Integración sobre superficies

Apellidos, nombre	Martínez Molada Eulalia, (eumarti@mat.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior Ingenieros de Telecomunicación

1. Resumen de las ideas clave

En este artículo se presenta el tema Integral sobre superficies como parte del análisis vectorial de la asignatuta de Matemáticas III que se imparte en el Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. El tema está estructurado como sigue:

Contenidos de este artículo
1. Introducción.
2. Objetivos.
3. Introducción teórica a las integrales de superficie.
4. Ejercicios.
5. Cierre.

Tabla 1: Contenidos del artículo

2. Introducción

Una integral de superficie es aquella integral cuya función es evaluada sobre una superficie definida en el plano o en el espacio. Fundamentalmente consideraremos el cálculo de la integral sobre un campo escalar y el cálculo de la integral sobre un campo vectorial.

Ejemplos prácticos de su utilización pueden ser:

1. El cálculo del área de una superficie.
2. El cálculo de la masa total de una superficie si se integra el campo escalar que representa la densidad de masa por unidad de superficie.
3. La integral de un campo vectorial sobre una superficie S que se interpreta como el flujo de un fluido que pasa a través de S.

3. Objetivos

Un primer objetivo es que el alumno aprenda a parametrizar superficies, tanto en el plano como en el espacio tridimensional. En primer lugar se trata de identificar la gráfica de superficies clásicas como los paraboloides, las esferas y elipsoides, los conos, cilindros y los hiperboloides, para posteriormente definir la superficie como una aplicación continua entre un subconjuto de R^2 que será el dominio de los parámetros y un subconjuto de R^3 que constituye las imágenes.
A continuación se abordará el concepto de campo escalar definido sobre una superficie e integral de este tipo de campos sobre superficies para obtener elementos físicos importantes como masa de placas planas, centros de masas y distintos momentos.
Finalmente el cáculo de la integral de superficie para el caso de un campo vectorial culminará el tema obteniendo resultados a cerca del flujo del campo, para el cálculo de estas integrales podrá aplicarse el teorema de la divergencia o el teorema de Stokes.

4. Desarrollo

Para dar al artículo un énfasis práctico de cara a facilitar el seguimiento por parte del alumno, en primer lugar realizaremos un resumen de la teoría que servirá solo de guía para definir los conceptos y propiedades que los relacionen, pero que el alunmo tendrá que ampliar para profundizar en la materia. Nos centraremos a continuación en el desarrollo paso a paso de algunos problemas o ejercicicios representativos del tema que resolveremos en todos los casos suiguiendo los siguientes items:

1. **Planteamiento:** Organizamos los datos y calculamos la información necesaria para llevar a cabo la resolución del problema.

2. **Desarrollo:** Una vez tenemos todos los datos necesarios y con las propiedades que caracterizen los conceptos necesarios, procedemos a resolver el mismo.

3. **Conclusión:** Observamos el resutado para comprobar que tiene sentido y extraemos conclusiones interpretando el mismo en el contexto en el que nos encontramos.

4.1. Introducción teórica

4.1.1. Planos tangentes y vector normal de una superficie

La parametrización de una superficie M regular viene dada por la siguiente aplicación $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$ donde $(s_0, t_0) \in A$, que es el rango de variación de los parámetros que definen la superficie. En cada punto (x_0, y_0, z_0) podemos definir el plano que pasa por él y es paralelo a $\varphi_s(s_0, t_0)$ y $\varphi_t(s_0, t_0)$ se llama plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0).
Es importante indicar que si $\varphi : A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ es una parametrización de M, entonces, el vector $\varphi_s(s_0, t_0) \times \varphi_t(s_0, t_0)$ es normal al plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$, y por consiguiente a la superficie en dicho punto. Se define el vector unitario y normal a la superficie regular M en el punto $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$ como

$$\overrightarrow{n}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\varphi_s(s_0, t_0) \times \varphi_t(s_0, t_0)}{\|\varphi_s(s_0, t_0) \times \varphi_t(s_0, t_0)\|}.$$

Así una ecuación del plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$ viene dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \overrightarrow{n}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

4.1.2. Integración de un campo escalar sobre una superficie y superficies orientables

Si $\varphi : A \to R^n$ es una parametrización de una superficie regular M y $f : M \to R$ es un campo escalar continua definido sobre M, entonces

$$\int_{\varphi(A)} f\, dS = \int\int_A f(\varphi(s,t)) \|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)\|\, d(s,t).$$

Es decir, se evaluará el campo escalar sobre la superficie y se multiplica este por el módulo del vector normal a la misma integrando este producto sobre el recinto donde esta parametrizada la superficie.

4.1.3. Superficies orientables

En cada punto x de una superficie regular $M \subset R^3$ hay dos vectores normales unitarios $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$, siendo $\overrightarrow{n_1} = -\overrightarrow{n_2}$. Cada una de estas normales se puede asociar con un lado de la surperficie. Intuitivamente, una superficie es orientable si tiene dos caras o lados. Para especificar una orientación, se escoge uno de los vectores normales unitarios. Así, resulta que M es orientable si puede definirse una aplicación continua de M en R^3 que asigna a cada punto uno de los vectores normales. Una de las tales aplicaciones se denomina orientación de la superficie.
Supongamos que la superficie está orientada con vector normal unitario $\overrightarrow{n}$. Un sistema de coordenadas $\varphi : A \to M \subset R^3$ preserva la orientación si en todo punto $\varphi(s,t)$ se cumple que

$$\overrightarrow{n}(\varphi(s,t)) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\|}.$$

4.1.4. Integral de flujo

A continuación trataremos el análogo de las integrales de línea: las integrales de flujo a través de una superficie regular orientable en R^3. Sea M una superficie orientable de R^3 de clase C^1 y sea $F : M \to R^3$ un campo de fuerzas continuo. Se define el flujo de F a través de M como

$$\int_M F \cdot dS,$$

para una orientación elegida. De manera que si $\varphi : A \to M$ es un sistema de coordenadas que conserva la orientación, entonces:

$$\int_{\varphi(A)} F \cdot dS = \int\int_A F(\varphi(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) d(s,t) = \int_M F \cdot \overrightarrow{n} dS.$$

Si F es un campo vectorial que mide la velocidad de un fluido, el flujo de F a través de M representa la cantidad neta de fluido que pasa por la superficie por unidad de tiempo, en la dirección indicada por el vector $\overrightarrow{n}$. Similarmente, si T es la temperatura entonces la integral de superficie de $F = -\nabla T$ representa el flujo de calor a través de M.

4.1.5. El teorema de Stokes

El teorema de Stokes nos permite relacionar la integral de flujo del rotacional de un campo vectorial F, con la integral de línea de F en el borde de la superficie M:

$$\int\int_M rotF \cdot dS = \oint_{\partial M} F \cdot dr.$$

4.1.6. El teorema de la Divergencia

Sea $F(x,y,z) = (P,Q,R)$ un campo vectorial continuamente diferenciable, la divergencia de F, ∇F, se define en coordenadas cartesianas como el producto escalar

$$\nabla F = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P,Q,R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Sea Q es un sólido en R^3 acotado por una superficie S de clase C^1. El teorema de la divergencia nos dice que

$$\int\int_S FdS = \int\int\int_Q \nabla F dV.$$

donde dV representa el diferencial de volumen correspondiente a la integral triple considerada, que por ejemplo en coordenadas cartesianas será: $dx\ dy\ dz$

4.2. Ejercicios

Problema 1: Calcula el flujo de los siguientes campos vectoriales que pasa por las superficies indicadas en cada apartado.

(a) **$\boldsymbol{F(x,y,z) = (x,-z,y)}$ sobre la esfera $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=4}$ en el primer octante con orientación hacia el origen.**

(b) **$\boldsymbol{F(x,y,z) = (xy,yz,zx)}$ sobre el paraboloide $\boldsymbol{z = 4-x^2-y^2}$ que está arriba del cuadrado $\boldsymbol{0 \le x,y \le 1}$, con orientación positiva.**

Solución (a)

$\boxed{\textbf{Paso 1: Planteamiento}}$

La esfera se puede parametrizar, utilizando coordenadas esféricas, como:

$$\varphi(s,t) = (2\sin s\cos t, 2\sin s\sin t, 2\cos s) \quad s \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Notar que es importante en cada caso indicar el rango de variación de los paprámetros que deninen la superficie.

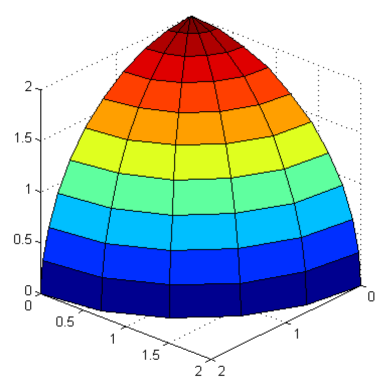

Figura 1: Representación gráfica de la esfera

$\boxed{\textbf{Paso 2: Desarrollo}}$

En primer lugar calculamos el vector normal a la superficie:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (-2\sin s\sin t, 2\sin s\cos t, 0)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = (2\cos s\cos t, 2\cos s\sin t, -2\sin s)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\times\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2\sin s\sin t & 2\sin s\cos t & 0 \\ 2\cos s\cos t & 2\cos s\sin t & -2\sin s \end{vmatrix} = (-4\sin^2 s\cos t, -4\sin^2 s\sin t, -4\sin s\cos s)$$

Por otra parte, calculamos la evaluación del campo vectorial dado sobre la superficie:

$$F(\varphi(s,t)) = (2\sin s\cos t, -2\cos s, 2\sin s\sin t).$$

De modo que el integrando será el producto escalar de ambos vectores:

$$F(\varphi(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = -8\sin^3 s\cos^2 t$$

Integramos esta última expresión osbre el recinto que define los parámetros de la superfice, para calcular el flujo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -8\sin^3 s\cos^2 t\, dt\, ds = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} ds$$

$$= -2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s\, ds = -2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin s(1-\cos^2 s)\, ds = -2\pi\left[\frac{\cos^3 s}{3} - \cos s\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4\pi}{3}$$

Paso 3: Conclusión

Notar en primer lugar que hemos de recordar las técnicas de integración simple, por ejemplo se ha utilizado en este ejercicio la integral de funciones trigonométricas con exponente par, en la que se aplica la relación trigonométrica del ángulo doble, y en el caso de exponente impar basta con descomponer el integrando de forma adecuada.

Observamos que debido a la orientación de la superficie el resultado es negativo, éste cambiaría al tomar la orientación contraria.

Solución (b)
En este caso se puede utilizar la parametrización natural del paraboloide y utilizar coordenadas cartesianeas ya que el recinto es rectangular, basta pues aplicar la propia definición de la integral de flujo para obtener el resultado: $\frac{1043}{180}$.

Problema 2

(a) **Calcula el flujo del rotacional del campo $\boldsymbol{F(x,y,z) = (x^2z, y^2x, z^2)}$ sobre la superficie intersección del plano $\boldsymbol{x+y+z=1}$ dentro el cilindro $\boldsymbol{x^2+z^2=9}$.**

(b) **¿Hay alguna variación si el campo fuese $\boldsymbol{\widetilde{F}(x,y,z) = (x^2z, -y^2x, z^2)}$?**

Solución (a)

Paso 1: Planteamiento

Para hallar una parametrización de la superficie dada pensemos en que se trata de tomar puntos en el plano dado cuando lo cortamos con el cilindro de eje $z$centrado en el origen y radio 3, por tanto podemos expresar como :

$$\varphi(s,t) = (s\cos t, s\sin t, 1 - s\cos t - s\sin t) \quad s\in[0,3] \quad t\in[0,2\pi].$$

Paso 2: Desarrollo

De modo que el vector normal a la superficie viene dado por:

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos t & \sin t & -\cos t - \sin t \\ -s\sin t & s\cos t & s(\sin t - \cos t) \end{vmatrix} = (s, s, s)$$

Por otra parte, calculamos el rotacional de F:

$$rot(F) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (0, x^2, y^2)$$

Ya podemos calcular la integral sobre la superficie realizando el producto escalar del rotacional del campo evaluado sobre la superficie y el vector normal, para obtener el flujo pedido:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (0, s^2\cos^2 t, s^2 \sin^2 t) \cdot (s, s, s)\, ds\, dt = \int_0^{2\pi} \int_0^3 s^3\, ds\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{s^4}{4}\right]_0^3 dt = \frac{3^4\pi}{2}$$

Paso 3: Conclusión

Notar que la elección de la orientación positiva de la superficie nos proporciona también un valor positivo para el flujo pedido.

Es muy importante plantear este problema usando la parametrización natural de la superficie en coordenadas cartesianas y observar el modo de obtener los cálculos, ya que de esta forma se afianzan los procedimientos.

Solución (b) Si el campo viene dado por $\boldsymbol{\widetilde{F}(x,y,z) = (x^2z, -y^2x, z^2)}$ el rotacional cambia como puede observarse mediante su cálculo:

$$rot(\widetilde{F}) = (0, x^2, -y^2)$$

Por lo que razonando como en el caso anterior calculamos el flujo:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (0, s^2\cos^2 t, -s^2 \sin^2 t) \cdot (s, s, s)\, ds\, dt = \int_0^{2\pi} \int_0^3 s^3(cos^2t - sin^2t)\, ds\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 s^3 \cos 2t\, ds\, dt = \left[\frac{s^4}{4}\right]_0^3 \underbrace{\left[-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi}}_{=0} = 0$$

Notando que como cambiamos el campo vectorial, cambia el vector rotacional y la integral de flujo resulta nula en este caso.

Problema 3: Verifica el teorema de Stokes para el campo vectorial $\boldsymbol{F(x,y,z)=(x^2,z^2,y^2)}$ y la superficie del paraboloide $\boldsymbol{z=1-x^2-y^2}$ que queda por arriba del plano XY.

Solución

$\boxed{\textbf{Paso 1: Planteamiento}}$

Se trata en este problema de verificar que se cumple esta igualdad:

$$\int\int_M rot(F)dS = \oint_{\partial M} F dr$$

Para ello calcularemos en primer lugar la integral del campo rotacional sobre la superficie para seguidamente obtener el valor de la integral de linea y ver que ambos valores coinciden.

$\boxed{\textbf{Paso 2: Desarrollo}}$

Por una parte, calculamos el rotacional de F:

$$rot(F) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z^2 & y^2 \end{vmatrix} = (2y-2z,0,0)$$

Por otra parte, parametrizamos el paraboloide, M, y calculamos su vector normal $\overrightarrow{n}$:

$$\varphi(s,t) = (s,t,1-s^2-t^2) \quad 0 \le s^2+t^2 \le 1$$

Sea T el círculo descrito anteriormente donde varían los parámetros s y t.

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2s \\ 0 & 1 & -2t \end{vmatrix} = (2s,2t,1)$$

Calculamos la parte izquierda de la igualdad que proporciona el torema de Stokes, es decir el flujo del rotacional del campo F, para ello en primer lugar se evalúa el campo vectorial sobre la superficie:

$$rot(F(\varphi(s,t)) = (2(t-1+s^2+t^2),0,0)$$

$$\int\int_M rot(F)dS = \int\int_T (2(t-1+s^2+t^2),0,0)\cdot(2s,2t,1)\,ds\,dt = 4\int\int_T (s(t-1+s^2+t^2)\,ds\,dt = *$$

Pasamos a polares para calcular la integral, ya que el subconjunto T en estas coordenadas es rectangular, haciendo $s=r\cos\theta$ y $t=r\sin\theta$, con $r\in[0,1]$ y $\theta\in[0,2\pi]$ y sin olvidar el jacobiano de la transformación:

$$* = 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2cos(\theta)(rsin(\theta)-1+r^2)\,drd\theta = 0$$

La integral anterior es inmediata y resulta nula. Por otra parte, calculamos la parte derecha de la igualdad que establece el teorema de Stokes, se trata de calcular una integral de línea. la curva es una circunferencia $\alpha(t)=(\cos t,\sin t,0)$, $t\in[0,2\pi]$. Su vector tangente

$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. Por lo tanto evaluando el campo vectorial sobre ella y multiplicando escalarmente por el vector tangente a la curva tenemos:

$$\oint_{\partial M} F dr = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_0^{2\pi} (cos^2 t, 0, \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -\sin t \cos^2 t\, dt = \left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0$$

Paso 3: Conclusión

Y por lo tanto, podemos concluir que se verifica el Teorema de Stokes ya que se tenían todas las hipotesis para aplicarlo al tratarse de uncampo continuamente diferenciable en todo el espacio y la superficie está acotada por una curva cerrada. En estas condiciones resultará útil aplicar el teorema cuando una de las dos partes resulte más secilla que la otra.

Además es importante señalar que hubiesemos podido consideara cualquier otra superficie acotada por la misma curva cerrada $x^2 + y^2 = 1$, en $z = 0$ y el resultado no hubiese variado. Por lo que se deja al lector considerar otra superficie acotada por esta curva y verifiar el resultado.

5. Cierre

En esta tema se ahonda en la propiedad que caracteriza a la integración como herramienta de medida. Calculamos ahora área de superficies. Se profundiza en la resolución de integrales de superficies sobre campos escalares y vectoriales aplicando diferentes resultados teóricos. Además, se ponen en práctica conocimientos sobre parametrización de superficies y cambios de variable vistos en temas anteriores como el de integración múltiple y la integración sobre curvas, relacionando diferentes conceptos de estos capítulos, por ejemplo mediante el Teorema de Stokes.

6. Bibliografía

- Frank Ayres, Jr., Elliot Mendelson. Cálculo diferencial e integral. Editorial McGraww-Hill tercera edición. ISBN: 84-7615-560-3.
- J. Bonet, A. Peris, V. Calvo, F. Ródenas. Integració múltiple i vectorial. Editorial UPV. ISBN: 84-8363-048-6.
- James Stewart. Cálculo de varias variables. Conceptos y contextos, 4e. ISBN: 607-481-238-1.
- Teoría y problemas de análisis vectorial (Néstor Javier Thome Coppo), ISBN: 9788483632291
- Cálculo vectorial (Jerrold E. Marsden)
- Calculus. Volumen II, Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades (Apostol, Tom M.)