Esquema de derivación consistente de prioridades en un marco de consenso

Apellidos, nombre	Benítez, Julio[1] (jbenitez@upv.es) Carpitella, Silvia[2] (silvia.carpitella@unipa.it) Izquierdo Sebastián, Joaquín[1] (jizquier@upv.es)
Departamento	[1] Departamento de Matemática Aplicada [2] Dipartimento dell'Innovazione Industriale e Digitale
Centro	[1] Universitat Politècnica de València [2] Università degli Studi di Palermo

1 Resumen

La toma de decisiones impregna la actividad humana. Con frecuencia, la decisión no es simple porque involucra elementos cualitativos, subjetivos, intangibles. En diversos métodos de decisión multi-criterio, los elementos protagonistas de tales procesos son comparados por pares, y tales comparaciones se utilizan para construir una matriz de comparaciones, de cuyo estudio emerge la decisión. En AHP (Analytic Hierarchy Process), por ejemplo, las prioridades se obtienen vía el vector propio de Perron de tales matrices. Para que la decisión sea adecuada, no obstante, las comparaciones deben ser aceptablemente consistentes. Pero cuando se comparan muchos elementos, la consistencia puede flaquear, algo inherente a la condición humana. En tales casos, mecanismos adecuados deben poder mejorar la consistencia, obviamente, alterando algunos de los juicios emitidos. Por ejemplo, se puede mejorar la consistencia mediante técnicas de proyección en espacios vectoriales. Cabe, entonces, la posibilidad de que quien emitió tales juicios no esté de acuerdo con algunos cambios. Procede llevar a cabo una negociación que equilibre el juicio emitido con la necesidad de alcanzar cierta consistencia. En el trabajo académico que desarrollan en la asignatura Matemáticas II de la doble titulación TELECO+ADE, los alumnos utilizan estas ideas. En este artículo presentamos un procedimiento de negociación que sea amigable para el actor que emite los juicios. Para ello, utilizamos una técnica algebraica de análisis de sensibilidad que permite identificar los elementos de juicio más susceptibles de cambio. Esto, a priori, será más asumible para el actor, y se espera se muestre más favorable a aceptar los cambios que se le proponen.

2 Introducción

Tomar decisiones acertadas y efectivas es crucial en los procesos de optimización del mundo real que involucran variables difíciles de cuantificar. En este caso, la toma de decisiones es comúnmente impulsada por la experiencia personal de un actor o, a menudo, por la participación consensuada de un grupo de tomadores de decisiones [Safarzadeh et al., 2018]. Los individuos y las empresas confían en los métodos de toma de decisiones multi-criterio (MCDM, por sus siglas en inglés) para lograr soluciones inteligentes y efectivas [Ishizaka y Siraj, 2018] para muchos de sus problemas. La literatura ofrece muchos ejemplos [Carpitella et al., 2018a; Yu et al.; 2018; Zareie et al., 2018] que demuestran la aplicación exitosa, también bajo planteamientos híbridos [Carpitella et al., 2018b], de métodos MCDM para resolver una amplia variedad de problemas de optimización multi-criterio [Phudphad et al., 2017; Bertolín y Loli, 2018; Carli et al., 2018; Huang et al., 2018].

Diversas técnicas de toma de decisiones se basan en comparaciones por pares (CPs). Tradicionalmente, las CPs son provistas por expertos. Debido a las limitaciones cognitivas humanas y al número de elementos comparados, el número de elementos a comparar debe ser pequeño. Sin embargo, en la era de la información actual, la información recopilada de las bases de datos e Internet también es susceptible de ser manejada como comparaciones por pares, y estas colecciones pueden ser enormes (ver [Bozóki et al., 2016; Gu et al., 2017; Leyva-López et al., 2017], entre otros). En general, en problemas muy complejos, el número de elementos que se compararán puede ser muy grande. Uno de los problemas que limitan la aplicabilidad de la CP a problemas de decisión a gran escala es la llamada maldición de la dimensionalidad, es decir, muchas CPs deben ser emitidas o deben construirse a partir de un cuerpo de información.

Como resultado, la toma de decisiones está plagada de dificultades por varias razones. Entre ellos en este artículo destacamos la subjetividad y la negociación.

Subjetividad. La capacidad de hacer un uso sensato de la percepción subjetiva de los expertos es crucial.

Negociación. Intercambiar retroalimentación con expertos [Tian et al., 2018] para garantizar que los valores aceptables y consistentes estén en línea con la percepción real de los fenómenos por parte de los expertos es esencial. En [Pérez et al., 2018] se discute un proceso de consenso como un problema de negociación, en el cual se facilita la discusión y la deliberación entre los miembros del grupo para compartir opiniones y acordar una decisión final.

Las CPs se crean preguntando a expertos o partes interesadas involucradas en el problema de la toma de decisiones acerca de cuánta importancia tiene un elemento cuando se compara con otro con respecto a los intereses o preferencias de los encuestados. Estos valores pueden determinarse utilizando varias escalas, entre las cuales la más utilizada es la escala de nueve puntos de Saaty [1977], donde el rango 1-9 se mueve de igual importancia a extrema importancia. Al realizar dicha comparación se obtiene una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$, cuyas entradas (positivas) deben cumplir con dos propiedades importantes, a saber, $a_{ii} = 1$ (homogeneidad) y $a_{ji} = 1/a_{ji}$ (reciprocidad), $i, j = 1, \ldots, n$. Se la denomina matriz de comparación por pares (MCP). El problema para la matriz A es el de producir para los n elementos bajo comparación, un conjunto de valores numéricos $w_1, \ldots, w_n$ que reflejen las prioridades entre los elementos comparados de acuerdo con los indicados juicios. Si todos los juicios son completamente consistentes, las relaciones entre los pesos w_i y los juicios a_{ij} están simplemente dados por $w_i/w_j = a_{ij}$ ($i, j = 1, \ldots, n$), y se dice que la matriz A es consistente. El teorema 1 en [Benítez et al., 2012a] proporciona condiciones equivalentes para que una matriz A sea consistente.

Para una MCP consistente, el valor propio principal y el vector propio principal (Perron) proporcionan información para tratar decisiones complejas: el vector propio normalizado de Perron proporciona el vector de prioridad buscado [Saaty 2008]. Como cualquier matriz consistente tiene rango uno [Benítez et al., 2012a], cualquiera de sus filas normalizadas y, en particular, el vector normalizado de las medias geométricas de las filas, también proporciona el vector de prioridad. Teniendo en cuenta la falta natural de consistencia del pensamiento humano, se espera cierto grado de inconsistencia y, como resultado, en general, A no es consistente. Como se muestra en [Saaty 2003], el vector propio es necesario para obtener las prioridades. La hipótesis de que las estimaciones de estos valores son pequeñas perturbaciones de los valores "correctos" garantiza una pequeña perturbación de los valores propios (ver, por ejemplo, [Stewart 2001]). Para matrices no consistentes, el problema a resolver es el problema del valor propio $A\mathbf{w} = \lambda_{\text{máx}}\mathbf{w}$, donde $\lambda_{\text{máx}}$ es el valor propio más grande y único de A que proporciona el vector propio de Perron, $\mathbf{w}$, una estimación del vector de prioridad. Como medida de inconsistencia, Saaty utiliza el llamado índice de consistencia $CI = (\lambda_{\text{máx}} - n)/(n - 1)$ y la relación de consistencia $CR = CI/RI$, donde RI es el llamado índice de consistencia promedio [Saaty 2008]. Si $CR < 0.1$, la estimación es aceptada; de lo contrario, se solicita una nueva matriz de comparación hasta que $CR < 0.1$.

La consistencia es crucial en la toma de decisiones, ya que no sería prudente tomar decisiones basadas en juicios que puedan parecer producidos al azar. Cuando la consistencia de una matriz no es satisfactoria, es necesario mejorarla. Finan y Hurley [1997] declararon que la manipulación artificial adicional para aumentar la consistencia mejorará, en promedio, la confiabilidad del análisis. Si la consistencia es inaceptable, debe, pues, mejorarse. Se necesitan herramientas para mejorar la consistencia [Franek y Kresta 2014].

En la literatura se pueden encontrar varias alternativas para mejorar la consistencia, principalmente basadas en la optimización. Aquí utilizamos una técnica de linealización [Benítez et al. 2011a] que proporciona la matriz consistente más cercana a una matriz no consistente dada, mediante el uso de una proyección ortogonal en un determinado espacio lineal. Este método proporciona una forma directa de lograr consistencia, en contraste con los métodos que se basan en la optimización no lineal, que son iterativos por naturaleza.

En [Benítez et al., 2013] se demuestra que, para matrices recíprocas, esta proyección se puede obtener con gran simplicidad utilizando la fórmula

$$p_n(L(A)) = \frac{1}{n}\left[\left(L(A)U_n\right) - \left(L(A)U_n\right)^T\right] , \qquad (1)$$

donde $U_n = \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$ y $\mathbf{1}_n$ es el vector columna de unos. Dado que esta fórmula solo incluye sumas, la eficiencia computacional está garantizada y la integración en cualquier sistema de apoyo a la decisión, incluidas las hojas de cálculo convencionales, es sencilla.

También, es clave la contribución del experto en todo momento y la consistencia sintética obtenida a través del método de linealización debe, en todo caso, estar sujeta a la aprobación final por parte del experto que emitió las sentencias. Por lo tanto, después de calcular la matriz coherente más cercana dada por el método de linealización, es necesario que el experto pueda modificar la nueva matriz. Siguiendo un procedimiento de feedback, repitiendo ambos pasos, se obtendrá finalmente una matriz que represente un compromiso razonable entre la coherencia y la opinión de expertos.

En [Benítez et al., 2011b] se proporciona un procedimiento básico para modificar una determinada MCP y una herramienta eficiente para hacerlo con un esfuerzo computacional insignificante. En este artículo se desarrolla tal procedimiento

Tras enumerar los objetivos de este artículo, la sección de desarrollo presenta los requisitos para leerlo con aprovechamiento, y pasa directamente a la presentación de un mecanismo para llevar a cabo tal negociación de manera amigable y guiada para el actor. El artículo acaba con un cierre y con la lista de las referencias utilizadas.

3 Objetivos

Tras concluir con la lectura de este documento, serás capaz de:

- Calcular la matriz de sensibilidad de los juicios emitidos frente al forzamiento determinado por la herramienta de consistencia.
- Organizar un proceso de feedback adecuado con el experto que permita llegar al equilibrio buscado entre consistencia y juicio personal del experto.

4 Desarrollo

Para leer este artículo deberás tener nociones de:

Requisitos
1. Conocimientos matriciales básicos.
2. Herramienta de cálculo de valores y vectores propios.
3. Elementos básicos de la comparación por pares de elementos intangibles.

Tabla 1. Requisitos básicos

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO

El diagrama de flujo de la Figura 1 presenta un esquema del proceso de conciliación entre consistencia y juicio experto. Observa que los trapezoides representan entradas o inputs, los rectángulos corresponden a los procedimientos, los rombos representan decisiones sí/no y las figuras redondeadas son las salidas o outputs.

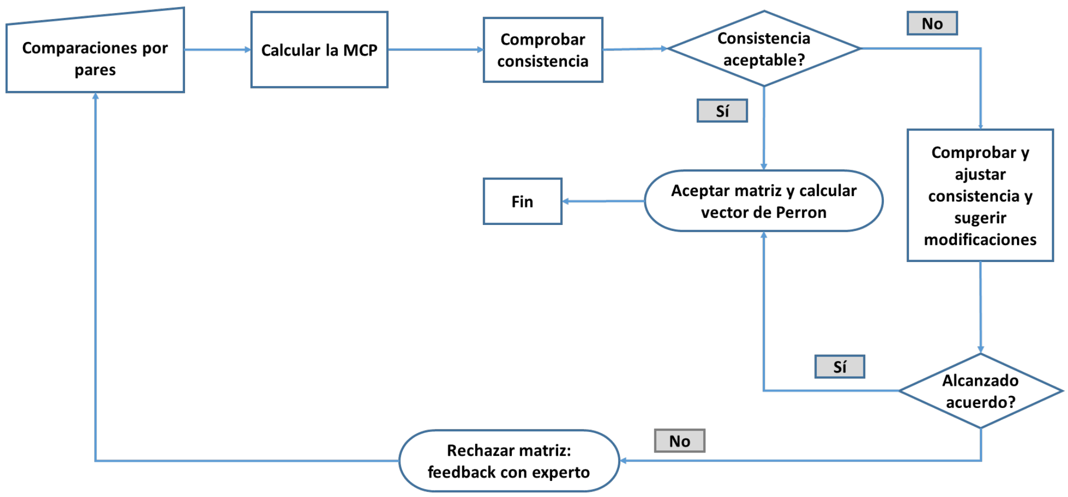

Figura 1. Conciliación entre consistencia y juicio experto

Explicamos ahora este diagrama con detalle.

- Obtención de las comparaciones por pares: La recopilación de juicios de comparación por pares (trapecio superior izquierdo) es el input, e inicia el diagrama.
- Elaboración de la matriz de entrada: Una vez terminado con las CPs, se rellena la matriz relacionada utilizando la escala Saaty (primer rectángulo a la izquierda en la Figura 1).
- Evaluando la consistencia: El siguiente paso (segundo rectángulo) se realizan los cálculos que permiten verificar el nivel de consistencia.
- Valorando si la consistencia es aceptable: Si la consistencia es aceptable (pata inferior del rombo) se valida la matriz y se continúa con los cálculos. De no ser aceptable (pata 'No'), se iniciará una negociación con el tomador de decisiones sobre los valores que podrían ajustarse para obtener una relación de consistencia *CR* dentro del umbral permitido propuesto por Saaty. Este proceso se describe a continuación.

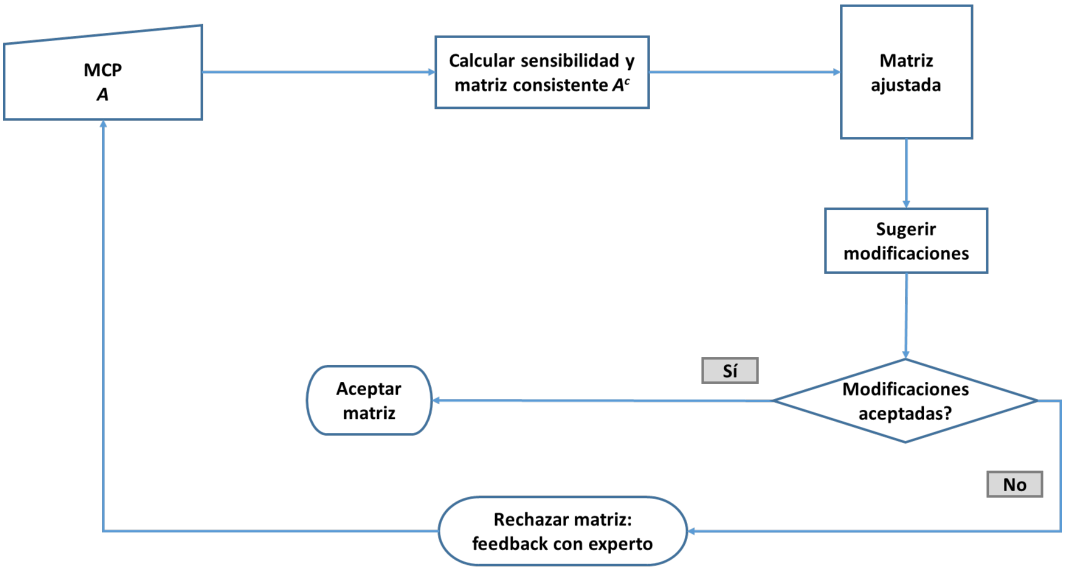

Figura 2. Ajuste de la consistencia y sugerencia de modificaciones

La Figura 2 esquematiza el proceso. Para una matriz de entrada no aceptablemente consistente (rombo), el proceso de negociación se puede resumir mediante los siguientes pasos:

- Calcular sensibilidad y matriz consistente A^c: Incluye dos cálculos:
  - obtener la matriz consistente más cercana mediante la aplicación del proceso de linealización (descrito en la introducción);
  - clasificar los juicios de acuerdo con el mayor impacto en la consistencia, llevando a cabo un análisis de sensibilidad (descrito al final de la presente lista de viñetas). Naturalmente, en la clasificación (que llamaremos clasificación de sensibilidad de ahora en adelante), solo se considerarán los $n\times(n-1)/2$ valores sobre la diagonal principal, teniendo en cuenta la reciprocidad de la matriz.
- Procedimiento matriz ajustada: este procedimiento iterativo se describe en el diagrama de la Figura 3 y se describe brevemente aquí:
  - El proceso comienza con el cálculo de la “matriz ajustada”; es la matriz cuyos elementos, todos menos uno, corresponden a la matriz de entrada y al elemento que expresa el juicio que ocupa la primera posición en la clasificación de sensibilidad se le asigna el valor correspondiente en la matriz consistente más cercana;
  - Sigue calculando la consistencia nuevamente (rombo central en la Figura 3); si la matriz *B* es consistente, el proceso se detiene (pata "Sí" de ese rombo). Si la matriz *B* continúa siendo inconsistente, la iteración consiste en cambiar el elemento correspondiente al juicio que ocupa la segunda posición en la clasificación de sensibilidad con el valor correspondiente en la matriz consistente más cercana;
  - estos pasos anteriores, junto con la actualización de un parámetro de control, se repiten hasta que se garantice la consistencia. La matriz *B* es el output, junto con el parámetro *M*, que es un indicador de la envergadura de la modificación realizada.

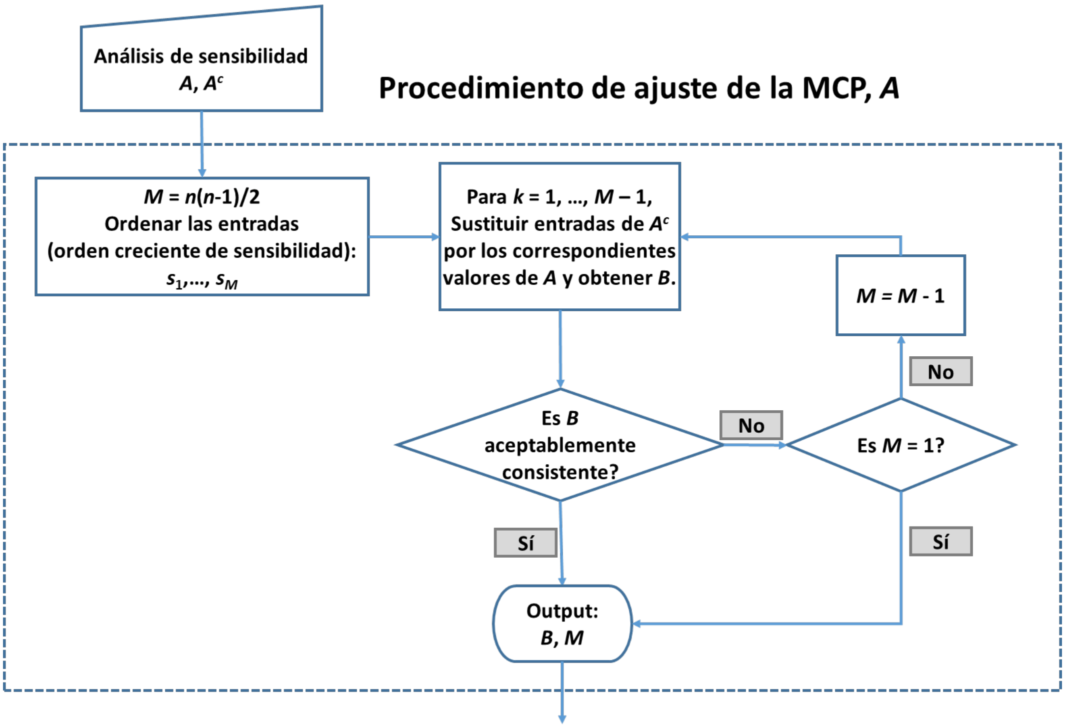

Figura 3. Procedimiento de ajuste de la MCP, *A*

Este procedimiento se ha diseñado para hacer que la matriz ajustada sea lo más adherente posible a la matriz de entrada, cambiando lo menos posible las evaluaciones previamente realizadas por los responsables de la toma de decisiones.

- Sugerencia de modificación(es): los juicios modificados se propondrán al responsable de la toma de decisiones correspondiente, a quien se invitará a aceptar las evaluaciones finales. En caso de desacuerdo (pata 'No' del rombo inferior en la Figura 2), se le pedirá que obtenga nuevas evaluaciones, de modo que se puedan elaborar nuevas matrices.

Cuando un decisor ha aceptado finalmente una matriz ajustada que, además, es aceptablemente consistente, el proceso vuelve a la caja redondeada central de la Figura 2 que, a su vez, lleva, a través de la pata 'Sí' del rombo inferior derecho de la Figura 1, a su caja redondeada central, donde se acepta la matriz y se procede a realizar el cálculo del vector de prioridades correspondiente.

Análisis de sensibilidad

El método de sensibilidad aplicado para clasificar los juicios más "influyentes" se presenta a continuación.

A partir de una MCP *A*, de tamaño $n \times n$, el método consiste en calcular una segunda matriz *D* que tiene las derivadas parciales de $\lambda_{máx}$ con respecto a las entradas de *A*, identificando así qué entradas son más sensibles para aumentar la consistencia. Estos derivados parciales están dados por la siguiente fórmula (Sección 1.1, Stewart, 2011):

$$D = \mathbf{w}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} - A^{2} * \mathbf{v}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}, \qquad (2)$$

donde: $\boldsymbol{w}$ representa el vector propio de Perron, asociado a $\lambda_{máx}$; $\mathbf{v}$ representa el vector propio de Perron por la izquierda de A, que es el vector propio de Perron (por la derecha) de la traspuesta de *A*, también asociado a $\lambda_{máx}$, y normalizado de manera que $\mathbf{vw}^T = 1$; $*$ es el producto de Hadamard (componente a componente). Este producto opera con matrices del mismo tamaño y produce una tercera matriz de las mismas dimensiones, cuyos elementos (i, j) son el producto de los elementos (i, j) de las dos matrices originales.

Los valores correspondientes a las derivadas parciales permiten clasificar las entradas correspondientes de la matriz A y luego saber cuál tiene mayor influencia en la consistencia. Para ilustrar, se da un ejemplo ahora.

Ejemplo

Considera la siguiente MCP: A = [1 2 3; 1⁄2 1 4; 1⁄3 1⁄4 1];

La matriz de derivadas parciales de $\lambda_{máx}$, calculada a través de (2), es

D = [0 −0,4437318 0,66559788; 0,11093295 0 −0,8874636; −0,0739553 0,05546647 0].

Esto significa que la comparación por pares correspondiente a la entrada (2,3) es la que más influye en la consistencia, respectivamente, seguida de las comparaciones (1,3) y (1,2). En particular, la consistencia se puede mejorar al disminuir el valor de comparación (2,3), al aumentar el de (1,3) y al disminuir el de (1,2).

Crea un *script* en MatLab que implemente el proceso descrito. Úsalo para proponer una (o más) MCPs con consistencia mejorada para la matriz A, y para otras MCPs.

5 Cierre

En este artículo te hemos presentado un procedimiento para llevar a cabo una negociación controlada y no excesivamente pesada para el emisor de un cuerpo de comparación por pares, de modo que se consiga de manera amigable un equilibrio entre la necesaria consistencia que toda matriz de comparación por pares debe tener y la opinión del emisor. El procedimiento se basa en un análisis de sensibilidad que indica las comparaciones más susceptibles de mejorar la consistencia. En la práctica, un pequeño número de sugerencias realizadas al actor permite llegar de manera rápida al consenso necesario.

6 Bibliografía

S. Safarzadeh, S. Khansefid, M. Rasti-Barzoki, A group multi-criteria decision-making based on best-worst method, Computers & Industrial Engineering, 126 (2018) 111-121.

A. Ishizaka, S. Siraj, Are multi-criteria decision-making tools useful? An experimental comparative study of three methods, European Journal of Operational Research, 264(2) (2018) 462-471.

S. Carpitella, F. Carpitella, A. Certa, J. Benítez, J. Izquierdo, Managing human factors to reduce organisational risk in industry, Mathematical and Computational Applications, 23(4) (2018a) 67.

X. Yu, S. Zhang, S, X. Liao, X. Qi, ELECTRE methods in prioritized MCDM environment, Information Sciences, 424 (2018) 301-316.

A. Zareie, A. Sheikhahmadi, K. Khamforoosh, K, Influence maximization in social networks based on TOPSIS, Expert Systems with Applications, 108 (2018) 96-107.

S. Carpitella, S.J. Ocaña-Levario, J. Benítez, A. Certa, J. Izquierdo, A hybrid multi-criteria approach to GPR image mining applied to water supply system maintenance, Journal of Applied Geophysics, 159 (2018b) 754-764.

K. Phudphad, B. Watanapa, W. Krathu, S. Funilkul, Rankings of the security factors of human resources information system (HRIS) influencing the open climate of work: using analytic hierarchy process (AHP), Procedia Computer Science, 111 (2017) 287-293.

C. Bertolín, A. Loli, Sustainable interventions in historic buildings: A developing decision making tool, Journal of Cultural Heritage, 34 (2018) 291-302.

R. Carli, M. Dotoli, R. Pellegrino, A decision-making tool for energy efficiency optimization of street lighting, Computers & Operations Research, 96 (2018) 223-235.

J. Huang, J. Boland, W. Liu, C. Xu, H. Zang, A decision-making tool for determination of storage capacity in grid-connected PV systems, Renewable Energy, 128, Part A (2018) 299-304.

S. Bozóki, L. Csató, J. Temesi, An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players, European J. Oper. Res. 248 (2016) 211–218.

W. Gu, M. Basu, Z. Chao, L. Wei, A unified framework for credit evaluation for internet finance companies: Multi-criteria analysis through AHP and DEA, Int. J. Inf. Technol. Decis. Mak. 16 (2017) 597–624.

J.C. Leyva-Lopez, J.J. Solano-Noriega, D.A. Gastelum-Chavira, A Multi-Criteria approach to rank the municipalities of the states of Mexico by its marginalization level: The case of Jalisco, Int. J. Inf. Technol. Decis. Mak. 16 (2017) 473–513.

Z.P. Tian, R.X. Nie, J.Q. Wang, H.Y. Zhang, A two-fold feedback mechanism to support consensus reaching in social network group decision-making, Knowledge-Based Systems, In press (2018) https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.09.030.

I.J. Pérez, F.J. Cabrerizo, S. Alonso, Y.C. Dong, F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, On dynamic consensus processes in group decision making problems, Information Sciences, 459 (2018) 20-35.

Saaty, T.L. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures. Journal of Mathematical Psychology, 15, 234-281.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., and Pérez-García, R. (2012a). Improving consistency in AHP decision-making processes. Applied Mathematics and Computation, 219, 2432–2441.

Saaty, T.L. (2008). Relative measurement and its generalization in decision making. Why pairwise comparisons are central in mathematics for the measurement of intangible factors. The analytic hierarchy/network process. Revista Real Academia Ciencias Serie A: Matemáticas, 102(2), 251–318.

Saaty, T.L. (2003). Decision-making with the AHP: why is the principal eigenvector necessary. European Journal of Operations Research, 145, 85–91.

Stewart, G.W. (2001). Matrix Algorithms, vol. II, SIAM.

Finan, J.S., and Hurley, W.J. (1997). The analytic hierarchy process: does adjusting a pairwise comparison matrix to improve the consistency ratio help? Computers and Operations Research, 24, 749–755.

Franek, J., Kresta, A. (2014). Judgment Scales and Consistency Measure in AHP. Procedia Economics and Finance, 12, 164–173.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., and Pérez-García, R. (2011a). Achieving matrix consistency in AHP through linearization. Applied Mathematical Modelling, 35, 4449–4457.

Benítez, J., Izquierdo, J., Pérez-García, R., and Ramos-Martínez, E. (2013). A simple formula to find the closest consistent matrix to a reciprocal matrix. Applied Mathematical Modelling, 38(15-16), 3968–3974.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Gutiérrez, J.A., and Izquierdo, J. (2011b). Balancing Consistency and Expert Judgment in AHP. Mathematical and Computer Modeling, 54, 1785-1790.