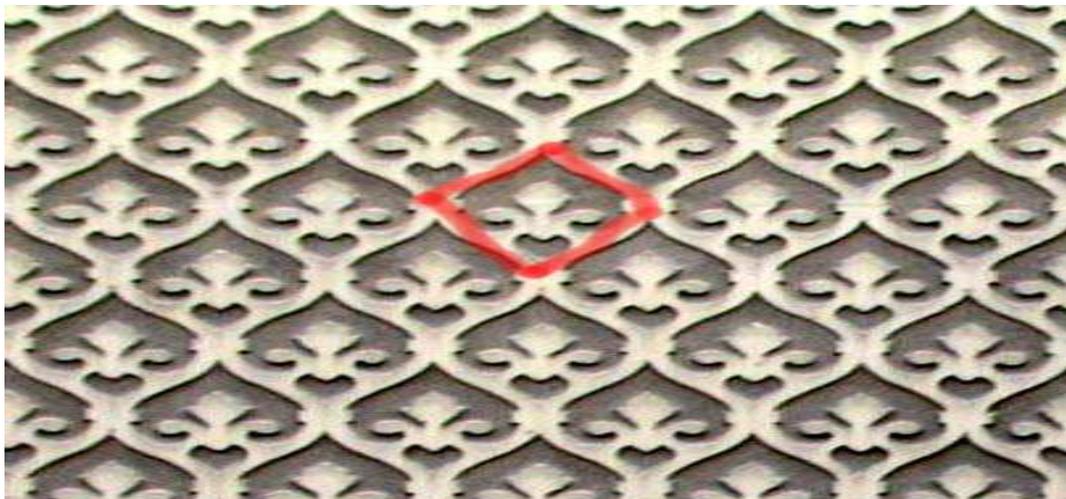


Imagen 5: Simetría del GSP CM

Simetría, GSP PMM:

Además de las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, el grupo PMM contiene giros de orden 2, y reflexiones sin deslizar. El esgrafiado de la Imagen 6 se ha conseguido de una fachada de una vivienda unifamiliar en Abades, provincia de Segovia. Es una variedad de losange, en la cual el interior de los rombos ha sido adornado con dos motivos distintos, que se alternan en las sucesivas filas de la red.

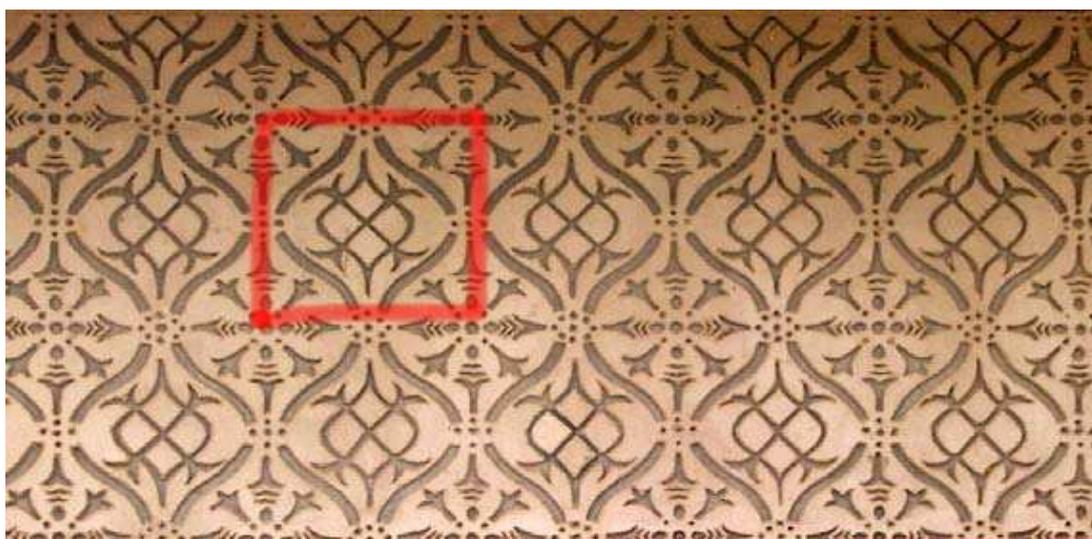


Imagen 6: Simetría del GSP PMM

Simetría, GSP PMG:

El grupo *PMG*, además de las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, contiene giros de orden 2. Además contiene reflexiones, de ejes señalados con doble trazo y reflexiones deslizantes, cuyos ejes son perpendiculares a los ejes de reflexión. El esgrafiado seleccionado de la Imagen 7 se encuentra en Santiuste de San Juan Bautista, provincia de Segovia. Es el único de este grupo que hemos hallado hasta el momento y su estado de conservación no puede calificarse como satisfactorio, pues ha sido recubierto de pintura, perdiendo así las características y utilidad propias del esgrafiado original.

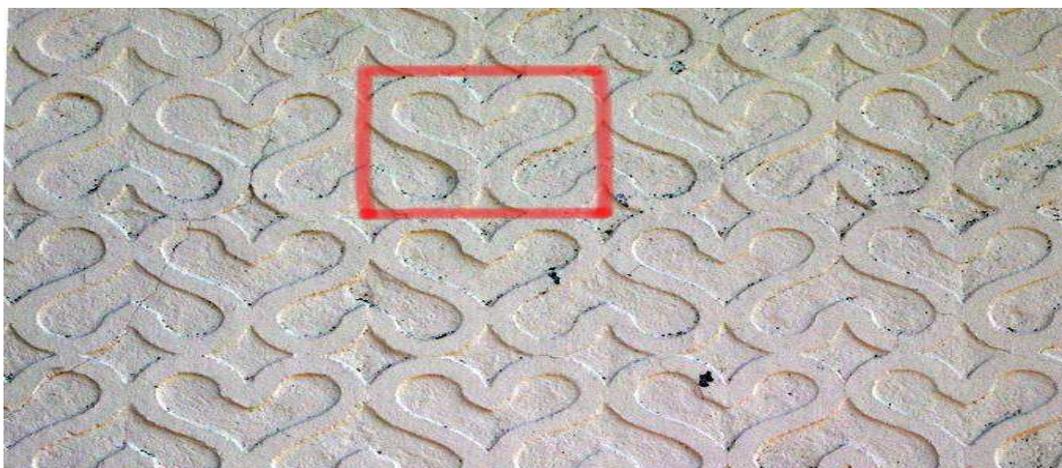


Imagen 7: Simetría del GSP PMG

Simetría, GSP PGG:

El grupo *PGG*, además de las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, contiene giros de orden 2, y reflexiones deslizantes con ejes de direcciones perpendiculares. No contiene reflexiones. La Imagen 8 se encuentra en la fachada de una vivienda en Coca, provincia de Segovia. Simula un muro de sillería con doble llaga, y presenta los lados menores de los sillares inclinados, hecho muy poco frecuente, pues en la mayoría de los casos éstos suelen trazarse siguiendo la vertical.

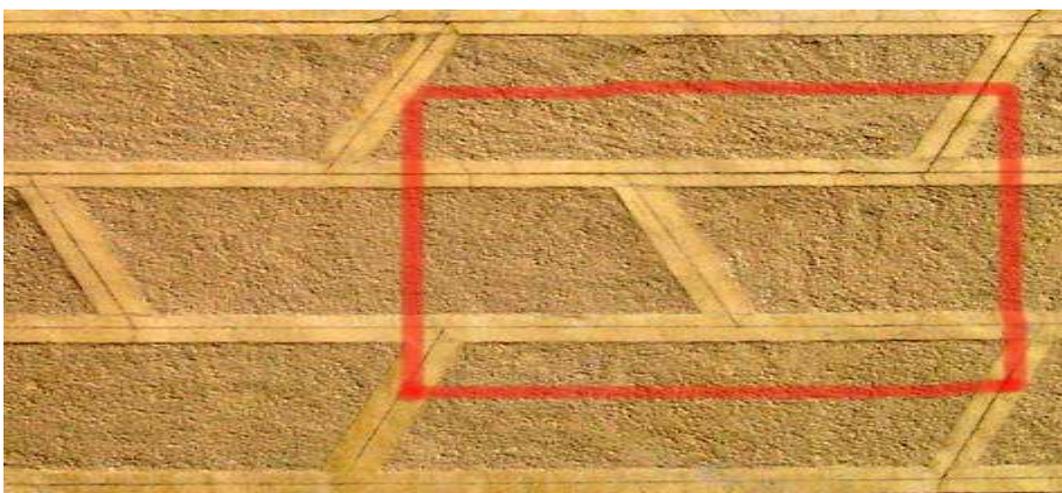


Imagen 8: Simetría del GSP PGG

Simetría, GSP CMM:

El grupo *CMM*, además de las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, contiene giros de orden 2. También contiene reflexiones. El esgrafiado de la Imagen 9 corresponde a la fachada del edificio situado en la Avda. de Fernández Ladreda, nº 25, en Segovia. Es un losange muy sencillo, cuyo único adorno son los agujeros que aparecen en los vértices de los rombos.

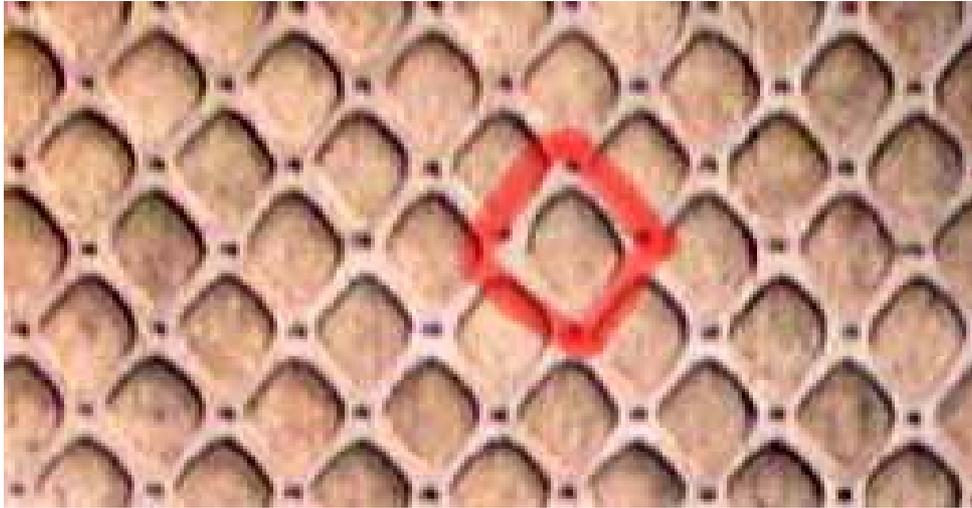


Imagen 9: Simetría del GSP CMM

Simetría, GSP P4:

El grupo *P4* contiene las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela y, además, giros de orden 4 y giros de orden 2. No contiene reflexiones ni reflexiones deslizantes. El esgrafiado de la Imagen 10 se ha tomado de la fachada de la estación de autobuses de Segovia. La mayor parte de dicha fachada se encuentra rellena por otro esgrafiado y éste aparece entre las ventanas situadas en la vertical, a la derecha de la misma. Su diseño incorpora motivos helicoidales o torbellinos en el interior de los círculos, que proporcionan sensación de movimiento.

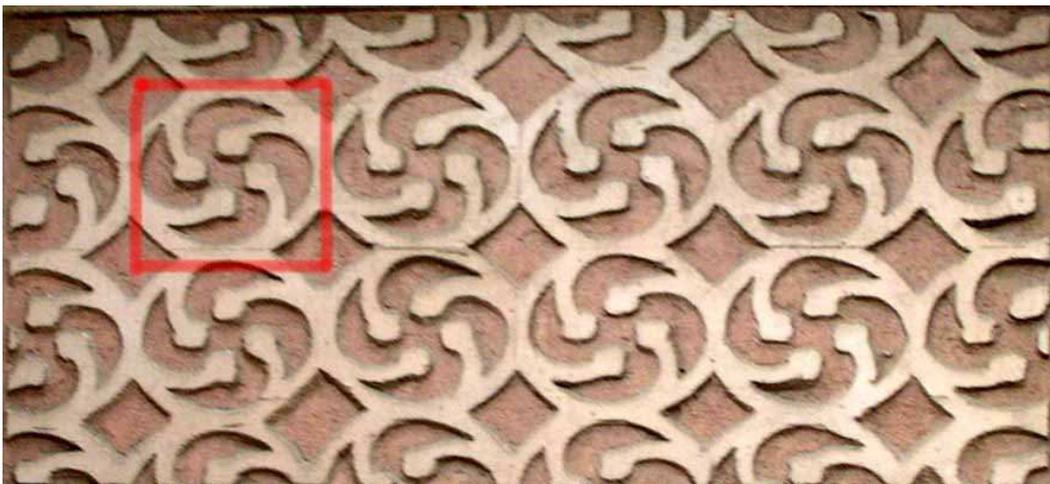


Imagen 10: Simetría del GSP P4

Simetría, GSP P4M:

El grupo P4M contiene las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, giros de orden 4, giros de orden 2, reflexiones y reflexiones deslizantes. El esgrafiado de la Imagen 11 corresponde a la fachada de la calle del Carmen, de Segovia. Este diseño se obtiene a partir de bandas onduladas que configuran una retícula curvilínea adornada con motivos vegetales.

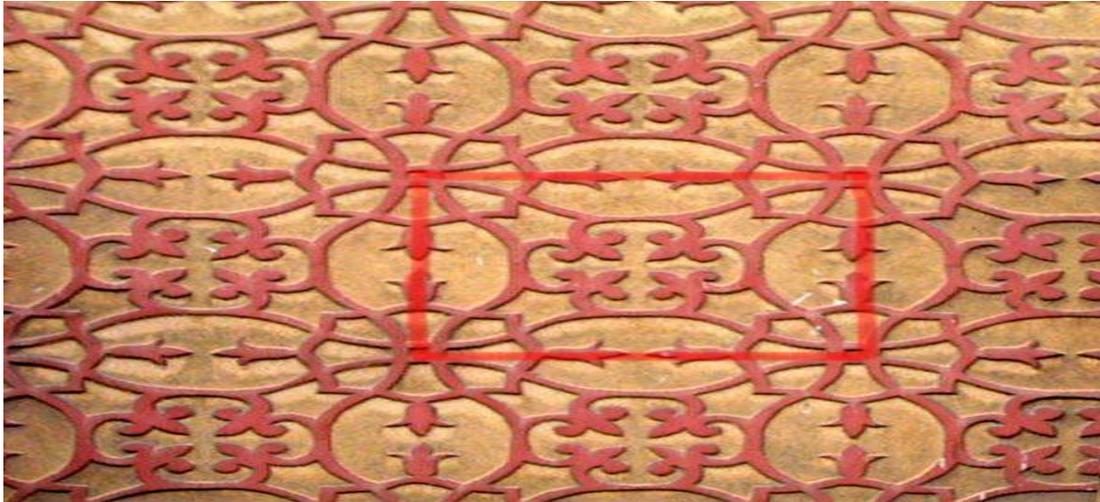


Imagen 11: Simetría del GSP P4M

Simetría, GSP P4G:

El grupo P4G contiene las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela y además, giros de orden 4. También contiene giros de orden 2, reflexiones y reflexiones deslizantes. El esgrafiado de la Imagen 12 se ha tomado de la fachada posterior del Hospital Policlínico de Segovia, aunque también aparece en otras fachadas. En él, la retícula definida por las líneas onduladas, conocidas como sinusoides o meandros, no contiene ningún relleno. Cabe señalar que este motivo ha sido utilizado en distintas culturas figurando, por ejemplo, en la Mezquita de Córdoba.

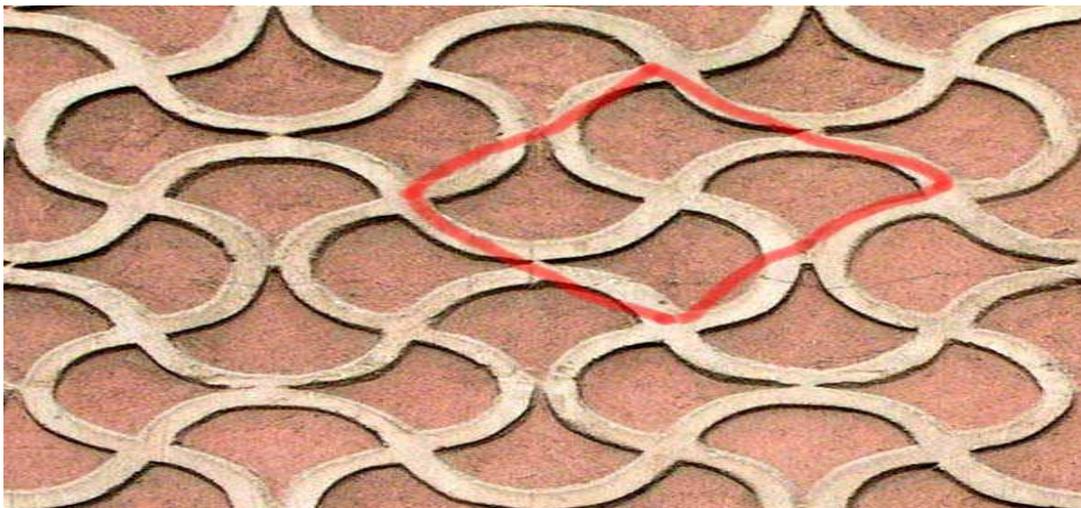


Imagen 12: Simetría del GSP P4G

Simetría, GSP P3:

Presentamos un boceto (Imagen 13, izquierda) de un esgrafiado ubicado en La Velilla, provincia de Segovia, cuya ejecución se realizó siguiendo una disposición de los motivos incompatible con el giro de orden 3 que posee el patrón inicial. El otro boceto (Imagen 13, derecha) es una variante para generar un posible esgrafiado de grupo $p3$, pues sí mantiene dicho giro de orden 3 y no hay reflexiones.

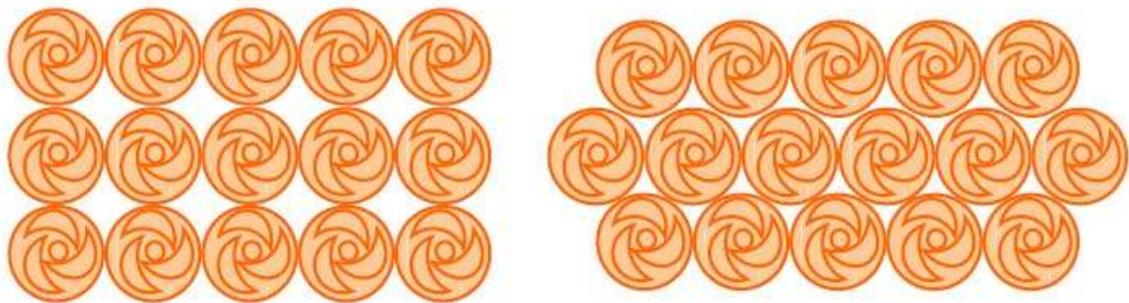


Imagen 13: Simetría del GSP P3

Simetría, GSP P3M1:

Mostramos los bocetos de dos esgrafiados, realizados ambos a partir de un motivo triangular que alterna los colores blanco y negro. El primero (Imagen 14, izquierda) corresponde a un esgrafiado segoviano formado por triángulos rectángulos. El segundo (Imagen 14, derecha) simboliza un esgrafiado catalán donde los triángulos son equiláteros y cuyo grupo es $P3M1$, ya que posee giros de orden 3 y por todo centro de giro pasan ejes de reflexión.

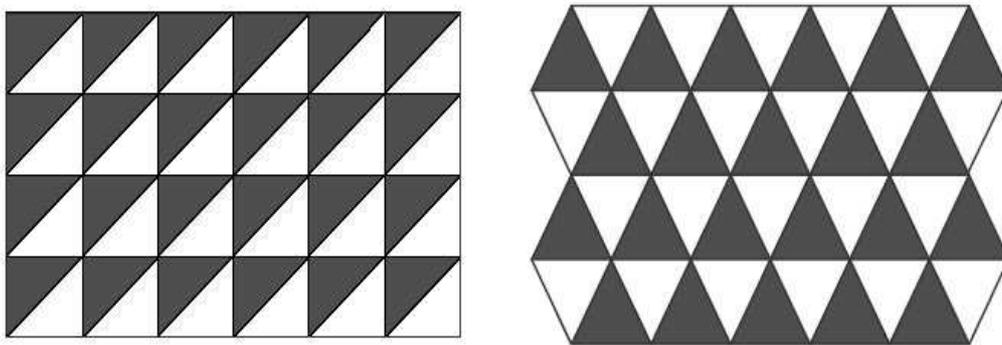


Imagen 14: Simetría del GSP P3M1

Simetría, GSP P31M:

Observamos en la Imagen 15 el boceto de un esgrafiado segoviano formado por hexágonos cuyo interior contiene un círculo que está rodeado de seis pequeños semicírculos (Imagen 15, izquierda). Basta modificarlo ligeramente, añadiendo un cambio de color alternativamente en tres de los semicírculos (Imagen 15, derecha) para que el máximo orden de giro sea 3, y se convierta en un posible esgrafiado de grupo $P31M$, pues contiene reflexiones y existen centros de giro de orden 3—los vértices de los hexágonos— por los que no pasan ejes de reflexión.

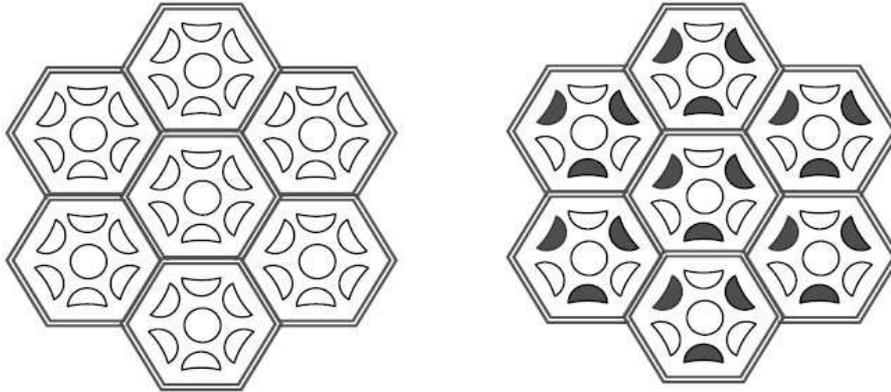


Imagen 15: Simetría del GSP P31M

Simetría, GSP P6:

El grupo $P6$ no contiene reflexiones ni reflexiones deslizantes.

Es la única imagen no extraída de la ciudad de Segovia. Esta imagen está extraída de la fachada de la iglesia de la Virgen Tobed, en Zaragoza.

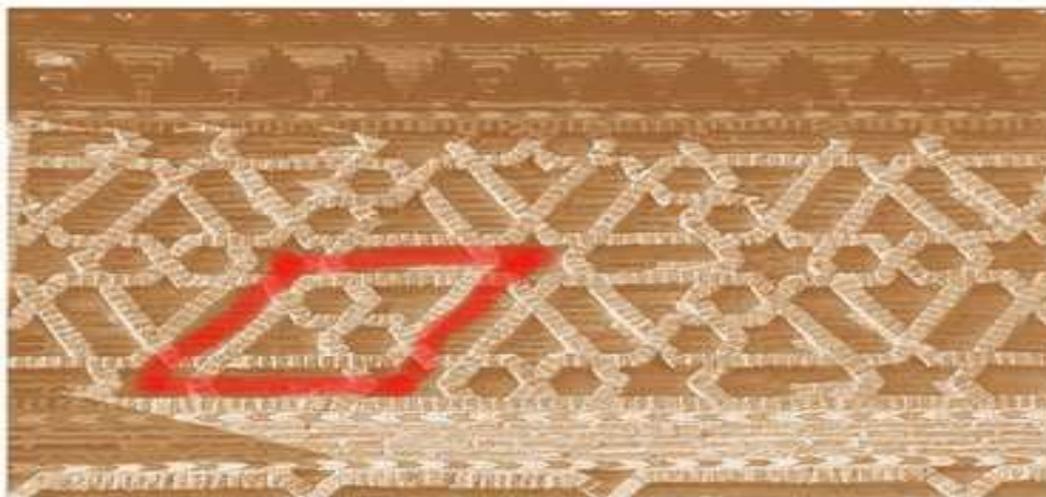


Imagen 16: Simetría del GSP P6

Simetría, GSP P6M:

El grupo P6M contiene las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela y una gran cantidad de giros, reflexiones y reflexiones deslizantes. El mayor orden de giro es 6. También hay giros de orden 3 y de orden 2. El esgrafiado de la Imagen 17 corresponde a la fachada lateral del edificio situado en la calle Cervantes, nº 24, en Segovia. Proviene de una lacería de origen mudéjar que combina una trama hexagonal con estrellas de seis puntas. Los hexágonos están decorados con una estrella en su centro y cada estrella queda enlazada con las seis estrellas más próximas por la prolongación de sus lados.

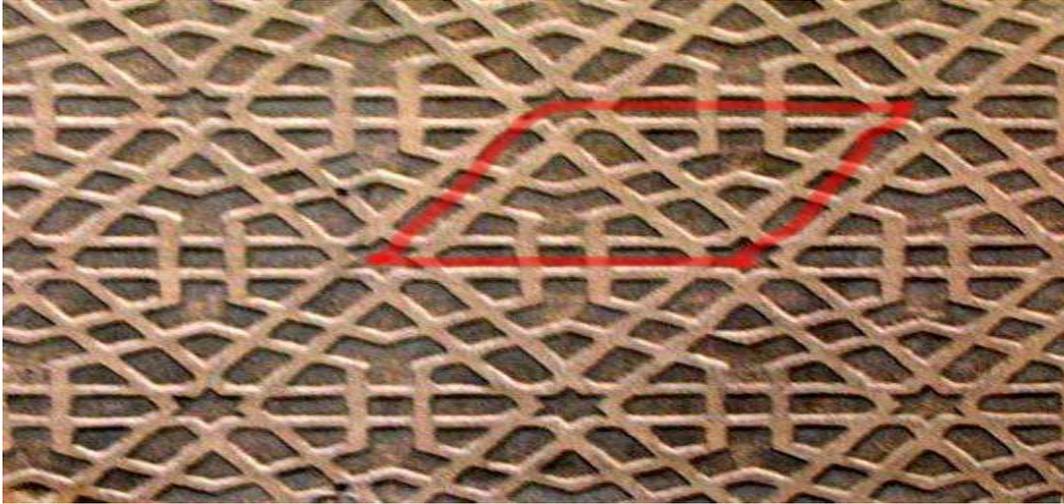


Imagen 17: Simetría del GSP P6M

Capítulo 4: Desarrollo:

¿Cómo se va a desarrollar?

La idea a desarrollar es:

- Permitir la elección de un motivo (celda básica o elemental) de diseño por parte del usuario, tomada de la cámara o de un fichero.
- Componer con esta un patrón, paralelogramo fundamental, según uno de los grupos de simetría, a elección del usuario.
- replicar el patrón hasta completar un número de repeticiones o un tamaño de la imagen final, indicados por el usuario.

Pasos a seguir:

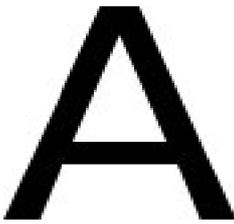
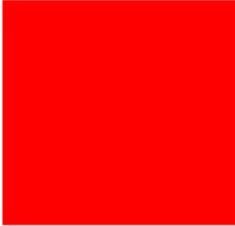
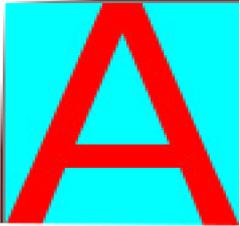
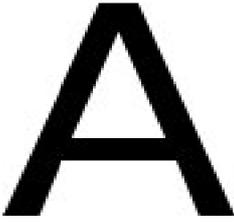
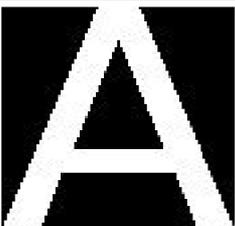
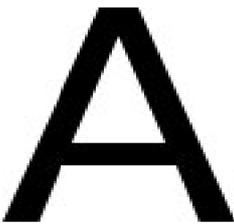
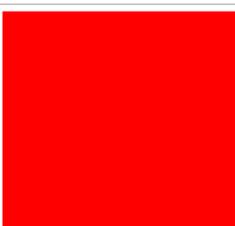
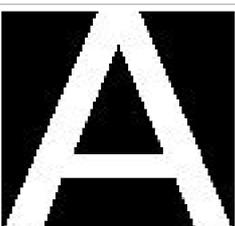
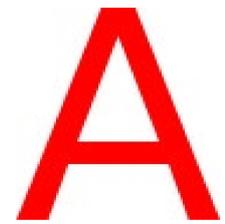
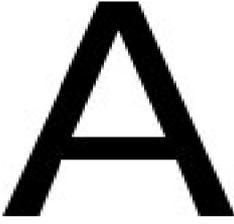
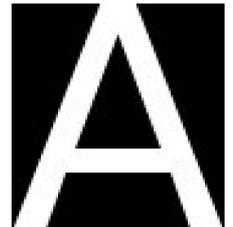
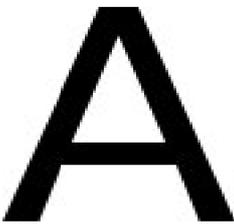
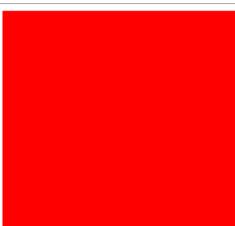
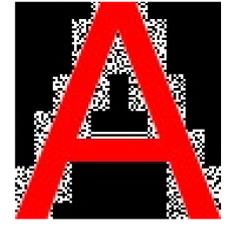
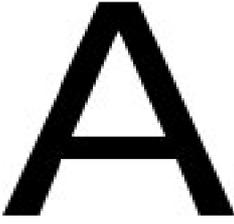
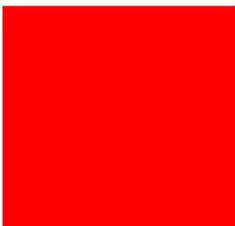
1. Obtener un motivo de la imagen deseada.
2. Construir a partir del motivo proporcionado, el paralelogramo fundamental.
3. replicar el paralelogramo fundamental.

Imagen → Celda unidad (CU) → Paralelogramo Fundamental (PF) → Imagen replicada

Operaciones aritmético/lógicas con OpenCV:

La Tabla 2 la hemos creado con el objetivo de esclarecer el resultado de las operaciones aritmético/ lógicas que en el presente proyecto son necesarias, y que en diferentes fases se aplican así como anticipar el resultado que producen para posibles futuras ampliaciones y posible ahorro de tiempo.

Nota: Se adjunta a la presente memoria el código que genera la siguiente tabla, con el nombre de OperacionesAritméticas.c .

<u>OPERACIÓN</u>	IMAGEN A	IMAGEN B	MÁSCARA	IMAGEN RESULTADO
<u>XOR</u>				
<u>AND</u>				
<u>ADD</u>				
<u>NOT</u>		NO REQUERIDA	NO REQUERIDA	
<u>OR</u>				
<u>DIV</u>			Optional scale factor (scale=1.0)	

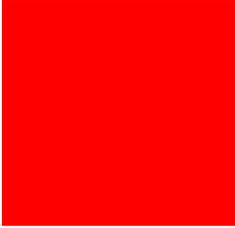
<u>MUL</u>				
------------	---	---	--	---

Tabla 3: Operaciones Aritmético/Lógicas con OpenCV.

¿Cómo replicar una imagen?

La réplica, para todos los paralelogramos, se puede realizar de tres formas distintas:

1. Mediante el uso de áreas de interés (Region Of Interest, abreviado ROI) utilizado en nuestra función “replicarROI”, en nuestra implementación). Establecemos el PF como área de interés y copiamos esa área tantas veces como quepa en el área de la imagen de destino.

Nota: En este primer ejemplo suponemos que el tamaño de la imagen de destino es múltiplo del de la imagen origen.

Pseudocódigo:

ImagenOrigen, ImagenDestino → Función ReplicarROI → áreaDeInterés=áreaImagenOrigen

Mientras((AnchoImagenDestino>AnchoImagenOrigen)&&

(AlturaImagenDestino>AlturaImagenOrigen)) → Copia áreaDeInterés en ImagenDestino

El resultado de aplicar este algoritmo se puede ver en la Imagen 18: A la izquierda la imagen origen, de tamaño 306x138, a la derecha la imagen origen replicada en la imagen destino, de tamaño 700x700 mediante la instrucción de opencv "cvCopyImage".

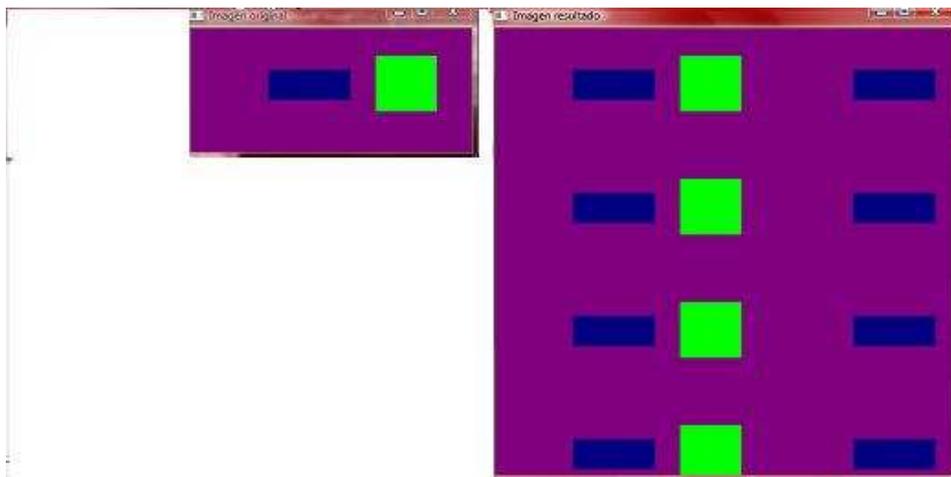


Imagen 18: Ejemplo de réplica mediante región o área de interés.

- Mediante la copia punto por punto (método “réplicaSetGet”). Recorro la imagen de Destino, guardándome en un escalar la asociación de puntos de la imagen de destino con los puntos de la imagen de origen, para posteriormente establecer los puntos finales en la imagen de destino con la ayuda del escalar antes mencionado.

Pseudocódigo:

ImagenOrigen, ImagenDestino → Función ReplicaROI → Recorrido punto a punto de ImagenDestino → en cada punto recorrido, copio el punto que corresponde de la ImagenOrigen. Esto último se consigue mediante:

$((\text{CoordenadaYImagenDestino})\%(\text{AlturaImagenOrigen}))\text{y}((\text{CoordenadaXImagenDestino})\%(\text{AnchoImagenOrigen}))$.

En la Imagen 19, puede verse a la izquierda la imagen origen, de 306x138, y a la derecha la imagen de origen replicada punto por punto en la imagen destino, de tamaño 700x700.

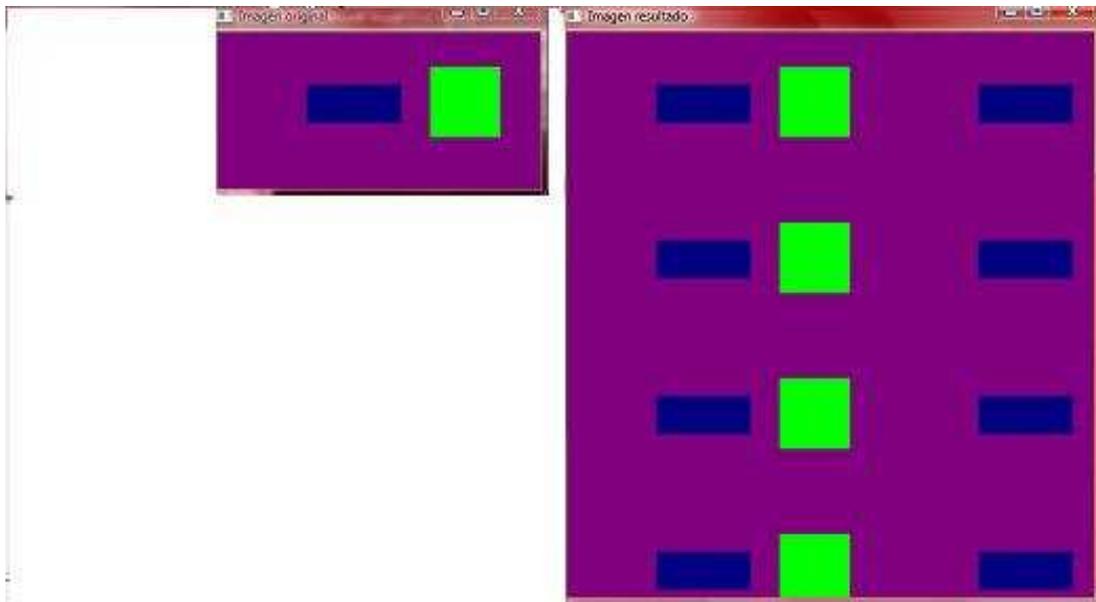


Imagen 19: Ejemplo de réplica mediante el método “réplicaSetGet”.

- Y cuando la imagen de destino tiene un tamaño que no es múltiplo de la imagen de origen, ¿cómo realizar la réplica?

En la Imagen 20 puede verse que la imagen de destino (a la derecha, de 700 x 700) no es múltiplo de la imagen de origen (a la izquierda, de 306 x 138).

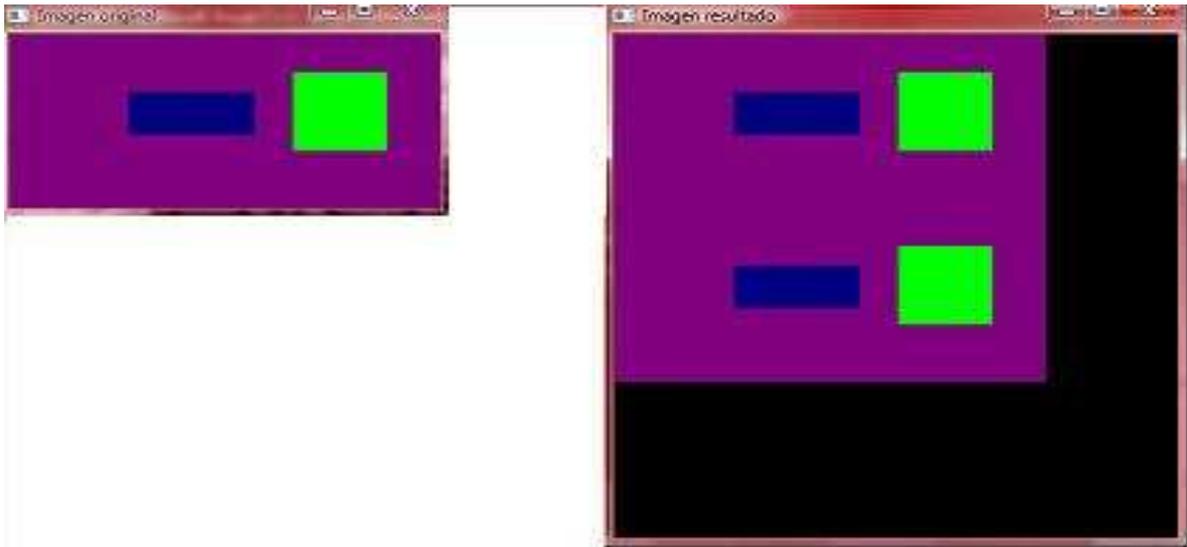


Imagen 20: Ejemplo dónde puede verse el caso en que la imagen de destino no es múltiplo de la de origen.

Para resolver este problema, utilizando la técnica de replicar con ROI, debemos aplicar los siguientes pasos:

- 3.1 Comprobamos hasta donde hemos podido copiar (replicar) en la imagen de destino. Ahora restamos el tamaño total de la imagen de destino al ultimo punto donde nos hemos quedado copiando, en ancho y en alto. Si alguna de las dos restas necesarias no da cero , podemos asegurar que la imagen de destino no es múltiplo de la de origen.
- 3.2 Para los casos en que la resta no de cero, en ancho ,en alto, o en ambos, habrá que calcular el espacio que falta por rellenar en la imagen de destino. Esto se realiza capturando el valor de la resta.
- 3.3 Posteriormente se establece sobre la imagen de origen otro ROI con el tamaño que indique la resta antes realizada.
- 3.4 Ahora habrá que copiar ese nuevo ROI en la imagen de destino a partir del punto donde nos habíamos quedado anteriormente.

Es probable que llegados a este punto no tengamos la réplica en la imagen destino completada, como es el caso del siguiente ejemplo.

3.5 A partir de aquí podemos acabar la réplica utilizando cualquiera de las dos técnicas comentadas anteriormente. Mediante ROI, repitiendo todos los pasos explicados en este apartado, o mediante el SetGet. El resultado es idéntico al representado en las imágenes 1 y 2.

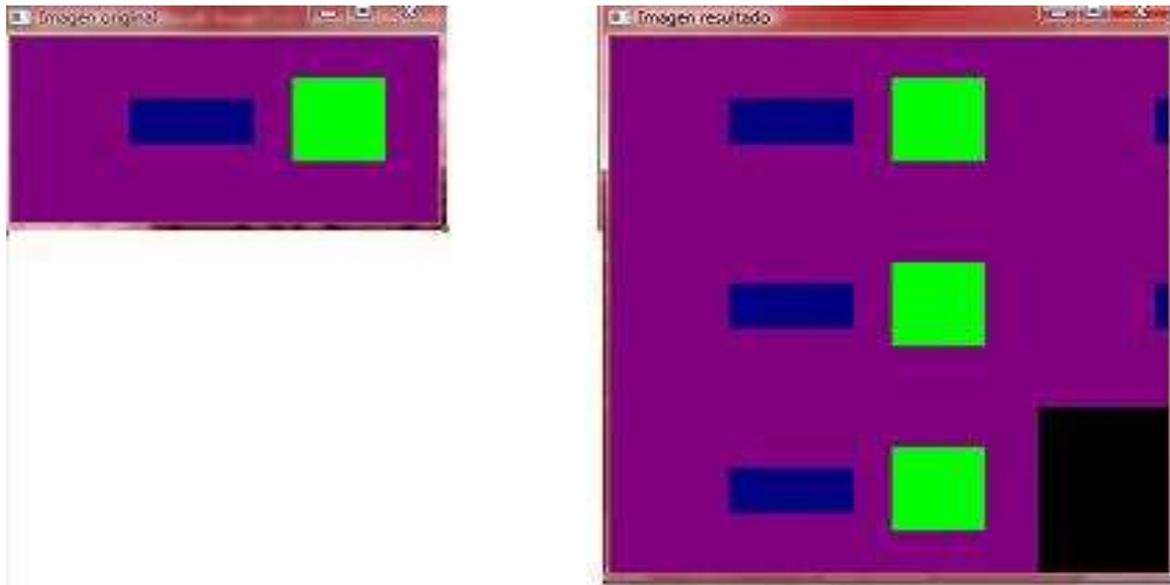


Imagen 21: Ejemplo de réplica incompleta.

La imagen de destino no es múltiplo de la de la imagen de origen. Se ha copiado mediante ROI a lo ancho y alto pero en el cruce sigue existiendo un hueco.

Síntesis de imagen a partir de los GSP:

Para cada grupo de simetría en el plano vamos a detallar gráficamente en una tabla, a partir de una muestra de mosaico, tanto su CU como su PF generado a partir de esta, así como las máscaras creadas para cada caso.

1. Descripción de cada GSP.
2. Imagen del mosaico construido a partir de la réplica del PF y a su derecha, la simetría del grupo que corresponde a la construcción del PF.
3. Imagen de un PF dentro del mosaico, a la derecha su máscara.
4. Imagen de la celda unidad dentro del PF, que se corresponde con la zona amarilla de la imagen de simetría del punto 1, a la derecha su máscara.
5. Comentario sobre la tabla acerca de la obtención de la CU desde el PF.

En este capítulo vamos a examinar cómo identificar cada grupo así como, recorriendo un camino inverso (Imagen Mosaico->PF->CU), sintetizar una imagen de contenido repetitivo (Mosaico) y poder clasificar un determinado GSP.

P1 (GSP 1):

Descripción: Es el grupo más sencillo. Sólo tiene traslaciones, no se dan rotaciones, reflexiones ni reflexiones con deslizamiento. Las celdas resultan ser simétricas respecto de dos ejes de traslación, que no tienen por qué ser perpendiculares. La CU tiene forma de paralelogramo.

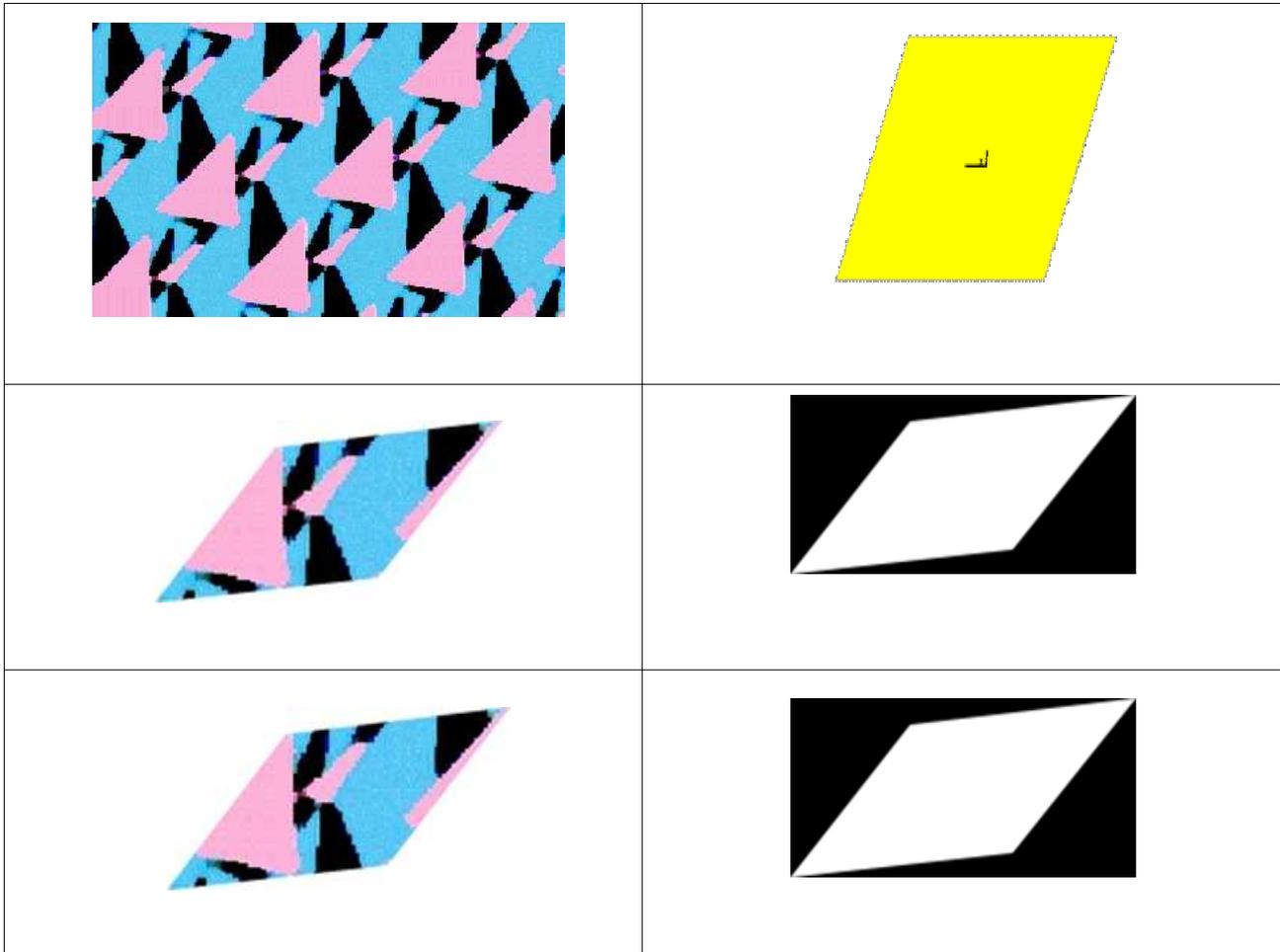


Tabla 4: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P1, ejemplo de PF y CU.

En la tabla 4 se puede observar el Mosaico origen sobre el que realizamos la síntesis, y a la derecha, la simetría de CU que se toma para este GSP. Esta puede tomar cualquier tamaño, teniendo en cuenta siempre eso sí, su forma de paralelogramo. Justo en la siguiente fila se observa el PF construido, y su máscara correspondiente a la derecha. En este caso, y sólo en este caso, la CU nos coincide con el PF a replicar.

Generación del P1 (GSP 1) a partir de la Celda Unidad:

La CU nos la proporciona el usuario, y directamente, debido a que no hay que hacer transformaciones sobre esta para construir el PF se realizará la réplica en la imagen de destino.

En el siguiente ejemplo se muestra una CU (PF también en este caso) constituida por las letras A y F sobre fondo naranja y situada a la izquierda. A la derecha se puede ver la réplica del PF sobre la imagen destino.

En el código fuente aportado, podemos probar a fabricar un P1 ejecutando el fichero **réplicaSetGet.c**, del proyecto **SetGet** tanto en Visual como en Code::Blocks. En este código se recorre una imagen origen, y se realiza la réplica, mediante la técnica de **punto a punto** (recorriendo la imagen origen punto a punto), o mediante la **región o área de interés (ROI)** fichero **réplicaROI.c** que se ejecuta en el proyecto de nombre **ROI**. Si se quisiera probar la técnica del punto a punto sólo hay que cambiar la llamada de la función desde el main, en vez de a `replicaROI` hacer la llamada a `replicaSetGet`. Si lo que se quiere es cambiar el tamaño de la imagen de Destino, simplemente se pueden cambiar los valores que se indican al iniciar la imagen en main de `CvSize(x,y)`, actualmente fijada en (744,1052).

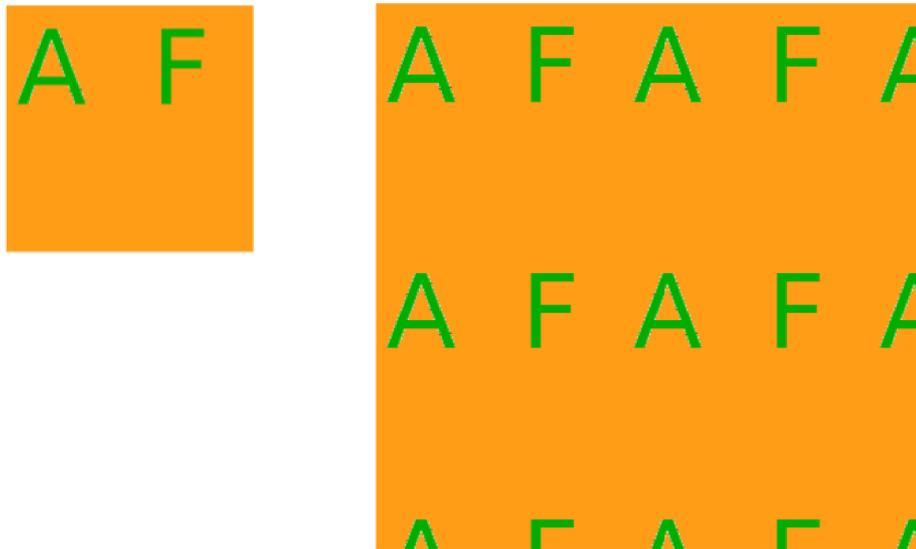


Imagen 22: Ejemplo de construcción de P1.

A la izquierda la imagen origen, de 180x180(letras A y F), a la derecha la imagen de origen replicada punto por punto en la imagen destino, de tamaño 400x400.

P2 (GSP 2):

Descripción: Se diferencia del anterior (GSP 1) en que, además, puede contener rotaciones en 180° , ejes binarios. Los vectores de traslación pueden formar ángulos distintos de 90° y la rejilla es también un paralelogramo, siendo su CU la mitad de ese paralelogramo.

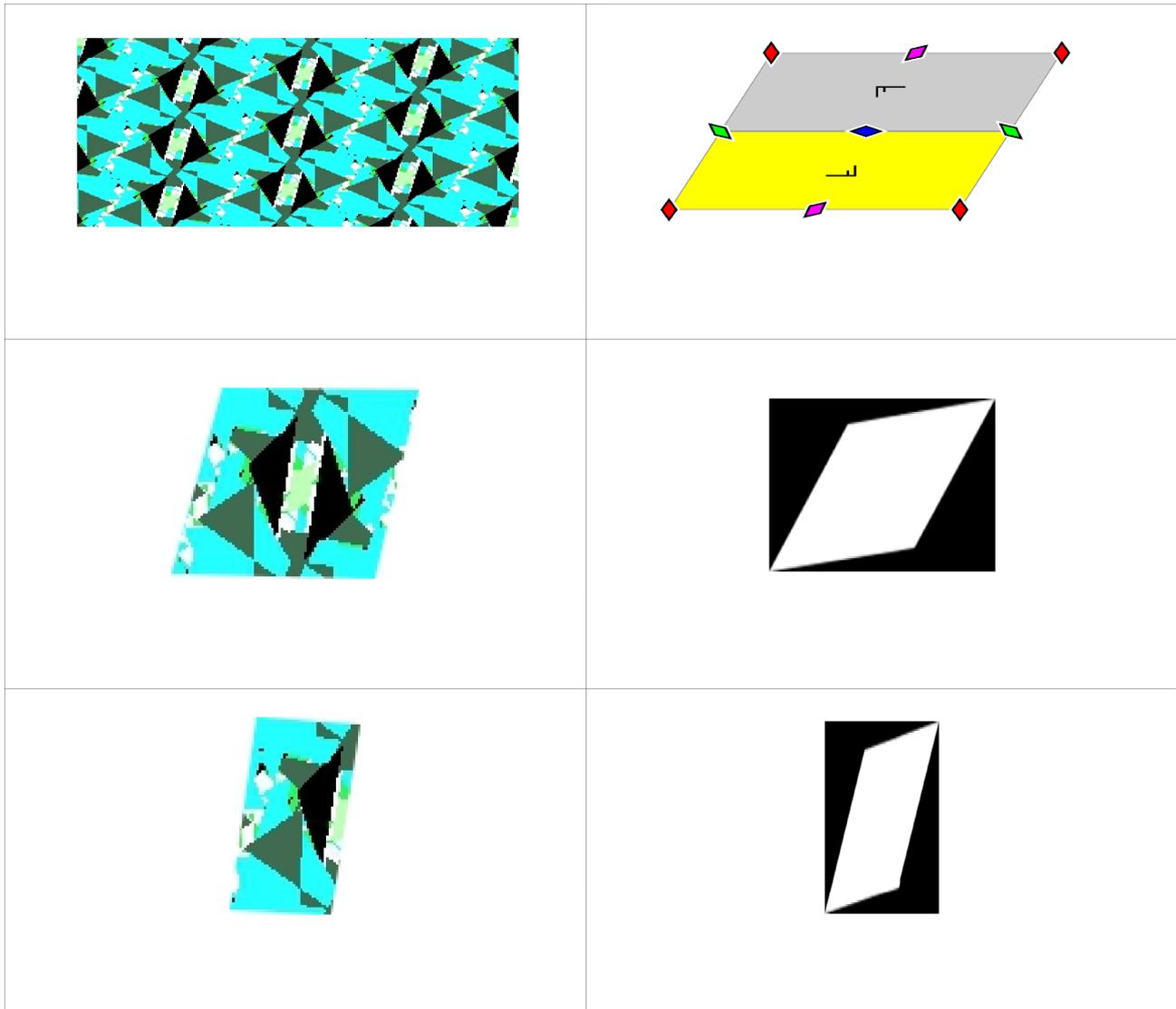


Tabla 5: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P2, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 5 podemos observar, en la parte de la simetría, la zona pintada de amarillo que representa a la CU. Su reflejo situado sobre la misma completa la simetría propia del PF para este GSP. Si nos fijamos en el PF y lo visualizamos partido por la mitad en ancho, obtendremos la CU característica de este GSP. Puede verse también en el PF como aparecen dos veces el triángulo negro y gris, uno encarado hacia la parte izquierda, siendo superior al gris el negro, y otra vez encarado hacia la parte derecha y siendo superior ahora el gris al negro.

Generación del P2 (GSP 2) a partir de la Celda Unidad:

A partir de la CU que nosotros tomamos siempre como patrón , realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría P2 con los siguientes pasos:

1. Establecemos el PF con tamaño doble de altura que la CU y mismo ancho que esta.
2. Copiamos en PF la CU en la mitad superior.
3. Cogemos como punto de rotación la mitad del ancho del PF y una altura 0 (primera fila) , y rotamos 180 grados la CU que habíamos copiado ya.
4. Por ultimo copiamos el resultado de esta ultima rotación en la mitad inferior de nuestro PF.

En el código encontramos la simetría del plano P2 en el fichero de mismo nombre **p2.c**, proyecto de nombre **P2**. La imagen resultante al ejecutar dicho fichero es la misma que la de la imagen 23. Para probarlo basta con descomentar la funcion main, y quitar el fin de comentario después del return de esta misma función y ponerlo delante del mismo, es decir mover “*/” justo delante del return de la función main.

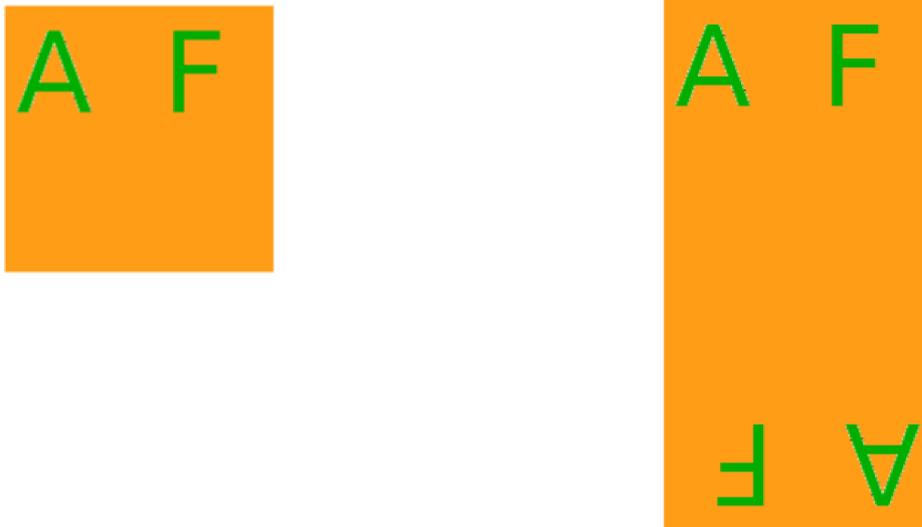


Imagen 23: Ejemplo de construcción de P2.

A la izquierda la CU, a la derecha el PF a replicar en la imagen de destino.

PM(GSP 3):

Descripción: Es el primer grupo de simetría en que se da la reflexión. El eje de reflexión es paralelo a uno de los de traslación y perpendicular al otro (normalmente la traslación vertical y la reflexión horizontal). La rejilla es rectangular y la CU un rectángulo.

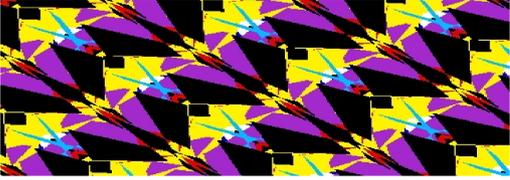
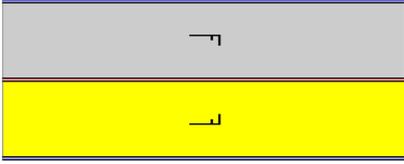
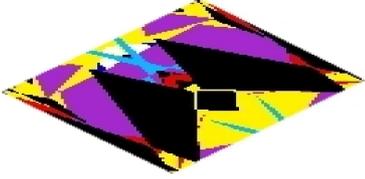
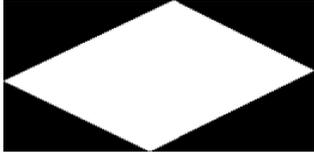
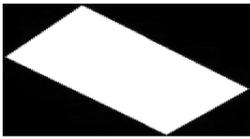
	
	
	

Tabla 6: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PM, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 6, vemos reflejada la reflexión característica del GSP 3 en la imagen de simetría. Si cogemos la CU o parte amarilla puede verse la reflexión en la parte superior. En nuestro PF se ve claramente como existen dos polígonos enfrentados o encarados entre sí, que se asemejan a dos rectángulos enfrentados. Si cogemos y partimos por la mitad, justo por el centro del cuadrado que los une, obtenemos la CU característica de este CU.

Generación del PM(GSP 3) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría PM con los siguientes pasos:

1. Establecemos el PF de tamaño igual de ancho y doble de alto que la CU.
2. Copiamos la CU en la mitad superior del PF.
3. Si ahora copio la CU original reflejada en la mitad inferior del PF completo a este y obtengo el PF para replicar de un PM.

El PM se encuentra reflejado en el fichero **pm.c** del código fuente aportado. El resultado de ejecutarlo puede verse en la imagen 24. Para probarlo es necesario hacer lo mismo que en P2.

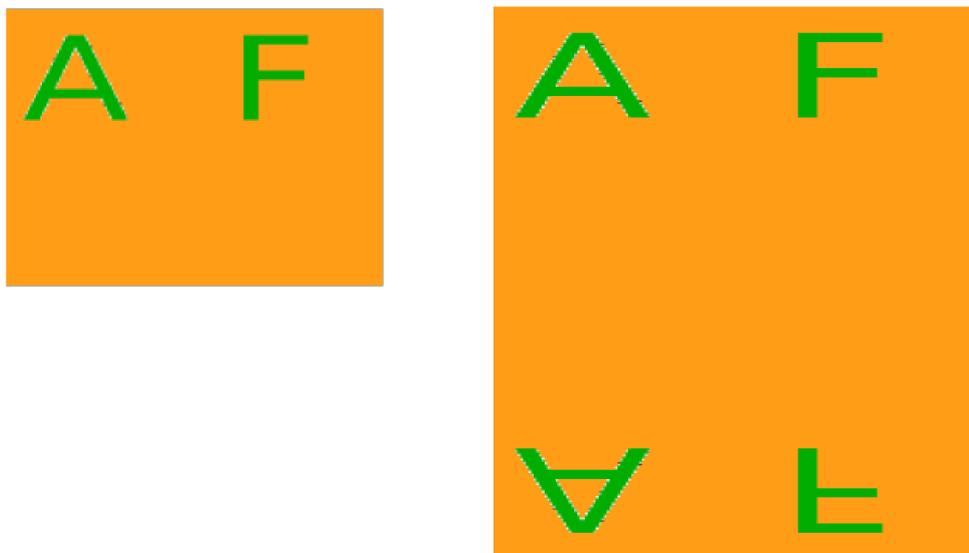


Imagen 24: Ejemplo de construcción de PM.

A la izquierda la imagen origen, a la derecha la imagen de destino con la imagen origen arriba, y la misma reflejada debajo.

PG(GSP 4):

Descripción: En este grupo ya aparece la simetría con deslizamiento, pero no se dan rotaciones ni reflexiones. La dirección de deslizamiento es paralela a la de traslación y perpendicular a la de simetría. La rejilla es rectangular y la CU la mitad de un rectángulo.

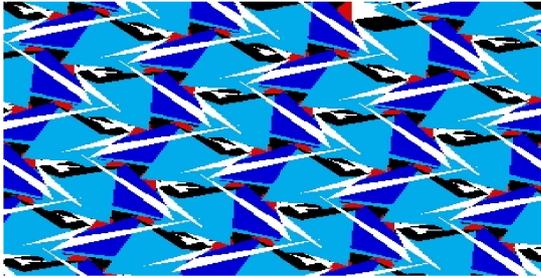
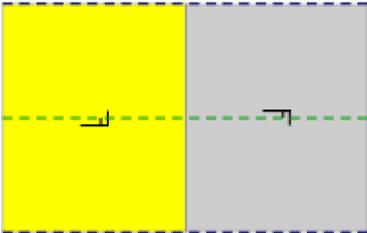
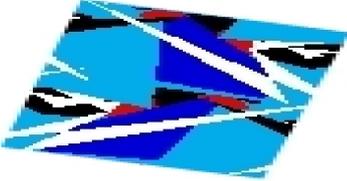
	
	
	

Tabla 7: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PG, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 7 tenemos la combinación de una reflexión con un desplazamiento o deslizamiento, característico de este GSP y que si nos fijamos en la figura de simetría podemos ver que la letra F mayúscula aparece a la derecha de la CU o zona amarilla, donde el soporte de la letra es decir el palo que sostiene a los otros dos de menor tamaño, aparece aquí al otro lado del eje de simetría. En el PF vemos que tenemos dos triángulos azules, uno en la mitad superior apuntando con uno de sus vértices hacia la mitad del PF y el otro en la mitad inferior apuntando con su vértice hacia la mita de la base del PF, más o menos. Si dividimos por la mitad de altura a este PF, obtenemos la CU característica del GSP.

Generación del PG(GSP 4) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría PG con los siguientes pasos:

1. Creamos el PF de tamaño igual de ancho y doble de alto que la CU.
2. Copio la CU en la mitad superior del PF.
3. Divido la CU copiada en PF en dos mitades, reflejo la letra F y la copio en el PF trasladada, es decir, mitad inferior, parte izquierda.
4. Análogamente reflejo la letra A y la copio trasladada en la mitad inferior, parte derecha, de nuestro PF para acabar formando el PF completo que servira para replicar el PG.

El grupo de simetría en el plano GSP4 se identifica en el código con el fichero **pg.c**. Se puede ejecutar para obtener la imagen 25. Sólo se descomenta el main y se comenta justo antes del return como en P2 y PM.

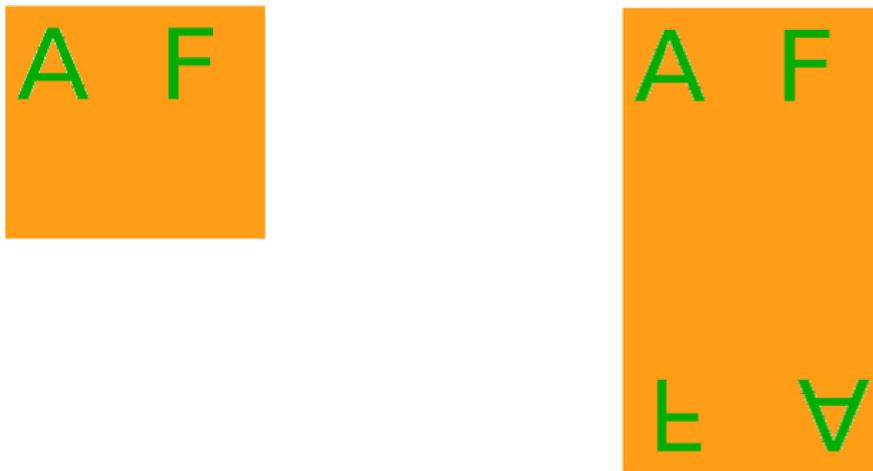


Imagen 25: Ejemplo de construcción de PG.

A la izquierda la imagen origen, a la derecha la imagen destino con la imagen origen situada arriba y debajo la imagen origen reflejada y trasladada.

CM(GSP 5):

Descripción: En este GSP se dan reflexiones y reflexiones con deslizamiento pero no rotaciones. La dirección de deslizamiento puede formar cualquier ángulo, pero el eje de reflexión debe ser bisectriz de los de deslizamiento. La rejilla es romboide y la CU es la mitad del rombo.

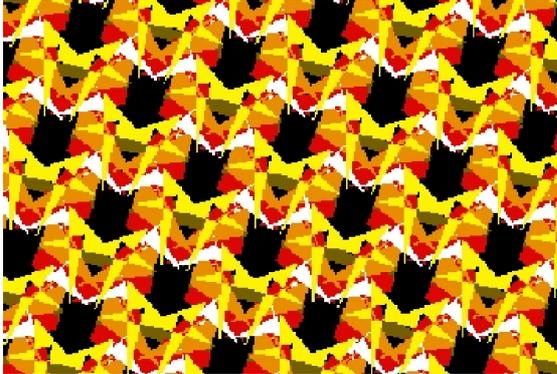
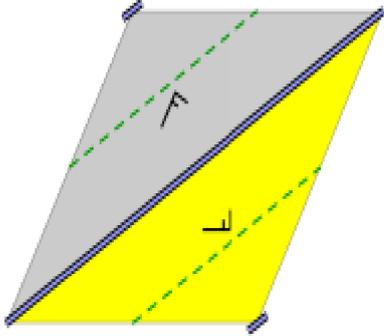
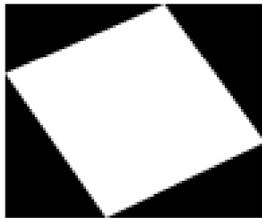
	
	
	

Tabla 8: Caracterización de las simetrías interiores del GSP CM, ejemplo de PF y CU.

En la tabla 8 vemos el primer triángulo característico como CU. En nuestro caso cogemos la parte superior del rombo. A partir de este podemos ver que la simetría que requiere este GSP para su PF es el mismo triángulo reflejado y desplazado colocado en la diagonal inferior del rombo. De esta forma el PF adquiere la forma de paralelogramo.

Generación del CM(GSP 5) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría CM con los siguientes pasos:

1. Creamos un PF con forma rectangular a partir de los vértices del triángulo que se le pasa como CU. Es decir con el doble de área que la CU.
2. Trazamos una diagonal sobre el PF desde el punto mas bajo a la izquierda hasta el mas alto a la derecha dividiendo el PF en dos áreas triangulares iguales.
3. Copiamos en la parte inferior derecha del PF la CU.

Copiamos en la parte superior e izquierda la CU reflejada y desplazada.

El CM corresponde al fichero **cm.c** en el código fuente aportado. Es el primer fichero dónde la CU no es rectangular. El resultado puede verse en la imagen 26. A la hora de probar hay que hacer como en anteriores grupos.

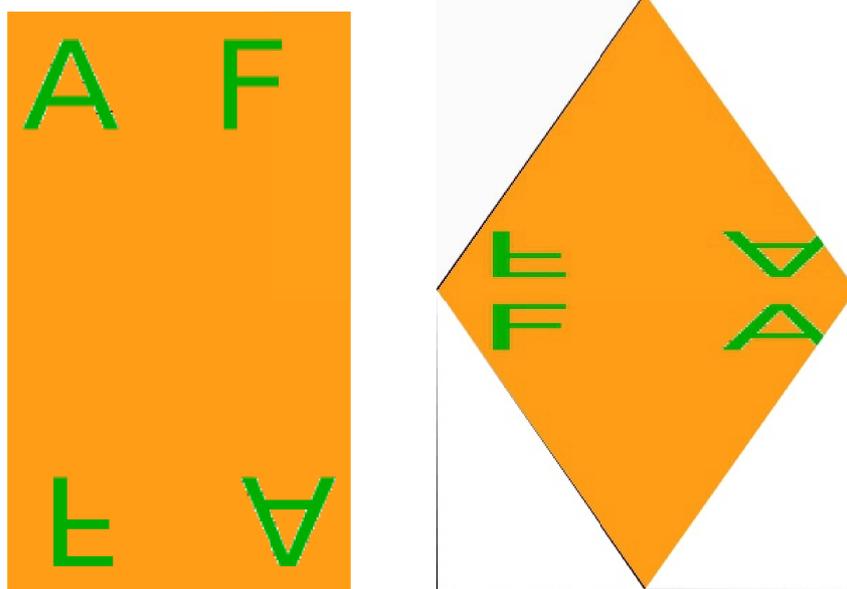


Imagen 26: Ejemplo de construcción de CM.

A la izquierda la imagen Origen, a la derecha la imagen paralelogramo CM.

PMM(GSP 6):

Descripción: Este grupo se forma con dos reflexiones de ejes de simetría perpendiculares. No se da reflexión con deslizamiento pero si centros de giro binarios (180°) en las intersecciones de los ejes de simetría. La rejilla es rectangular, que puede tomarse como base para construir el mosaico a base de traslaciones y la CU la mitad del rectángulo.

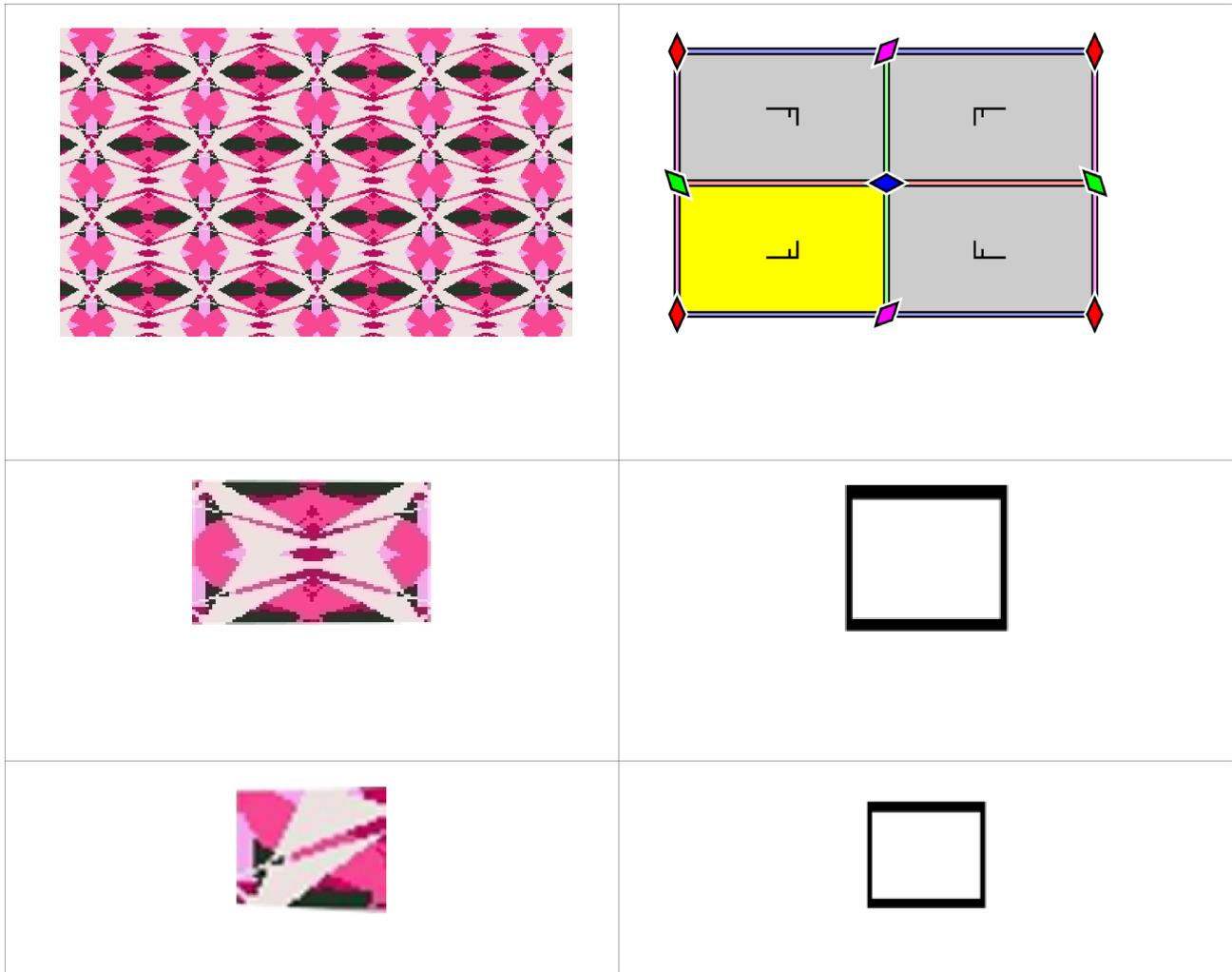


Tabla 9: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PMM, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 9 se observa como el PF esta formado a modo de “Estrella” virtual de 4 vertices según el Mosaico que hemos elegido. Puede verse también que la CU la constituye una única arista o brazo de la “Estrella” del PF, que en la parte superior izquierda del PF aparece rotada 180°, si tomamos como centro de la rotación la mitad en ancho del PF, o lo que es lo mismo el total de ancho de la CU. Y análogamente, con la diagonal inversa del PF.

Generación del PMM(GSP 6) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de

simetría PMM con los siguientes pasos:

1. Creamos un PF de tamaño doble de ancho y de alto que el tamaño de la CU.
2. Copiamos la CU original en el cuadrante superior izquierdo del PF.
3. En la parte inferior izquierda del PF copiamos la CU original reflejada.
4. Ahora simplemente nos queda, si cogemos la mitad superior e inferior izquierda de nuestro PF reflejarla en su parte derecha y ya tenemos el PF listo para replicar para el grupo PMM.

El PMM lo encontramos en el fichero **pmm.c** del código adjunto. Al ejecutarlo puede verse la imagen 27.

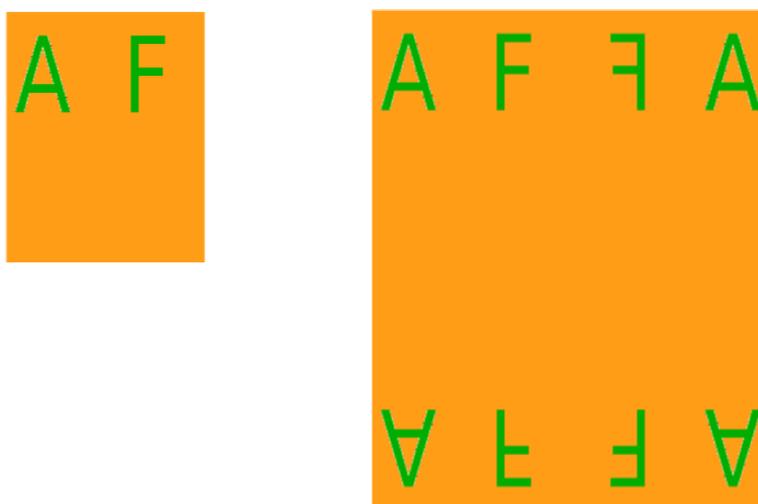


Imagen 27: Ejemplo de construcción de PMM.

A la izquierda la imagen origen, a la derecha la imagen destino con 4 ejes de rotación de 180° situados en las esquinas.

PMG(GSP 7):

Descripción: Los mosaicos que pertenecen a este grupo se forman mediante reflexiones y rotaciones de 180° (ejes binarios). El centro de rotación es el punto medio del lado que **no** es el eje de reflexión. La rejilla es rectangular y la CU la mitad del rectángulo.

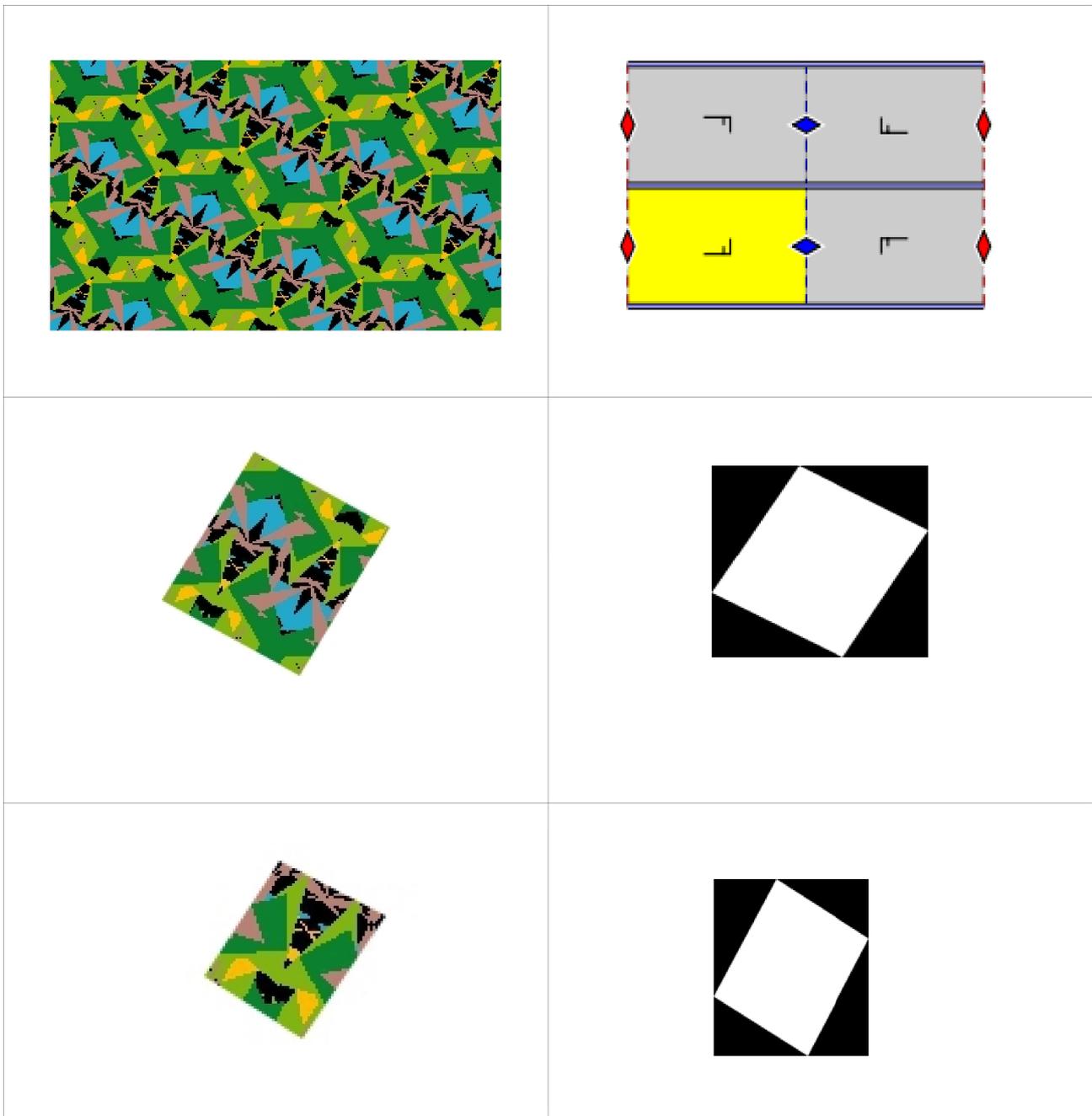


Tabla 10: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PMM, ejemplo de PF yCU.

En la Tabla 10 vemos la síntesis del PF a su CU correspondiente, eliminando de forma visual desde la mitad en altura del PF y quedándonos solo con su parte inferior derecha. Si colocamos el centro de rotación tal y como se dijo anteriormente, es decir en nuestro caso en el eje horizontal (no en los ejes de reflexión, verticales en este caso), y rotamos 180° , podemos ver que se cumple lo preestablecido. E nuestro PF puede observarse fácilmente la CU desde el PF ya que es una 4ª parte de la rejilla, concretamente la parte inferior izquierda de nuestro PF. Hemos

elegido esa como CU como podíamos haber elegido justo la parte superior derecha, izquierda o la inferior derecha.

Generación del PMG(GSP 7) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría PMG con los siguientes pasos:

1. Creamos un PF de tamaño doble de ancho y de alto que el tamaño de la CU.
2. Copiamos la CU original en el cuadrante superior izquierdo del PF creado.
3. Sobre el mismo cuadrante que hemos copiado la CU original, es decir sin sobrescribir, copiamos la CU reflejada.
4. Copiamos el cuadrante que ya tenemos en la mitad inferior, izquierda y derecha, y en la parte superior derecha del PF.

El PMG se construye en el fichero de nombre **pmgbis.c**. Se llama con este nombre ya que el fichero pmg.c es una primera prueba, sin la imagen utilizada normalmente como patrón. Si el pmgbis.c se ejecuta puede verse la imagen 28 correspondiente a un grupo PMG.

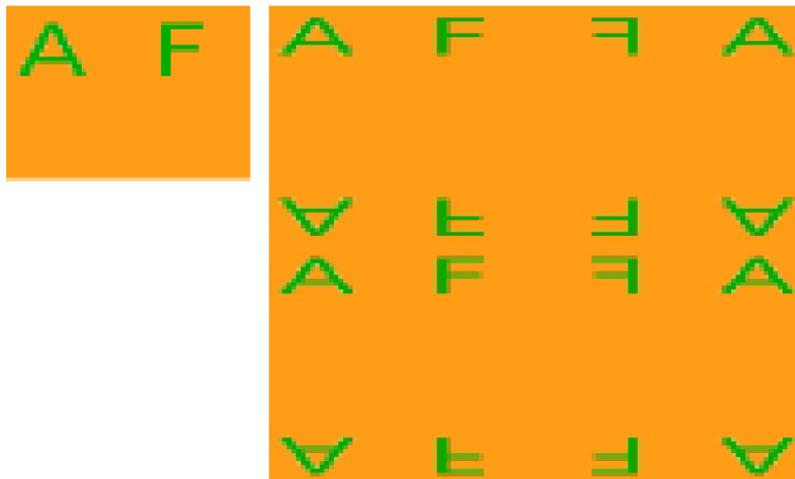


Imagen 28: Ejemplo de construcción de PMG.

A la izquierda la imagen Origen, a la derecha la imagen paralelogramo PMG.

PGG(GSP 8):

Descripción: En este grupo se dan dos reflexiones con deslizamiento y un giro de 180° . Los dos ejes de reflexión son perpendiculares y el centro de giro es el punto medio del rectángulo que forma la rejilla. La CU la constituye el rectángulo.

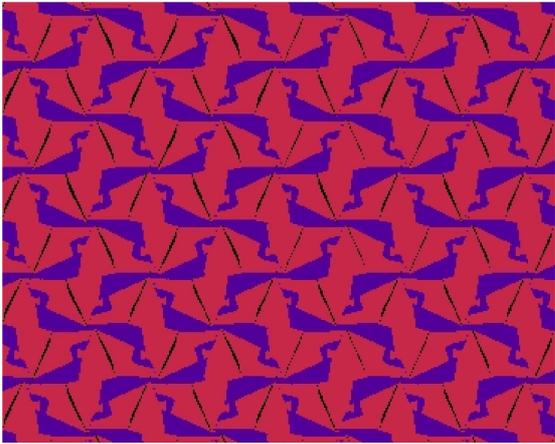
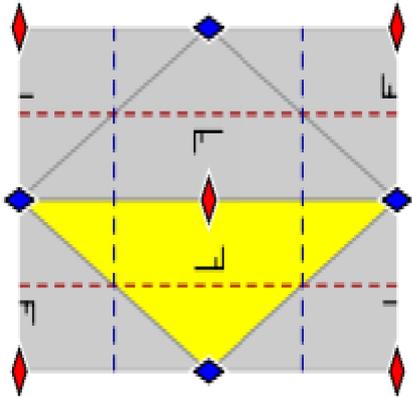
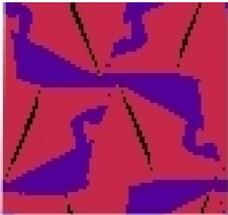
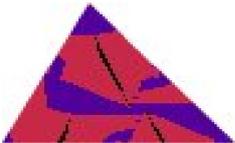
	
	
	

Tabla 11: Caracterización de las simetrías interiores del GSP PGG, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 11 podemos ver la CU, formada por una imagen que se asemeja a dos patos, uno en la parte superior izquierda con la cabeza orientada a esa misma posición y otro en la parte superior derecha, reflejo del anterior y con la cabeza orientada también a la parte derecha. Justo en la mitad inferior del PF lo que observamos es la reflexión con desplazamiento de la CU.

Generación del PGG(GSP 8) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría PGG con los siguientes pasos:

1. Creamos un PF de tamaño doble de ancho y de alto que el tamaño de la CU.
2. Copiamos la CU en el cuadrante superior izquierda.
3. Giramos la CU 180 grados y la copiamos en el cuadrante inferior derecha.
4. Reflejamos el cuadrante inferior derecha, y lo copiamos en la parte inferior izquierda del PF.
5. Reflejamos el cuadrante superior izquierda, y lo copiamos en la parte superior derecha del PF.

El grupo PGG lo obtenemos a través del fichero de mismo nombre **pgg.c**. Si lo ejecutamos obtenemos como resultado la imagen 29.

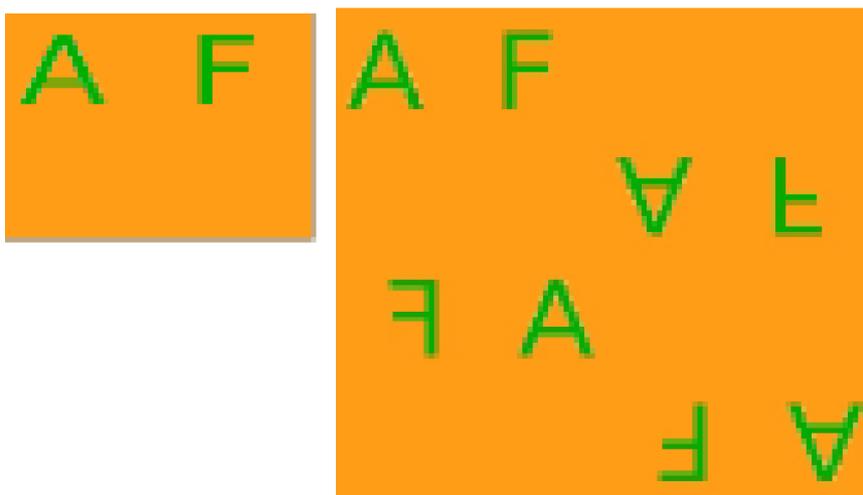


Imagen 29: Ejemplo de construcción de PGG.

A la izquierda la imagen Origen, a la derecha la imagen paralelogramo PGG.

CMM(GSP 9):

Descripción: Este grupo tiene dos reflexiones de ejes perpendiculares (vertical y horizontal) y un giro de 180° con centro en el punto medio del otro lado. La rejilla es rómbica y la CU es la cuarta parte del rombo.

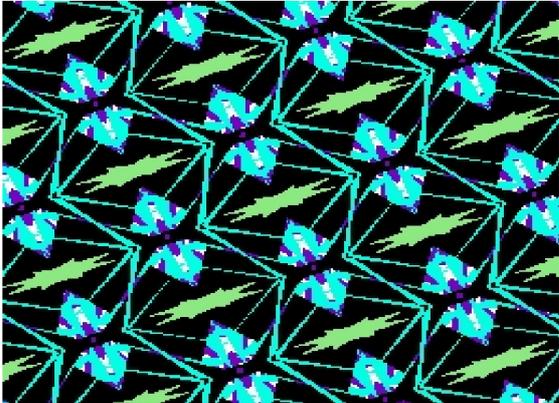
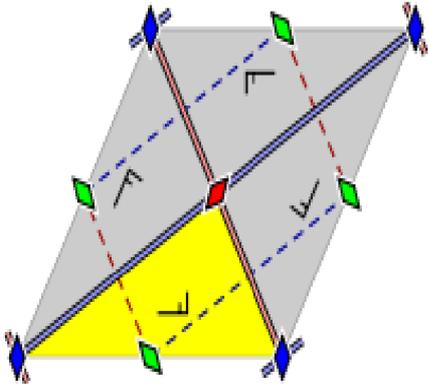
	
	
	

Tabla 12: Caracterización de las simetrías interiores del GSP CMM, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 12 sintetizamos la CU a partir del PF cogiendo el triángulo de base la misma que la del PF arista superior que coincide con el centro del mismo. Se observa como en la parte superior del PF se establece ce la CU reflejada y desplazada. Análogamente pasa con los triángulos situados en los dos laterales del PF.

Generación del CMM(GSP 9) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría CMM con los siguientes pasos:

1. Creamos un PF de tamaño igual de ancho y doble alto que el tamaño de la CU.
2. Copio la CU en parte inferior del PF.
3. Reflejo la CU y la copio en la parte izquierda de mi PF.
4. Giro la parte izquierda del PF 180 grados y la copio así en la parte derecha de mi PF.
5. Giro la base del PF 180 grados y la copio en la parte superior de mi PF. Aquí ya tengo el PF completo con forma rectangular a base de unir los triángulos (Unión de diferentes rotaciones sobre la CU).

El grupo CMM se obtiene en el fichero adjunto **ymm.c**. Puede verse el resultado de su ejecución en la imagen 30.

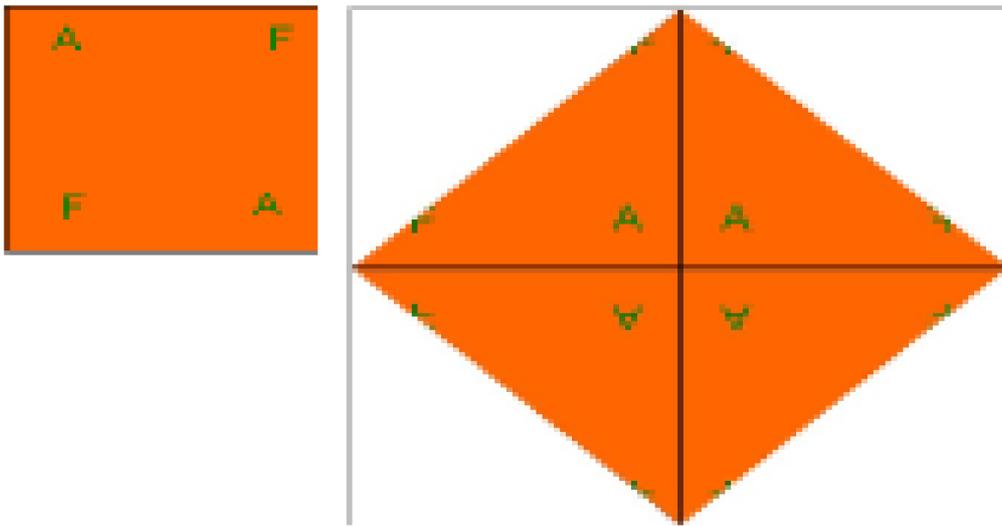


Imagen 30: Ejemplo de construcción de CMM.

A la izquierda la imagen Origen, a la derecha la imagen paralelogramo CMM.

P4(GSP 10):

Descripción: Este es el primer grupo en el que se da el giro de 90° (una rotación de orden 4) pero también se dan giros de 180° (orden 2). No hay reflexiones. La rejilla es cuadrada y la CU es la cuarta parte del cuadrado.

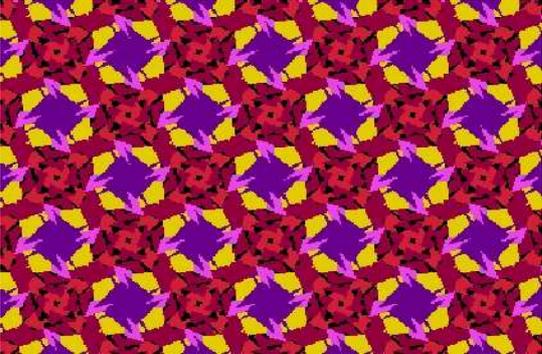
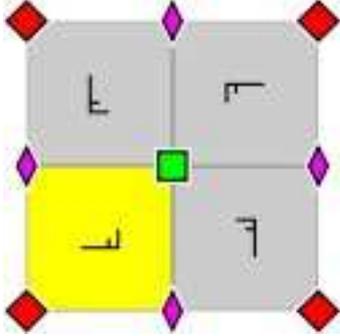
	
	
	

Tabla 13: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P4, ejemplo de PF y CU.

En la tabla 13, tenemos una CU conseguida a base de sintetizar desde la imagen de PF la parte superior derecha, o lo que es lo mismo el cuadrante superior derecho, si dividimos el PF en dos ejes, uno que cruce el PF en ancho desde la mitad en altura y otro a la inversa . Es una 4ª parte del PF como se indica en la descripción, y partir de esta se va rotando 90° para constituir la imagen que tenemos como PF. Cabe reseñar que la imagen de Máscara, tanto del PF como de la CU, es toda blanca y sin ningún borde negro. En la imagen se señala así para que no se confunda con el fondo y se identifique la misma.

Generación del P4(GSP 10) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría P4 con los siguientes pasos:

1. Creamos un PF de tamaño doble de ancho y de alto que el tamaño de la CU.
2. Copiamos la CU en el cuadrante inferior izquierda.
3. Rotamos la CU 90 grados hacia la izquierda y la copiamos en el cuadrante inferior derecha.
4. Rotamos el cuadrante inferior derecha 90 grados hacia la izquierda y lo copiamos en el cuadrante superior derecha.
5. Rotamos el cuadrante superior derecho 90 grados hacia la izquierda y lo copiamos en el cuadrante superior izquierda.

El grupo P4 se ve reflejado en el fichero del código fuente **p4.c**. El resultado de ejecutarlo es la imagen 31, donde se ve claramente la simetría del grupo y el ángulo de rotación característico de 90 grados en el centro de la imagen de destino.

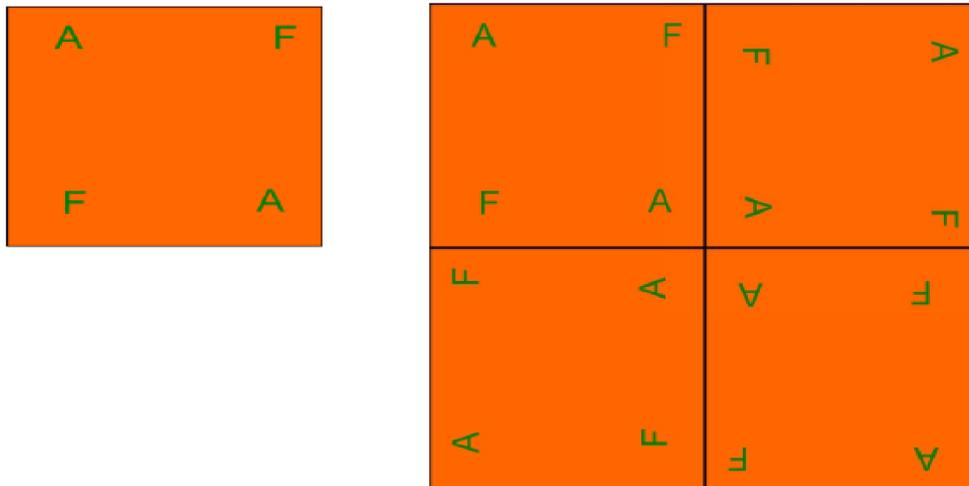


Imagen 31: Ejemplo de construcción de P4.

A la izquierda la imagen Origen, a la derecha la imagen paralelogramo P4.

P4M(GSP 11):

Descripción: Se diferencia del anterior en que también tiene reflexiones además de giros de 90° y 180° . Los ejes de simetría forman ángulos de 45° entre si y se cortan en el centro de giro de 90° . La trama es cuadrada y la CU es el triángulo mitad del cuadrado.

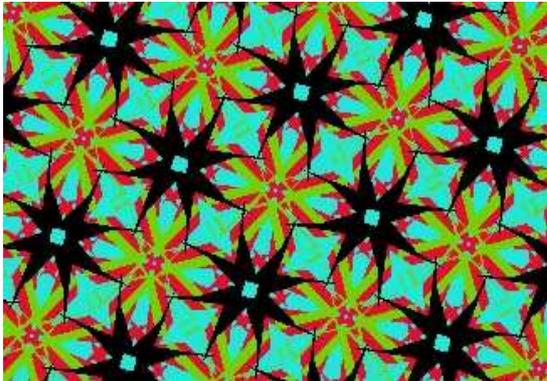
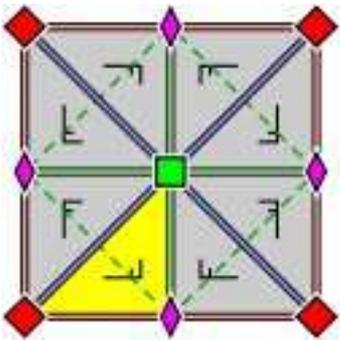
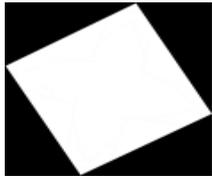
	
	
	

Tabla 14: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P4M, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 14 cogemos como PF la imagen que se ve arriba, formada por una figura con forma de flor, con 8 barras rojas situadas de forma circular alrededor del centro, formado este por otra flor de 4 barras rojas también circulares. Si nos fijamos en cada esquina del PF, tenemos algo así como un bigote pintado en negro, se trata de sintetizar tomando como referencia la esquina, y partir este aparente bigote por la mitad, en nuestro caso, hemos elegido el bigote de la esquina inferior, y hemos sintetizado su mitad derecha como CU.

Generación del P4M(GSP 11) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría P4G con los siguientes pasos:

1. Creamos un PF de ancho y de alto doble de la base y de la altura de la CU(Triángulo).
2. Copiamos la CU en el cuadrante inferior izquierda, en la base del cuadrante.
3. Copiamos la CU reflejada y rotada 90 grados a la izquierda en el cuadrante inferior izquierda, en la diagonal superior del cuadrante.
4. Ahora cogemos el cuadrante inferior derecha entero anteriormente formado y lo copiamos reflejado en el cuadrante superior izquierda.
5. Si cogemos ahora toda la mitad izquierda, tanto inferior como superior del PF, que ya tenemos rellena, y la reflejamos entera en la parte mitad derecha del PF ya tenemos completo al mismo y la parte entera a replicar.

El P4M se identifica en el código C con el nombre de **p4M.c**. Puede verse al ejecutarlo la imagen que resulta es igual a la imagen 32.

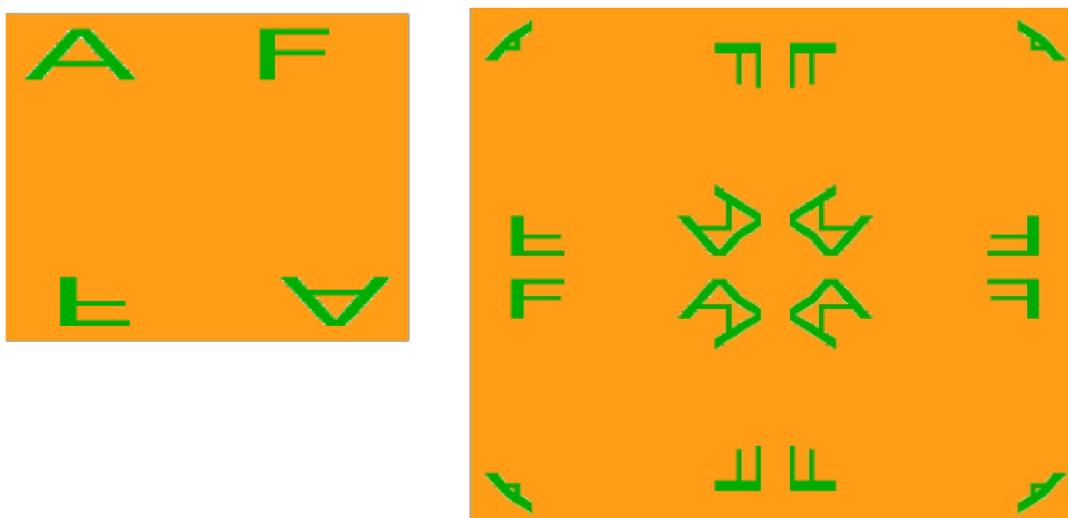


Imagen 32: Ejemplo de construcción de P4M.

A la izquierda la imagen Origen, a la derecha la imagen paralelogramo P4M.

P4G(GSP 12):

Descripción: También tiene reflexiones además de giros de 90°, pero los ejes de simetría son perpendiculares y no pasan por los centros de giro. La trama es cuadrada y la CU es el triángulo mitad del cuadrado.

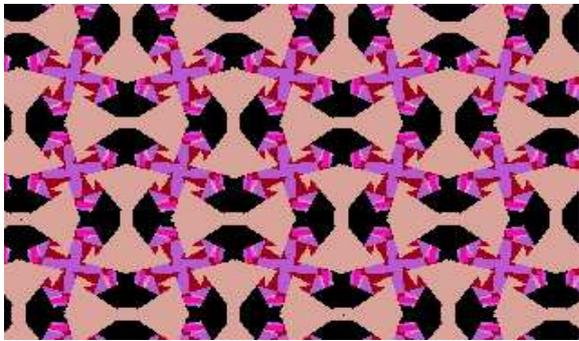
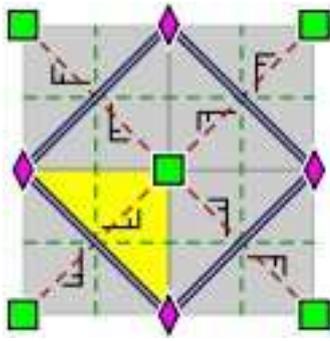
	
	
	

Tabla 15: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P4G, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 15 tenemos la síntesis de la CU desde su PF de este GSP, parecida a la del grupo anterior, solo que cambian las diagonales del cuadrante seleccionado a la hora de realizar la misma. En nuestro caso y como en el caso anterior hemos dividido el PF en 4 cuadrantes y hemos seleccionado el cuadrante con vértice situado más bajo. A partir de aquí trazamos la diagonal desde el punto superior izquierda hasta el punto inferior derecha de este mismo cuadrante y obtenemos la CU.

Generación del P4G(GSP 12) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría P4G con los siguientes pasos:

1. Creamos un PF de ancho y de alto doble de la base y de la altura de la CU(Triángulo).
2. Copiamos la CU en el cuadrante inferior izquierda, en la parte superior del cuadrante. Si trazamos una diagonal desde el punto superior izquierda de este cuadrante al punto inferior derecha y dividimos el área (del cuadrante) en dos, pues sería copiar la CU en la parte superior.
3. Posteriormente, si reflejo la CU, y a demás la roto 90 grados a la derecha, y lo copio en la diagonal inferior del cuadrante inferior izquierda, completo el cuadrante por el que he iniciado la construcción del PF.
4. Si ahora cojo el cuadrante ya formado en mi PF (el inferior izquierda) y lo roto 90 grados a la derecha y lo copio en cuadrante inferior derecha completo mi mitad inferior del PF.
5. Ahora roto el cuadrante inferior izquierda 90 grados a la izquierda y lo copio en el cuadrante superior izquierda.
6. Por último roto el cuadrante inferior derecha 90 grados a la derecha y lo copio en el cuadrante superior derecha y completo así el PF en su totalidad.

El grupo P4G lo implementamos en el código del fichero con nombre **p4G.c**. Si lo ejecutamos obtenemos la imagen 33 aquí representada.

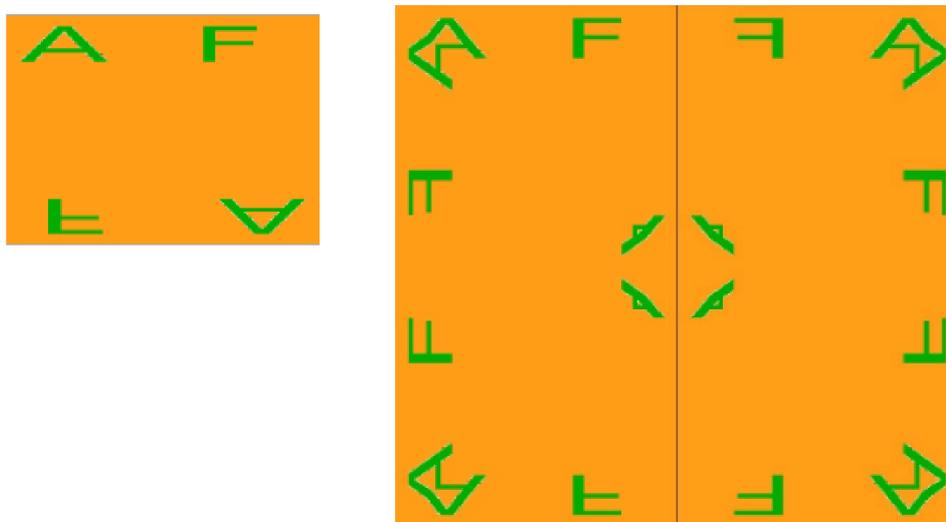


Imagen 33: Ejemplo de construcción de P4G.

A la izquierda la imagen Origen, a la derecha la imagen paralelogramo P4G.

P3(GSP 13):

Descripción: Es el grupo más sencillo con giros de 120° (tercer orden) y el primero en que la rejilla es hexagonal.

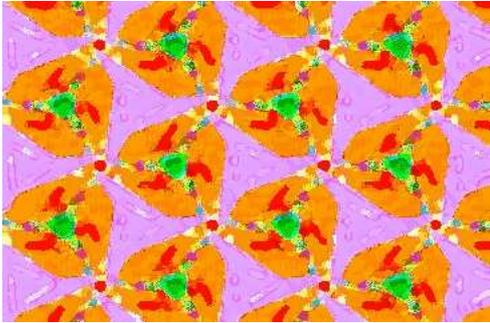
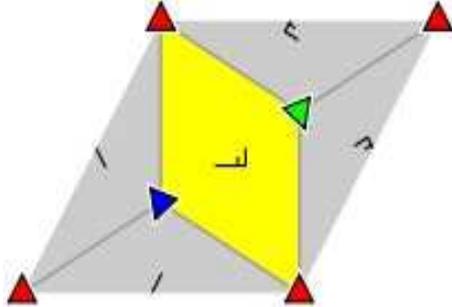
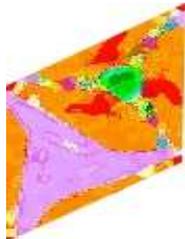
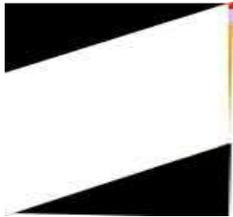
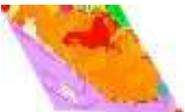
	
	
	

Tabla 16: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P3, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 16 se trata de dividir el PF en dos triángulos del mismo ancho (mitad del PF), uno rotado 180° respecto del otro. Cada triángulo a su vez se divide en 3 subtriángulos, iguales en tamaño. Siguiendo el ejemplo de la imagen de simetría hemos intentado sintetizar del PF la CU, tomando como referencia la esquina superior izquierda del PF, pasando por el centro del triángulo color morado, y acabando la polilínea en la esquina inferior derecha. Así, tenemos un lado del rombo que forma la CU. Partiendo de la misma esquina que el anterior, y pasando por el centro del círculo verde de la imagen, acabamos el rombo de la CU en el mismo punto también que el anterior.

Generación del P3(GSP 13) a partir de la Celda Unidad:

Hasta aquí se ha descrito una metodología aplicable a cualquier tamaño de imagen de partida es decir, $n \times m$ siendo n el ancho y m la altura de la misma.

El paralelogramo fundamental (PF) de tipo P3 es un rombo formado por dos triángulos equiláteros y los centros de giro están situados como en la imagen 34.

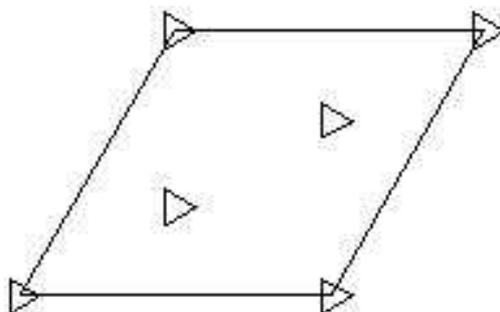


Imagen 34: Aspecto de un PF del grupo P3.

El PF del grupo P3 cuenta con cuatro centros de rotación de orden tres (120°) en los vértices pintados en la imagen 35 con color rojo, además de los situados en el centro de cada triángulo en que se divide, también de orden tres (120°), y diferenciados en la misma imagen por los colores azul y verde. Puede verse además, en la imagen 35, una zona pintada en color amarillo que abarca zonas de ambos triángulos y que podría considerarse como CU a la hora de construir el PF del P3. En un P3 el orden máximo de los giros es 3 y no aparecen reflexiones ni reflexiones con desplazamiento.

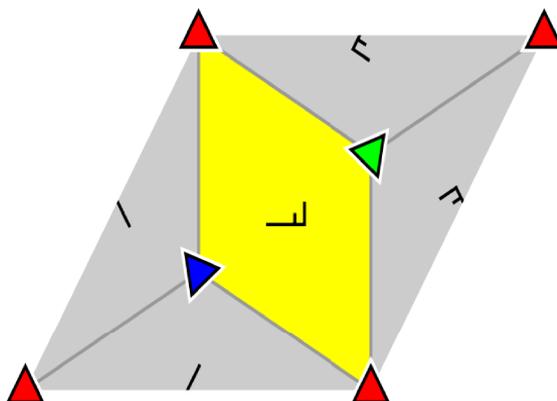


Imagen 35: Síntesis interna de un PF del grupo P3.

Considerando que un PF de un P3 está formado por dos triángulos equiláteros (Imagen 36b), el de la derecha con un color plano (verde) y el de la izquierda con otro (naranja) siguiendo además con el motivo alfabético que hemos venido utilizando.

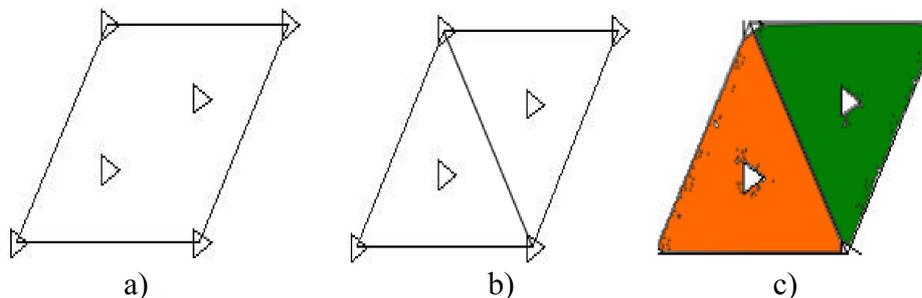


Imagen 36: Síntesis del PF en dos triángulos equiláteros.

Para formar uno de los dos triángulos equiláteros que forman el PF del P3, vamos a coger el situado más a la izquierda en la imagen 36, apartado c (el de color naranja). Este se puede descomponer a su vez en tres triángulos, como muestra la imagen 37. Los tres son iguales y son una variante de uno de ellos (nosotros hemos cogido el de base, de color azul, como primero) girado 120 grados en el punto de centro de rotación interior del original P3, por tanto el ángulo de ese vértice, de cada subtriángulo es $360/3 = 120$. De este modo, se puede construir uno y replicarlo para obtener uno de los dos triángulos de la imagen 36, apartado c.

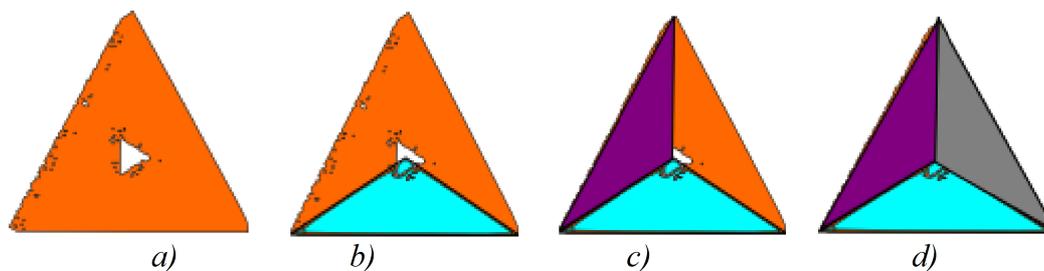


Imagen 37: Síntesis interna del triángulo de color naranja de la imagen 36 del apartado c.

De forma análoga a los anteriores grupos nosotros, a partir de una imagen proporcionada por el usuario, construiremos un PF característico de un grupo de simetría P3, que luego usaremos para replicar en la imagen destino.

Recordando un poco: Imagen Origen \rightarrow Celda unidad (CU) \rightarrow Paralelogramo Fundamental (PF) \rightarrow Imagen replicada.

Nosotros vamos a tomar como imagen origen, proporcionada por el usuario, el triángulo izquierdo de color naranja de la imagen 36 apartado c.

Ahora vamos a empezar a construir el triángulo isósceles de base, y que utilizaremos como CU, representado por el área de color azul en la imagen 37, apartado b. Cabe señalar que este triángulo será usado como máscara sobre la imagen origen y que luego lo rotaremos dos veces, 120° y -120° , copiando estas rotaciones en la imagen destino, para dar forma al apartado d de la imagen 37, dónde la zona morada representa al triángulo azul rotado 120° y la zona gris al triángulo azul rotado -120° .

Puede observarse en dicho triángulo que su arista más elevada representa un centro de rotación de orden 3 (120°). Hay que fijarse en que este triángulo base es un triángulo isósceles (Imagen 38).

Un triángulo isósceles es aquel que tiene iguales dos lados y dos ángulos.

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .

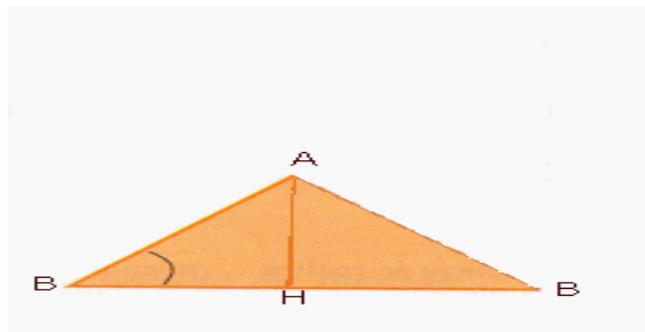


Imagen 38: Triángulo isósceles

Puede verse en la imagen 38 que los ángulos en la base del triángulo son los mismos.

Por tanto si nosotros estamos construyendo el triángulo de color azul de la imagen 37, del apartado b, representado ahora por la imagen 38, y sabemos que en el punto **A** hay 120° por ser un punto de rotación de orden 3 y ser el centro del triángulo equilátero que estamos construyendo, y además sabemos que en un isósceles los dos ángulos de base son iguales, que en la imagen 38 se representan por el punto **B**, podemos establecer la siguiente ecuación:

$A + 2B = 180^\circ$. Sustituyendo en **A** tenemos que $120^\circ + 2B = 180^\circ$. Ahora podemos determinar $B = (180^\circ - 120^\circ) / 2 \implies$
El ángulo en **B** $= 30^\circ$.

El punto H representa el punto medio de la base del triángulo isósceles. Si trazamos una línea desde el punto A al punto H conseguimos dividir el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales. Obtenemos así los siguientes tres valores de ángulos mostrados en la Imagen 39:

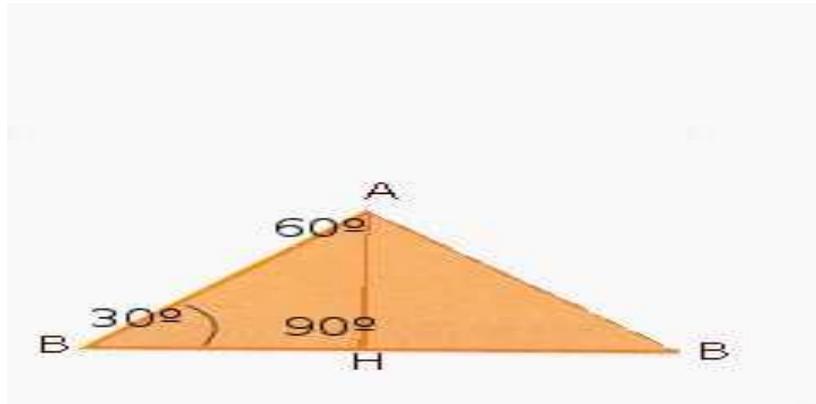


Imagen 39: Ángulos del triángulo equilátero izquierdo, de los dos en los que se divide el isósceles de la imagen 38.

Una vez sabido esto, podemos empezar a construir nuestro triángulo isósceles que nosotros utilizaremos como CU para construir el PF.

Derivación paramétrica en nuestro ejemplo:

Tomando una imagen de origen de $n \times m$, siendo n el ancho y m la altura:

Si nuestra imagen de origen mide n de ancho, nuestro triángulo isósceles que utilizaremos como máscara también medirá n de ancho. Por tanto cada uno de los dos triángulos equiláteros en los que se dividirá medirá de ancho $n/2$.

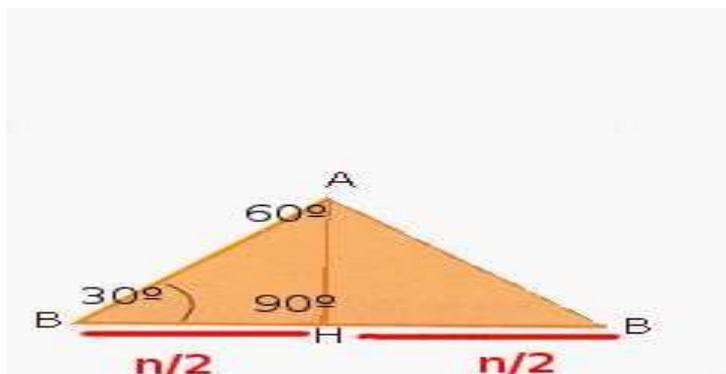


Imagen 40: Ancho de los triángulos equiláteros en que se divide el isósceles.

Para hallar el punto A representado en las imágenes 38, 39 y 40 en nuestra imagen origen es necesario considerar cómo se calculan las proyecciones de un vector en los ejes de coordenadas (Imagen 41). Trazamos ejes

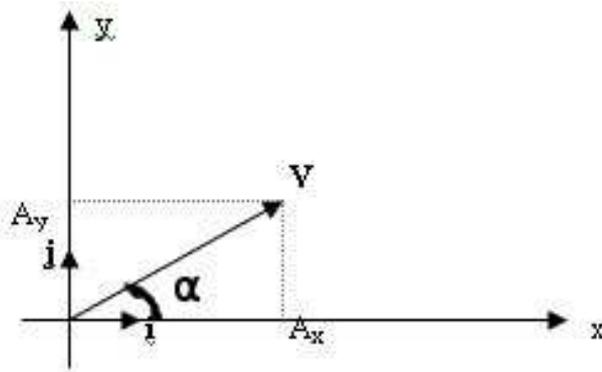


Imagen 41: Proyecciones de un vector V.

de coordenadas x y con origen en la cola del vector V. Se trazan perpendiculares desde la punta del vector V a los ejes x e y, determinándose sobre el eje x la proyección X, llamada Ax, y sobre el eje y la proyección Y, llamada Ay.

Por tanto a raíz de la imagen 41 podemos determinar:

1) $\|V\| \cdot \cos(\alpha) = Ax.$

2) $\|V\| \cdot \sin(\alpha) = Ay.$

Si tenemos que $\alpha = 30^\circ$, como hemos visto en la imagen 40, sustituyendo tenemos que:

$$\|V\| \cdot \cos(30^\circ) = n/2.$$

$$\|V\| \cdot \sin(30^\circ) = Ay.$$

Por tanto, tenemos que $Ax = n/2$, y $Ay = (Ax / \cos(30^\circ)) \cdot \sin(30^\circ)$.

Si suponemos, sin pérdida de generalidad, que tenemos una imagen $n = m = 300$:

Es el momento de realizar los cálculos para este tamaño de imagen:

Sustituyendo en la primera ecuación tenemos que:

$$\|V\| \cdot \cos(30^\circ) = n/2 \quad \implies \|V\| \cdot \cos(30^\circ) = (300/2) \quad \implies \|V\| = (150) / \cos(30^\circ) \quad \implies \|V\| = 173,2050$$

y sabiendo $\|V\|$ podemos sustituir en la segunda ecuación:

$$\|V\| \cdot \sin(30^\circ) = Ay \quad \implies Ay = (173,2050) \cdot \sin(30^\circ) \quad \implies Ay = 86,6025$$

Por tanto, el valor del punto A en nuestra imagen origen se sitúa en $300 - 86,6025 = 213,3975$. Así pues $A = 213,3975$ y el triángulo que tenemos que construir tendrá 300 de ancho (o de base) y su vértice más alto irá hasta el punto A, en la imagen origen.

Ahora mostramos los pasos seguidos en el código, fichero prueba.c, con OpenCV:

1) Primer triángulo equilátero

1.1) $\text{Img} \in \mathbb{Z}^{n,m}$. Declaramos una imagen de mismo ancho y mismo alto que la de origen.

En la imagen 42 mostramos la imagen cuadrada de 300x300 tomada como origen.

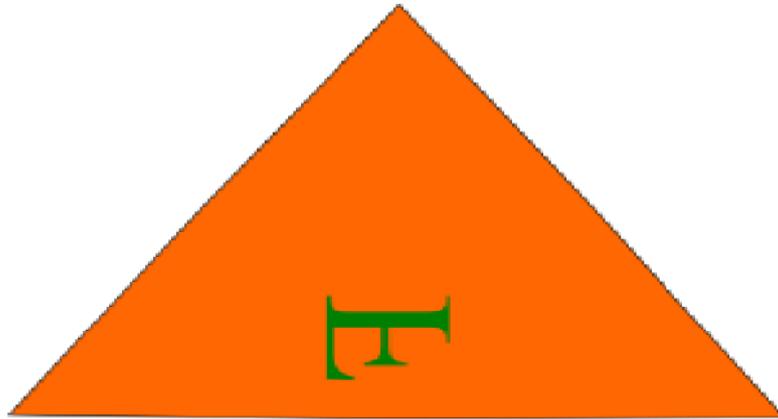


Imagen 42: Imagen origen

En segundo lugar aplicamos la imagen de máscara, de altura hasta el punto A, y de ancho igual que la imagen de origen, a la misma imagen de origen, tal y como puede verse en la imagen 43. La zona en blanco representa la imagen de máscara.

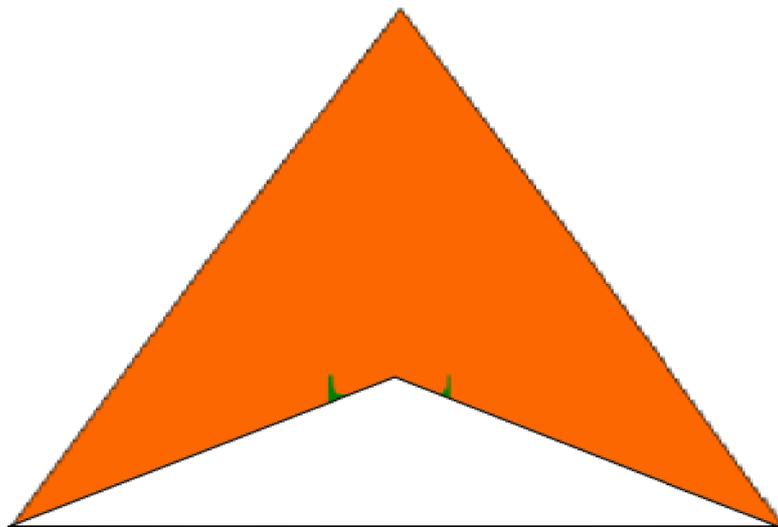


Imagen 43: Aplicando la máscara a la imagen de origen.

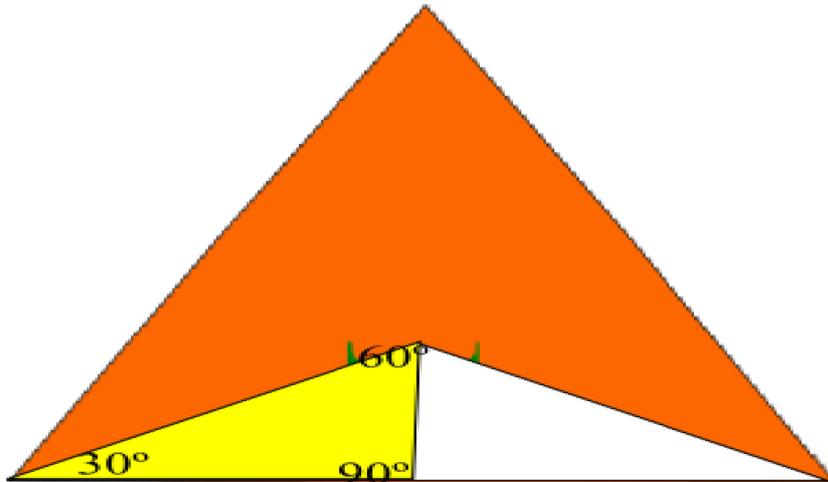


Imagen 44: Muestra de la equivalencia de la imagen 39 en nuestra imagen origen con la máscara aplicada.

El área que queda dentro del borde blanco al aplicar por primera vez la máscara le denominaremos *Img1*.

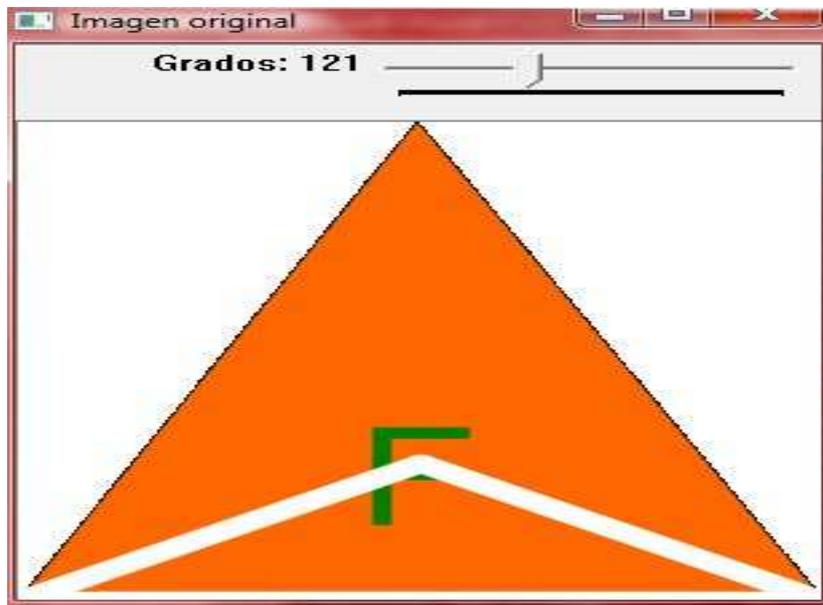


Imagen 45: Limitación del área recortada sobre la imagen de origen.

Ahora realizamos lo siguiente:

1.2) **Img= Img1**. En Img copiamos el resultado de realizar por primera vez **ImagenOrigen OR Máscara**, sin rotar todavía esta última.

1.3) **Img=Img OR Rotación (Img1,120)**. Sumamos a Img la Img1 rotada 120°.

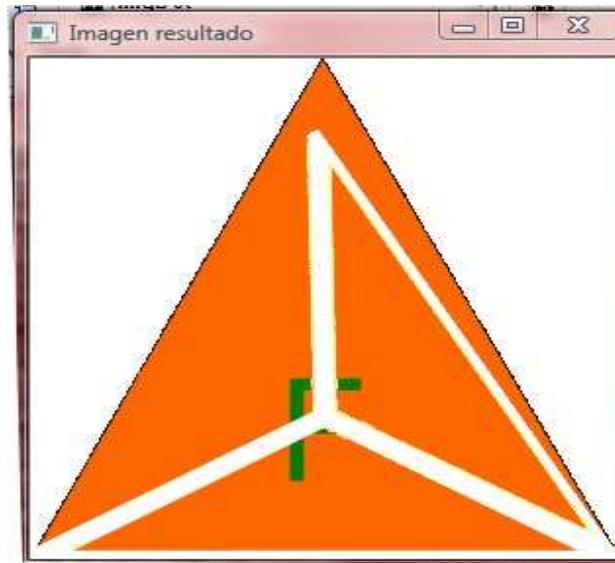


Imagen 46: Rotación de 120° de la máscara

1.4) **Img=Img OR Rotación (Img1,-120)**. Sumamos a Img la Img1 rotada -120°.

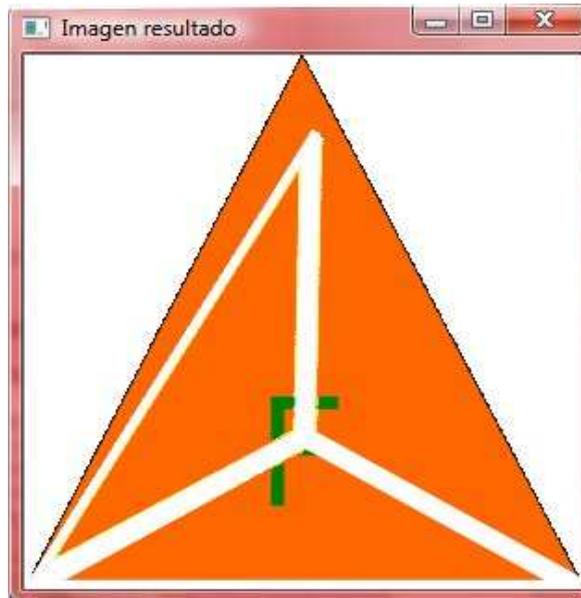


Imagen 47: Rotación de -120° de la máscara

*Hasta aquí la realización del primer triángulo equilátero de los dos que forman el PF de un GSP P3.

2) Para el **segundo triángulo** habría que hacer lo siguiente:

2.1) $\text{ImagenFinal} \in \mathbb{Z}^{2n,m}$. Nos declaramos una imagen final de doble de ancho que la de origen y misma altura.

2.2) $\text{ImagenFinal} = \text{Img}$. Copiamos en la imagen final el primer triángulo equilátero.

2.3) $\text{ImagenFinal} = \text{ImagenFinal OR trasladar}(\text{rotación}(\text{Img}, 180), n/2)$. Seguido al primer triángulo se copia el mismo rotado 180° .

Aquí ya deberíamos tener el PF del P3 formado, pero como se puede ver en las imágenes 46 y 47 no hemos conseguido que el triángulo rotado 120° y -120° cuadre exactamente con el triángulo de fondo (la imagen origen).

Esto se puede deber al redondeo que hace OpenCV al calcular los cosenos y senos de los ángulos, ya que no coge todos los decimales y trabaja sólo con el valor redondeado.

P3M1(GSP 14):

Descripción: Este grupo contiene giros de 120° y simetrías respecto de ejes que forman 60° , unos pasan por los centros de rotación y otros no. La malla o rejilla es también hexagonal. La CUEs es el cuadrilátero conocido como "cometa".

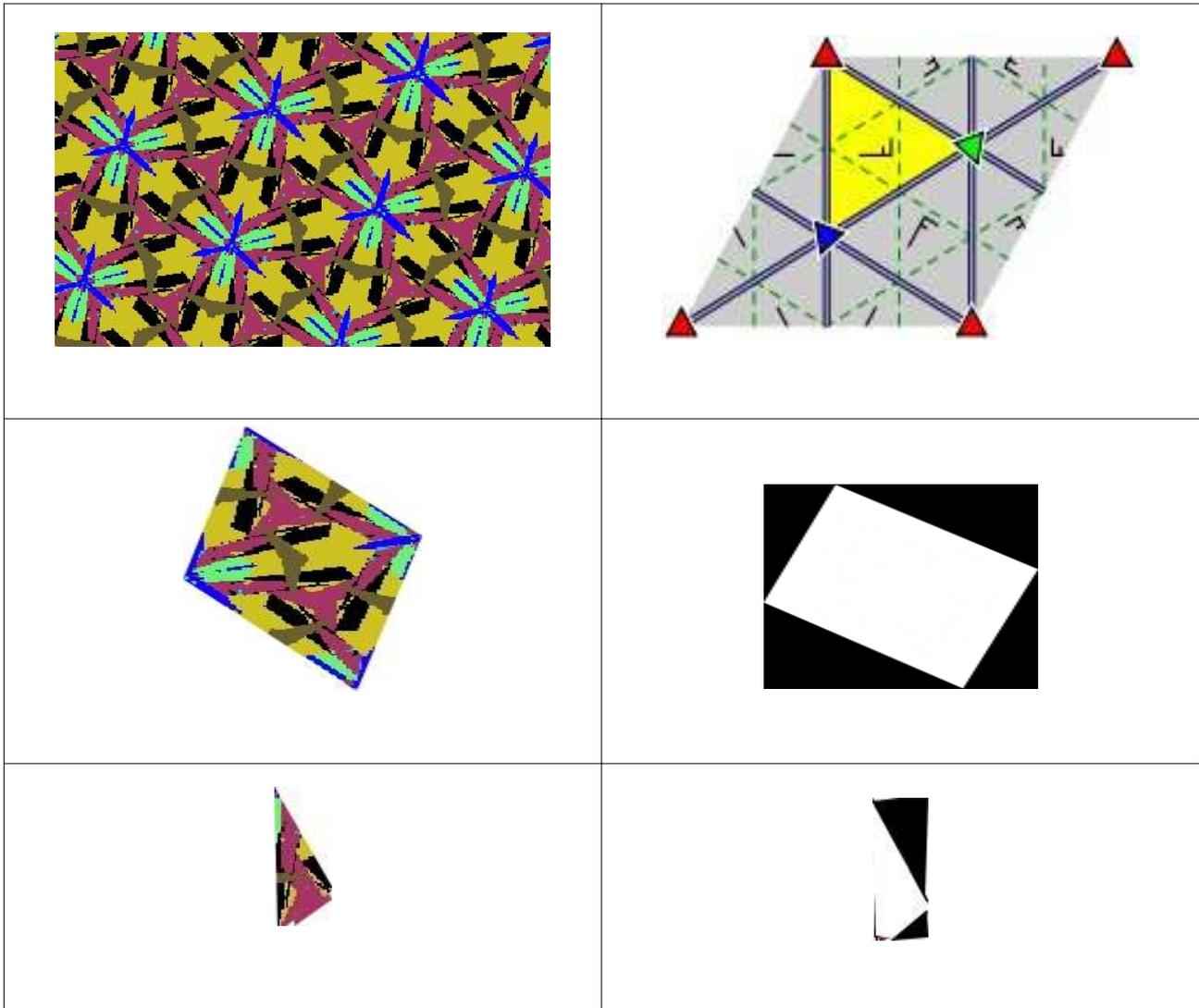


Tabla 17: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P3M1, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 17, se toma el PF constituido como compuesto al igual que en P3 por dos triángulos, la diferencia es que aquí se subdividen cada uno de ellos en 6 mitades, el doble que en P3. Es como si cogiéramos los 3 subtriángulos en que se divide cada uno de los dos triángulos del P3 y sobre ellos volviéramos a dividir por dos. El resultado es el doble de triángulos. Para sintetizar de este PF la CU hemos sintetizado los dos triángulos, como en P3, subdividido en 3 más iguales, y estos 3 subdivididos hasta quedar en 6. Desde la esquina superior izquierda del PF e intentando que saliese la polilínea lo más centrada posible con el centro del triángulo virtual, de los dos que hay, el que se coloca más a la izquierda según nuestra imagen, hemos trazado el triángulo que aparece como CU.

Generación del P3M1(GSP 14) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría P3M1 con los siguientes pasos:

Cojo la CU , la reflejo , la roto 60 grados y la copio a un lado de esta .

Ahora hay que realizar la misma operación 5 veces más, hasta formar un hexágono mediante la unión de 6 veces la CU (6 triángulos)original rotada y reflejada el mismo numero de veces que de operaciones. Así tenemos algo parecido a un hexágono y el PF formado completamente.

P31M(GSP 15):

Descripción: Se diferencia del anterior en que todos los centros de rotación caen en los ejes de simetría. Tiene

giros de 120°. La malla es también hexagonal pero la CU es un triángulo obtusángulo.

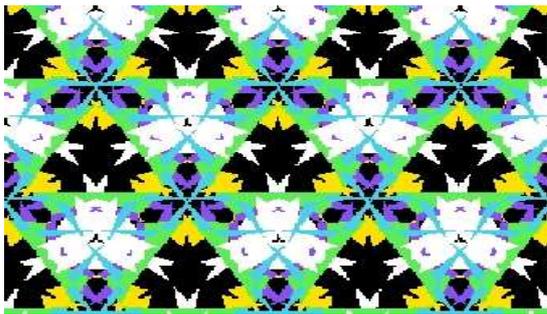
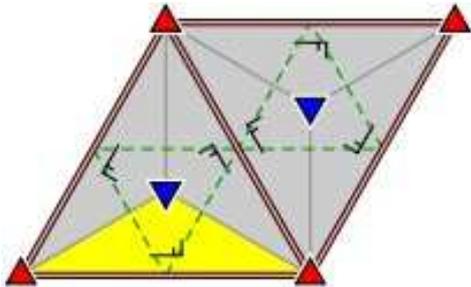
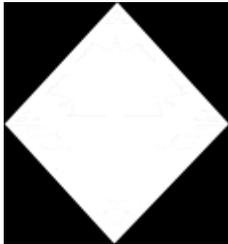
	
	
	

Tabla 18: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P31M, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 18, mostramos la síntesis de CU a partir de su PF para este GSP, siendo muy parecida esta a la del P3, ya que el PF también se constituye en dos triángulos, y estos a su vez en otros 3 subtriángulos. Es fácil ver los dos triángulos en la imagen PF, siendo uno el aparte amarilla y el otro la parte más azul. En nuestro caso hemos cogido la parte amarilla y hemos cogido el triángulo de base.

Generación del P31M(GSP 15) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría P31M con los siguientes pasos:

1. A partir de la CU (Triángulo), generamos un triángulo de igual tamaño y lo copiamos girado 120 grados a la derecha sobre la CU.
2. Ahora generamos un triángulo de igual tamaño y lo copiamos girado -120 grados a la izquierda sobre la CU.

En este punto hemos formado un nuevo triángulo de área más grande a partir de otros 3 más pequeños (3 veces la CU).

3. El siguiente paso es reflejar este nuevo triángulo, rotarlo 180 grados respecto al mismo y copiarlo así al lado del original. Con esto ya tenemos el PF completo.

P6(GSP 16):

Descripción: En este grupo cristalográfico se dan rotaciones de 60° (orden 6). También contiene giros de órdenes 2 y 3, pero no reflexiones. Su malla y su CU son hexagonales.

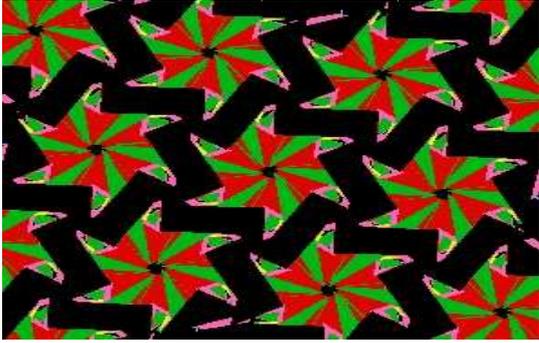
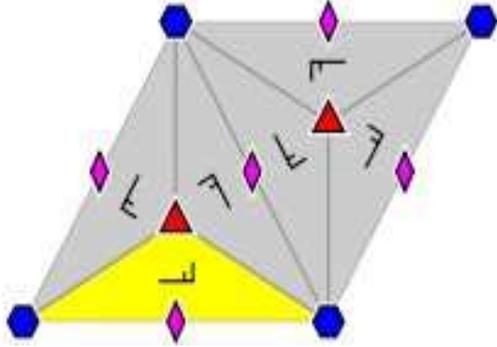
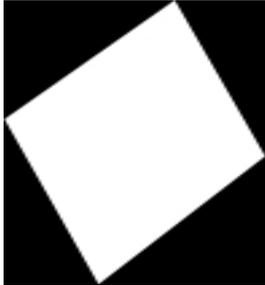
	
	
	

Tabla 19: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P6, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 19 se ve que en la síntesis de CU a partir del PF, también se divide este de forma análoga al P3, de tal forma que nosotros aquí nos hemos quedado con el subtriángulo del lado izquierdo del triángulo más a la izquierda, si se divide el PF en dos.

Generación del P6(GSP 16) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría P6 con los siguientes pasos:

1. A partir de la CU (Triángulo), generamos un triángulo de igual tamaño y lo copiamos girado 120 grados a la derecha sobre la CU.
2. Ahora generamos un triángulo de igual tamaño y lo copiamos girado -120 grados a la izquierda sobre la CU.

En este punto hemos formado un nuevo triángulo de área más grande a partir de otros 3 más pequeños (3 veces la CU).

3. Ahora solo queda copiar este último triángulo creado rotado 180 grados respecto al original y colocarlo a la derecha de este. Así, ya tenemos el PF completo.

P6M(GSP 17):

Descripción: Contiene giros de 180° , 120° y 60° además de reflexiones que pasan por todos los centros de giro. En los centro de orden 6 se cortan seis ejes de simetría formando ángulos de 30° . La rejilla y la CU son hexagonales.

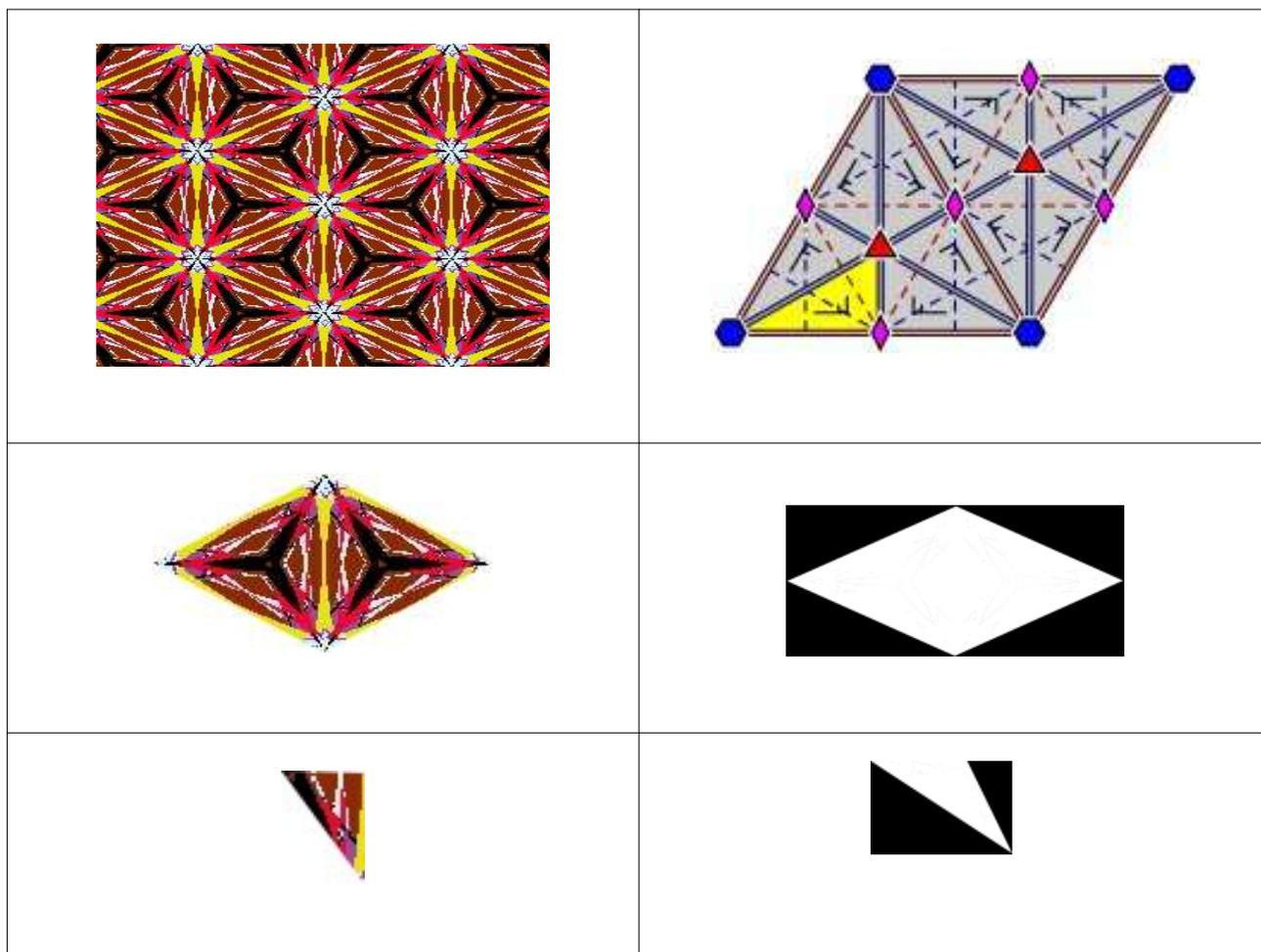


Tabla 20: Caracterización de las simetrías interiores del GSP P6M, ejemplo de PF y CU.

En la Tabla 20 visualizamos la síntesis de CU. Tenemos dos triángulos en el PF pintados en negro a modo de hélices, uno en la mitad izquierda y otro en la mitad derecha. Nosotros hemos cogido el de la parte izquierda, el triángulo con vértices en el centro de la hélice, en la esquina inferior, y en el centro del PF, como CU.

Generación del P6M(GSP 17) a partir de la Celda Unidad:

A partir de nuestra celda unidad tomada como patrón, realizamos la construcción de un PF para el grupo de simetría P6M con los siguientes pasos:

A partir de la CU (Triángulo), generamos un triángulo de igual tamaño y lo copiamos reflejado, y rotado 180 grados respecto de la CU original.

1. Ahora reflejamos los dos triángulos que ya tenemos, CU original y el anterior, y los copiamos a partir de estos rotados 60 grados.
2. Posteriormente reflejo estos dos últimos triángulos de nuevo, para copiarlos a continuación de los mismos, rotados 180 grados.
3. Llegados a este punto tenemos, un nuevo triángulo formado por 6 veces la CU(es decir, 5 +1(CU original) triángulos CU reflejados y rotados sobre la original).
4. Solo queda por tanto, coger este nuevo triángulo de área más grande, rotarlo 180 grados y copiarlo al lado del mismo para obtener el PF completo.

Capítulo 5: Conclusiones y/o futuras ampliaciones:

Llegados a este punto hemos conseguido la realización de 12 grupos de simetría del plano de los 17 que marcamos como objetivo final. Los 5 grupos que no hemos conseguido realizar son, P3, P3M1, P31M, P6 y P6M.

Nuestro PFC lee de disco una imagen, y construye los 12 grupos: P1, P2, PM, PG, CM, PMM, PMG, PGG, CMM, P4, P4M y P4G a partir de ella. La imagen puede ser la que el usuario desee. Para cambiarla basta con cambiar el nombre con extensión .jpg o .png que hay en el código C según el grupo que deseemos cambiar.

El principal problema que nos hemos encontrado ha sido el establecimiento de la máscara de un P3, básica para la construcción del mismo, y que nos ha llevado a la realización de una serie de cálculos matemáticos plasmados en el apartado del mismo grupo P3, en la presente memoria del PFC donde además de dichos cálculos hemos aportado la información teórica que hemos visto oportuna.

Capítulo 6: Posibles aplicaciones prácticas del PFC:

Fuera del uso de los interfaces Code::Blocks o Visual C++ la aplicación creada puede utilizarse para:

Mamparas de lámparas con motivos decorativos :

Por medio de la realización de los PF comentados en esta memoria de PFC podemos diseñar cualquier forma que toma cualquiera de los 17 grupos de simetría en el plano, y tomarla como patrón , plasmando y replicando esto en un papel adecuado, podemos recortar dichas formas a nuestro gusto, para finalmente dar forma a una estructura esférica juntando los recortes realizados.

Por ejemplo podemos construir esferas como las que a continuación se muestran :

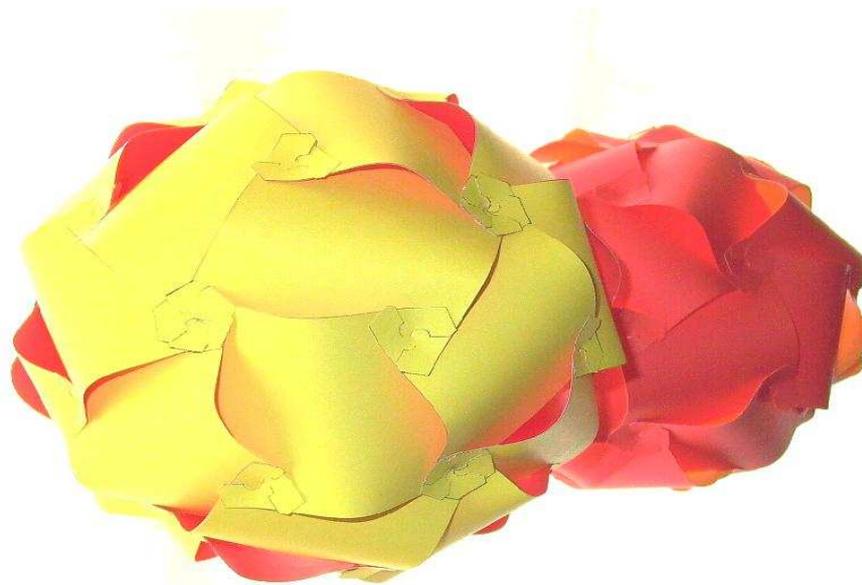


Imagen 48: Ejemplo de uso de la aplicación del PFC. Fabricación de una esfera de 10 pulgadas de diámetro.

Para la fabricación de una lámpara de este tipo hay que imprimir en papel adecuado, es decir resistente al calor que emita la bombilla, las diferentes partes que va a contener la esfera que forma la lámpara. Según el diseño que elijamos y el tamaño que le queramos dar a la esfera, la estructura de la lámpara se dividirá en más o menos partes. En el ejemplo de M.C. Escher, [M.C. Escher, Heesch Tile] de la bibliografía de la presente memoria (página 62), donde se indica la url que detalla este ejemplo paso a paso, se construye una esfera de 25,4 cent de diámetro (10 pulgadas).

Posteriormente se recortan las múltiples partes que forman la esfera, para luego encajarlas a modo de puzzle. En nuestro caso, y a la hora de hacer el cálculo oportuno de las partes que formarán la esfera, es necesario tener en cuenta el cable de la bombilla interior, para dar un hueco de margen en la base.

Nota: Si se quiere construir el ejemplo es importante usar papel adecuado y no cartón que es lo que este utiliza.

Generador de Wallpapers:

La aplicación también puede ser usada como un generador de wallpapers. Como en X3D studio, kali o inkscape, estos dos últimos utilizados aquí, que permiten generar wallpapers de una manera sencilla, con una serie de elementos gráficos predefinidos.

Además en un futuro nuestra aplicación podría ser utilizada **online**, sin necesidad de instalar ninguna de las anteriores aplicaciones mencionadas, y permitiendo desarrollar a nuestro gusto sin necesidad de ocupar demasiado espacio en el equipo, siendo el código aquí proporcionado también libre y al alcance de cualquier usuario

interesado.

Esto también podría ser añadido a sistemas operativos propios de la tecnología móvil, tales como iOS, sistema operativo característico de la marca Apple, integrado tanto en sus equipos informáticos, como en los teléfonos móviles “iphone”, o a Android, sistema operativo basado en linux, donde el código es “libre”, y permite a cualquier usuario desarrollar su propio script o programa e integrarlo al teléfono sin coste alguno para él. Nuestra herramienta se podría integrar a los teléfonos, o mejor dicho “smartphones”, y a través de las cámaras integradas en ellos, capturar imágenes y facilitar su tratamiento a gusto del usuario.

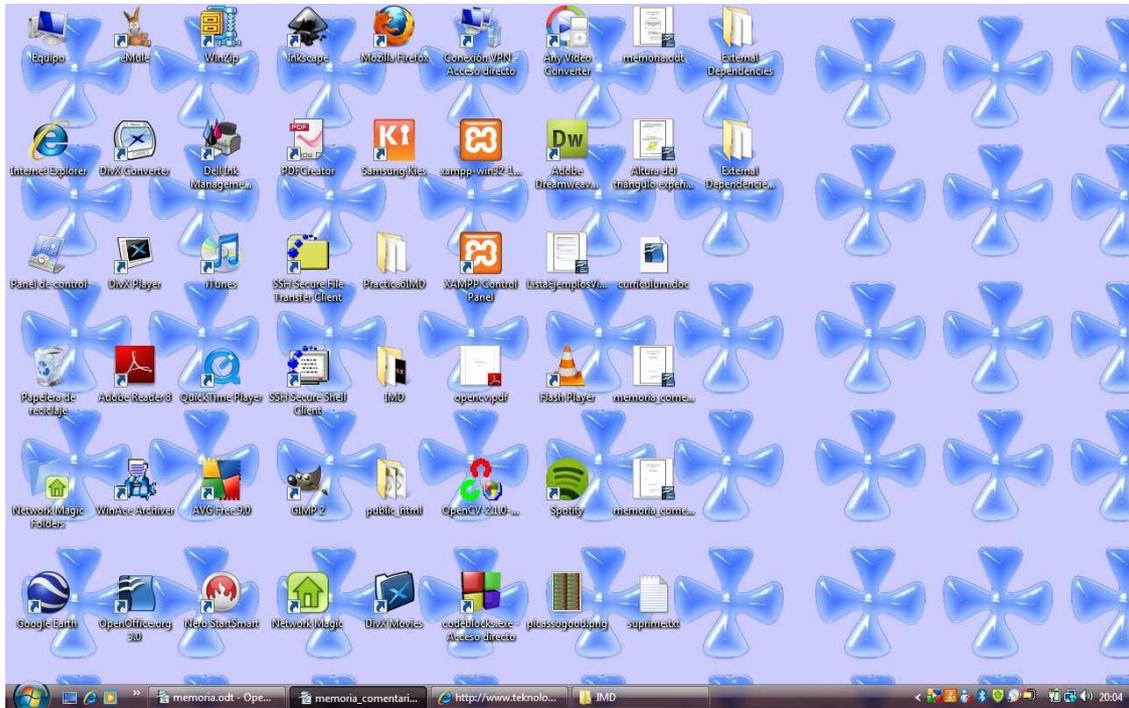


Imagen 49: Imagen de un GSP P4 replicado utilizado como Wallpaper en Windows Vista.

Otros:

En General, la aplicación se puede usar para casi cualquier tipo de diseño, ya sea Web, mediante la generación de imágenes digitales y aplicables al diseño de cualquier Web mediante archivos css, o bien decorativo de interior y exterior, aplicable a cualquier espacio, mediante la construcción de mámaparas para lámparas como las antes mencionadas, así como el papel que utilizamos para empapelar habitaciones o estancias de un piso o chalet.



Imagen 50: Empapelado de pared decorativo.

Capítulo 7: Bibliografía y referencias:

[xah2010] Xha Lee – Knitting, Chinese Knots, Braid Theory.

http://xahlee.org/math/math_knitting_chinese_knots.html . Web que muestra ejemplos de imágenes periódicas en tejidos, nudos chinos.

http://xahlee.org/Wallpaper_dir/c5_17WallpaperGroups.html . La tabla del apartado "The Crystallographic Notation" resulta interesante a la hora de resumir los posibles tipos de PF que admite cada grupo de simetría.

[Accedidos el 29/05/10].

[Hans2010] Hans Kuiper Computer Art.

<http://web.inter.nl.net/hcc/Hans.Kuiper/> (Arte de la computadora, por Hans Kuiper), Web que sirve de base para establecer las ideas de lo que se quiere construir.

[Accedido el 29/05/10].

[Wiki2010] Wikipedia, Wallpaper Group.

http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group From Wikipedia, the free encyclopedia. (De la Wikipedia, libre enciclopedia). Explicación en Inglés, con ejemplos visuales, que ayudan a la realización de las 17 simetrías de plano.

[Accedido el 29/05/10].

[Mosaicos2010] Mosaicos, Celosías, Grupos de simetría.

<http://www.acorral.es/index3.htm> Web en castellano que también sirve de apoyo y que contiene ejemplos que explican los grupos de paralelogramo que existen.

[Accedido el 29/05/10].

[Inkscape2010] Inkscape.org.

www.inkscape.org Web oficial de la aplicación Inkscape. Inkscape comenzó como una bifurcación de Sodipodi.com, gracias a cuatro desarrolladores, Bryce Harrington, MenTalguY, Nathan Hurst, y Ted Gould. Es un programa de diseño de dibujo.

[Accedido el 29/05/10].

[Kali2010] Teselaciones (Tessellations.org).

<http://www.tessellations.org/kali-win1.htm> Web de donde podemos bajar el programa Kali, que se ofrece para diferentes plataformas de forma libre, así como observar los diferentes ejemplos de teselaciones que aquí se publican.

[Accedido el 29/05/10].

[GIMP] GIMP 2.

<http://www.gimp.org.es/> Web de donde podemos descargar el programa GIMP, editor de imágenes potente y gratuito.

[Accedido el 29/05/10].

[Joyce2010] David E. Joyce, Plane Symmetry Groups.

<http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/> Web donde podemos encontrar ejemplos gráficos de cada grupo de simetría del plano, así como la tabla general que explica su generación o tipología característica de cada uno de ellos.

[Accedido el 29/05/10].

[Symmetry of Rugs] Field Patterns.

<http://mathforum.org/geometry/rugs/symmetry/fp.html> Ejemplos de cada uno de los grupos de simetría del plano utilizando la letra mayúscula F como modelo, útil para orientarnos en operaciones de rotación, reflexión y reflexión con desplazamiento.

[Accedido el 29/05/10].

[Universidad de Valladolid (UVA), Dpto de Matemática Aplicada, Geometría y Computación Gráfica en Arquitectura (GYCGA)] Grupos cristalográficos planos.

<http://www.math.arq.uva.es/gycga/apuntes/GrupCristal/GrupCristal.html> Web que aporta ejemplos visuales y comenta sobre cada grupo de simetría en el plano.

[Accedido el 29/05/10].

[JWilson2010] The Seventeen Wallpaper Groups.

<http://jwilson.coe.uga.edu/emt668/EMAT6680.F99/McCallum/WALLPA~1/SEVENT~1.HTM> Web donde se realiza un agrupamiento de los 17 grupos en 6 más generales, así como se da una explicación en cada uno de esos 6 de lo que tienen en común.

[Accedido el 29/05/10].

[WolframMathWorld] Wallpaper Groups.

<http://mathworld.wolfram.com/WallpaperGroups.html> Web que aporta gráficos para cada uno de los grupos de simetría en el plano.

[Accedido el 29/05/10].

[Clowder2010] 17 Wallpaper Groups.

<http://www.clowder.net/hop/17walppr/17walppr.html> Web con más imágenes por grupo, así como ejemplos realizados para cada uno de ellos.

[Accedido el 29/05/10].

[Docència2010] Web del profesor Manuel Agustí.

<http://www.disca.upv.es/magustim/val/docencia.html> Web con información de las asignaturas que imparte el

profesor Manuel Agustí, relacionadas con la intensificación o rama Multimedia, donde podemos encontrar trabajos, prácticas así como todo tipo de material multimedia que puede ser de interés.

[Accedido el 29/05/10].

[Cimat2010] Introducción al uso de OpenCV.

<http://www.cimat.mx/~jbhayet/CLASES/VISIONROB/opencv1.pdf> Web que complementa al tutorial de OpenCV que viene en pdf con el ejecutable de la librería. Podremos encontrar ejemplos y aclaraciones sobre uso de comandos propios de la librería de openCV.

[Accedido el 29/05/10].

[API de OpenCV] Operations on Arrays.

http://opencv.willowgarage.com/documentation/c/operations_on_arrays.html?highlight=cvand#cvAnd Web interesante a la hora de aplicar funciones de OpenCV en el código que trabajan con Arrays.

[Accedido el 29/05/10].

[OpenCV, structures and operations] Basic structures and operations reference.

http://www710.univ-lyon1.fr/~bouakaz/OpenCV-0.9.5/docs/ref/OpenCVRef_BasicFuncs.htm Web que puede ser tomada como referencia también a la hora de aplicar comandos y funciones de OpenCv, clasificadas en función del uso que queramos hacer.

[Accedido el 29/05/10].

[M.C. Escher, Heesch Tile] Step-by-step instructions to build spherical tessellations.

<http://www.eschertile.com/egg/steps.htm> Web que describe paso a paso un posible uso para la aplicación del PFC fuera de Code::Blocks y Visual C++.

[Accedido el 29/05/10].

[Cristalografía-Wikipedia] Cristalografía.

<http://es.wikipedia.org/wiki/Cristalograf%C3%ADa> . Interesante el apartado de “Elementos de simetría”.

[Accedido el 29/05/10].

[Max von Laue, 1912] Interferencia de los rayos X en los cristales.

<http://es.answers.yahoo.com/question/index?qid=20090909193256AAYkC6N> . Explicación en el foro a grandes rasgos de quién fue Max Von Laue y que consiguió con su experimento llevado a cabo en 1912.

[Accedido el 29/05/10].

[UPM - Escuela técnica de arquitectura] Grupos de simetría en el esgrafiado segoviano.

<http://oa.upm.es/4704/1/P10.pdf> . Ejemplos reales de todos los grupos de simetría del plano sitios en una misma ciudad.