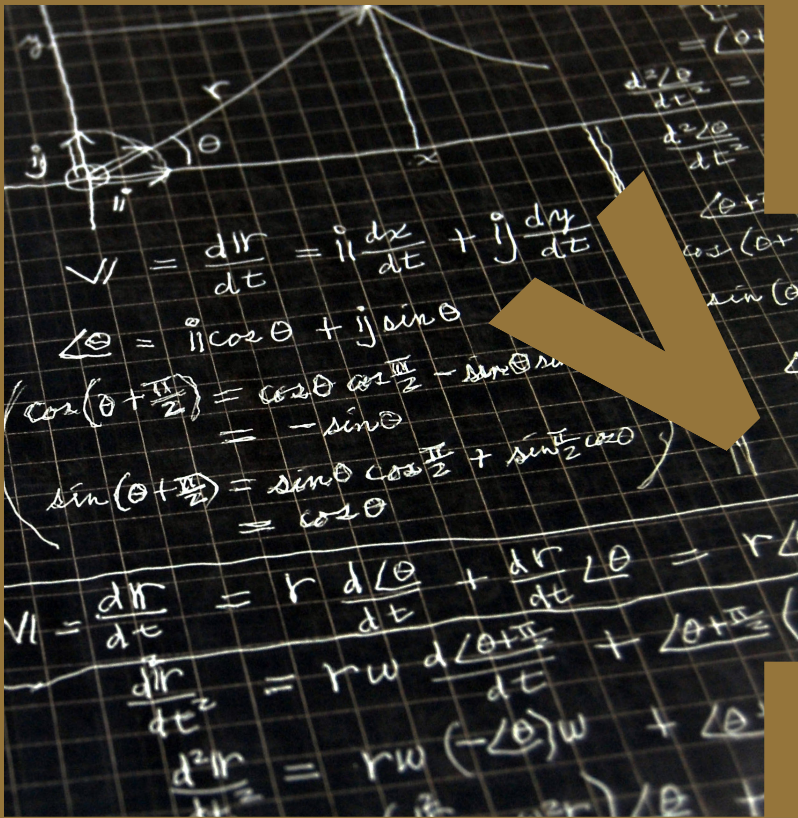
MATEMÁTICAS



MATEMÁTICAS BÁSICAS PARA INGENIERÍAS

EJERCICIOS RESUELTOS

2ª edición

Lucía Agud Albesa | Margarita Mora Carbonell

UPV punto de partida

Editorial Universitat Politècnica de València

Matemáticas básicas para ingenierías

Ejercicios resueltos

2ª edición

Lucía Agud Albesa

Margarita Mora Carbonell

Editorial
Universitat Politècnica
de València

Colección Punto de Partida

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politécnica de València

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: AGUD ALBESA, L., MORA CARBONELL, M. (2019). *Matemáticas básicas para ingenierías: Ejercicios resueltos* (2ª ed.).Valencia: Universitat Politècnica de València

venta: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0550_03_02_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-804-1
Impreso bajo demanda

Resumen

Este libro pretende ser un puente entre los estudios pre-universitarios y primeros cursos de grados de ingeniería. A lo largo de nuestra labor docente como profesoras de primeros cursos en Grados de Ingeniería hemos podido constatar que el alumno universitario no siempre se encuentra en condiciones de abordar con éxito las asignaturas de matemáticas. El principal objetivo de este libro es, por tanto, afianzar las bases matemáticas necesarias para llevar los estudios cursados a buen término.

Las matemáticas para ser entendidas tienen que ser escuchadas, de ahí, que a la hora de presentar una definición, una propiedad, un teorema, se intente dar una idea intuitiva del mismo, todo ello sin perder el rigor y la notación científica necesarias. Se analizan todos los aspectos del cálculo de una variable que un estudiante debe precisar, conocer, manejar con habilidad y destreza, de cara a poder finalizar sus estudios con éxito.

El libro no contiene demostraciones, ese aspecto queda fuera de nuestro objetivo, sino más bien presenta un manual recopilatorio de las matemáticas básicas que el estudiante precisa en su nueva etapa. La dinámica del texto consiste en la presentación de los conceptos teóricos que se necesitan para la resolución de ejercicios, para posteriormente abordar todos los contenidos desde la exposición de ejemplos desarrollados con todos los pasos, indicaciones, explicaciones y justificación de cada uno de los cálculos.

Los ejemplos se presentan por grado de complejidad y acorde a cada una de las secciones donde están inmersos, en ellos además de detallarse todos los pasos a seguir, entre los cálculos se insiste en los errores más comunes que se suelen cometer. Si el alumno procede de bachillerato este libro le permitirá asegurar muchos de los conceptos que ya conoce y estará en condiciones de saltarse la parte introductoria del capítulo para acceder a los ejemplos más complicados; ahora bien, si el alumno procede de módulo formativo es aconsejable que empiece cada capítulo por el principio. Cada capítulo finaliza con una sección de ejercicios resueltos, donde ya están mezclados tanto en cuanto a dificultad como a utilización de distintas herramientas ya vistas en ese capítulo o en anteriores.

Es un placer expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos compañeros que tras años de trabajo han compartido con nosotras su experiencia en la dificultad de los alumnos de primer curso. Con ellos hemos compartido horas de café comentando las anécdotas de errores repetitivos y carencia de cálculo en las operaciones, este libro surge principalmente por esa necesidad que un gran número de alumnos de primer curso precisa. Esperamos que sirva de ayuda.

Índice general

Capítulo 1

Los números reales. Operaciones elementales. Los números complejos

En este capítulo se estudiarán las propiedades más importantes y básicas de los números reales y complejos que el lector debe conocer, siempre desde el punto de vista práctico mediante la resolución de ejercicios. La sección 1.1 se centra en definir y trabajar con intervalos, manipular desigualdades de números reales y la definición y manejo del valor absoluto de un número real. El capítulo finaliza con la sección 1.5 que estudia el conjunto de números complejos, introduciendo su necesidad y desarrollando ejemplos de las operaciones y propiedades más importantes de los mismos. En la subsección 1.5.3 se recomienda repasar las funciones trigonométricas que se han desarrollado en el Capítulo 2 concretamente en la subsección 2.3.3 de este mismo libro.

1.1 El conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$

El primer conjunto de números con el que se trabaja es el de los *Números Naturales*, $\mathbb{N}$, que viene definido de forma axiomática con los llamados *Axiomas de Peano*. Su descripción matemática vendría dada por:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Si a los números conocidos se le añade el signo y el número 0, se tiene el conjunto de los *Números Enteros*, $\mathbb{Z}$, definido por:

$$\mathbb{Z} := \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

evidentemente por definición, los números naturales están contenidos en los números enteros, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

La necesidad de poder realizar las operaciones conocidas como suma, resta, multiplicación y división fueron dando lugar a introducir otro nuevo conjunto de números, los *Números Racionales*, o aquellos que pueden ser expresados mediante una fracción, y que son denotados por $\mathbb{Q}$. Se entiende que cuando se habla de un número racional es un conjunto que incluye una fracción y todas sus fracciones equivalentes. De nuevo se verifica que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Pero ya desde tiempos de Pitágoras se descubrió que no todos los números pueden ser expresados mediante un fracción. Números tan importantes como $\pi, \sqrt{2}, e$, etc., no pertenecerían a este conjunto, surgiendo así el conjunto de los *Números Irracionales*, al que se llamará $\mathbb{I}$.

La unión de estos dos conjuntos dan lugar al conjunto de los *Números Reales*, $\mathbb{R}$, de forma que: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Y por lo tanto, las relaciones de contenido o inclusión que se tienen son:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Para los números reales también existe una definición axiomática, (ver Ross 1980) pero como la idea de este manual no es tanto el desarrollo teórico de los conceptos, sino su aplicación y manipulación mediante ejercicios resueltos, se destacarán aquí las propiedades más importantes que surgirán en los ejercicios que a continuación se irán mostrando. Aún así se considera oportuno recordar los axiomas, en cuanto a leyes de cálculo que conviene tener en cuenta,

Axiomas de Álgebra:

Axioma 1 (Leyes Conmutativas) $x + y = y + x$, $xy = yx$

Axioma 2 (Leyes asociativas) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$

Axioma 3 (Ley distributiva) $x(y + z) = xy + xz$

Axioma 4 (Elemento neutro de la suma) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x + z = y$. Se denota $z = y - x$. El elemento $x - x$ es denotado por 0. Se puede demostrar que 0 no depende de la elección de $x \in \mathbb{R}$.

Axioma 5 (Elemento inverso del producto) Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$ entonces existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $xz = y$. Se denota $z = \frac{y}{x}$. El elemento $\frac{x}{x}$ es denotado por 1. Se puede demostrar que 1 no depende de la elección de $x \in \mathbb{R}$.

Axiomas de Orden:

Axioma 6 Se verifica una, y sólo una, de las relaciones $x = y$, $x < y$ o $x > y$

Axioma 7 Si $x < y$, entonces, para cada $z \in \mathbb{R}$, $x + z < y + z$

Axioma 8 Si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x + y > 0$, $xy > 0$

Axioma 9 Si $x > y$ e $y > z$ entonces $x > z$

1.1.1 Algunas propiedades de los números reales

La representación gráfica de los números reales es la *recta real*. Si dentro de ella se quieren indicar subconjuntos formados por números reales, estos son los **intervalos**. De forma que un intervalo I es el conjunto formado por todos los números reales comprendidos entre dos elementos dados, que reciben el nombre de extremos del intervalo. Por la propiedad de los números reales conocida como *Densidad de los números reales*, se sabe que dados dos números reales cualesquiera, siempre existen infinitos números reales entre ellos. Matemáticamente se escribiría, dados $a, c \in I, \exists b \in I$ tal que $a < b < c$.

Existen distintos tipos de intervalos según sus extremos. Además pueden ser *intervalos acotados*, es decir, sus extremos son números reales, o *intervalos no acotados*, cuando al menos uno de sus extremos es infinito:

***Intervalo abierto acotado*:** se denota $I =]a, b[$ o también $I = (a, b)$ y se define como todos los números reales comprendidos entre a y b sin incluir a estos. Es decir:

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

***Intervalo cerrado*:** denotado por $I = [a, b]$, en este caso comprende a todos los números reales entre a y b, incluidos a y b:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

***Intervalo semiabierto acotado*:** los hay de dos tipos:

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

***Intervalos no acotados*:** siempre deben ser abiertos por el extremo que sea infinito. Por tanto, se tienen cuatro posibilidades dependiendo de si uno de los extremos es un número real:

$$\begin{aligned}]a,\infty[\; &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad [a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ ]-\infty,b[\; &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \quad]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \end{aligned}$$

y finalmente, el intervalo no acotado $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$.

Cabe destacar el concepto de ***Recta real ampliada***, que se denota como $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$. Es decir, los conceptos de $\pm\infty$ son elementos de este conjunto. Este nuevo conjunto es muy adecuado en el caso de que se quiera indicar, por ejemplo, que el resultado a de una operación puede ser tanto un número real como infinito, lo que se expresaría como: $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Los intervalos son necesarios cuando se quiere resolver inecuaciones, o desigualdades, para indicar los conjuntos donde se encuentran las soluciones. A continuación, se detallan las propiedades operacionales más importantes para trabajar con inecuaciones y que están relacionados con los *Axiomas de orden* antes expuestos. Sean $x, y, a, b \in \mathbb{R}$:

1. Si $x < y$, entonces $x + a < y + a$. La misma propiedad se verifica si la desigualdad no es estricta (si $x \leq y$, entonces $x + a \leq y + a$).

2. Si $x < y$, $a > 0$, entonces $ax < ay$. Sin embargo, si $a < 0$, entonces la desigualdad cambia, $ax > ay$.

Dicho de otra forma, dada una desigualdad, se puede sumar o restar la misma cantidad a ambos lados sin que la desigualdad cambie. Y lo mismo ocurre si se multiplica, o divide, por una misma cantidad ambos miembros, siempre que esta cantidad sea positiva. Si la cantidad es negativa, simplemente el símbolo de la desigualdad cambia de orden. Por lo tanto, las inecuaciones pueden operarse de forma análoga a las ecuaciones teniendo en cuenta siempre el símbolo de la desigualdad.

Para una mejor comprensión de cómo manejar las desigualdades, se presenta el siguiente ejemplo con polinomios de grado 1. Más adelante cuando se haya tratado la descomposición factorial de polinomios en la subsección 1.3.1 se tratarán problemas de inecuaciones con polinomios de grado superior ya en la sección 1.6.

Ejemplo 1.1.1 *Resolver las siguientes desigualdades:*

$$a) \; -5x + 2 < 11x - 3 \quad b) \; -2 < x + 5 \leq 7 \quad c) \; 3x - 5 \leq -5x + 6 < x - 1$$

Para resolver este ejemplo basta usar las propiedades citadas anteriormente. Se trabaja como en las ecuaciones, despejando la variable incógnita, x, de los polinomios de grado 1. Para ello, se agrupan las variables en un miembro y los términos independientes en el otro; lo que suma pasa restando y lo que resta, sumando.

a) Esta primera desigualdad, $-5x+2<11x-3$, es muy sencilla, así sirve para practicar las reglas descritas.

$$-5x+2<11x-3 \iff -5x-11x<-3-2 \iff -16x<-5$$

Si ahora se despeja, teniendo en cuenta el cambio en la desigualdad por dividir por un número negativo, se tiene

$$x>\frac{-5}{-16} \iff x>\frac{5}{16}$$

Con lo que la solución es el intervalo

$$x \in]\frac{5}{16},\infty[.$$

Hay que notar que como la variable tiene coeficiente negativo, para despejarla ha habido que dividir ambos miembros por -16, que al ser negativo ha hecho que la desigualdad cambie de símbolo de orden.

Otra forma de hacerlo, y quitarse de encima el tema de dividir por una cantidad negativa, es pasar las x al miembro donde se vea que el coeficiente va a quedar positivo, en este caso, el segundo. Es decir:

$$-5x+2<11x-3 \iff 5<16x \iff \frac{5}{16}<x$$

obteniendo mismo resultado.

b) Para resolver $-2<x+5\leq 7$, como sólo se tiene la variable en el miembro central, se pueden operar las desigualdades todas a la vez. La idea, al igual que en las ecuaciones, es despejar la incógnita, para ello se resta 5 en todos los miembros:

$$-2<x+5\leq 7 \iff -2-5<x\leq 7-5 \iff -7<x\leq 2$$

Y ya se tiene el resultado final:

$$x \in]-7,2]$$

c) En este apartado ha de resolverse una inecuación con tres miembros,

$$3x - 5 \leq -5x + 6 < x - 1$$

Si se puede, es bueno intentar resolverla en un sólo paso como en el caso anterior, siempre que quede la variable aislada en uno cualquiera de los miembros de la desigualdad, pasando las variables al miembro adecuado. Pero en este ejercicio no se puede, ya que para que desaparezca, por ejemplo, $3x$ del primer miembro, debe restarse $3x$ en todos los miembros, pero aún así la variable seguiría estando en el segundo y tercer miembro.

Cuando ocurra esto, simplemente hay que trabajar por separado las dos desigualdades que aparecen unidas, y luego hacer la intersección de las soluciones, ya que deben cumplirse todas las condiciones.

Por lo tanto, se harán dos pasos. Primero resolver, por ejemplo, $-5x + 6 < x - 1$. Y después se resuelve la que quede, en este caso $3x - 5 \leq -5x + 6$. Es decir, resolver el sistema formado por:

$$\left.\begin{array}{rl} -5x + 6 & < x - 1 \\ 3x - 5 & \leq -5x + 6 \end{array}\right\}$$

Obsérvese que la desigualdad en un caso es estricta (es decir, dará un intervalo abierto). Y en el otro caso habrá que considerar el extremo.

- $-5x + 6 < x - 1$

  Se llevarán las variables, por ejemplo, al segundo miembro, para que así queden con coeficiente positivo (recordar que esta operación es equivalente a sumar en ambos miembros $5x$, así 'desaparece' del miembro en el que está). Si se quieren dejar en el primer miembro por comodidad tampoco pasa nada. Simplemente después, al despejarla, como tendrá coeficiente negativo, no hay que olvidarse de cambiar el símbolo de la desigualdad.

$$7 < 6x \iff \frac{7}{6} < x \iff x \in S1 =]\frac{7}{6}, \infty[$$

- Ahora se resuelve la otra desigualdad, $3x - 5 \leq -5x + 6$. Pasando al primer miembro las variables y al segundo los términos independientes, se tiene:

$$8x \leq 11 \iff x \leq \frac{11}{8} \iff x \in S2 =]-\infty, \frac{11}{8}]$$

- Se juntan ambas soluciones realizando la intersección:

$$x \in S =]-\infty, \frac{11}{8}] \cap]\frac{7}{6}, \infty[$$

Para calcular esta intersección, como $\frac{11}{8} > \frac{7}{6}$, (al realizar los productos cruzados $11 \cdot 6 > 8 \cdot 7$ pues $66 > 56$; otra forma de comprobar esto es poner común denominador en ambas y quedarse con la que dé numerador mayor), la intersección será:

$$x \in S =]\frac{7}{6}, \frac{11}{8}]$$

Si se representan gráficamente todas las soluciones, calcular la intersección es sombrear cada una de las soluciones y quedarse con el trozo que esté coloreado en todas las ocasiones:

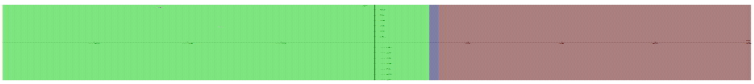


Figura 1.1: Cálculo de la intersección de las soluciones, S1 de color rojo, S2 de color verde y la intersección S de color azul $\square$

1.1.2 El valor absoluto de un número real y sus propiedades

El *valor absoluto de un número real* x se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se pueden comprobar fácilmente las siguientes equivalencias. Para cada $x \in \mathbb{R}$ y $b > 0$

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [-b, b] \tag{1.1}$$

$$|x| \geq b \Leftrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \; x \geq b \\ \searrow \; x \leq -b \end{array} \Leftrightarrow x \in]-\infty, -b] \cup [b, +\infty[\tag{1.2}$$

Es importante destacar que en el caso de que las desigualdades anteriores sean estrictas, los intervalos que se obtienen serán abiertos.

Estas propiedades se utilizarán para quitar de las desigualdades el valor absoluto siempre que sea posible. En otras ocasiones, como cuando aparezcan sumas o restas de valores absolutos, no pueden aplicarse directamente, así que habrá que recurrir a la definición.

Recordar al lector que la propiedad que se tiene para la suma de valores absolutos es la conocida *Desigualdad triangular* (la primera de las dos desigualdades que indicamos a continuación):

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x|+|y| \\ |x-y| &\geq \big||x|-|y|\big| \end{aligned}$$

aunque su uso no será objeto de los ejemplos aquí expuestos.

El primer paso para aplicar estas equivalencias, será aislar el valor absoluto en uno de los miembros de la desigualdad. Desde ahí, ya podrán ser aplicadas.

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación directa de las propiedades vistas en la Ecuación 1.1 y en la Ecuación 1.2.

Ejemplo 1.1.2 *Resolver las siguientes inecuaciones de valor absoluto*

1. $|2x+1|<5$

2. $|3-4x|\geq 6$

Para resolver el ejercicio, hay que fijarse en cuál de las dos ecuaciones se debe aplicar.

1. $|2x+1|<5$. En este caso procede el uso de la Ecuación 1.1,

$$\begin{aligned} -5<2x+1<5 \quad &\Leftrightarrow -5-1<2x<5-1 \Leftrightarrow -6<2x<4 \overset{\times\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} -3<x<2 \\ &\Leftrightarrow x\in]-3,2[\end{aligned}$$

2. $|3-4x|\geq 6$. En este caso la ecuación que corresponde es la 1.2,

$$|3-4x|\geq 6 \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \quad 3-4x\geq 6 \\ \\ \searrow \quad 3-4x\leq -6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \quad 3-6\geq 4x \\ \\ \searrow \quad 3+6\leq 4x \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \quad \frac{-3}{4}\geq x \\ \\ \searrow \quad \frac{9}{4}\leq x \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x\in]-\infty,\tfrac{-3}{4}]\cup[\tfrac{9}{4},+\infty[$$

$\square$

1.2 Igualdades notables y fórmulas importantes

Se recordarán aquí primero las *identidades notables* más básicas y se efectuarán ejemplos de su aplicación. También se verá la *fórmula ciclotómica*, muy interesante a la hora de factorizar polinomios; y el *binomio de Newton*, cuya utilidad tanto en estadística, combinatoria como en cálculos elementales, es primordial. Si el lector requiere recordar conceptos básicos de aritmética y álgebra puede revisar el texto Editores 2003.

1.2.1 Identidades notables

Las identidades notables más importantes y que aparecen con mayor frecuencia son

Cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.3}$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.4}$$

Suma por diferencia

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{1.5}$$

Cubo de una suma

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1.6}$$

Cubo de una diferencia

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{1.7}$$

Aunque estas son las más conocidas es conveniente tener en cuenta algunas más que pueden ser obtenidas fácilmente a partir de las anteriores. Por ejemplo, se detalla aquí el cuadrado de un trinomio (tres términos), y que se puede generalizar a cualquier número de sumandos. Se va a ilustrar el proceso de obtención del cuadrado de un trinomio y luego ya se concluirá con la fórmula y sus generalizaciones.

Ejemplo 1.2.1 *Obtener el resultado de* $(a+b+c)^2$.

Se aplicará la Ecuación 1.3, la propiedad asociativa de la suma y la distributiva del producto con respecto la suma

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 \overset{(1.3)}{=} (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &\overset{(1.3)}{=} a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2\end{aligned}$$

Reordenado los términos, se tiene la fórmula final para el cuadrado de un trinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Notar que aparecen todos los cuadrados de cada sumando y todos los posibles dobles productos sumándose. □

Ejemplo 1.2.2 *Obtener el resultado de* $(a+b-c)^2$.

Se aplicará la Ecuación 1.4, también la Ecuación 1.3, la propiedad asociativa de la suma y la distributiva del producto con respecto la suma

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2 &= [(a+b)-c]^2 \overset{(1.4)}{=} (a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2 \\ &\overset{(1.3)}{=} a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2\end{aligned}$$

Reordenado los términos, se tiene la fórmula final para el cuadrado de un trinomio

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

Igualmente aparecen todos los cuadrados de cada sumando y todos los posibles dobles productos, pero aquellos donde interviene el sumando con signo '$-$' aparecen restando. □

Ejemplo 1.2.3 *Obtener el resultado de* $(a-b-c)^2$.

Se aplicará la Ecuación 1.4, la propiedad asociativa de la suma y la distributiva del producto con respecto la suma

$$\begin{aligned}(a-b-c)^2 &= [(a-b)-c]^2 \overset{(1.4)}{=} (a-b)^2 - 2(a-b)c + c^2 \\ &\overset{(1.4)}{=} a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2\end{aligned}$$

Reordenado los términos, se tiene la fórmula final para el cuadrado de un trinomio

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

Igualmente aparecen todos los cuadrados de cada sumando y todos los posibles dobles productos, aquellos donde interviene el sumando con signo '$-$' aparecen restando, y el doble producto que afecta a b y c aparece con signo '+' ya que $(-) \cdot (-) = +$. $\square$

<u>*Nota:*</u> Las fórmulas anteriores se pueden generalizar para cualquier número de sumandos

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

y en caso de tener algún sumando con signo menos, sólo variar el signo de los dobles productos asociados a ese signo,

$$(a+b-c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac + 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$$

1.2.2 Fórmula ciclotómica

Esta fórmula es muy útil a la hora de factorizar polinomios de dos variables, o también si se encuentran restas de potencias. Dado $n \in \mathbb{N}$, la fórmula ciclotómica es

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \tag{1.8}$$

Obsérvese que en el fondo es sencilla de memorizar, ya que si se aprende en el orden adecuado simplemente consiste en que la suma de las potencias de los monomios que aparecen en el segundo factor siempre da $n-1$. De forma que, se comienza por la primera variable elevada al máximo valor $n-1$, y mientras el exponente de esta va bajando, el de la otra variable va subiendo, manteniendo la suma de ambos siempre constante y siempre igual a $n-1$.

Se indican a continuación unos ejemplos de su aplicación.

Ejemplo 1.2.4 *Factorizar los polinomios de dos variables siguientes*

$$1)\ p(x,y) = x^3 - y^3, \qquad 2)\ q(x,y) = x^4 - y^4$$

1. Aplicar la Ecuación 1.8 con $n = 3$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

2. En este caso, aplicar la Ecuación 1.8 con $n = 4$

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3)$$

Este apartado también podría haberse visto como una *diferencia de cuadrados*, y aplicar la Ecuación 1.5 dos veces

$$x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 \overset{(1.5)}{=} (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \overset{(1.5)}{=} (x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$$

quedando en este caso una factorización mejor, en cuanto que los factores son de menor grado cada uno. $\square$

<u>*Nota:*</u> Siempre que se pueda hay que combinar las fórmulas descritas en esta sección para obtener los factores del menor grado posible.

1.2.3 Binomio de Newton

Para comenzar esta parte ha de definirse primero una nueva operación matemática, el *factorial de un número natural.* Sea $n \in \mathbb{N}$, se llama *factorial de* n y se escribe $n!$ a

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned}
6! \quad &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \\
5! \quad &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120, \\
4! \quad &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \\
&\vdots \\
1! \quad &= 1, \\
0! \quad &= 1 \text{ por convenio}
\end{aligned}$$

Una de las propiedades que verifican los números factoriales es la siguiente.

Propiedad 1.2.1 *Dado* $n \in \mathbb{N}$, *se verifica:*

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

Definido el factorial de un número natural ya se puede hablar del número combinatorio. Dados $n,\ m \in \mathbb{N}$, con $n \geq m$, se llama *número combinatorio* $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, y se lee *'n sobre m'* a:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.9}$$

Sin más que hacer las cuentas, puede concluirse que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= \tfrac{n!}{0!n!} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \tfrac{n!}{1!(n-1)!} = \tfrac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n \\
\binom{n}{n} &= \tfrac{n!}{n!0!} = 1
\end{aligned}$$

Aunque no es objeto de este libro, el número combinatorio se usa por ejemplo en probabilidad cuando se quiere hallar el número de posibles combinaciones de n elementos tomados de m en m. Aquí el estudio se centrará en su utilización como coeficientes del *binomio de Newton*.

En el apartado anterior se han descrito las identidades notables, y entre ellas se tenían el cuadrado y cubo de sumas o diferencias. Cuando quieren hallarse potencias mayores de 2 ó 3, de sumas o restas, pueden usarse las fórmulas anteriores descomponiendo las potencias y siguiendo el proceso de las operaciones que vayan surgiendo. Por ejemplo, usando la fórmula del cuadrado de un trinomio, ecuación 1.2.1, se tiene

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= ((a+b)^2)^2 \stackrel{(1.3)}{=} (a^2+2ab+b^2)^2 \\
&\stackrel{(1.2.1)}{=} (a^2)^2 + (2ab)^2 + (b^2)^2 + 2a^2\cdot 2ab + 2a^2b^2 + 2\cdot 2abb^2 \\
&= a^4 + 4a^2b^2 + b^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= (a+b)^4(a+b) = (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b) = \dots
\end{aligned}$$

y así sucesivamente, pero puede verse que este trabajo es laborioso y puede llevar fácilmente a errores en las cuentas.

Este problema lo soluciona el *Binomio de Newton*, cuya fórmula es, dado $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots \\
&+ \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\
&= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n
\end{aligned} \tag{1.10}$$

De nuevo la regla nemotécnica es sencilla, ya que salvo los coeficientes, los monomios que aparecen verifican que la suma de sus exponentes debe dar n, comenzando por el primer sumando a la máxima potencia, y mientras este va bajando su exponente, el otro sumando lo va aumentando.

Hay una forma rápida de calcular los coeficientes del *Binomio de Newton* que es el *Triángulo de Tartaglia*, donde los números que aparecen en cada fila se obtienen de ir sumando los dos que tiene encima justo en la fila anterior

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

además estos valores corresponden a los números combinatorios siguientes

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

y así se podría ir repitiendo el proceso.

Si en lugar de una suma se tiene una resta, simplemente hay que alternar lo signos, siempre que se mantenga el orden descrito en los sumandos, como se indica aquí

$$
\begin{aligned}
(a-b)^n &= \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 - \cdots \\
&+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} b^n
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.2.5 *Calcular* $(a+b)^6$ *y* $(a-b)^6$.

Como en este caso $n = 6$, hay que calcular una fila más en el *triángulo de Tartaglia* descrito arriba, por lo tanto los coeficientes serán

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

con lo que: $\quad (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Mientras que para la resta, se alternan los signos quedando

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2 - 6ab^5 + b^6$$

$\square$

1.3 Fracciones algebraicas

Primeramente se verá cómo factorizar polinomios, también llamada descomposición en factores de polinomios, ya que de cara a operar fracciones algebraicas, es decir, aquellas cuyo numerador y denominador está formado por polinomios o funciones donde aparezca la variable $x \in \mathbb{R}$, es importantísimo poder factorizar estos términos. Así, podrán ser simplificadas y hacer más sencilla tanto su expresión como las operaciones a realizar con ellas.

1.3.1 Factorización de polinomios

El objetivo de esta sección es obtener la descomposición en factores de polinomios, para ello se hace un breve recordatorio de los polinomios. Las expresiones algebraicas que se forman a partir de la unión de dos o más variables y constantes, vinculadas a través de operaciones de multiplicación, resta o suma, reciben el nombre de polinomios.

En esta sección se van a tratar los polinomios reales de variable real. Un polinomio real de una variable real $p(x)$ de grado n en la variable real x es una expresión matemática de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1.11}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es la variable real y $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$ con $n \in \mathbb{N}$ son los coeficientes del polinomio. A a_n se le llama *coeficiente director del polinomio* y a_0 es el *término independiente*. Cada uno de los sumandos que constituyen el polinomio (Ecuación 1.11) se denomina *monomio*.

Se define el *grado de un monomio* como el exponente de su variable. El *grado de un polinomio* es el del monomio de mayor grado. Por ejemplo,

$$p(x) = 5x^3 \text{ es un monomio de grado tres.}$$
$$p(x) = 2x \text{ es un monomio de grado 1.}$$
$$p(x) = 5x^3 + 2x \text{ es un polinomio de grado 3 con } \ a_3 = 5.$$

A los polinomios cuyo coeficiente director es 1 se les llama *polinomios mónicos*.

Se llaman *ceros del polinomio* a aquellos valores de la variable que al ser sustituidos en el polinomio este da valor 0. Si en vez de un polinomio se habla de la ecuación polinómica correspondiente, se les llama *raíces o soluciones de la ecuación*. Los polinomios se pueden factorizar siempre que se conozcan sus raíces.

Se puede demostrar que un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene siempre n raíces incluida su multiplicidad, pudiendo ser éstas complejas en cuyo caso aparecerá también la compleja conjugada. En caso de que el lector no esté familiarizado con los números complejos y con el concepto de complejo conjugado, vea la subsección 1.5.2. Más adelante, este resultado se extenderá al cuerpo de los complejos en el Teorema 1.5.1 en la sección 1.5.

De momento el estudio de las raíces se centra en polinomios de coeficientes reales.

Sean $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ las n raíces de un polinomio de grado n.

Para factorizar un polinomio verificando lo anterior se tendrá

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

En el caso de que alguna de las raíces sea *múltiple* con multiplicidad α, es decir, la raíz aparece α veces como solución, ese factor también aparecerá α veces, $\alpha \in \mathbb{N}$. A las raíces cuya multiplicidad es 1 se les llama *raíces simples*.

Supongamos que todas las raíces del polinomio son reales, $x_1, \cdots, x_r \in \mathbb{R}$, y cada una de ellas con multiplicidad $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, respectivamente. En ese caso, el polinomio se factorizará mediante

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_r)^{\alpha_r}$$

donde $r \leq n$ y $\alpha_1 + ... + \alpha_r = n$. La suma de las multiplicidades coincide con el grado del polinomio.

En los ejemplos que se pondrán a continuación se trabajará siempre con polinomios con coeficientes reales. Además, en caso de que las soluciones sean complejas, generalmente no se factorizará ese término, dejándolo siempre como esté, pues la factorización que se está buscando es en el cuerpo de los números reales.

Ejemplo 1.3.1 *Determinar el polinomio cuyas únicas raíces son* $x = 2$ *simple y* $x = -1$ *doble con coeficiente director* 5.

Puesto que tiene una raíz simple, y una doble, el polinomio tiene grado 3. Los factores que intervienen son $x-2$, y por parte de la raíz doble $(x-(-1))^2 = (x+1)^2$. Y se corresponde con el desarrollo de la operación

$$5(x - 2)(x + 1)^2 = 5x^3 - 15x - 10$$

□

Ejemplo 1.3.2 *Factorizar el polinomio $p(x) = x^3 + x$.*

Primero han de hallarse sus raíces en $\mathbb{R}$, resolviendo:

$$x^3 + x = 0 \iff x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

ya que

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

pues todo número real elevado al cuadrado es siempre positivo. Por lo tanto, este factor se dejará como está. Quedando la factorización:

$$p(x) = x^3 + x = x(x^2 + 1)$$

□

Más adelante este mismo ejemplo se factorizará en el cuerpo de los complejos.

1.3.2 Cálculo de las raíces enteras de un polinomio: Método de *Ruffini*

Para encontrar las raíces enteras de una ecuación polinómica, o equivalentemente los ceros que son enteros del polinomio, se puede aplicar el método de *Ruffini*, que simplemente es una forma abreviada de realizar la división del polinomio $p(x)$ entre el polinomio $x - a$ con $a \in \mathbb{R}$, (ver para más información Gracia 1975).

Si a es una raíz del polinomio, entonces el factor $x - a$ forma parte de la descomposición en factores y, por tanto, la divisón por $x - a$ debe dar de resto 0, deducción que se obtiene directamente del llamado *Teorema del resto*, que afirma que *el valor que toma un polinomio $p(x)$ para $x = a$, denotado como $p(a)$, es el resto de dividir el polinomio entre $x - a$*. Resultado del cual se deduce también que las raíces enteras tienen que ser divisores del término independiente.

En *Ruffini* se trabaja sólo con los coeficientes del polinomio ordenados de mayor a menor exponente, teniendo en cuenta que si no aparece algún monomio se deberá poner un 0 en su lugar. Con ello, si se parte de un polinomio de grado n, tienen que aparecer $n + 1$ coeficientes, desde el grado n gasta el grado 0 o término independiente.

Cuando se realiza *Ruffini* probando con el valor a, los valores que se obtienen como resultado son los coeficientes del cociente de la división $\frac{p(x)}{x-a}$, y el último valor

Para seguir leyendo haga click aquí