



Guía metodológica para el trazado del Círculo de Mohr de tensiones

Apellidos, nombre	Lapuebla Ferri, Andrés (anlafer0@mes.upv.es) Espinós Capilla, Ana (aespinos@mes.upv.es) Jiménez Mocholí, Antonio José (ajimene@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales Universitat Politècnica de València

1 Resumen de las ideas clave

El Círculo de Mohr, método desarrollado por el ingeniero alemán Charles Otto Mohr a finales del siglo XIX, constituye una herramienta de gran interés para la resolución de problemas en el ámbito de la Resistencia de Materiales o la Mecánica de Suelos.

Este documento constituye una guía paso a paso para la construcción del Círculo de Mohr de tensiones y la obtención de información a partir del mismo. Al final del documento se resuelve un ejemplo para facilitar la asimilación de la metodología.

Palabras clave: Círculo de Mohr, Tensiones, Elasticidad.

2 Introducción

Dado un medio elástico en un dominio bidimensional, se considera la **matriz de tensiones de Cauchy** $[\sigma]_{xy}$ en un punto P, referida a un sistema cartesiano de referencia **xy** (Figura 1a). Esta matriz se corresponde biunívocamente con un **estado tensional** en el punto P. El estado tensional se obtiene haciendo pasar en la proximidad de P cuatro planos ortogonales a los ejes **x** e **y**, definiendo un elemento diferencial plano. En el punto P, asociado a cada uno de tales planos, existe un **vector tensión**, cuyas **componentes intrínsecas normal** (σ) y **tangencial** (τ) se representan en las caras del elemento (Figura 1b).

Si por el punto P se hace pasar un plano Π cualquiera, caracterizado a través de su **vector normal** \vec{n}_π , en P aparece un nuevo vector tensión \vec{t}_P^π asociado al plano Π , cuyas coordenadas cartesianas son (t_x, t_y) . Sin embargo, la expresión del vector tensión en función de sus componentes intrínsecas (σ_n, τ_n) reviste un mayor interés en el ámbito de la ingeniería (Figura 1c).

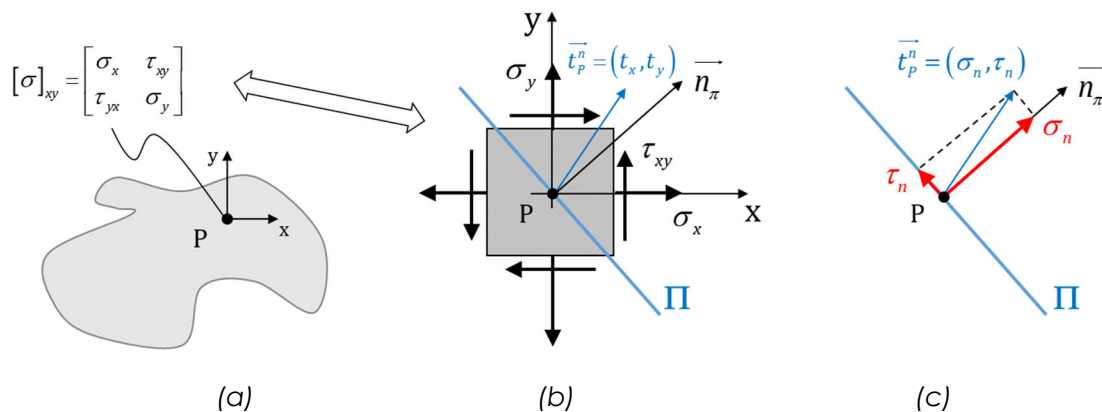


Figura 1. Planteamiento del problema.

Considerando este punto de partida, el **Círculo de Mohr de tensiones** es una herramienta que permite la representación gráfica del infinito conjunto de vectores tensión $\vec{t}_P^\pi = (\sigma_n, \tau_n)$ en el punto P, expresados a partir de sus componentes intrínsecas referidas a una **orientación** \vec{n}_π (el vector normal al plano Π).

3 Objetivos

Los objetivos buscados en esta guía metodológica son de tipo procedimental. Tras la lectura y la asimilación de los contenidos de este documento se podrá:

- Trazar el Círculo de Mohr de tensiones a partir de un estado tensional plano.
- Interpretar correctamente la información (tensiones normales, tensiones tangenciales y orientaciones) obtenidas con el Círculo de Mohr.

4 Desarrollo

Para la construcción del Círculo de Mohr, se supone conocido el estado tensional en un punto P (véase la Figura 1b). La metodología que se plantea es la siguiente:

1. Disposición de los ejes $\sigma_n - \tau_n$.
2. Ubicación de los puntos de referencia.
3. Cálculo del centro y del radio.
4. Trazado del círculo.
5. Cálculo de las tensiones principales.
6. Orientación de las direcciones principales de tensión.
7. Orientación de las direcciones de tensión tangencial máxima.
8. Lectura de un vector tensión en cualquier orientación.

4.1 Disposición de los ejes $\sigma_n - \tau_n$

El Círculo de Mohr se traza en un sistema de referencia cuyos ejes de abscisas y de ordenadas representan, respectivamente, las tensiones normales (σ_n) y las tensiones tangenciales (τ_n) (consultar la Figura 2 y siguientes).

4.2 Ubicación de los puntos de referencia

Los primeros puntos que definen el Círculo de Mohr son los denominados **puntos de referencia**. Se trata de dos pares de componentes intrínsecas (σ_n, τ_n) que corresponden a dos vectores tensión en planos conocidos (y sus respectivas orientaciones \vec{n}_n) como por ejemplo, **x-y** en la Figura 1b.

Para situar estos puntos sobre el sistema de referencia de Mohr, es necesario tener presente el siguiente **criterio de signos**:

- Las tensiones normales σ_n son positivas cuando se dirigen hacia fuera de las caras (denotan *tracción*).
- Las tensiones tangenciales τ_n son positivas cuando tienden a hacer girar el elemento en sentido horario.

Para el estado tensional mostrado en la Figura 1b, las componentes intrínsecas del vector tensión asociado a la cara de la derecha (perpendicular al eje **x**) corresponden al **punto x** ($+\sigma_x, -\tau_{xy}$) del gráfico. Las componentes intrínsecas del vector tensión asociado a la cara superior (perpendicular al eje **y**) se representan en el gráfico por el **punto y** ($+\sigma_y, +\tau_{xy}$).

Los puntos **x** e **y** determinan los extremos de una diagonal del Círculo de Mohr (Figura 2). Nótese que los vectores tensión (los puntos del Círculo de Mohr) se denotan como el vector normal al plano al que se refieren.

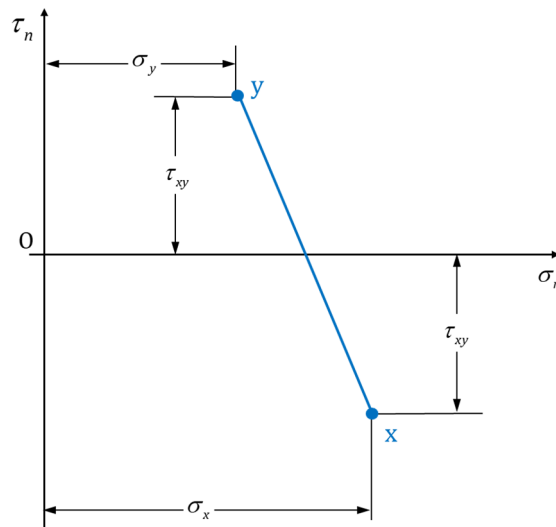


Figura 2. Puntos de referencia **x** e **y** en el sistema $\sigma_n - \tau_n$.

El criterio de signos descrito, empleado para situar puntos en el Círculo de Mohr, difiere del que se usa para la matriz de tensiones de Cauchy.

El criterio de Cauchy se basa en observar las componentes intrínsecas del vector tensión en las caras vistas del estado tensional (aquellas cuyo vector normal exterior lleva sentido positivo según el sistema de ejes coordenados). En la Figura 3, las caras vistas son la cara de la derecha (cuyo vector normal es el semieje positivo **x**) y la cara superior (cuyo vector normal es el semieje positivo **y**). Según el criterio de Cauchy, tanto las tensiones normales σ_n como las tensiones tangenciales τ_n son positivas si, estando en una cara vista, su sentido es positivo según el eje coordenado al que son paralelas.

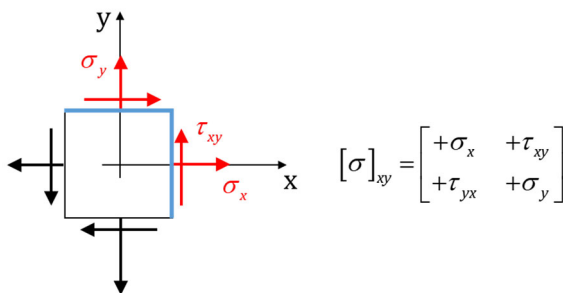


Figura 3. Caras vistas en un estado tensional y matriz de tensiones de Cauchy.

4.3 Cálculo del centro y del radio

El centro **C** del Círculo de Mohr se sitúa en la intersección de la diagonal que une los puntos **x** e **y** con el eje de abscisas σ_n , luego la distancia \overline{OC} vale:

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

El radio **R** del círculo se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado en la Figura 4.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

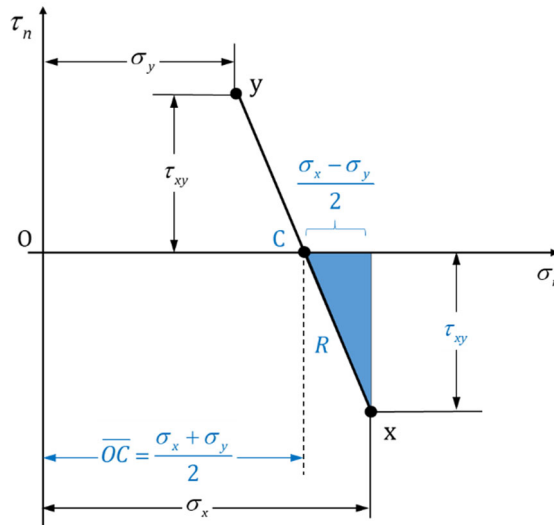


Figura 4. Centro y radio del Círculo de Mohr.

4.4 Trazado del círculo

A partir del centro y del radio, es posible trazar gráficamente el Círculo de Mohr (en concreto, la circunferencia que lo constituye). Para ello, con la ayuda de un compás, se hace centro en C y se abre una cantidad igual al radio **R** (Figura 5).

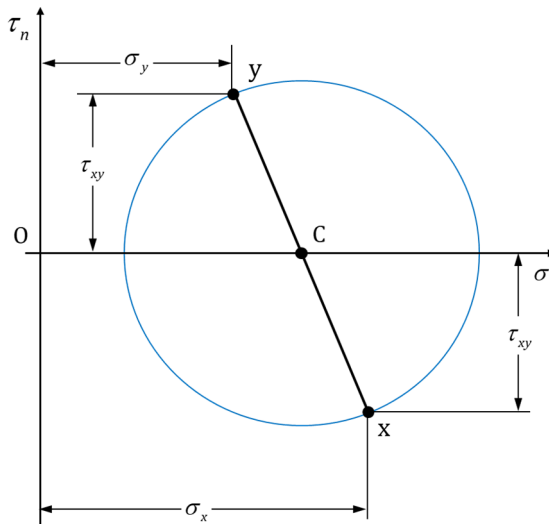


Figura 5. Trazado del Círculo de Mohr.

Cada uno de los infinitos puntos de la circunferencia representa un vector tensión $\vec{t}_P = (\sigma_n, \tau_n)$ en el punto P, referido a un plano cuyo vector normal es \vec{n}_P .

4.5 Cálculo de las tensiones principales

Los puntos de intersección del Círculo de Mohr con el eje de abscisas son puntos de tensión tangencial nula, luego corresponden a las **tensiones principales** σ_1 y

σ_2 en el punto P (Figura 6). Estas tensiones se sitúan en los extremos izquierdo y derecho del círculo, y pueden calcularse según:

$$\sigma_1 = \overline{OC} + R \quad \sigma_2 = \overline{OC} - R$$

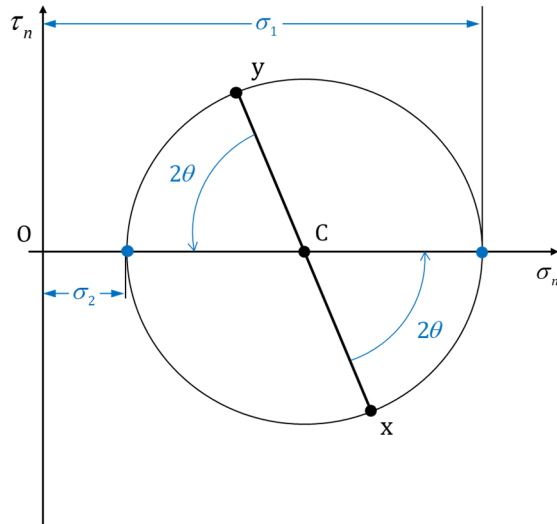


Figura 6. Tensiones principales.

4.6 Orientación de las direcciones principales de tensión

En las figuras 6 y 7 se observa que las orientaciones de estas direcciones principales se pueden obtener a partir del Círculo de Mohr, girando un ángulo 2θ desde el eje x (para obtener la dirección principal 1) o, alternativamente, desde el eje y (para obtener la dirección principal 2).

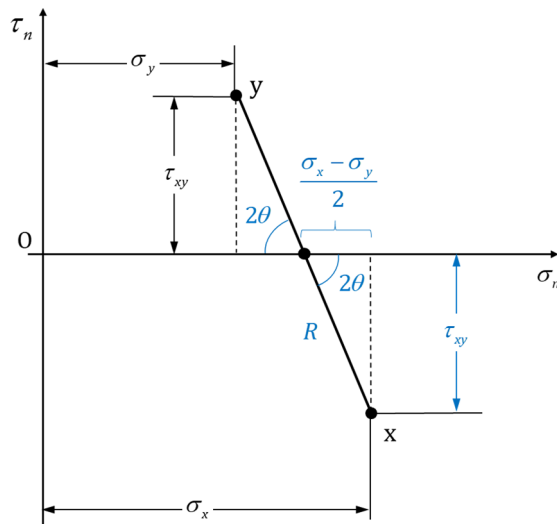


Figura 7. Ángulo 2θ entre los ejes de referencia y las direcciones principales.

En la realidad, el ángulo físico a girar será **la mitad** del ángulo girado en el círculo:

$$\tan 2\theta = \left| \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \right| \rightarrow \theta = \frac{1}{2} \cdot \arctg \left(\left| \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \right| \right)$$

4.7 Orientación de las direcciones de $\tau_{m\acute{a}x}$

Como se puede ver en la Figura 8, las direcciones (o planos) de tensión tangencial máxima se sitúan en los puntos superior e inferior sobre el Círculo de Mohr. El valor de la tensión tangencial en estas posiciones es igual al radio R del círculo, y el valor de la tensión normal coincide con la distancia \overline{OC} . El ángulo a girar desde las direcciones de referencia es 2γ o $2\gamma'$.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \pm R$$

$$\sigma_n|_{\tau_{m\acute{a}x}} = \overline{OC}$$

$$2\gamma \text{ (o } 2\gamma') = 2\theta \mp 90^\circ$$

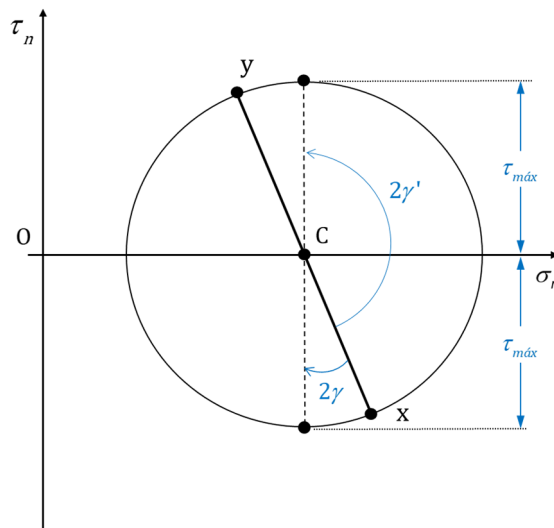


Figura 8. Planos de tensión tangencial máxima.

4.8 Lectura de un vector tensión en cualquier orientación

A partir del Círculo de Mohr, es posible obtener el vector tensión $\overline{t}_P = (\sigma_n, \tau_n)$ en el punto P respecto de una dirección determinada \mathbf{x}' , como la que se obtiene al girar un ángulo β desde el eje \mathbf{x} , en sentido antihorario (Figura 9).

En la Figura 9 se puede observar asimismo que:

- El ángulo físico a girar en la realidad (β) es la mitad del que se gira sobre el Círculo de Mohr (2β), aunque con el mismo sentido.
- Para obtener las componentes intrínsecas del vector tensión asociado a la dirección \mathbf{x}' mediante el Círculo de Mohr, hay que girar un ángulo 2β en sentido antihorario desde \mathbf{x} , mientras que para obtener las correspondientes a la dirección \mathbf{y}' el ángulo a girar es de $2\beta + 180^\circ$.

Aplicando relaciones trigonométricas, las componentes intrínsecas en las direcciones \mathbf{x}' - \mathbf{y}' son:

$$\sigma_{x'} = \overline{OC} + R \cdot \cos(2\beta - 2\theta)$$

$$\sigma_{y'} = \overline{OC} - R \cdot \cos(2\beta - 2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = R \cdot \text{sen}(2\beta - 2\theta)$$

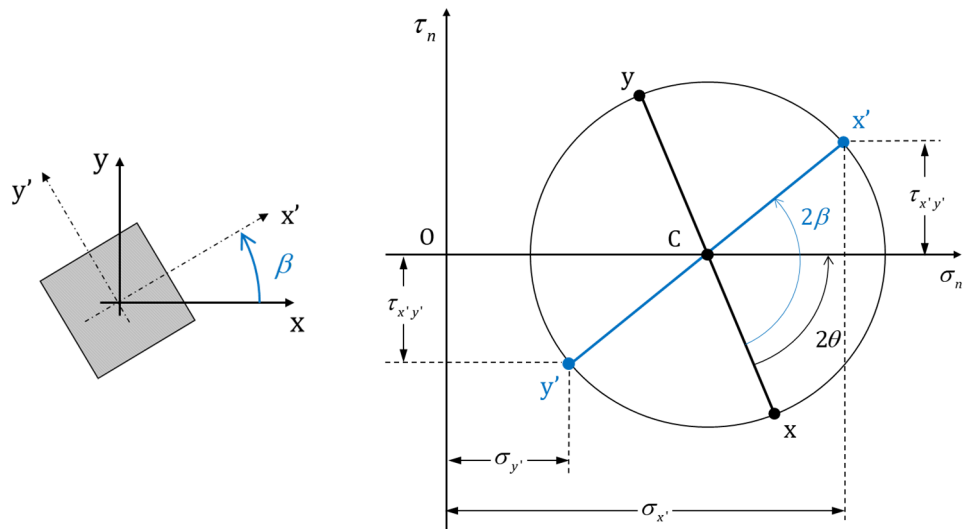


Figura 9. Orientación de la dirección buscada (\mathbf{x}') respecto de la dirección de referencia (\mathbf{x}).

Finalmente, atendiendo a los signos de las tensiones normales y tangenciales en el Círculo de Mohr, es posible representar el estado tensional referido a los ejes \mathbf{x}' - \mathbf{y}' . En este caso, la tensión $\tau_{x'y'}$ tiene una ordenada positiva en el Círculo de Mohr, luego en la representación del estado tensional tenderá a girar el elemento en sentido horario. En consecuencia, atendiendo al criterio de signos de Cauchy, la entrada correspondiente en la matriz de tensiones será negativa, (Figura 10).

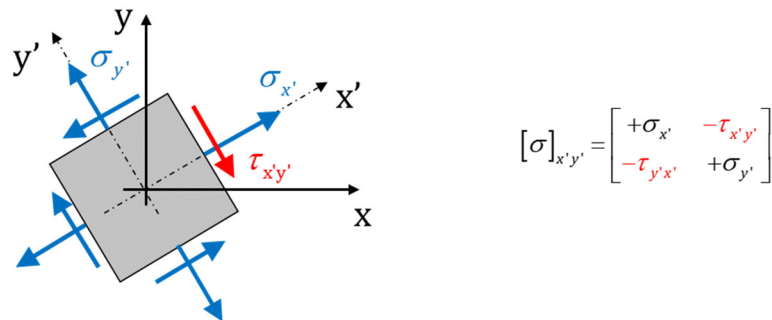


Figura 10. Estado tensional y matriz de tensiones referida a los ejes \mathbf{x}' - \mathbf{y}' .

5 Ejemplo resuelto

A partir del estado tensional en un punto P de un sólido elástico (Figura 11) se pide construir el Círculo de Mohr de tensiones, determinando los valores más representativos del mismo.

Se pide además representar el estado tensional referido a los ejes \mathbf{x}' - \mathbf{y}' indicados en la Figura 11. Obtener la matriz de tensiones de Cauchy referida a dichos ejes.

Por último, ¿cuál es el valor de la tensión tangencial máxima y en qué orientaciones tiene lugar?

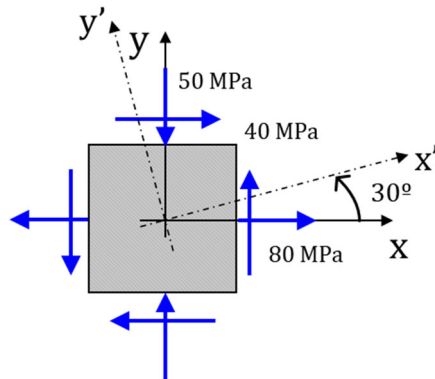


Figura 11. Estado tensional de partida para el ejemplo resuelto.

5.1 Solución

Se sitúan los puntos de referencia en un gráfico $\sigma_n - \tau_n$: $x(80, -40)$ e $y(-50, +40)$. Estos puntos forman una diagonal del Círculo de Mohr (Figura 12), cuya intersección con el eje de abscisas determina el centro del círculo (punto C). Haciendo centro en este punto, y con una apertura del compás igual a la mitad de la diagonal (es decir, el radio R), se traza el Círculo de Mohr.

Los valores de distancia \overline{OC} al centro y el radio R son:

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 - 50}{2} = 15 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \sqrt{\left(\frac{80 + 50}{2}\right)^2 + (40)^2} = 76.32 \text{ MPa}$$

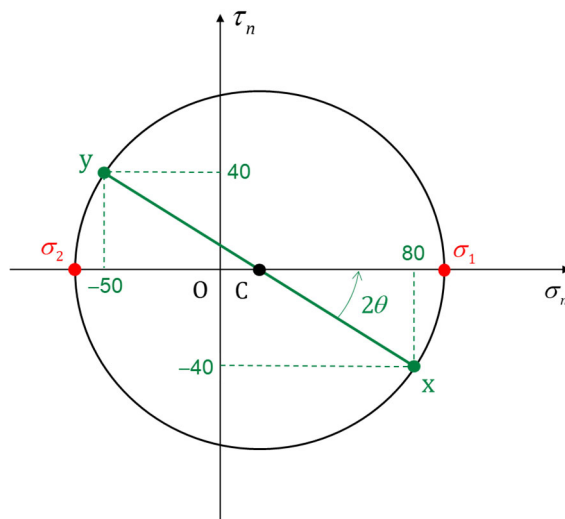


Figura 12. Posición de las direcciones x - y sobre el círculo de Mohr y obtención de las tensiones y direcciones principales.

De esta forma, las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = \overline{OC} + R = 91.32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \overline{OC} - R = -61.32 \text{ MPa}$$

El ángulo de orientación de la dirección principal **1** respecto del eje **x** (medido en sentido antihorario) es (Figura 13):

$$2\theta = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}\right|\right) = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{40}{\frac{80 + 50}{2}}\right|\right) = 31.61^\circ \rightarrow \theta = 15.8^\circ$$

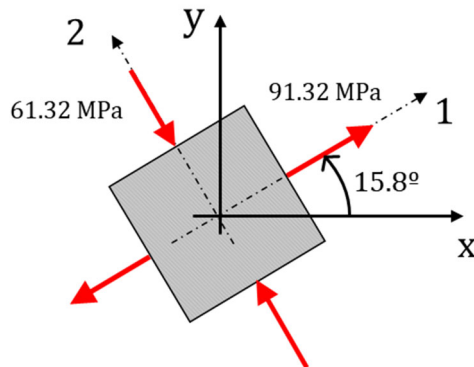


Figura 13. Estado tensional girado, orientado según las direcciones principales de tensión.

Para obtener las componentes intrínsecas del estado tensional referido a los ejes **x'-y'**, se sitúa dicho punto sobre el Círculo de Mohr, girando un ángulo $2\beta = 2 \cdot 30 = 60^\circ$ desde el eje **x**, según se indica en la Figura 14.

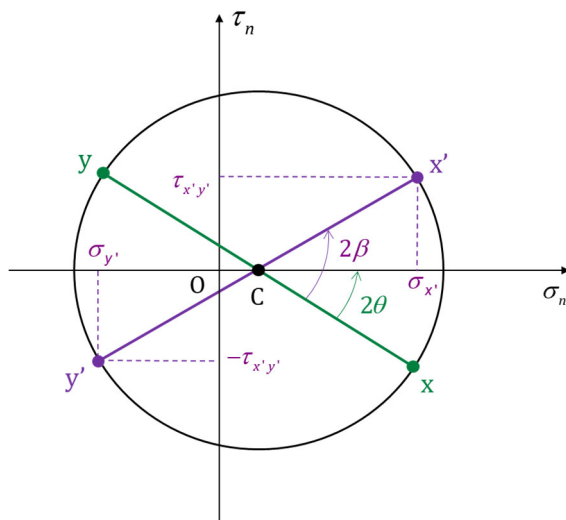


Figura 14. Posición de las direcciones **x'-y'** sobre el círculo de Mohr y obtención de sus componentes intrínsecas.

Los valores de las proyecciones de este punto en los ejes de abscisas σ_n y de ordenadas τ_n se pueden obtener mediante relaciones trigonométricas:

$$\sigma_{x'} = \overline{OC} + R \cdot \cos(2\beta - 2\theta) = 15 + 76.32 \cdot \cos(60^\circ - 31.61^\circ) = 82.14 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = \overline{OC} - R \cdot \cos(2\beta - 2\theta) = 15 - 76.32 \cdot \cos(60^\circ - 31.61^\circ) = -52.14 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = R \cdot \operatorname{sen}(2\beta - 2\theta) = 76.32 \cdot \operatorname{sen}(60^\circ - 31.61^\circ) = 36.29 \text{ MPa}$$

El estado tensional y la matriz de tensiones respecto a los ejes **x'-y'** se ilustra en la Figura 15 (para la matriz se ha seguido el criterio de signos de Cauchy).

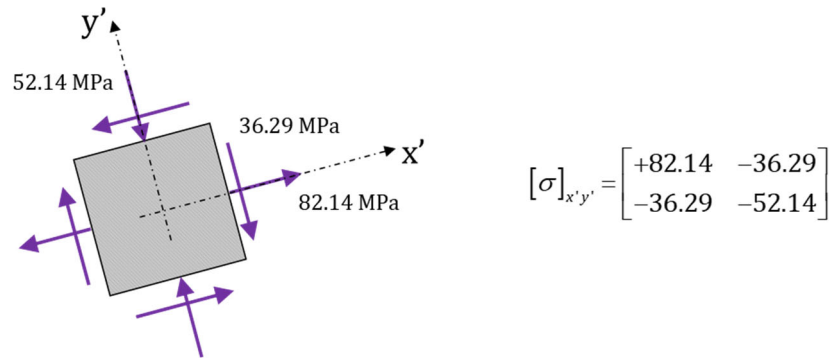


Figura 15. Estado tensional y matriz de tensiones respecto a los ejes $x'-y'$.

Observando el Círculo de Mohr, las componentes intrínsecas correspondientes a la máxima tensión tangencial que puede darse en el entorno del punto P son:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \pm R = \pm 76.32 \text{ MPa} \quad \sigma_n|_{\tau_{m\acute{a}x}} = \overline{OC} = 15 \text{ MPa}$$

y sus orientaciones respecto al eje x (Figura 16):

$$2\gamma = 2\theta - 90^\circ = 31.61^\circ - 90^\circ = -58.39^\circ \rightarrow \gamma = -29.19^\circ \text{ (giro horario)}$$

$$2\gamma' = 2\theta + 90^\circ = 31.61^\circ + 90^\circ = 121.61^\circ \rightarrow \gamma' = 60.91^\circ \text{ (giro antihorario)}$$

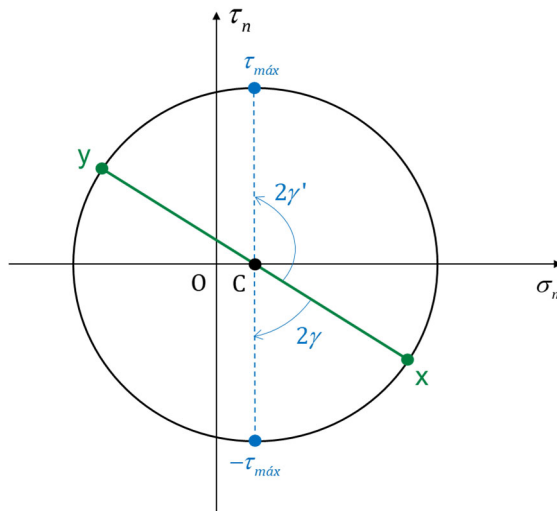


Figura 16. Orientaciones de tensión tangencial máxima sobre el Círculo de Mohr y ángulos respecto de la dirección x .

6 Bibliografía

- Gere, J.M. y Timoshenko, S. (2009). Resistencia de Materiales. Ed. Paraninfo (5ª ed.)
- Jiménez Mocholí, A. J. e Ivorra Chorro, S. (2006). Elasticidad y Resistencia de Materiales. Ejercicios resueltos. Editorial Universitat Politècnica de València, ref. 4028.
- Jiménez Mocholí, A. J., Lapuebla Ferri, A., Romero García, M. e Ivorra Chorro, S. (2015). Elasticidad y Resistencia de Materiales: apuntes de clase para las titulaciones de grado en ingeniería. Editorial Universitat Politècnica de València, ref. 947.
- Ortiz Berrocal, L. (1998). Elasticidad. Ed. McGraw-Hill/Interamericana de España (3ª ed.).