UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Máster Universitario en Investigación en Matemática

Caos en hiperespacios

Trabajo fin de Máster

Presentado por:
Héctor Méndez Gómez

Dirigido por:
Félix Martínez, Alfred Peris & Francisco Rodenas

Valencia, julio de 2019

Agradecimientos

El presente trabajo final de máster no se hubiese podido llevar a cabo sin la ayuda de cada uno de mis tutores Alfred Peris, Francisco Rodenas y especialmente de Félix Martínez por todo el tiempo y la dedicación dada al desarrollo de este trabajo.

Por último, quiero manifestar cariñosamente mi agradecimiento a mi querida madre y mi familia por todo el apoyo incondicional desde Costa Rica.

Resumen

Cuando estudiamos un sistema dinámico f definido en un espacio topológico X, aparecen los conceptos de transitividad topológica y caos. En este caso estudiamos los efectos del caos individual, dado que nos enfocamos en el comportamiento de las órbitas a largo plazo de f para un punto dado en su dominio. En muchas ocasiones comportamientos individuales en la naturaleza generan cambios en los comportamientos colectivos, y viceversa. Peris en [30] se pregunta: ¿Cómo afecta el caos individual de un miembro, en un cierto ecosistema, al comportamiento caótico de la dinámica del ecosistema en su conjunto? ¿Y viceversa?

El estudio del caos colectivo lo podemos interpretar como el estudio de la dinámica de una función que tiene por dominio una familia de conjuntos con ciertas características, en nuestro caso estudiaremos el caos de funciones evaluadas en conjuntos compactos no vacíos de cierto espacio topológico. Cuando el espacio topológico en cuestión es $\mathbb{R}^n$, entonces la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ es conocida como *el lugar donde viven los fractales*, ver [7], dado que los fractales son usualmente conjuntos compactos.

Motivados en lo anterior, el objetivo principal del presente trabajo final de máster es estudiar las distintas nociones de caos y ver la relación que hay entre una función continua $f\colon X \longrightarrow X$ y su respectiva hiperextensión $\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ con respecto a las distintas nociones de caos.

En el Capítulo 1, introduciremos los conceptos de transitividad topológica, caos de Devaney, funciones mezclantes y débilmente mezclantes, veremos también cómo se perciben estas nociones en el contexto de operadores lineales continuos definidos en un espacio de Fréchet, lo cual nos lleva a definir la noción de operadores hipercíclicos. Por último definiremos el hiperespacio de conjuntos compactos no vacíos de un espacio topológico X, el cual será denotado por $\mathcal{K}(X)$. Veremos que cuando (X, d) es un espacio métrico entonces podemos dotar al espacio $\mathcal{K}(X)$ con la métrica de Hausdorff, la cual mide la distancia entre conjuntos, y probaremos que cuando X es un espacio métrico completo entonces su respectivo hiperespacio $\mathcal{K}(X)$ es un espacio métrico completo con la métrica de Hausdorff.

En los Capítulos 2 y 3 introduciremos las distintas nociones de caos: el caos de Devaney, el caos total de Devaney, el caos exacto de Devaney, el caos en el sentido de Li-Yorke, el ω-caos y el caos distribucional. Y veremos la relación que hay entre una función f y su hiperextensión $\overline{f}$ en cuanto las disntintas nociones de caos. Nos preguntamos si el caos individual implica el caos colectivo en cada una de estas

distintas nociones, y viceversa.

Un concepto más fuerte que el caos en el sentidio de Devaney es la propiedad de especificación periódica fuerte, que veremos en el Capítulo 4. Estudiaremos esta propiedad para una función f y su respectiva hiperextensión $\overline{f}$ tratando de relacionarlas, en base al esquema general planteado.

Resume

When we study a dynamic system f defined in a topological space X, the concepts of topological transitivity and chaos appear. In this case we study the effects of individual chaos, since we focus on the behavior of the long-term orbits of f for a given point in its domain. In many cases individual behaviors in nature generate changes in collective behaviors, and vice versa. Peris in [30] asks: How does the individual chaos of a member, in a certain ecosystem, affect the chaotic behavior of the ecosystem dynamics as a whole? And vice versa?

The study of collective chaos can be interpreted as the study of the dynamics of a function that has a family of sets with certain characteristics, in our case we will study the chaos of evaluated functions in compact sets that are not empty of a certain topological space. When the topological space in question is $\mathbb{R}^n$, then the family of all compact subsets not empty in is known as *the place where fractals live*, see [7], since fractals are usually compact sets.

Motivated in the above, the main objective of this final master's degree is to study the different notions of chaos and see the relationship between a continuous function $f\colon X \longrightarrow X$ and its respective hyperextension $\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$, with respect to the different notions of chaos.

In Chapter 1, we will introduce the concepts of topological transitivity, Devaney chaos, mixing and weakly mixing, we will also see how these notions are perceived in the context of continuous linear operators defined in a Fréchet spaces, which leads us to define the notion of hypercyclic operators. Finally we will define the hyperspace of non-empty compact sets of a topological space X, which will be denoted by $\mathcal{K}(X)$. We will see that when (X, d) is a metric space then we can endow the space $\mathcal{K}(X)$ with the Hausdorff metric, which measures the distance between sets, and we will prove that when X is a complete metric space then its respective hyperspace $\mathcal{K}(X)$ is a complete metric space with the Hausdorff metric.

In Chapters 2 and 3 we will introduce the different notions of chaos: Devaney chaos, totally Devaney chaos, exact Devaney chaos, Li-Yorke chaos, ω-chaos and the distributional chaos. And we will see the relation between a function f and its hyperextension $\overline{f}$ as regards the different notions of chaos. We wonder if individual chaos implies collective chaos in each of these different notions, and vice versa.

A stronger concept than the chaos in the sense of Devaney is the strong periodic specification property, which we will see in Chapter 4. We will study this property

for a function f and its respective hyperextension $\overline{f}$ trying to relate them, based on the general scheme proposed.

Índice general

Agradecimientos III

Resumen V

Resume VII

Índice general IX

1. Preliminares 1
- 1.1. Dinámica topológica . . . 1
- 1.2. Dinámica de operadores . . . 10
- 1.3. Hiperespacios . . . 15

2. Transitividad y caos en hiperespacios 25
- 2.1. Transitividad topológica . . . 26
- 2.2. Conjunto denso de puntos periódicos . . . 30
- 2.3. Reformulaciones del caos de Devaney . . . 32
  - 2.3.1. Caos total de Devaney . . . 33
  - 2.3.2. Caos exacto de Devaney . . . 36

3. Caos de Li-Yorke y caos distribucional 39
- 3.1. Caos de Li-Yorke y ω-caos . . . 39
- 3.2. Caos distribucional . . . 43
- 3.3. Caos de Li-Yorke para operadores lineales . . . 46

4. Propiedades de especificación 47
- 4.1. Propiedades de especificación en el hiperespacio . . . 47
- 4.2. Ejemplo . . . 50

5. Conclusiones 55

Bibliografía 57

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Dinámica topológica

Definición 1.1. Un *sistema dinámico* es un par (f, X) que consiste de un espacio métrico X y una función continua $f\colon X \longrightarrow X$.

En muchas ocasiones diremos simplemente que f ó $f\colon X \longrightarrow X$, ó bien (f, X), es un sistema dinámico. El principal objetivo de los sistemas dinámicos es estudiar el comportamiento a largo plazo de las iteraciones de la función f en cada uno de los puntos de su dominio. Comenzamos con un cierto punto $x_0 \in X$, para éste defnimos sus iteraciones $f^n\colon X \longrightarrow X$, $n \geq 0$,

$$f^n(x_0) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{iteraciones}}(x_0).$$

Por convención f^0 denota la función identidad en X.

Definición 1.2. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Para $x \in X$ la *órbita* de x bajo f es el conjunto

$$\mathrm{Orb}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), ...\} = \{f^n(x)\colon n \in \mathbb{N}_0\}.$$

El objetivo principal de la dinámica es estudiar el comportamiento de las órbitas de un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$. Observe que la órbita de un punto $x_0 \in X$ bajo una función f define una sucesión $(f^n(x_0))_n$, esto nos dice que el estudio de la órbita del punto x_0 bajo la función continua f es equivalente al estudio de la sucesión $(f^n(x_0))_n$.

Dado un espacio métrico X, definimos el $\omega-$*límite* de $x \in X$ como el conjunto $\omega(x, f)$ de todos los puntos límites de la órbita de x considerada como una sucesión.

Ejemplo 1.3. Sea $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$. Las iteradas de f vienen dadas por la fórmula explícita

$$f^n(z) = z^{2^n}.$$

Tenemos que si $|z| < 1$ entonces $\mathrm{Orb}(z, f)$ tiende a 0. Si $|z| > 1$ entonces $\mathrm{Orb}(z, f)$ tiende a ∞.

La siguiente definición nos permite relacionar dos sistemas dinámicos (g, Y) y (f, X) mediante una función continua $\varphi\colon Y \longrightarrow X$.

Definición 1.4. Sean $g\colon Y \longrightarrow Y$ y $f\colon X \longrightarrow X$ sistemas dinámicos

(a) f es llamada *semiconjugada* de g si existe una función continua $\varphi\colon Y \longrightarrow X$ con rango denso tal que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$, esto es que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

conmuta.

(b) Si φ es un homeomorfismo entonces g y f se dicen *conjugados*.

La conjugación es una clase de equivalencia entre sistemas dinámicos, y sistemas dinámicos conjugados tienen el mismo compartamiento en su dinámica.

Definición 1.5. Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ de un sistema dinámico es *preservada bajo (semi)conjugación* si cuando un sistema dinámico $g\colon Y \longrightarrow Y$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$ entonces el sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$ que es (semi)conjugado de g también cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

Una forma de definir un sistema dinámico a partir de otro sistema dinámico f dado es restringirlo a un subconjunto *f-invariante*.

Definición 1.6. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Un subconjunto $Y \subset X$ se dice *f-invariante* o *invariante bajo f* si $f(Y) \subset Y$.

Si $Y \subset X$ es f-invariante entonces $f|_Y\colon Y \longrightarrow Y$ es un sistema dinámico.

Ejemplo 1.7. La función $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$, $z \mapsto z^2$ con $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ es un sistema dinámico, pues $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Esta función duplica el argumento del número complejo z.

Uno de los conceptos fundamentales de la teoría se define a continuación.

Definición 1.8. Un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$ se dice *topológicamente transitivo* si para cualquier par U, V de subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe $n \geq 0$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

La transitividad topólogica se puede interpretar como que f conecta todas las parte nos triviales de X. Veremos que la transitividad topológica puede deducirse de la existencia de un punto $x \in X$ cuya órbita bajo f es densa.

Proposición 1.9. La transitividad topólogica es preservada bajo semiconjugación.

Demostración. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ la semiconjugada de $g\colon Y \longrightarrow Y$ vía $\varphi\colon Y \longrightarrow X$. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como φ es continua y tiene rango denso entonces $\varphi^{-1}(U)$ y $\varphi^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos de Y. Entonces existe $y \in \varphi^{-1}(U)$ y $n \geq 0$ tal que $g^n(y) \in \varphi^{-1}(V)$. Entonces $\varphi(y) \in U$ y $f^n(\varphi(y)) = \varphi(g^n(y)) \in V$. $\square$

Proposición 1.10. Sea f una función continua en un espacio métrico X sin puntos aislados. Si f tiene una órbita densa entonces f es topológicamente transitiva.

La prueba sigue la idea de la Proposición 1.15 en [21].

Demostración. Suponemos que $x \in X$ tiene órbita densa bajo f. Sean U y V son subconjuntos abiertos no vacíos de X. Entonces existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x) \in U$. Note que

$$\mathrm{Orb}(x, f) \setminus \{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\} \subset \mathrm{Orb}(f^n(x), f).$$

Como el espacio métrico no tiene puntos aislados entonces se sigue que $\mathrm{Orb}(f^n(x), f)$ es un subconjunto denso. Luego existe $m \geq n$ tal que $f^m(x) \in V$. Esto implica que $f^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Lo que muestra que f es topológicamente transitiva. □

El recíproco de este resultado no es tan obvio, pero sí es verdadero si X es completo y separable, y es debido a G. D. Birkhoff (1920), que se puede consultar en [14]. De esta manera presentamos a continuación uno de los resultados más importantes en la teoría de la dinámica topológica, que viene precedido por el siguiente lema.

Lema 1.11. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) f es topológicamente transitiva.

(b) Para cualquier conjunto abierto no vacío U de X el conjunto $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.

Demostración. Un subconjunto D no vacío de un espacio topológico X es denso en X si para todo subconjunto abierto U no vacío de X se cumple $D \cap U \neq \emptyset$. La equivalencia entre (a) y (b) se sigue del hecho de observar que como f es topológicamente transitiva entonces para todo par de subconjuntos abiertos no vacíos U, V de X existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ si y sólo si $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. □

Un resultado más detallado de este lema se puede encontrar en la Proposición 1.10 de [21].

Teorema 1.12 (Teorema de transitividad de Birkhoff). Sea f una función continua en un espacio métrico separable y completo X sin puntos aislados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es topológicamente transitiva.

(b) Existe $x \in X$ cuya órbita bajo f es densa en X.

Si alguna de estas condiciones es válida entonces el conjunto de puntos en X cuya órbita bajo f es densa es un conjunto G_δ denso.

Demostración. $(a) \Leftarrow (b)$ Es inmediato por la Proposición 1.10.

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea f topológicamente transitiva, y denotamos por $\mathcal{D}(f)$ el conjunto de puntos en X que tienen órbita densa bajo f. Como X es separable, entonces tiene un conjunto denso numerable $\{y_j : j \geq 1\}$, luego las bolas de radio $\frac{1}{m}$ alrededor de y_j con $m, j \geq 1$ forman una base numerable $(U_k)_{k\geq 1}$ de la topología de X. Por tanto, $x \in \mathcal{D}(f)$ si y, sólo si, para cada $k \geq 1$, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x) \in U_k$. En otras palabras

$$\mathcal{D}(f) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U_k).$$

Por la continuidad de f, y por el hecho de que f es topológicamente transitiva, entonces en virtud del Lema 1.11 se sigue que cada conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U_k)$, $k \geq 1$, es abierto y denso. El teorema de categoría de Baire implica que $\mathcal{D}(f)$ es un conjunto G_δ denso y, por tanto, es no vacío. □

Proposición 1.13. La propiedad de tener órbita densa es preservada bajo semiconjugación.

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow X$ la semiconjugada de $g : Y \longrightarrow Y$ vía $\varphi : Y \longrightarrow X$. Sea $y \in Y$ con órbita densa bajo g. Si U es un subconjunto abierto no vacío de X etonces $\varphi^{-1}(U)$ es abierto y no vacío, así que existe $g^n(y) \in \varphi^{-1}(U)$ para algún $n \geq 0$. Pero entonces $f^n(\varphi(y)) = \varphi(g^n(y)) \in U$. □

Definición 1.14. Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Decimos que un sistema dinámico $f : X \longrightarrow X$ tiene *dependencia sensible de las condiciones iniciales* si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ con $d(x, y) < \varepsilon$ tal que para algún $n \geq 0$,

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

El número δ es llamado *constante de sensibilidad* para f.

Este hecho es conocido popularmente como el efecto mariposa. El cual dice que muy pequeñas diferencias inicialmente pueden tener consecuencias incontrolables. También se refiere a la estabilidad del sitema dinámico.

Definición 1.15. Sea $f : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico.

(*a*) Un punto $x \in X$ se dice *punto fijo* de f si $f(x) = x$.

(*b*) Un punto $x \in X$ se dice *punto periódico* de f si existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = x$. Se dice que n es el *período* de x si $f^k(x) \neq x$ para $k < n$. El conjunto de puntos periódicos se denota por $\mathrm{Per}(f)$.

Observe que un punto es periódico si y sólo si es punto fijo de alguna iteración f^n, $n \geq 1$.

Proposición 1.16. La propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos es preservada bajo semiconjugación.

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow X$ semiconjugada de $g : Y \longrightarrow Y$ vía $\varphi : Y \longrightarrow X$, y sea $U \subset X$ un conjunto abierto no vacío. Entonces $\varphi^{-1}(U)$ contiene un punto y con $g^n(y) = y$ para algún $n \geq 1$. Por tanto, $\varphi(y) \in U$ y $f^n(\varphi(y)) = \varphi(g^n(y)) = \varphi(y)$. □

Definición 1.17 (Caos de Devaney versión inicial). Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. El sistema dinámico $f : X \longrightarrow X$ se dice *caótico* (en el sentido de Devaney) si satsiface las siguientes condiciones

(a) f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales,

(b) f es topológicamente transitiva,

(c) f tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

La dependencia sensible de las condiciones inicales no es preservada bajo conjugación. Esto pues depende de la métrica propuesta en el espacio como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.18. Sea $f\colon]1,\infty[\longrightarrow]1,\infty[$ dado por $f(x)=2x$. Como $|f^n(x)-f^n(y)|=2^n|x-y|\to\infty$ cuando $x\neq y$ entonces f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con respecto a la métrica usual en $]1,\infty[$.

Si definimos en $]1,\infty[$ la métrica $d(x,y)=|\log x-\log y|$, la cual es equivalente, tenemos

$$\begin{aligned} d(f^n(x),f^n(y)) &= |\log f^n(x)-\log f^n(y)| = |\log 2^n x-\log 2^n y| \\ &= |\log x-\log y| = d(x,y), \quad \forall x,y\in X. \end{aligned}$$

Entonces f no tiene dependencia sensible en condiciones iniciales con respecto a d. En ambas versiones, f es conjugado por la identidad.

Sin embargo la dependencia sensible de las condiciones iniciales se puede obtener como consecuencia de las otras dos condiciones como veremos en el siguiente teorema, el cual puede consultarse en [4].

Teorema 1.19 (Banks-Brooks-Cains-Davis-Stacey). Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Si un sistema dinámico $f\colon X\longrightarrow X$ es topológicamente transitivo y tiene un conjunto denso de puntos periódicos entonces f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con respecto a cualquier métrica que defina la topología de X.

Demostración. Fijamos una métrica d en la topología de X. Vamos a probar primero que existe una constante $\eta>0$ tal que para cualquier punto $x\in X$ existe un punto periódico p tal que

$$d\left(x,f^n(p)\right)\geq\eta \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}_0.$$

En efecto como X no tiene puntos aislados podemos encontrar puntos periódicos p_1 y p_2 cuya órbitas son disjuntas. Por tanto,

$$\eta\colon=\inf_{m,n\in\mathbb{N}_0} d\left(f^m(p_1),f^n(p_2)\right)/2>0.$$

Entonces, por desigualdad triangular se sigue que para cualquier $x\in X$, y para $j=1$ ó $j=2$, que $d\left(x,f^n(p_j)\right)\geq\eta$ para todo $n\in\mathbb{N}_0$.

Afirmamos que f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta=\eta/4>0$. Sea $x\in X$ y $\varepsilon>0$, por lo expuesto anteriormente, existe un punto periódico q tal que

$$d\left(x,q\right)<\min\left(\varepsilon,\delta\right). \tag{1.1}$$

Sea N el período de q, anteriormente vimos que existe un punto periódico p tal que

$$d\left(x, f^n(p)\right) \geq \eta = 4\delta \text{ para } n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.2}$$

Como f es continua existe un vecindario V de p tal que

$$d\left(f^n(p), f^n(y)\right) < \delta \text{ para } y \in V \text{ y } n = 0, 1, ..., N. \tag{1.3}$$

Finalmente por la transitividad topológica de f podemos encontrar un punto z y $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $d(x, z) < \varepsilon$ y $f^k(z) \in V$. Sea $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $k \leq jN < k + N$. La desigualdad triangular junto con (1.2), (1.3) y (1.1) nos da que

$$\begin{aligned} d\left(f^{jN}(q), f^{jN}(z)\right) &= d\left(f^{jN}(q), f^{jN-k}f^k(z)\right) = d\left(q, f^{jN}(z)\right) \\ &\geq d\left(x, f^{jN-k}(p)\right) - d\left(f^{jN-k}(p), f^{jN-k}f^k(z)\right) - d(x, q) \\ &> 4\delta - \delta - \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Así, esto implica que $d\left(f^{jN}x, f^{jN}q\right) > \delta$ ó $d\left(f^{jN}x, f^{jN}z\right) > \delta$. Como ambos, z y q, distan menos que ε de x se sigue el resultado. □

El resultado anterior nos permite definir el caos sin la necesidad de exigir al sistema dinámico la condición de tener dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Definición 1.20 (Caos de Devaney). Un sistema dinámico $f\colon X \to X$ se dice *caótico*, en el sentido de Devaney, si satisface las siguientes condiciones

(a) f es topológicamente transitiva;

(b) f tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Como las propiedades de ser topológicamente transitiva y de tener un conjunto denso de puntos periódicos son preservadas bajo conjugación, se sigue inmediatamente la siguiente proposición.

Proposición 1.21. El caos de Devaney es preservado bajo semiconjugación.

Una propiedad más fuerte que la transitividad topológica es la de ser mezclante, que definimos a continuación.

Definición 1.22. Un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$ se dice *mezclante*, si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U, V de X, existe $N \geq 0$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \quad \forall n \geq N.$$

Observe que si una función f es mezclante entonces es topológicamente transitiva; y como en el caso de la transitividad topológica tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.23. La propieda de ser mezclante se preserva bajo semiconjugación.

Si tenemos dos espacios métricos X y Y sabemos que su producto cartesiano viene dado por $X \times Y = \{(x, y)\colon x \in X, y \in Y\}$, el cual es también un espacio métrico, con la métrica dada por

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2),$$

donde d_X y d_Y son las métricas definidas en X y Y respectivamente. Una base para la topología, inducida por la métrica, para el producto cartesiano es formada por los productos $U \times V$ de subconjuntos abiertos $U \subset X$ y $V \subset Y$.

Definición 1.24. Sean $f\colon X \to X$ y $g\colon Y \to Y$ sistemas dinámicos. La función $f \times g$ está definido por

$$f \times g\colon X \times Y \longrightarrow X \times Y, \quad (f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))\,.$$

La función $f \times g$ es continua, y sus iteradas vienen dadas por

$$(f \times g)^n = f^n \times g^n.$$

Los productos de más de dos espacios o funciones se definen de manera similar.

Teorema 1.25. Sean $f\colon X \longrightarrow X$ y $g\colon Y \longrightarrow Y$ sistemas dinámicos. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones.

(a) Si $f \times g$ tiene una órbita densa entonces f y g tienen una órbita densa.

(b) Si $f \times g$ es topológicamente transitiva entonces f y g son topológicamente transitivas.

(c) Si $f \times g$ es caótica entonces f y g son caóticas.

(d) Si f y g son topológicamente transitivas y al menos uno de ellos es mezclante entonces $f \times g$ es topológicamente transitiva.

(e) $f \times g$ es mezclante si y sólo si f y g son mezclantes.

Se omitirá la prueba, para ver detalles de la demostración se puede consultar la Proposición 1.42 en [21].

Definición 1.26. Un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$ se dice *débilmente mezclante* si $f \times f$ es topológicamente transitivo.

Dado que los productos $U \times V$ de conjuntos abiertos $U, V \subset X$ forman una base de la topología de $X \times X$, f es débilmente mezclante si y, sólo si, para cualquier $4-$tupla U_1, U_2, V_1, V_2 de subconjuntos de X abiertos no vacíos, existe $n \geq 0$ tal que

$$f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \ \text{ y } \ f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Observación 1. Para cualquier sistema dinámico se puede observar que

$$\text{mezclante} \implies \text{débilmente mezclante} \implies \text{topológicamente transitivo.}$$

Proposición 1.27. (a) La propiedad de ser débilmente mezclante es preservada bajo semiconjugación.

(b) Sean $f\colon X \longrightarrow X$ y $g\colon Y \longrightarrow Y$ sistemas dinámicos, si $f \times g$ es débilmente mezclante entonces f y g son débilmente mezclantes.

Demostración. (a) Si $\varphi\colon Y \longrightarrow X$ define la semiconjugada de $g\colon Y \longrightarrow Y$ a $f\colon X \longrightarrow X$ entonces $\varphi \times \varphi$ define una semiconjugada de $g \times g$ a $f \times f$, el resultado se sigue de la Proposición 1.9.

(b) Es consecuencia inmediata del Teorema 1.25.

□

Introducimos el siguiente concepto que nos ayudará en los argumentos de ciertas demostraciones que involucran el concepto de funciones débilmente mezclantes.

Definición 1.28. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Entonces, para cualquier par de conjuntos $A, B \subset X$, el *conjunto retorno de A a B* se define como

$$N_f(A,B) = N(A,B) = \{n \in \mathbb{N}_0 \colon f^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Usualmente se omite el subíndice f cuando no hay ambigüedad. Con respecto a esta definición, f es topológicamente transitivo (o mezclante) si y sólo si para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos U, V de X se tiene que el conjunto de retorno

$$N(U,V) \neq \emptyset \text{ (o cofinito, respectivamente).}$$

Y f es débilmente mezclante si y, sólo si, para cualquier $4-$tupla U_1, U_2, V_1, V_2 de subconjuntos de X abiertos no vacíos se tiene

$$N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2) \neq \emptyset.$$

Lema 1.29 (Truco de los 4 conjuntos). Sea $f\colon X \to X$ un sistema dinámico, y sean U_1, V_1, U_2, V_2 subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Entonces

(a) si existe una función continua $g\colon X \longrightarrow X$ que conmuta con f tal que

$$g(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \text{ y } g(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset,$$

entonces existen conjuntos abiertos no vacíos $U_1' \subset U_1$, $V_1' \subset V_1$ tal que

$$N(U_1', V_1') \subset N(U_2, V_2) \text{ y } N(V_1', U_1') \subset N(V_2, U_2).$$

Si, además, f es topológicamente transitiva entonces $N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2) \neq \emptyset$.

(b) Si f es topológicamente transitiva entonces

$$N(U_1,U_2) \cap N(V_1,V_2) \neq \emptyset \Longrightarrow N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2) \neq \emptyset.$$

El siguiente toerema es debido a Furstenberg, ver en [19], donde además se puede encontrar el Lema 1.29 implícitamente del cual hemos omitido la demostración.

Teorema 1.30. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico débilmente mezclante. Entonces el n-producto $f \times \cdots \times f$, n veces, es débilmente mezclante para $n \geq 2$.

Demostración. Probar que el n-producto es débilmente mezclante es equivalente a probar que el $2n$-producto es topológicamente transitivo por definición. Así que, probaremos por inducción que cada n producto $f \times \cdots \times f$ es topológicamente transitivo para $n \geq 2$. El caso $n = 2$ es claro dado que f es débilmente mezclante entonces $f \times f$ es topológicamente transitivo. Por tanto, suponemos que el n-producto es topológicamente transitivo. Para probar la transitividad topológica para el correspondiente $(n+1)$-producto necesitamos probar que dados subconjuntos abiertos no vacíos U_k, V_k de X, con $k = 1, ..., n+1$, se tiene que

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} N(U_k, V_k) \neq \emptyset. \tag{1.4}$$

En efecto, como f es débilmente mezclante existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^m(U_n) \cap U_{n+1} \neq \emptyset$ y $f^m(V_n) \cap V_{n+1} \neq \emptyset$, por el Lema 1.29 entonces existen conjuntos abiertos no vacíos $U'_n \subset U_n$, $V'_n \subset V_n$ con

$$N(U'_n, V'_n) \subset N(U_n, V_n) \cap N(U_{n+1}, V_{n+1}).$$

Por otro lado, la hipótesis de inducción implica que

$$\bigcap_{k=1}^{n-1} N(U_k, V_k) \cap N(U'_n, V'_n) \neq \emptyset,$$

lo cual implica (1.4). □

Proposición 1.31. Un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$ es débilmente mezclante si y sólo si para cualesquiera conjuntos abiertos no vacíos $U, V_1, V_2 \subset X$, se tiene que

$$N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Es directo de la definición de conjunto de retorno en el caso de que la función f es débilmente mezclante.

($\Leftarrow$) Sean U_1, U_2, V_1, V_2 subconjuntos de X abiertos no vacíos. Entonces por hipótesis existe $n \in N(U_1, U_2) \cap N(U_1, V_2)$. En particular $U = U_1 \cap f^{-n}(U_2)$ y $f^{-n}(V_2)$ son abiertos no vacíos. Aplicando la hipótesis nuevamente, podemos encontrar $m \in N(U, V_1) \cap N(U, f^{-n}(V_2))$. En particular, existe $x \in U$ con $f^m(x) \in f^{-n}(V_2)$. Entonces $f^m(f^n(x)) = f^n(f^m(x)) \in V_2$ y $f^n(x) \in U_2$, lo que prueba que $m \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$. Y Por tanto, f es débilmente mezclante. □

Proposición 1.32. Un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$ es débilmente mezclante si y sólo si, para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, se tiene que

$$N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset.$$

Demostración. Es suficiente probar que la condición establecida implica la condición de la Proposición 1.31. Sean U, V_1, V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $U_1 = U \cap f^{-n}(V_1)$ es abierto no vacío. Como las funciones topológicamente transitivas tienen rango denso, la hipótesis también implica que $f^{-n}(V_2)$ es abierto y no vacío, así que existe $m \in N(U_1, U_1) \cap N(U_1, f^{-n}(V_2))$. Por tanto, existen $x, y \in U_1$ con $f^m(x) \in U_1$ y $f^n(f^m(y)) \in V_2$. Tenemos entonces que $f^n(f^m(x)) \in V_1$, lo que implica que $n + m \in N(U, V_1) \cap N(U, V_2)$. □

Finalmente podemos caracterizar la propiedad débilmente mezclante en términos del tamaño de los conjuntos de retorno $N(U, V)$, o equivalentemente, en términos de la transitividad topológica de ciertas subsucesiones $(f^{n_k})_k$.

Definición 1.33. Una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_k$ de enteros positivos se dice *sindética* si

$$\sup_{k \geq 1} (n_{k+1} - n_k) < \infty.$$

Un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ se dice *sindético* si la sucesión de enteros positivos que forman A es sindética, o equivalentemente si su complemento no contiene intervalos de longitud arbitrariamente grande.

Teorema 1.34. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) f es débilmente mezclante.

(b) Para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, $N(U,V)$ contiene intervalos de longitud arbitrariamente grande.

(c) Para cualquier sucesión sindética $(n_k)_k$, la sucesión $(f^{n_k})_k$ es topológicamente transitiva.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sean U, V subconjuntos abiertos no vacíos de X, y sea $m \in \mathbb{N}$. Como en la prueba de la Proposición 1.32, cada conjunto $f^{-k}(V)$, $k = 1, \ldots, m$ es abierto y no vacío. Como el m-producto $f \times \cdots \times f$ es topológicamente transitivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset, \text{ para } k = 1, \ldots m.$$

Esto implica que $f^{n+k}(U) \cap V \neq \emptyset$ para $k = 1, \ldots, m$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Por la Proposición 1.31 es suficiente probar que dados cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U, V_1, V_2 de X se tiene $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$. Por ($b$) existe $m \in N(V_1, V_2)$ y, por tanto, un conjunto abierto no vacío $V_3 \subset V_1$ tal que $f^m(V_3) \subset V_2$. Además, por (b) existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $k + j \in N(U, V_3)$ para $j = 0, 1, \ldots, m$. En particular tenemos que $k + m \in N(U, V_1)$ y

$$f^{k+m}(U) \cap V_2 \supset f^{k+m}(U) \cap f^m(V_3) \supset f^m\left(f^k(U) \cap V_3\right) \neq \emptyset.$$

Lo que nos permite concluir que $k + m \in N(U, V_1) \cap N(U, V_2)$.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Se sigue directamente de las definiciones y de que un subconjunto de $\mathbb{N}_0$ contiene intervalos de longitud arbitrariamente grande si y sólo si cumple que toda sucesión es sindética. □

1.2. Dinámica de operadores

En esta sección definiremos el concepto de hiperciclicidad, el cual como veremos, es equivalente en algunas ocasiones al concepto de transitividad topológica cuando consideramos funciones lineales continuas entre espacios topológicos. Muchos de los conceptos de análisis funcional los tendremos presentes, tales como *seminormas, normas, espacios de Fréchet, espacios de Banach, espacios de Hilbert sobre un cuerpo* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ó* $\mathbb{R}$, *operadores lineales continuos entre tales espacios*. La dinámica que trataremos a lo largo de esta sección será para operadores $T\colon X \longrightarrow X$ donde X es un *espacio de Fréchet*.

Recordemos que un *espacio de Fréchet* es un espacio vectorial topológico cuya topología viene definida por una sucesión de seminormas que definen una métrica invariante por traslaciones y que con dicha métrica el espacio es completo.

Definición 1.35. Un *sistema dinámico lineal* es un par (T, X) que consiste de un espacio de Fréchet separable X y un operador $T\colon X \longrightarrow X$ lineal y continuo.

Usualmente omitiremos lineal y continuo cuando nos referimos a un operador T, diremos simplemente que T es un operador.

Definición 1.36. Un operador $T\colon X \longrightarrow X$ se dice *hipercíclico* si existe $x \in X$ cuya órbita bajo T es densa. En tal caso, x se dice que es un *vector hipercíclico* para T. El conjunto de vectores hipercíclicos para T es denotado por $HC(T)$.

El origen de esta terminología se explica fácilmente. Durante mucho tiempo los investigadores en teoría de operadores han estado estudiando el llamado vector cíclico en relación con el problema del subespacio invariante. Vectores con una propiedad más restringida son llamados supercíclicos.

Definición 1.37. Sea $T\colon X \longrightarrow X$ un operador. Un vector $x \in X$ se dice *cíclico* para T si el espacio generado por sus órbitas es denso en X, esto es

$$\overline{\operatorname{span}\{T^n x\colon n \geq 0\}} = X.$$

Un vector $x \in X$ es llamado *supercíclico* para T si su *órbita proyectiva*,

$$\{\lambda T^n x\colon n \geq 0, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

es densa en X.

Los operadores que poseen un vector cíclico (o supercíclico) se dicen cíclicos (o supercíclicos).

Como los espacios de Fréchet no tienen puntos aislados entonces el teorema de transitividad de Birkhoff nos facilita criterios para saber cuándo un operador T es hipercíclico.

Teorema 1.38 (Teorema de Transitividad de Birkhoff). Un operador T es hipercíclico si, y sólo si, es topológicamente transitivo. En este caso, el conjunto $HC(T)$ de vectores hipercíclicos es un conjunto G_δ denso.

El siguiente ejemplo es de un operador hipercíclico encontrado por D. Rolewicz en 1969; pero hay dos ejemplos anteriores, G. D. Birkhoff en 1929 fue el primero en encontrar un ejemplo de operadores hipercíclicos definidos en el espacio $H(\mathbb{C})$ de funciones enteras, denominados *operadores de Birkhoff*, y posteriormente G. R. MacLane en 1952 observó que el operador diferenciación, $D\colon f \longrightarrow f'$, en $H(\mathbb{C})$ también define un operador hipercíclico. Estos ejemplos pueden ser encontrados en [21].

Ejemplo 1.39 (Operadores de Rolewicz). Sea $X = l^p, 1 \leq p < \infty$ ó $X = c_0$, consideramos para $\lambda \in \mathbb{K}$

$$T\colon X \longrightarrow X, (x_1, x_2, x_3, ...) \longmapsto \lambda(x_2, x_3, x_4, ...).$$

Si $|\lambda| \leq 1$ entonces $\|T^n x\| = |\lambda|^n \|(x_{n+1}, x_{n+2}, ...)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ y $n \geq 0$. Por tanto, T no puede ser hipercíclico.

Pero si $|\lambda| > 1$ entonces T sí es hipercíclico. Sean U, V subconjuntos de X abiertos y no vacíos, se puede encontrar $x \in U$ y $y \in V$ de la forma

$$x = (x_1, x_2, ..., x_N, 0, 0, ...), \; y = (y_1, y_2, ..., y_N, 0, 0, ...), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Sea $n \geq N$. Defina $z \in X$ por $z_k = x_k$ si $1 \leq k \leq N$, y $z_k = \lambda^{-n} y_{k-n}$ si $n+1 \leq k \leq n+N$ y $z_k = 0$ en otro caso. Se obtiene entonces una sucesión con $T^n z = y$. Además $\|x - z\| = |\lambda^{-n}| \|y\| \to 0$, si $n \to \infty$.

Así $z \in U$ y $T^n z \in V$ para n suficientemente grande. Lo que prueba que T es topológicamente transitiva; y como estos espacios son espacios de Banach separables, entonces T es hipercíclico.

Como consecuencia de la Proposición 1.9 obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.40. La hipercilicidad es preservada bajo semiconjugación.

Anteriormente vimos que la definición de caos demandaba que un sistema dinámico f sea topológicamente transitivo y que exista un conjunto denso de puntos períodicos. Ahora en vista del Teorema 1.38 tenemos la siguiente definición de caos.

Definición 1.41 (Caos Lineal). Un operador T se dice *caótico en el sentido de Devaney* si satisface las siguientes condiciones.

(a) T es hipercíclico.

(b) T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Recordemos que la dependencia sensible de las condiciones iniciales es una consecuencia del caos en espacios métricos sin puntos aislados. Para operadores la hiperciclicidad implica la dependencia sensible de las condiciones iniciales como vemos en la siguiente proposición.

Proposición 1.42. Sea T un operador hipercíclico. Entonces T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales (con respecto a cualquier métrica invariante por traslaciones que defina la topología de X).

Demostración. Sea d una métrica invariante por traslaciones que induce la topología de X. Sean $\delta, \varepsilon > 0$ y $x \in X$ arbitrarios. Vamos a considerar los siguientes conjuntos abiertos no vacíos

$$U = \{z \in X \colon d(0, z) < \varepsilon\}, \; V = \{z \in X \colon d(0, z) > \delta\}.$$

Por la transitividad topológica de T, existe $n \in \mathbb{N}_0$ y $z \in U$ tal que $T^n z \in V$. Para el punto $y \colon = x + z$ tenemos que $d(x, y) = d(0, z) < \varepsilon$ y $d(T^n x, T^n y) = d(0, T^n z) > \delta$, lo que implica la dependencia sensible de las condiciones iniciales del operador T. $\square$

Estudiaremos las propiedades de los conceptos mezclante y débilmente mezclante para operadores. Como es usual, para un par de subconjuntos A y B de un espacio vectorial definimos $A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$.

Lema 1.43. Sea X un espacio de Fréchet. Si $U \subset X$ es un conjunto abierto no vacío entonces existe un conjunto abierto no vacío $U_1 \subset U$ y un 0-vecindario, W, tal que $U_1 + W \subset U$. Si W es un vecindario de 0 entonces existe un 0-vecindario W_1 tal que $W_1 + W_1 \subset W$.

La prueba del Lema 1.43 se puede consultar en el Lema 2.36 en [21].

La propiedad de ser mezclante también pide que los conjuntos de retorno $N(U, V)$, donde U, V son conjuntos abiertos no vacíos de X, sean cofinitos.

Proposición 1.44. Un operador T es mezclante si y sólo si, para cualquier conjunto abierto no vacío U de X y cualquier 0-vecindario W, los conjuntos de retorno

$$N(U, W) \quad y \quad N(W, U)$$

son cofinitos.

Demostración. ($\Leftarrow$) Como $N(U, W)$ es cofinito entonces T es mezclante por la Definición 1.28.

($\Rightarrow$) Sean U, V subconjuntos de X abiertos no vacíos. Por el Lema 1.43 existe subconjuntos abiertos no vacíos, U_1, V_1, de X y un 0-vecindario W_1 tal que $U_1 + W \subset U$ y $V_1 + W \subset V$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$, existen $u \in U_1$ y $w \in W$ tal que $T^n u \in W$ y $T^n w \in V_1$. Pero entonces $u + w \in U$ y $T^n (u + w) = T^n u + T^n w \in V$, lo que implica que $N(U, V)$ es cofinito. □

Ejemplo 1.45. Los operadores de Birkhoff, MacLane y Rolewicz son operadores hipercíclicos que son mezclantes.

Si tenemos dos espacios X y Y definimos el espacio

$$X \oplus Y = \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}.$$

Definición 1.46. Sean $S \colon X \longrightarrow X$ y $T \colon Y \longrightarrow Y$ operadores en espacios de Fréchet X y Y. Entonces el operador $S \oplus T$ está definido por

$$S \oplus T \colon X \oplus Y \longrightarrow X \oplus Y, \ (S \oplus T)(x, y) = (Sx, Ty).$$

Proposición 1.47. Sea $S \colon X \longrightarrow X$ y $T \colon Y \longrightarrow Y$ operadores. Si $S \oplus T$ es hipercíclico entonces T y S son hipercíclicos.

El recíproco es falso en general, en la nota posterior a la Proposición 4.16 en [21] se menciona un ejemplo de dos operadores S y T que son débilmente mezclantes y, por tanto, hipercíclicos, pero cuya suma directa $S \oplus T$ no es hipercíclico.

Proposición 1.48. Sean $S \colon X \longrightarrow X$ y $T \colon Y \longrightarrow Y$ operadores hipercíclicos. Si al menos uno de ellos es mezclante entonces $S \oplus T$ es hipercíclico. Además $S \oplus T$ es mezclante si y sólo si S y T son mezclantes.

En nuestro presente contexto, un operador $T\colon X \longrightarrow X$ es débilmente mezclante si, y sólo si, $T \oplus T$ es hipercíclico si y, sólo si, para U_1, U_2, V_1, V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X se tiene $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

A manera de observación tenemos la siguiente cadena de implicaciones, referente a operadores,

$$\text{mezclante} \implies \text{débilmente mezclante} \implies \text{hipercíclico.}$$

El contraejemplo de la segunda implicación anterior se debe al siguiente teorema del cual omitiremos demostración pero que sin embargo vale la pena mencionar.

Teorema 1.49 (De la Rosa-Read)**.** Existen operadores hipercíclicos en espacios de Banach que no son débilmente mezclantes.

Más detalles de este teorema se pueden encotrar en el trabajo realizado por De la Rosa y Read en [16].

Lema 1.50. Sea T un operador hipercíclico. Entonces, para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos U, V en X y cualquier 0-vecindario W existe un conjunto abierto no vacío $U_1 \subset U$ y un 0-vecindario $W_1 \subset W$ tal que

$$N(U_1, W_1) \subset N(V, W) \text{ y } N(W_1, U_1) \subset N(W, V).$$

Demostración. Usando la transitividad topológica y la continuidad de T podemos encontrar $m \in \mathbb{N}_0$, un conjunto abierto $U_1 \subset U$ y un 0-vecindario $W_1 \subset W$ tal que

$$T^m (U_1) \subset V \text{ y } T^m (W_1) \subset W.$$

Ahora, si $n \in N(U_1, W_1)$, entonces existe $x \in U_1$ con $T^n x \in W_1$. Se sigue entonces que $T^n T^m x = T^m T^n x \in W$, así $n \in N(V, W)$. De manera similar se obtiene que $N(W_1, U_1) \subset N(W, V)$. □

Teorema 1.51. Sea T un operador hipercíclico. Si, para cualquier conjunto abierto no vacío $U \subset X$ y cualquier 0-vecindario W existe un operador continuo $S\colon X \longrightarrow X$ que conmuta con T tal que

$$S(U) \cap W \neq \emptyset \text{ y } S(W) \cap U \neq \emptyset, \tag{1.5}$$

entonces T es débilmente mezlcante

Demostración. El truco de los 4-conjuntos y la transitividad topológica de T nos garantiza que para cualquier conjunto abierto no vacío $U \subset X$ y para cualquier 0-vecindario W,

$$N(U, W) \cap N(W, U) \neq \emptyset.$$

Por la Proposición 1.32 es suficiente probar que, dados cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existe $n \in N(U, U) \cap N(U, V)$. Para esto, en virtud del Lema 1.43, vamos a fijar conjuntos abiertos $U_1 \subset U, V_1 \subset V$ y un 0-vecindario W_1 tal que $U_1 + W_1 \subset U$ y $V_1 + W_1 \subset V$. El Lema 1.50 implica que existe un 0-vecindario $W_2 \subset W_1$ y un conjunto abierto no vacío $U_2 \subset U_1$ tal que $N(W_2, U_2) \subset N(W_1, V_1)$.

Ahora fijamos $n \in N(U_2, W_2) \cap N(W_2, U_2)$; entonces existen $u_2 \in U_2$ con $T^n u_2 \in W_2$, $w_1 \in W_1$ con $T^n w_1 \in V_1$ y $w_2 \in W_2$ con $T^n w_2 \in U_2$.
Si tomamos $u_3 = u_2 + w_2 \in U$ y $u_4 = u_2 + w_1 \in U$, entonces obtenemos que $T^n u_3 \in W_2 + U_2 \subset U$ y $T^n u_4 \in W_2 + V_1 \subset V$. Esto es, $n \in N(U, U) \cap N(U, V)$. □

Teorema 1.52. Un operador T es débilmente mezclante si y sólo si, para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$ y cualquier 0-vecindario W,

$$N(U,W) \cap N(W,V) \neq \emptyset.$$

Teorema 1.53. Sea T un operador hipercíclico. Si existe un subconjunto denso X_0 de X tal que la órbita de cada $x \in X_0$ es acotada entonces T es débilmente mezclante.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X y W un 0-vecindario. Si $(p_n)_n$ es una sucesión creciente de seminormas que definen la topología de X, entonces existe algún $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $p_k(x) < \varepsilon$ implica que $x \in W$.

Ahora, por hipótesis, podemos encontrar un punto $x \in X_0 \cap U$, se sigue que $M := \sup_{m \in \mathbb{N}_0} p_k(T^n x) < \infty$. Por tanto, $\frac{\varepsilon}{2M} T^n x \in W$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Por otro lado, por la transitividad topológica de T, existe $n \in \mathbb{N}_0$ con $\left(\frac{\varepsilon}{2M} T^n(W)\right) \cap U = T^n \left(\frac{\varepsilon}{2M} W\right) \cap U \neq \emptyset$. Por tanto, se satisfce la condición (1.5) para $S = \frac{\varepsilon}{2M} T^n$. $\square$

De esta manera, todo punto periódico tiene órbita acotada, al igual qque cualquier punto cuya órbita converge. Esto es válido para todo punto del *núcleo generalizado* de T

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \ker T^n.$$

Corolario 1.54. Cualquiera de los siguientes operadores son débilmente mezclantes:

(a) Operadores caóticos.

(b) Operadores hipercíclicos que tienen un conjunto denso de puntos para el cual las órbitas convergen.

(c) Operadores hipercíclicos con núcleo generalizado denso.

Proposición 1.55. Sea $T \colon X \longrightarrow X$ un operador. Entonces

(a) $T \oplus T$ es débilmente mezclante si y sólo si T es débilmente mezclante.

(b) $T \oplus T$ es caótico si y sólo si T es caótico

Contrario a la condición (a) un resultado más general a la condición (b) establece lo siguiente.

Proposición 1.56. Los operadores S y T son caóticos si y sólo si $S \oplus T$ es caótico.

1.3. Hiperespacios

Los conceptos anteriores de dinámica son individuales, es decir se estudia el comportamiento de la órbita bajo una función f de un punto dado en el espacio métrico X. El objetivo que nos planteamos es estudiar la dinámica colectiva, nos referimos con dinámica colectiva al estudio de todos los conceptos vistos anteriormente (órbitas, transitividad, caos, etc) aplicados a subconjuntos de X, es decir estudiaremos la dinámica de funciones evaluadas en subconjuntos del espacio métrico X.

Antes de introducirnos en este estudio, esta sección está enfocada en exhibir resultados importantes referentes a la topología y a la métrica que vamos a emplear; trabajaremos especialmente con la familia de subconjuntos compactos no vacíos de X que definimos a continuación.

Definición 1.57. Dado un espacio topológico X, el correspondiente *hiperespacio* de subconjuntos compactos no vacíos de X, lo denotamos por

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \colon K \text{ es compacto y no vacío } \}.$$

A $\mathcal{K}(X)$ lo dotamos con *la topología de Vietoris*, cuya base consiste de los conjuntos de la forma

$$\mathcal{V}(U_1, ..., U_k) = \left\{ K \in \mathcal{K}(X) \colon K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ y } K \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, ...k \right\},$$

donde $U_1, ..., U_k$ son subconjuntos de X abiertos no vacíos.

El hiperespacio de conjuntos compactos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ es conocido como el espacio donde viven los fractales, [30] y [7], dado que los fractales son usualmente compactos.

Cuando X es además un espacio métrico podemos definir en $\mathcal{K}(X)$ la denominada *métrica de Hausdorff*, cuya topología inducida en $\mathcal{K}(X)$ coincide con la topología de Vietoris. Además resulta que $\mathcal{K}(X)$ con dicha métrica de Hausdorff es un espacio métrico completo.

Definición 1.58 (Métrica de Hausdorff). Sea (X, d) un espacio métrico, el espacio $\mathcal{K}(X)$ está dotado con la *métrica de Hausdorff*

$$d_H(A, B) \colon = \text{máx} \left\{ \sup\{d(x_1, B) \colon x_1 \in A\}, \sup\{d(x_2, A) \colon x_2 \in B\} \right\},$$

con $A, B \in \mathcal{K}(X)$. Donde

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y) \colon y \in A\}, x \in X, A \in \mathcal{K}(X).$$

Podemos definir la métrica de Hausdorff en términos de vecindarios de conjuntos de la siguiente manera: si A es subconjunto no vacío en un espacio métrico (X, d), definimos su *ε-vecindario* como el conjunto

$$N_\varepsilon(A) = \{x \in X \colon d(x, A) < \varepsilon\}.$$

Si A y B son subconjuntos no vacíos de X entonces

$$d_H(A, B) = \text{ínf} \{\varepsilon > 0 \colon A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\}.$$

Las dos definiciones coinciden, y en algunos casos es más conveniente utilizar una que otra.

A continuación, veremos que efectivamente d_H define una métrica y que el espacio métrico $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es completo, antes es necesario tener en cuenta la siguiente definición que nos ayudará a cumplir nuestro propósito.

Definición 1.59. Un conjunto $K \subseteq X$ es *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $\{x_i \colon 1 \leq i \leq n\}$ de K tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \varepsilon)$. Donde $B_d(x, \varepsilon)$ denota la bola de centro x y radio ε con respecto a la métrica d.

No es díficil darse cuenta que cualquier conjunto totalmente acotado es acotado, pero el recíproco no es cierto en general.

Proposición 1.60. $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es un espacio métrico con la métrica de Hausdorff, d_H.

La prueba de la proposición 1.60 sigue las ideas de [18] y [2].

Demostración. Debemos probar que d_H cumple la definición de métrica. Es decir, que para tres subconjuntos compactos A, B y C en X no vacíos se tiene lo siguiente.

1. $d_H(A, B) > 0$.
2. $d_H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.
3. $d_H(A, B) = d_H(B, A)$.
4. $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(B, C)$.

Es claro que por definición

$$d_H(A, B) \geq 0 \text{ y } d_H(A, B) = d_H(B, A).$$

Obteniendo 1 y 3. Y como A, B son compactos no vacíos se tiene que son totalmente acotados y, por tanto, acotados. Entonces $d_H(A, B) < \infty$.

Si $A = B$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $A \subseteq N_\varepsilon(B) = N_\varepsilon(A)$ entonces $d_H(A, B) = 0$. Suponga ahora que $d_H(A, B) = 0$. Si $x \in A$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $x \in N_\varepsilon(B)$, de manera que $d(x, B) = 0$, y como B es compacto, es cerrado, entonces $x \in B$. Así $A \subseteq B$. De manera similar $B \subseteq A$. Por tanto, $A = B$, y tenemos la propiedad 2.

Verificamos ahora la propiedad 4, la desigualdad triangular. Si $x \in A$, $y \in B$ y $z \in C$, entonces tenemos que

$$d(x, B) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Así

$$d(x, B) \leq d(x, z) + d(z, B) \leq d(x, z) + d_H(C, B).$$

Tomando ínfimo a la derecha con respecto a $z \in C$, tenemos

$$d(x, B) \leq d(x, C) + d_H(C, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

De manera que $\sup\{d(x, B) \colon x \in A\} \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$. Por tanto, por simetría

$$d_H(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(x, B) \colon x \in A\}, \sup\{d(y, A) : y \in B\}\} \leq d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

Lo que prueba la desigualdad triangular, mostrando que d_H es una métrica. $\square$

Probaremos ahora que si el espacio métrico (X, d) es completo entonces el correspondiente hiperespacio de subconjuntos compactos, $\mathcal{K}(X)$, es completo cuando lo dotamos con la métrica de Hausdorff definida anteriormente. Antes veremos una serie de resultados que usaremos como herramienta para llevar a cabo la prueba de la completitud de $(\mathcal{K}(X), d_H)$, todos estos resultados y sus pruebas correspondientes están basados en el artículo de Barich [6].

Lema 1.61. Sea $x \in X$ y $A, \mathcal{K}(X)$, entonces existe $a_x \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a_x)$.

Demostración. Recordemos que $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) \colon a \in A\}$, por la caracterización de ínfimo podemos encontrar una sucesión $(a_n)_n$ en A tal que

$$d(x, a_n) \leq d(x, A) + \frac{1}{n}, \forall n.$$

Como A es compacto entonces es secuencialmente compacto, y luego existe una subsucesión $(a_{n_k})_k$ de $(a_n)_n$ que converge a algún $a_x \in A$. Entonces

$$d(x, A) \leq d(x, a_x) \leq d(x, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a_x) \leq d(x, A) + \frac{1}{n_k} + d(a_{n_k}, a_x).$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{n_k} + d(a_{n_k}, a_x)\right) = 0$, entonces

$$d(x, A) \leq d(x, a_x) \leq d(x, A).$$

Se sigue que $d(x, A) = d(x, a_x)$. □

Dado $A \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$ definimos

$$A + \varepsilon \colon = \{x \in X \colon d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Proposición 1.62. Para todo $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{K}(X)$ el conjunto $A + \varepsilon$ es cerrado.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{K}(X)$. Sea x un punto límite de $A + \varepsilon$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_n \subset (A + \epsilon) \setminus \{x\}$ que converge a x. Como $x_n \in A + \varepsilon$ para todo n, por definición $d(x_n, A) \leq \varepsilon$ para todo n. El Lema 1.61 nos garantiza que para cada n existe $y_n \in A$ tal que $d(x_n, A) = (x_n, y_n)$. Por tanto, $d(x_n, y_n) \leq \epsilon$ para todo n. Como A es secuencialmente compacto se sigue entonces que toda sucesión $(y_n)_n$ tiene una subsucesión $(y_{n_k})_k$ que converge a un punto $y \in A$.
Como $(x_n)_n$ converge a x entonces cualquier subsucesión $(x_{n_k})_k$ converge a x. Entonces

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) \longrightarrow d(x, y).$$

Como $(x_{n_k})_k$ y $(y_{n_k})_k$ son subsucesiones de $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ respectivamente, entonces $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \varepsilon$, para todo k. Por tanto, tenemos que $d(x, y) \leq \varepsilon$. Así $d(x, A) \leq \varepsilon$ y $x \in A + \varepsilon$. Como x es punto límite arbitrario se sigue que $A + \varepsilon$ e cerrado, dado que contiene a todos sus puntos límites. □

El siguiente resultado nos ayudará a probar la convergencia de sucesiones de Cauchy en la prueba de la completitud de $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

Teorema 1.63. Sean $A, B \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $d_H(A,B) \leq \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq B + \varepsilon$ y $B \subseteq A + \varepsilon$.

Demostración. Por simetría es suficiente probar que $d_H(A,B) \leq \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq B + \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Suponga que $A \subseteq B + \varepsilon$, entonces por definición del conjunto $B + \varepsilon$, para todo $a \in A$ se cumple que $d(a, B) \leq \varepsilon$. Es decir,

$$\sup\{d(a,B) : a \in A\} \leq \varepsilon.$$

De igual manera,

$$\sup\{d(b,A) : b \in B\} \leq \varepsilon.$$

Así $d_H(A,B) \leq \varepsilon$.

($\Rightarrow$) Suponga que $d_H(A,B) \leq \varepsilon$, entonces $\sup\{d(a,B) : a \in A\} \leq \varepsilon$. De manera que para todo $a \in A$ se sigue que $d(a,B) \leq \varepsilon$. Por definición $a \in B + \varepsilon$. Esto implica que $A \subseteq B + \varepsilon$. $\square$

Lema 1.64 (Lema de ampliación)**.** Sea $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(X)$ y sea $(n_k)_k$ una sucesión creciente de enteros positivos. Si $(x_{n_k})_k$ es una sucesión de Cauchy en X tal que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo k, entonces existe una sucesión de Cauchy $(y_n)_n$ en X tal que $y_n \in A_n$ para todo n, y $y_{n_k} = x_{n_k}$ para todo k.

Demostración. Suponga que $(x_{n_k})_k$ es una sucesión de Cauchy en X para la cual $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo k. Defina $n_0 = 0$. Y para cada n que satisface $n_{k-1} < n \leq n_k$ usando el Lema 1.61 se puede encontrar $y_n \in A_n$ tal que $d(x_{n_k}, A_n) = d(x_{n_k}, y_n)$. Vamos a ver que

$$d(x_{n_k}, y_n) = d(x_{n_k}, A_n) \leq \sup\{d(x_{n_k}, A_n \colon x_{n_k} \in A_{n_k})\} \leq d_H(A_{n_k}, A_n).$$

Como $x_{n_k} \in A_{n_k}$ entonces $d(x_{n_k}, y_{n_k}) = d(x_{n_k}, A_{n_k}) = 0$. Se sigue que $x_{n_k} = y_{n_k}$ para todo k.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_{n_k})_k$ es una sucesión de Cauchy en X, existe un entero positivo k_0 tal que $d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) \leq \varepsilon/3$ para todo $k, j \geq k_0$. Como $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(X)$, por definición existe un entero $N \geq n_{k_0}$ tal que $d_H(A_n, A_m) < \varepsilon/3$ para todo $n, m \geq N$. Entonces suponga que $n, m \geq N$, luego existen enteros $j, k \geq k_0$

tal que $n_{k-1} < n \leq n_k$ y $n_{j-1} < m \leq n_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
d\left(y_n, y_m\right) &\leq d\left(y_n, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) + d\left(x_{n_j}, y_m\right) \\
&= d\left(x_{n_k}, A_n\right) + d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) + d\left(x_{n_j}, A_m\right) \\
&\leq \sup\left\{d\left(x_{n_k}, A_n \colon x_{n_k} \in A_{n_k}\right)\right\} + d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) \\
&+ \sup\left\{d\left(x_{n_j}, A_m \colon x_{n_j} \in A_{n_j}\right)\right\} \\
&\leq d_H(A_{n_k}, A_n) + d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) + d_H(A_{n_j}, A_m) \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\left(y_n\right)_n$ es una sucesión de Cauchy en X tal que $y_n \in A_n$ para todo n, y $y_{n_k} = x_{n_k}$ para todo k. □

El siguiente lema hace uso del Lema de ampliación y nos garantiza que A es cerrado y no vacío.

Lema 1.65. Sea $\left(A_n\right)_n$ una sucesión en $\mathcal{K}(X)$ y sea A el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tal que existe una sucesión $(x_n)_n$ que converge a x y satisface $x_n \in A_n$ para todo n. Si $\left(A_n\right)_n$ es una sucesión de Cauchy entonces A es cerrado y no vacío.

Demostración. Probaremos primero que A es no vacío. Como $\left(A_n\right)_n$ es una sucesión de Cauchy, existe un entero n_1 tal que $d_H(A_m, A_n) < \frac{1}{2}$ para todo $n, m > n_1$. Similarmente, existe un entero $n_2 > n_1$ tal que $d_H(A_m, A_n) < \frac{1}{4}$ para todo $n, m > n_2$. Continuando este proceso, tenemos una sucesón creciente $(n_k)_k$ tal que $d(A_m, A_n) < \frac{1}{2^k}$ para todo $n, m > n_k$.

Sea $x_{n_1} \in A_{n_1}$ fijo, por el Lema 1.61 podemos tomar $x_{n_2} \in A_{n_2}$ tal que $d\left(x_{n_1}, x_{n_2}\right) = d\left(x_{n_1}, A_{n_2}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned}
d(x_{n_1}, x_{n_2}) = d\left(x_{n_1}, A_{n_2}\right) &\leq \sup\left\{d\left(x_{n_1}, A_{n_2}\right) : x_{n_1} \in A_{n_1}\right\} \\
&\leq d_H(A_{n_1}, A_{n_2}) < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Similarmente podemos escoger $x_{n_3} \in A_{n_3}$ tal que

$$\begin{aligned}
d(x_{n_2}, x_{n_3}) = d\left(x_{n_2}, A_{n_3}\right) &\leq \sup\left\{d\left(x_{n_2}, A_{n_3}\right) : x_{n_2} \in A_{n_2}\right\} \\
&\leq d_H(A_{n_2}, A_{n_3}) < \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Continuando este proceso podemos construir una sucesión $(x_{n_k})_k$ donde $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo k, y existe $x_{n_{k+1}} \in A_{n_{k+1}}$ tal que

$$\begin{aligned}
d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) = d\left(x_{n_k}, A_{n_{k+1}}\right) &\leq \sup\left\{d\left(x_{n_k}, A_{n_{k+1}}\right) : x_{n_k} \in A_{n_k}\right\} \\
&\leq d_H(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

Lo que implica que $(x_k)_k$ es una sucesión de Cauchy en X. Y como $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo k por el Lema de ampliación existe una sucesión de Cauchy $(y_n)_n$ en X tal que $y_n \in A_n$ para todo n y $y_{n_k} = x_{n_k}$ para todo k. Como X es completo, entonces la sucesión de Cauchy $(y_{n_k})_k$ converge a un punto $y \in X$. Como $y_n \in A_n$ para todo n entonces $y \in A$, por la definición del conjunto. De manera que A es no vacío.

Ahora probaremos que A es cerrado. Suponga que a es un punto límite de A. Entonces existe una sucesión $(a_k)_k \subset A \setminus \{a\}$ que converge a a. Como cada $a_k \in A$, existe una sucesión $(y_n)_n$ que converge a a_k y $y_n \in A_n$ para todo n. Luego, existe un entero n_1 y un punto $x_{n_1} \in A_{n_1}$ tal que $d(x_{n_1}, a_1) < 1$. Similarmente, existe un entero $n_2 > n_1$ y un punto $x_{n_2} \in A_{n_2}$ tal que $d(x_{n_2}, a_2) < \frac{1}{2}$. Continuando este proceso, podemos encontrar una sucesión creciente $(n_k)_k$ de enteros tales que $d(x_{n_k}, a_k) < \frac{1}{k}$ para todo k. Se sigue entonces que

$$d(x_{n_k}, a) \leq d(x_{n_k}, a_k) + d(a_k, a).$$

Al tomar límite cuando k tiende a infinito se tiene que la distancia entre los términos de $(x_{n_k})_k$ y a converge cero. Como cada sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, así se tiene que $(x_{n_k})_k$ es una sucesión de Cauchy para la cual $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo k. El Lema de ampliación garantiza que existe una sucesión de Cauchy $(y_n)_n$ en X tal que $y_n \in A_n$ para todo n y $y_{n_k} = x_{n_k}$ para todo k. Así $a \in A$, luego A es cerrado. $\square$

Para probar que $A \in \mathcal{K}(X)$, falta verificar que A es totalmente acotado. El siguiente lema nos da una herramienta para cumplir nuestro propósito de probar la completitud de $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

Lema 1.66. Sea $(B_n)_n$ una sucesión de conjuntos totalmente acotados en X y sea A un subconjunto cualquiera de X. Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que $A \subseteq B_N + \varepsilon$ entonces A es totalmente acotado.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos un entero positivo N tal que $A \subseteq B_N + \frac{\varepsilon}{4}$. Como B_N es totalmente acotado, por definición podemos escoger un conjunto finito $\{x_i : 1 \leq i \leq q\}$ donde $x_i \in B_N$ tal que

$$B_N \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} B_d\left(x_i, \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Por una reordenación de los x_i, podemos asumir que $B_d\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A \neq \emptyset$, para $1 \leq i \leq p$ y $B_d\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A = \emptyset$ para $i > p$. Entonces para cada $1 \leq i \leq p$, sea $y_i \in B_d\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A$. Afirmamos que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_d\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Sea $a \in A$. Entonces $a \in B_N + \frac{\varepsilon}{4}$. Por el Lema 1.61 existe $x \in B_N$ tal que $d(a, x) = d(a, D_N)$. Luego

$$d(a, x_i) \leq d(a, x) + d(x, x_i) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así $x \in B_d\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ para algún $1 \leq i \leq p$. Por tanto, tenemos que $y_i \in B_d\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A$ es tal que $d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De esto se sigue que

$$d(a, y_i) \leq d(a, x_i) + d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De manera que para cada $a \in A$ podemos encontrar un y_i para $1 \leq i \leq p$ tal que $a \in B_d(y_i, \varepsilon)$, entonces se sigue que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_d(y_i, \varepsilon)$. Lo que muestra que A es totalmente acotado. □

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 1.67. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es un espacio métrico completo.

Demostración. Sea $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(X)$ y defina el conjunto

$$A = \{x \in X \colon \text{ existe una sucesión } (x_n)_n \text{ con } x_n \in A_n \text{ y } x_n \longrightarrow x\}.$$

Queremos probar que $A \in \mathcal{K}(X)$ y $(A_n)_n$ converge a A.

Por el Lema 1.65 el conjunto A es no vacío y cerrado. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, existe un entero positivo N tal que $d_H(A_n, A_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$. Por el Teorema 1.63 entonces $A_m \subseteq A_n + \varepsilon$ para todo $m > n \geq N$. Sea $a \in A$, queremos probar que $a \in A_n + \varepsilon$. Fijamos $n \geq N$, por la definición del conjunto A existe una sucesión $(x_i)_i$ tal que $x_i \in A_i$ para todo i y $(x_i)_i$ converge a a. Por la Proposición 1.62 se sabe que $A_n + \varepsilon$ es cerrado. Como $x_i \in A_n + \varepsilon$ para cada i, se sigue entonces que $a \in A_n + \varepsilon$. Esto prueba que $A \subseteq A_n + \varepsilon$. Por el Lema 1.66, el conjunto A es totalmente acotado. Además A es completo, puesto que es un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo. Y como A es completo y totalmente acotado, entonces A es compacto. Por tanto, $A \in \mathcal{K}(X)$.

Vamos a probar ahora que $(A_n)_n$ converge a $A \in \mathcal{K}(X)$. Necesitamos probar que existe un entero positivo N tal que $d_H(A_n, A) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Para hacer esto el Teorema 1.63 nos dice que ocupamos verificar que

$$A_n \subseteq A + \varepsilon \text{ y } A \subseteq A_n + \varepsilon.$$

La segunda inclusión se obtuvo cuando verificamos que $A \in \mathcal{K}(X)$. Entonces sólo basta con verificar que $A_n \subseteq A + \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy podemos escoger un entero positivo N tal que $d_H(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n, m \geq N$. Además, como $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(X)$, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_i)_i$ de enteros positivos tal que $n_1 > N$ y tal que

$$d(A_m, A_n) < 2^{-(i+1)}\varepsilon, \text{ para todo } n, m \geq n_i.$$

Usamos el Lema 1.61 de la siguiente manera.

Como

$$A_n \subseteq A_{n_1} + \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces existe $x_{n_1} \in A_{n_1}$ tal que $d(y, x_{n_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Como
$$A_{n_1} \subseteq A_{n_2} + \frac{\varepsilon}{4},$$
entonces existe $x_{n_2} \in A_{n_2}$ tal que $d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
Continuando este proceso obtenemos una sucesión $(x_{n_i})_i$ tal que para todo entero positivo i se tiene que $x_{n_i} \in A_{n_i}$ y $d\left(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}\right) \leq 2^{-(i+1)}\varepsilon$. Esto implica que $(x_{n_i})_i$ es una sucesión de Cauchy, y por el Lema de ampliación el límite de la sucesión, a, está en A. Además vemos que

$$\begin{aligned} d(y, x_{n_i}) &\leq d(y, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x_{n_2}) + \cdots + d\left(x_{n_{i-1}}, x_{n_i}\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \cdots \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $d(y, x_{n_i}) \leq \varepsilon$ para todo i, se sigue que $d(y, a) \leq \varepsilon$ y por lo tanto $y \in A + \varepsilon$. Por tanto, se sabe que existe N tal que $A_n \subseteq A + \varepsilon$ para todo $n \geq N$, de lo que se sigue que $d_H(A_n, A) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Así $(A_n)_n$ converge a $A \in \mathcal{K}(X)$.

Todo lo anterior muestra que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es un espacio métrico completo. □

Terminaremos la presente sección con el siguiente teorema, que se puede encontrar en [27].

Teorema 1.68. Si (X, d) es un espacio métrico separable entonces $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es separable.

Demostración. Como X es separable entonces tiene un subconjunto denso numerable D. Consideramos $\mathcal{PF}(D) = \{F \subset D \colon F \text{ es finito}\}$, las partes finitas de D. Claramente $\mathcal{PF}(D)$ es numerable. Luego, para cada $K \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $R_\varepsilon = \{x_1, \ldots, x_m\}$ de K tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^m B_d(x_i, \varepsilon)$. Como D es denso en X, podemos tomar $K_\varepsilon = \{y_1, \ldots, y_m\} \subset D$ tal que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$, para $i = 1, \ldots, m$. Claramente $K_\varepsilon \in \mathcal{PF}(D)$. Vamos a probar que $d_H(K_\varepsilon, K) < 2\varepsilon$. En efecto, como

$$d(y_i, K) \leq d(y_i, x_i) + d(x_i, K) < 2\varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, m,$$

se tiene que
$$\sup_{y \in K_\varepsilon} d(y, K) \leq 2\varepsilon.$$
Por otro lado, para cada $x \in K$

$$d(x, K_\varepsilon) \leq d(x, R_\varepsilon) + d_H(R_\varepsilon, K_\varepsilon) < 2\varepsilon,$$

así que
$$\sup_{x \in K} d(x, K_\varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$
Por tanto, $d_H(K_\varepsilon, K) < 2\varepsilon$. Mostrando que $\mathcal{PF}(D)$ es denso en $(\mathcal{K}(X), d_H)$. □

Capítulo 2

Transitividad y caos en hiperespacios

Dado un espacio métrico (X, d) pretendemos estudiar los conceptos de transitividad topológica y caos de Devaney, que abreviamos por Dev C, aplicado a funciones definidas en el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$.

La idea es la siguiente, dada una función continua $f\colon X \longrightarrow X$, consideramos la función $\overline{f}$, que llamaremos *hiperextensión de* f, definida en el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X, que hemos denotado por $\mathcal{K}(X)$, dotado con la topología de Vietoris; la función $\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ es definida naturalmente por $\overline{f}\,(K) = \{f(x)\colon x \in K\}$; es decir, $\overline{f}(K)$ corresponde a la imagen del conjunto compacto no vacío K bajo f. Observe que como f es continua entonces $\overline{f}$ está bien definido. Además $\overline{f}$ es continua, para esto vemos lo siguiente: si U es subconjunto abierto no vacío de X por la continuidad de f se sabe que $f^{-1}(U)$ es también un subconjunto abierto de X, considere el abierto en $\mathcal{K}(X)$ dado por $\mathcal{V}(U) = \{K\colon K \subset U \text{ y } K \cap U \neq \emptyset\}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\overline{f}^{-1}(\mathcal{V}(U)) &= \{K\colon f(K) \subset U \text{ y } f(K) \cap U \neq \emptyset\} \\
&= \left\{K\colon K \subset f^{-1}(U) \text{ y } K \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset\right\} \\
&= \mathcal{V}(f^{-1}(U)).
\end{aligned}$$

Y el conjunto $\mathcal{V}(f^{-1}(U))$ también es abierto en $\mathcal{K}(X)$ y se sigue que $\overline{f}$ es continua.

Entonces, teniendo en cuenta ambas funciones queremos ver cuándo es posible *bajar* y *subir* en el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd}
f\colon X \arrow[r] & X \\
\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \arrow[r] \arrow[u, dashed, leftrightarrow, "¿\text{Dev C}?"'] & \mathcal{K}(X).
\end{tikzcd}$$

Cuando nos referimos a *bajar* nos preguntamos lo siguiente: si f es caótica en el sentido Devaney entonces ¿es $\overline{f}$ caótica en el sentido Devaney? Referente a *subir* la pregunta que nos planteamos es la recíproca: si $\overline{f}$ es caótica en el sentido Devaney entonces ¿es f caótica en el sentido Devaney?

La respuesta a ambas preguntas es negativa, por lo que el presente capítulo estará enfoncado en justificar las respuestas a tales interrogativas; y veremos que mediante una breve modificación en la defininción de caos de Devaney, que definiremos posteriormente, obtenemos los denominados *caos total de Devaney* y *caos exacto de Devaney*, los cuales abreviaremos por totDev C y exDev C, respectivamente, es posible verificar que si f es caótica, bajo estas nociones de caos, entonces $\overline{f}$ es caótica, pero no recíprocamente.

2.1. Transitividad topológica

Recordemos que la definición de caos de Devaney exige que la función continua f en cuestión sea topológicamente transitiva y tenga un conjunto denso de puntos periódicos, ver Definición 1.20. En esta sección nos ocuparemos del problema de la transitividad topológica, veremos si es posible o no verificar que la transitividad topológica de f es equivalente a la de $\overline{f}$.

El siguiente teorema nos dice que si f es débilmente mezclante, y por lo tanto topológicamente transitiva, entonces $\overline{f}$ es topológicamente transitiva. Es un resultado que Peris [30], Banks [5] y Liao, Wang y Zhang [29] probaron de manera independiente; en respuesta a los problemas planteados por Roman-Flores en [31].

Teorema 2.1. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ una función continua en un espacio topológico X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) f es débilmente mezclante.

(b) $\overline{f}$ es débilmente mezclante.

(c) $\overline{f}$ es topológicamente transitiva.

Exhibiremos la prueba dada por Peris en [30].

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Queremos probar que si $\mathcal{V}\left(U_1^i,...,U_k^i\right), \mathcal{V}\left(V_1^i,...,V_k^i\right)$, $i = 1,2$, son conjuntos abiertos no vacíos de la base canónica para la topología de Vietoris en $\mathcal{K}(X)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\overline{f}^n\left(\mathcal{V}\left(U_1^i,...,U_k^i\right)\right) \cap \mathcal{V}\left(V_1^i,...,V_k^i\right) \neq \emptyset, i = 1,2.$$

Como f es débilmente mezclante, el Teorema 1.30 nos dice que el m-producto $f \times \cdots \times f$ es topológicamente transitivo. Aplicando entonces este resultado para $m = 2k$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n\left(U_j^i\right) \cap V_j^i \neq \emptyset,\ i = 1,2,\ k = 1,2,...,k.$$

Podemos tomar $x_{i,j} \in U_j^i$ tal que $f^n\left(x_{i,j}\right) = y_{i,j} \in V_j^i$ para $i = 1,2$ y $j = 1,...,k$. Definimos entonces los compactos $K_1 = \{x_{1,1},...,x_{1,k}\}, K_2 = \{x_{2,1},...,x_{2,k}\}$. Por tanto,

$$K_i \in \mathcal{V}\left(U_1^i,...,U_k^i\right) \text{ y } \overline{f}^n(K_i) \in \mathcal{V}\left(V_1^i,...,V_k^i\right),\ i = 1,2,$$

pues $\overline{f}\left(K_i\right) = \{y_{i,1},...,y_{i,k}\}$. Por tanto, se tiene que

$$f^n\left(K_i\right) \in \overline{f}^n\left(\mathcal{V}\left(U_1^i,...,U_k^i\right)\right) \cap \mathcal{V}\left(V_1^i,...,V_k^i\right).$$

Probando que $\overline{f}$ es débilmente mezclante.

$(b) \Rightarrow (c)$ Cualquier sistema dinámico débilmente mezclante es topológicamente transitivo, ver la Observación 1. Entonces $\overline{f}$ es topológicamente transitiva.

$(c) \Rightarrow (a)$ Si $\overline{f}$ es topológicamente transitiva, usando la Proposición 1.31 vamos a probar que dados $U, V_1, V_2 \subset X$ abiertos no vacíos se tiene que

$$N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset.$$

Sean U, V_1, V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como $\overline{f}$ es topológicamente transitiva entonces para $\mathcal{V}(U)$ y $\mathcal{V}(V_1, V_2)$, abiertos en $\mathcal{K}(X)$, existe $n \geq 0$ tal que

$$f^n(\mathcal{V}(U)) \cap \mathcal{V}(V_1, V_2) \neq \emptyset.$$

Por tanto, existe un conjunto compacto no vacío $K \in \mathcal{V}(U)$ tal que

$$f^n(K) \in \mathcal{V}(V_1, V_2),$$

esto es que $f^n(K) \subset V_1 \cup V_2$ con $f^n(K) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(K) \cap V_2 \neq \emptyset$. De manera que existen $x, y \in K \subset U$ tales que $f^n(x) \in V_1$ y $f^n(y) \in V_2$, esto implica que

$$n \in N(U, V_1) \cap N(U, V_2).$$

Y por la Proposición 1.31, concluimos que f es débilmente mezclante. □

El teorema anterior nos dice que la transitividad topológica para f y $\overline{f}$ son equivalentes, siempre que a f se le exija ser débilmente mezclante. Note que siempre que $\overline{f}$ es topológicamente transitiva entonces f es topológicamente transitivo.

Recordemos que la propiedad de que un sistema dinámico sea mezclante es más fuerte que la transitividad topólogica. La siguiente proposición muestra que la propiedad de ser mezclante para f y su respectiva hiperextensión son equivalentes, ver [30].

Proposición 2.2. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ una función continua en un espacio topológico X. Entonces f es mezclante si y sólo si $\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ es mezclante.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sean $\mathcal{V}(U_1, ..., U_k)$ y $\mathcal{V}(V_1, ..., V_k)$ conjuntos abiertos arbitrarios en la base de la topología de Vietoris en $\mathcal{K}(X)$. Si f es mezclante entonces podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para $i = 1, ..., k$ y $n \geq N$

$$f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset.$$

Dado $n \geq N$, tomamos $u_i \in U_i$ tal que $f^n(u_i) \in V_i$, $i = 1, ..., k$. Por tanto, el conjunto $K = \{u_i\colon i = 1, ..., k\} \in \mathcal{V}(U_1, ..., U_k)$ y $\overline{f}^n(K) \in \mathcal{V}(V_1, ..., V_k)$, mostrando que $\overline{f}$ es mezclante.

$(\Leftarrow)$ En la otra dirección, si U, V son subconjuntos abiertos no vacíos de X entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(K_n) \in \mathcal{V}(V)$ para algún $K_n \in \mathcal{V}(U), n \geq N$. Entonces para cualquier $x_n \in K_n \subset U$ satisface $f^n(x_n) \in V$, $n \geq N$, lo que muestra que f es mezclante. □

Recordemos que si un sistema dinámico es mezclante entonces es topológicamente transitivo, de manera que la equivalencia de la transitividad topológica entre las funciones f y $\overline{f}$ es válida en caso de que alguna de ellas sea mezclante, o bien débilmente mezclante de acuerdo al Teorema 2.1.

La transitividad topológica se puede asegurar al menos en una dirección, según el Teorema 2.1

$$\overline{f} \text{ topológicamente transitiva } \Longrightarrow f \text{ topológicamente transitiva.}$$

El resultado recíproco no es cierto; el siguiente ejemplo propuesto por Roman-Flores en [31] nos muestra una función f que es topológicamente transitiva pero su hiperextensión $\overline{f}$ no lo es.

Ejemplo 2.3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un número irracional y considere la función $f_\alpha \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ definida por $f_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$, las rotaciones irracionales en el círculo. Vamos a probar que f_α es topológicamente transitiva. Para esto, como $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$ entonces $f_\alpha^k(1) = e^{ik\alpha} \neq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces los números $f_\alpha^k(1) = e^{ik\alpha} \in \mathbb{T}$ son todos distintos. Luego para $w \in \mathbb{T}$ y $\varepsilon > 0$ podemos encontrar números enteros positivos m y n, con $n < m$ tales que definiendo

$$\delta \colon = |f_\alpha^n(1) - f_\alpha^m(1)| = |e^{in\alpha} - e^{im\alpha}| < \varepsilon,$$

dado que $\mathbb{T}$ tiene longitud finita.

Luego

$$|f_\alpha^{m-n}(1) - 1| = |e^{i\alpha(m-n)} - 1| = |e^{im\alpha} - e^{in\alpha}| = \delta < \varepsilon.$$

Si tomamos $n_k = k(m-n)$, $k \geq 0$. Entonces la sucesión $(f_\alpha^{n_k}(1))_k \subset \mathbb{T}$ es tal que

$$|f_\alpha^{n_k}(1) - f_\alpha^{n_{k+1}}(1)| = \delta < \varepsilon, \text{ para todo } k \geq 0.$$

Es decir, existe $k \geq 0$ tal que $|f_\alpha^{n_k}(1) - w| < \varepsilon$. Mostrando que las órbitas de rotaciones irracionales son densas en $\mathbb{T}$. Luego el teorema de transitividad de Birkhoff, Teorema 1.12, implica que f_α es topológicamente transitivo.

Recordemos que el diámetro de un subconjunto A en un espacio métrico (X,d) viene dado por el número real

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

Si $K \in \mathcal{K}(\mathbb{T})$, entonces $\operatorname{diam}(K) = \operatorname{diam}\left(\overline{f_\alpha}(K)\right)$. Sea $K \in \mathcal{K}(\mathbb{T})$ tal que $\operatorname{diam}(K) = 1$. Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $1 - \varepsilon > \varepsilon$ y $U = B(K, \varepsilon/2)$ y $V = B(\{1\}, \varepsilon/2)$ se tiene

$$F \in U = B(K, \varepsilon/2) \Longrightarrow \operatorname{diam}(F) \leq 1 - \varepsilon.$$

$$G \in V = B(\{1\}, \varepsilon/2) \Longrightarrow \operatorname{diam}(G) \leq \varepsilon.$$

Entonces $\operatorname{diam}\left(\overline{f_\alpha}^n(F)\right) \geq 1 - \varepsilon > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$; y por tanto, $\overline{f_\alpha}^n(U) \cap V = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que muestra que $\overline{f_\alpha}$ no es topológicamente transitiva.

En el contexto de sistemas dinámicos lineales Bayart y Matheron, en [9], construyeron operadores T en espacios clásicos de Banach tales como l^p $(1 \leq p < \infty)$ y c_0, que son topológicamente transitivos, pero no son débilmente mezclantes. En virtud del Teorema 2.1 las respectivas hiperextensiones, $\overline{T}$, de tales operadores no son topológicamente transitivas.

Siguiendo en el contexto de sistemas dinámicos lineales, el Criterio de Hiperciclicidad, ver Teorema 3.12 en [21], nos permite asegurar cuándo un operador $T\colon X \longrightarrow X$ es débilmente mezclante, en particular topológicamente transitivo.

Teorema 2.4 (Criterio de Hiperciclicidad). Sea X un espacio separable de Fréchet y $T\colon X \longrightarrow X$ un operador. Si existen subconjuntos densos $D, D' \subset X$ y una sucesión creciente de enteros positivos $(n_k)_k$ tal que las siguientes propiedades son validas:

(a) $T^{n_k} z \longrightarrow 0$ para todo $z \in D$.

(b) Para cada $z' \in D'$, existe una sucesión $(x_k)_k$ en X tal que $x_k \longrightarrow 0$ y $T^{n_k} x_k \longrightarrow z'$.

Entonces T es débilmente mezclante y, en partícular, hipercíclico.

Teorema 2.5. Sea $T\colon X \to X$ un operador en un espacio de Banach separable X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) T satisface el Criterio de Hiperciclicidad.

(b) $\overline{T}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ es topológicamente transitivo.

Demostración. Como una consecuencia del Teorema 2.1 se tiene que (a) implica (b). Bès y Peris en [13] probaron que la propiedad de ser débilmente mezclante es equivalente al hecho de que un operador $T\colon X \longrightarrow X$ satiface el Criterio de Hiperciclicidad, obteniendo de esta manera que (b) implica (a). $\square$

Resumiendo lo visto hasta ahora tenemos lo siguiente:

$$\overline{f} \text{ topológicamente transitiva} \quad \Rightarrow \quad f \text{ topológicamente transitiva},$$

$$f \text{ topológicamente transitiva} \quad \not\Rightarrow \quad \overline{f} \text{ topológicamente transitiva}.$$

Según la definición de caos de Devaney entonces no se puede *bajar* en el esquema planteado al inicio del capítulo puesto que no se cumple en general que si f es topológicamente transitiva entonces $\overline{f}$ sea topológicamente transitiva.

Observe que el Teorema 2.1 nos garantiza que se pueda *subir* en cuanto a la transitividad topológica, esto es que $\overline{f}$ topológicamente transitiva implica f topológicamente transitiva; se esperaría, de acuerdo a las respuestas de las preguntas planteadas anteriormente, que el problema en esa dirección, para el caos de Devaney, esté en la propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos; nos enfocaremos en esto en la siguiente sección.

2.2. Conjunto denso de puntos periódicos

Dado un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$, la propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos es necesaria para que f sea caótica de acuerdo a la noción de caos Devaney; esta sección estará totalmente enfocada en dicha propiedad; pretendemos estudiar si la propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos es equivalente para una función f y su respectiva hiperextensión $\overline{f}$.

Teorema 2.6. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistena dinámico en un espacio métrico X. Si f tiene un conjunto denso de puntos periódicos entonces su hiperextensión $\overline{f}$ tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Nos basaremos en la prueba Banks (Lemma 1, [5]).

Demostración. Es suficiente probar que para cualquier conjunto abierto no vacío $\mathcal{V}(U_1, \ldots, U_n)$ en la base de la topología de Vietoris de $\mathcal{K}(X)$ existe un conjunto compacto que es periódico bajo $\overline{f}$. Como el sistema dinámico f tiene un conjunto denso de puntos periódicos entonces existen puntos periódicos $a_i \in U_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{V}(U_1, \ldots, U_n)$ es compacto. Tomando $m = \operatorname{mcm}(p_1, \ldots, p_n)$ (mínimo común múltiplo) donde $p_1, \ldots, p_n$ son los períodos respectivos de $a_1, \ldots, a_n$ se tiene que $\overline{f}^m(A) = A$. □

Definición 2.7. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Un punto $x \in X$ se dice *recurrente regularmente* si para todo vecindario V de x, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^{nk}(x) \in V$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

El siguiente resultado hace uso de la definición anterior para concluir que $\overline{f}$ tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Lema 2.8. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico en un espacio métrico compacto (X, d). Si el conjunto de todos los puntos recurrentes regularmente de f es denso en X, entonces su hiperextensión $\overline{f}$ tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Demostración. Es suficiente probar que para todo subconjunto abierto no vacío $U \subseteq X$ existe un punto periódico para $\overline{f}$ en $\mathcal{V}(U)$. Por compacidad de X existe un conjunto abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $\overline{V} \subset U$ ($\overline{V}$ denota la clausura de V). Podemos encontrar un punto recurrente regularmente $x \in V$. Luego existe un entero positivo n tal que $\operatorname{Orb}(x, f^n) \subset V$. Por tanto, $\overline{\operatorname{Orb}(x, f^n)} \subset \overline{V}$, y en partícular todos de los puntos límites de $\operatorname{Orb}(x, f^n)$ están en $\overline{V}$, esto es que $\omega(x, f^n) \subset \overline{V}$. Como $\omega(x, f) \in \mathcal{K}(X)$ y $\overline{f}^n(\omega(x, f^n)) = \omega(x, f^n)$ podemos encontrar un punto periódico para $\overline{f}$ en $\mathcal{V}(U)$. □

Ejemplo 2.9. Banks en [5] muestra un ejemplo de un sistema dinámico f que es topológicamente transitivo tal que $\overline{f}$ tiene un conjunto denso de puntos periódicos pero f no. Lo que hace es tomar el espacio de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y darle una estructura de grupo topológico abeliano definiendo la suma

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (z_1, z_2, \ldots),$$

donde $z_i = x_i + y_i + c_i \mod 2, c_1 = 0$ y $c_{i+1} = x_i + y_i + c_i(\text{div}2)$ para $i > 1$. Con esta definición de suma se tiene que

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots) + (1, 0, 0, \ldots)$$

es un homeomorfismo que tiene órbita densa, por el teorema de transitividad de Birkhoff es topológicamente transitivo; pero no tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Luego como $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es compacto entonces $\mathcal{K}(X) = 2^X$ es el dominio de su hiperextensión $\overline{f}$. Y se afirma que se puede mostrar que los conjuntos conocidos como *conjuntos cilindros*

$$C\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] = \left\{(y_1, y_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \colon y_i = x_i \text{ para } i \leq n\right\},$$

donde $x_1, x_2, \ldots x_n \in \{0,1\}$ forman una base de conjuntos abiertos (cerrados) para $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y concluir que estos cilindros son periódicos bajo $\overline{f}$ dado que

$$\overline{f}^{2^n}\left(C\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]\right) = C\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right].$$

Luego el conjunto de uniones finitas de conjuntos cilindros forman un conjunto denso de puntos periódicos para $\overline{f}$. El problema con está función es que $\overline{f}$ tampoco es topológicamente transitiva; en [22] resuelven el problema planteado por Banks en [5] donde dice que sería interesante encontrar una función f que no tenga un conjunto denso de puntos periódicos pero que $\overline{f}$ sea topológicamente transitiva y que el conjunto de sus puntos periódicos sea denso; esto lo mostraremos al final del Capítulo 4 dado que debemos recurrir a las propiedades de especificación.

Con esto tenemos que la propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos no es equivalente para f y para $\overline{f}$. Podemos concluir entonces lo siguiente

$$f \text{ es Dev C } \nRightarrow \overline{f} \text{ es Dev C.}$$

Esa dirección no se cumple porque hemos visto que si f es topológicamente transitiva no necesariamente se tiene que $\overline{f}$ es topológicamente transitiva, ver Ejemplo 2.3 y los comentarios posteriores.

Además se tiene que

$$\overline{f} \text{ es Dev C } \nRightarrow f \text{ es Dev C,}$$

dado que en el Ejemplo 2.9, vimos que $\overline{f}$ tiene un conjunto denso de puntos periódicos pero f no.

Concluimos que bajo la noción de caos de Devaney no se puede en general *subir* ni *bajar* en el esquema planteado al inicio del presente capítulo. Es decir, no se cumple en general que las propiedades de ser caótica en el sentido de Devaney de una función y de su hiperextensión sean equivalentes.

En el contexto de operadores lineales continuos, Bernardes, Peris y Rodenas (Teorema 2.2, [12]) afirman que el caos en el sentido de Devaey para un operador T definido en un espacio localmente convexo completo, y su respectiva hiperextensión $\overline{T}$ son equivalentes. En la prueba se usa el siguiente teorema.

Teorema 2.10 (Punto fijo de Schauder-Tychonoff). Si K es subconjunto no vacío, compacto y convexo en un espacio localmente convexo X, y $f \colon K \longrightarrow K$ es continua, entonces $f(p) = p$ para algún $p \in K$.

La demotración del Teorema del punto fijo de Schauder-Tychonoff puede encontrarse en el Teorema 5.28 en [32].

Considere el conjunto $\mathcal{C}(X)$ de todos los elementos convexos de $\mathcal{K}(X)$ dotado con la topología inducida por la topología de Vietoris de $\mathcal{K}(X)$ y defina el operador $\widetilde{T}\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ obtenido de restringir $\overline{T}$ al conjunto $\mathcal{C}(X)$. Por otro lado, considere el operador $S\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$, definido por $S(K) = \overline{co}(K)$, la *envoltura convexa cerrada* de K. Resulta que si X es un espacio localmente convexo y completo entonces S es continua, ver Lema 2.1 en [12], y tiene rango denso. De manera que $\overline{T}$ es semiconjugado de $\widetilde{T}$ vía S. Por tanto, se cumple el siguiente teorema, ver Teorema 2.2 en [12].

Teorema 2.11. Si T es un operador lineal continuo en un espacio localmente convexo y completo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) T es caótica en el sentido de Devaney.

(b) $\overline{T}$ es caótica en el sentido de Devaney.

(c) $\widetilde{T}$ es caótica en el sentido de Devaney.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Como T tiene caos en el sentido de Devaney, entonces T es débilmente mezclante por el Corolario 1.54. Por tanto, por el Teorema 2.1 se sigue que $\overline{T}$ es topológicamente transitiva. Y por el Teorema 2.6 aplicado a T, se sigue que si T tiene un conjunto denso de puntos periódicos entonces su hiperextensión $\overline{T}$ tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

(b) $\Rightarrow$ (c) Como el caos de Devaney se preserva bajo semiconjugación entonces si $\overline{T}$ es caótica en el sentido de Devaney también lo es $\widetilde{T}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Claramente T es topológicamente transitiva. En efecto si U y V son subconjuntos abiertos no vacíos de X los conjuntos

$$U' = \mathcal{V}(U) \cap \mathcal{C}(X) \text{ y } V' = \mathcal{V}(V) \cap \mathcal{C}(X)$$

son abiertos no vacíos en $\mathcal{C}(X)$. Como $\widetilde{T}$ es topológicamente transitiva, entonces existe $n \geq 0$ y $K' \in U'$ tal que $\widetilde{T}^n(K') \in V'$. Por tanto, existe $x \in K' \subset U$ tal que $T^n x \in V$. Probamos ahora que T tiene un conjunto denso de puntos periódicos, por hipótesis existe $K \in U'$ que es periódico para $\widetilde{T}$; es decir $\widetilde{T}^n(K) = K$ para algún $n \geq 1$. Como K es no vacío, convexo y compacto, el teorema de punto fijo de Schauder-Tychonoff concluye que existe un punto $y \in U \cap \operatorname{Per}(T)$. □

2.3. Reformulaciones del caos de Devaney

En la presente sección mostraremos que si reformulamos la noción de caos de Devaney, añadiendo ciertas condiciones extra, obtenemos las nociones *caos total de Devaney* (totDev C) y *caos exacto de Devaney* (exDev C), se tiene que

$$
\begin{array}{ccc}
f\colon X & \longrightarrow & X \\
 & \Big\downarrow \text{totDev C, exDev C} & \\
\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) & \longrightarrow & \mathcal{K}(X).
\end{array}
$$

Esto es que las nociones de caos total de Devaney y caos exacto de Devaney en la función f implican las mismas nociones de caos, respectivamente, de su hiperextensión $\overline{f}$. Pero no recíprocamente.

2.3.1. Caos total de Devaney

Definición 2.12. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico en un espacio métrico X, se dice que f es *totalmente transitiva* si para cada $n \in \mathbb{N}$ las iteraciones f^n son topológicamente transitivas.

Note que si f es totalmente transitiva entonces f es topológicamente transitiva, basta tomar $n = 1$.

La siguiente proposición relaciona el concepto de totalmente transitiva con la propiedad de ser débilmente mezclante.

Proposición 2.13. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico débilmente mezclante, entonces f es totalmente transitiva.

Siguiendo la idea expuesta por Banks en (Teorema 1(e), [5]) realizamos la siguiente prueba.

Demostración. Dado $m \geq 1$ y U, V subconjuntos abiertos no vacíos de X. El conjunto $f^{-i}(V)$ es abierto no vacío para $i = 0, \ldots, m$, entonces como f es débilmente mezclante existe $k \geq 1$ tal que $f^k(U) \cap f^{-i}(V) \neq \emptyset$ para $i = 0, \ldots, m$. Por el algoritmo de la división existen enteros $q \geq 0$ y r tales que $k = qm + r$, con $0 \leq r \leq m - 1$; de esto se sigue que $0 < m - r \leq m$. Por tanto, $f^k(U) \cap f^{-(m-r)}(V) \neq \emptyset$, así

$$U \cap f^{-(k+m-r)}(V) = U \cap f^{-(q+1)m}(V) \neq \emptyset,$$

y por tanto, $f^{m(q+1)}(U) \cap V \neq \emptyset$. □

Las siguiente cadena de implicaciones se cumple, por la proposición anterior, para un sistema dinámico cualquiera f

$$
\begin{array}{c}
\text{mezclante} \\
\Downarrow \\
\text{débilmente mezclante} \\
\Downarrow \\
\text{totalmente transitiva} \\
\Downarrow \\
\text{topológicamente transitiva.}
\end{array}
$$

Lema 2.14. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico caótico en el sentido de Devaney y totalmente transitivo. Entonces f es débilmente mezclante.

Demostración. Vamos a probar que dados U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X se tiene que

$$N(U,U) \cap N(U,V) \neq \emptyset.$$

Y luego la Proposición 1.32 nos permite concluir el teorema.

Como f es caótica en el sentido Devaney entonces f es topológicamente transitiva y tiene un conjunto denso de puntos periódicos. Por la transitividad topológica de f entonces existe $x \in U$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ con $f^{n_1}(x) \in V$. Como los puntos periódicos de f forman un conjunto denso en X entonces existe un punto periódico $y \in U$ de f tal que $f^{n_1}(y) \in V$ y además $f^p(y) = y$ para algún $p \in \mathbb{N}$, donde p es le período de y. Por tanto,

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \text{ con } n = n_1 + jp, \; j = 0, 1, 2 \ldots$$

Sea $f^{n_1}(U) = U_1$. Aunque U_1 no es abierto en general, sí podemos asegurar que tiene interior no vacío. En efecto, como sabemos que existe $x \in U$ tal que $f^{n_1}(x) \in V$ y V es abierto, existirá una bola abierta $B_1 \subset V$ de centro $f^{n_1}(x)$. Como U también es abierto y por continuidad de la función f^{n_1} podremos encontrar otra bola abierta $B_2 \subset U$ de centro X tal que $f^{n_1}(B_2) \subset B_1$. Por tanto, U_1 tiene interior no vacío y, como f es totalmente transitiva, podemos aplicar la transitividad topológica de f^p a U_1 y U para encontrar un entero $n_2 \geq 0$ tal que

$$f^{pn_2}(U_1) \cap U \neq \emptyset.$$

Tomando $j = n_2$ en la definición de n obtenemos $n = n_1 + n_2 p$, y vemos que

$$f^n(U) \cap V = f^{n_1 + n_2 p}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Y por otro lado se puede ver que

$$f^n(U) \cap U = f^{n_1 + n_2 p}(U) \cap U = f^{pn_2}(U_1) \cap U \neq \emptyset.$$

De manera que $n \in N(U,U) \cap N(U,V)$. Luego la Proposición 1.32 nos permite concluir que f es débilmente mezclante. □

Definición 2.15. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico, decimos que f tiene *caos total* en el sentido de Devaney si satisface las siguientes condiciones.

(a) f es totalmente transitivo.

(b) f tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

El Lema 2.14 se puede escribir de la siguiente manera.

Teorema 2.16. Si $f\colon X \longrightarrow X$ es un sistema dinámico que tiene caos total en el sentido Devaney, entonces f es débilmente mezclante.

En virtud del Teorema 2.1 se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.17. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico en un espacio topológico X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) f es débilmente mezclante.

(b) $\overline{f}$ es débilmente mezclante.

(c) $\overline{f}$ es totalmente transitiva.

(d) $\overline{f}$ es topológicamente transitiva.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Es inmediato del Teorema 2.1.

$(b) \Rightarrow (c)$ La Proposición 2.13 aplicada a la función $\overline{f}$ implica que $\overline{f}$ es totalmente transitiva.

$(c) \Rightarrow (d)$ Es inmediato dado que $\overline{f}$ totalmente transitiva implica que $\overline{f}$ es topológicamente transitiva, por la definición.

$(d) \Rightarrow (a)$ Otra vez por el Teorema 2.1 el resultado es inmediato. □

Note que en el Teorema 2.17 la equivalencia entre la transitividad topológica de $\overline{f}$ y la transitividad total de $\overline{f}$ en $\mathcal{K}(X)$ es un resultado que nos asegura que el caos total en el sentido de Devany y el caos de Devaney para funciones definidas en el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$ es equivalente.

El siguiente lema es una generalización del Lema 2.14.

Lema 2.18. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico que tiene caos total en el sentido de Devaney. Entonces f^n es débilmente mezclante para $n = 1, 2, \ldots$.

La demostración es similar a la del Lema 2.14, que es el caso cuando $n = 1$; y está basada en la demostración dada en (Lema 4, [8]). Se debe tener en cuenta el cambio de la terminología dada en [8], pues Bauer y Sigmund llaman *F-fluidos* (en inglés *F-flow*) a los sistemas dinámicos f que tienen caos total en el sentido de Devaney.

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y sea $n > 0$. Como f tiene caos total en el sentido de Devaney entonces el conjunto de sus puntos periódicos es denso en X. Además f^n es topológicamente transitiva, entonces existe $x \in U$ y $k_1 \geq 0$ tal que $f^{nk_1}(x) \in V$. Como los puntos periódicos son densos existe $y \in U$ tal que $f^{nk_1}(y) \in V$ y $f^{np}(y) = y$ para algún $p \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$f^m(U) \cap V \neq \emptyset \text{ para } m = n(k_1 + jp),\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Sea $f^{nk_1}(U) = U_1$. Por un argumento similar al usado en el Lema 2.14 se tiene que U_1 es abierto y como f^{np} es topológicamente transitiva existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{npk_2}(U_1) \cap U \neq \emptyset.$$

Por tanto, tomando $k = k_1 + k_2 p$ se tiene que $f^{nk}(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^{nk}(U) \cap U \neq \emptyset$. Lo que muestra que $k \in N_{f^n}(U, U) \cap N_{f^n}(U, V)$. Y la Proposición 1.32 nos permite concluir que f^n es débilmente mezclante. □

Note que si f es tiene caos total en el sentido de Devaney entonces por el Lema 2.14 se sigue que f es débilmente mezclante; luego por el Teorema 2.17 se sigue que $\overline{f}$ es totalmente transitiva. De manera que se tiene lo siguiente.

Teorema 2.19. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico definido en un espacio topológico X. Si f tiene caos total en el sentido de Devaney entonces su hiperextensión $\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ tiene caos total en el sentido de Devaney.

Demostración. Como f tiene caos total en el sentido de Devaney, entonces f es totalmente transitiva y tiene un conjunto denso de puntos periódicos. Se sabe que si el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X entonces el conjunto de puntos periódicos de $\overline{f}$ es denso en $\mathcal{K}(X)$, por el Teorema 2.6. Y por el Teorema 2.17 se sigue que $\overline{f}$ es totalmente transitiva. Por tanto, $\overline{f}$ tiene caos total en el sentido de Devaney. □

Lo que nos permite concluir que en la noción de caos total de Devaney, se pueda *bajar* en el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd}
f\colon X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\text{totDev C}"] & X \\
\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \arrow[r] & \mathcal{K}(X).
\end{tikzcd}$$

2.3.2. Caos exacto de Devaney

Introduciremos la noción de caos exacto de Devaney, y probaremos que si un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$ tiene caos exacto en el sentido de Devaney, exDev C, entonces sus respectiva hiperextensión, $\overline{f}$ tiene caos exacto en el sentido de Devaney.

Definición 2.20. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico definido en un espacio topológico X. Decimos que f es topológicamente exacta si para todo subconjunto abierto no vacío $U \subset X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) = X$.

No es difícil ver que toda función topológicamente exacta es sobreyectiva.

Proposición 2.21. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico en un espacio topológico X. Si f es topológicamente exacta entonces f es topológicamente transitiva.

Demostración. Sean U, V un par de subconjuntos de X abiertos no vacíos. Como f es topológicamente exacta entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) = X$, de manera que para tal m se sigue que

$$f^m(U) \cap V = X \cap V = V \neq \emptyset.$$

Lo que muestra que f es topológicamente transitiva. □

Definición 2.22. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Decimos que f tiene *caos exacto* en el sentido de Devaney si satisface las siguientes condiciones.

(a) f es topológicamente exacta.

(*b*) f tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Teorema 2.23. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico, en un espacio métrico compacto (X, d). Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(*a*) f es topológicamente exacta.

(*b*) $\overline{f}$ es topológicamente exacta.

Demostración. $(b) \Rightarrow (a)$ Suponga que $\overline{f}$ es topológicamente exacta. Sea U subconjunto abierto no vacío de X. Como $\mathcal{V}(U)$ es no vacío y abierto en $\mathcal{K}(X)$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{f}^m(\mathcal{V}(U)) = \mathcal{K}(X)$. En partícular $X \in \overline{f}^m(\mathcal{V}(U)) \subset \mathcal{V}(f^m(U))$, lo que implica que $f^m(U) = X$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Para el recíproco, suponga que f es topológicamente exacta. Debemos probar que para cualquier conjunto abierto $\mathcal{U} = \mathcal{V}(U_1, \ldots, U_k) \subset \mathcal{K}(X)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{f}^m(\mathcal{U}) = \mathcal{K}(X)$. Por compacidad de X para cada $i = 1, \ldots, k$ existe un conjunto abierto no vacío V_i tal que $V_i \subset U_i$ y $\overline{V_i} \subset U_i$ ($\overline{V}$ denota la clausura de V). Como f es topológicamente exacta, entonces podemos encontrar $m_1, \ldots, m_k$ tales que $f^{m_i}(V_i) = X$, para cada $i = 1, \ldots k$. Sea $m = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$, entonces

$$\overline{f}^m\left(\mathcal{V}(\overline{V_1}, \ldots, \overline{V_k})\right) = \mathcal{V}\left(f^m(\overline{V_1}), \ldots, f^m(\overline{V_k})\right) = \mathcal{K}(X).$$

Por tanto, $\overline{f}^m(\mathcal{U}) = \mathcal{K}(X)$, probando que $\overline{f}$ es topológicamente exacta. □

En virtud del Teorema 2.23 y del Teorema 2.6 se sigue entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.24. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Si f tiene caos exacto en el sentido Devaney entonces $\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ tiene caos exacto en el sentido Devaney.

De manera que con la noción de caos exacto de Devaney se puede *bajar* en el siguiente esquema.

$$\begin{tikzcd}
f\colon X \arrow[r] & X \arrow[d, dashed, "\text{exDev C}"] \\
\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \arrow[r] & \mathcal{K}(X).
\end{tikzcd}$$

En el Capítulo 4 mostraremos un ejemplo de una función f que es topológicamente exacta pero el conjunto de puntos periódicos de f, $\mathrm{Per}(f)$ no es denso, y su hiperextensión $\overline{f}$ tiene caos exacto en el sentido de Devaney. Este ejemplo depende de las propiedades de especificación como veremos más adelante.

El siguiente diágrama nos resume los resultados de las nociones de caos vistas hasta ahora

Noción de caos	f		$\overline{f}$
Dev C		$\nRightarrow$	
		$\nLeftarrow$	
totDev C, exDev C		$\Rightarrow$	
		$\nLeftarrow$	

Capítulo 3

Caos de Li-Yorke y caos distribucional

En este capítulo introduciremos otras nociones de caos, el *caos en el sentido de Li-Yorke* (LYC), el ω-caos (ωC) y el caos distribucional (dC); y haremos las comparaciones de estas nociones de caos entre una función f definida en un espacio topológico X y su respectiva hiperextensión $\overline{f}$ definida en el hiperespacio de subconjuntos compactos no vacíos de X, $\mathcal{K}(X)$. De igual manera que en el Capítulo 2 queremos ver si es posible *bajar* y *subir* en el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} f\colon X \arrow[r] \arrow[d, dashed, leftrightarrow, "\text{¿LYC, } \omega\text{C, dC?}"] & X \\ \overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \arrow[r] & \mathcal{K}(X). \end{tikzcd}$$

En la primer sección nos ocuparemos en estudiar el caos de Li-Yorke y el ω-caos; y la segunda sección estará enfocada en estudiar el caos distribucional.

A lo largo de este capítulo (X, d) es un espacio métrico compacto. Y $f\colon X \longrightarrow X$ es una función continua.

3.1. Caos de Li-Yorke y ω-caos

Las siguientes definiciones nos introducen en el caos de Li-Yorke.

Definición 3.1. Un par de puntos $x, y \in X$ se dice *par de Li-Yorke* para f si

(a) $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \geq 0$,

(b) $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

Definición 3.2. Un subconjunto S de X se dice *Li-Yorke revuelto* para f si $\#S \geq 2$ y todo par de puntos distintos de S es un par de Li-Yorke. Aquí $\#S$ denota la cardinalidad de S.

Definición 3.3. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Decimos que f es *caótica en el sentido de Li-Yorke* si tiene un conjunto Li-Yorke revuelto no numerable.

Ejemplo 3.4. En [28] Li y Yorke mostraron que si $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es una función continua que tiene un punto periódico de período 3, entonces f es caótica en el sentido de Li-Yorke.

Muchas investigaciones se han hecho en torno a la definición de caos en el sentido de Li-Yorke. Uno puede considerar variantes débiles de caos en el sentido de Li-Yorke basados en la cardinalidad de los conjuntos revueltos, ver [20]. En [24] se prueba que si $f\colon I \longrightarrow I$, donde I es un intervalo compacto, entonces la existencia dos puntos x, y distinos que son par de Li-Yorke es suficiente para concluir que f es caótica en el sentido de Li-Yorke; es decir existe un conjunto revuelto no numerable. Por último, en [23], se construye un espacio infinito y una función continua en este espacio tal que todo par de puntos distintos es un par de Li-Yorke. Estos tipos de espacios son conocidos como *espacios totalmente revueltos*.

Las siguientes definiciones nos permiten ver el caos de Li-Yorke desde otros conceptos.

Definición 3.5. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico.

(a) Un par de puntos $x, y \in X$ se dice *proximal* si $\liminf_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^n(y)\right) = 0$. Si un par no es proximal decimos que es *distal*.

(b) Un par de puntos $x, y \in X$ se dice *asintóticos* si $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

En virtud de las definiciones anteriores obtenemos que.

Proposición 3.6. Un par de puntos $x, y \in X$ es un par de Li-Yorke si y sólo si son proximal y no asintóticos.

Denotamos a los conjuntos de pares proximales y asintóticos, respectivamente por

$$\operatorname{Prox}(f) = \left\{(x,y)\colon \liminf_{n\longrightarrow\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\right\},$$

$$\operatorname{Asym}(f) = \left\{(x,y)\colon \lim_{n\longrightarrow\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\right\}.$$

Para cualquier $x \in X$ llamamos *celda proximal* del punto x al conjunto que consiste de todos los puntos proximales con respecto a x, y lo denotamos por $\operatorname{Prox}(f)(x)$.

Como resultado de la definición de distal tenemos la siguiente definición.

Definición 3.7. Un punto x es *distal* si $\operatorname{Prox}(f)(x) = \{x\}$. Decimos que un sistema dinámico es *distal* si todos sus puntos son distal. Y un sistema dinámico f se dice *proximal* si todo par de puntos en X es proximal. En este caso tenemos que $\operatorname{Prox}(f)(x) = X$ para todo $x \in X$.

La Definición 1.14 de dependencia sensible de las condiciones iniciales se puede combinar con el concepto de caos de Li-Yorke de la siguiente manera.

Definición 3.8. Decimos que un sistema dinámico $f\colon X \longrightarrow X$ es *Li-Yorke sensible* si existe $\delta > 0$ tal que para todo punto $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in X$ con $d(x,y) < \epsilon$, y con x, y par proximal, tal que para algún $n \geq 0$ se tiene que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

La Definición 3.8 se da en [1]. El siguiente teorema establece relaciones entre la dependencia sensible de las condiciones iniciales de un sistema dinámico y el concepto de Li-Yorke sensible, se puede consultar [1].

Teorema 3.9. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Si f es Li-Yorke sensible, entonces tiene depenencia sensible de las condiciones iniciales. Si f tiene dependencia sensible de las condiciones inciales, y si para todo punto $x \in X$, la celda proximal $\mathrm{Prox}(f)(x)$ es densa en X, entonces f es Li-Yorke sensible.

Estos conceptos se pueden relacionar con la condición de ser débilmente mezclante. Los siguientes teoremas en [1], de los cuales omitiremos demostración, nos dan relaciones entre la celda proximal de un punto $x \in X$ con la debilidad mezclante.

Teorema 3.10. Si $f\colon X \longrightarrow X$ es un sistema dinámico débilmente mezclante entonces, para todo $x \in X$, la celda proximal $\mathrm{Prox}(f)(x)$ es un subconjunto denso en X.

Teorema 3.11. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) f es débilmente mezclante.

(b) Para cualquier $x \in X$, la celda proximal $\mathrm{Prox}(f)(x)$ es densa en X.

(c) Existe $x \in X$, tal que la celda proximal $\mathrm{Prox}(f)(x)$ es densa en X.

(d) $\mathrm{Prox}(f)$ es denso en $X \times X$.

Definición 3.12. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Un subconjunto S de X que tiene al menos dos puntos se dice que es un conjunto *ω-revuelto* para f si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in S$ se cumplen las siguientes condiciones

(a) $\omega(x, f) \setminus \omega(y, f)$ es numerable,

(b) $\omega(x, f) \cap \omega(y, f) \neq \emptyset$, y

(c) $\omega(x, f) \setminus \mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$.

Donde $\omega(x, f)$ recordemos que es el conjunto de todos los puntos límites de la órbita de x considerada como una sucesión.

La siguiente noción de caos fue propuesta por Li en [26].

Definición 3.13. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Decimos que f es *ω-caótico* si existe un conjunto ω-revuelto no numerable.

Se pueden considerar variantes débiles del ω-caos cambiando la condición en la cardinalidad del conjunto ω-revuelto, ver [25].

Teorema 3.14. Si $f\colon X \longrightarrow X$ es un sistema dinámico ω-caótico entonces f es caótico en el sentido de Li-Yorke.

La demostración se puede ver en [25]; que además muestra que el recíproco no es cierto.

El siguiente teorema nos relaciona el caos de Li-Yorke y el ω-caos entre una función continua f y su respectiva hiperextensión, ver Teorema 8 en [22]. Asegurándonos bajar en el esquema presentado al inico del capítulo.

Teorema 3.15. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico y $\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ la hiperextensión de f al hiperespacio $\mathcal{K}(X)$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

(a) Si existe un conjunto S que es Li-Yorke revuelto (ω-revuelto, respectivamente) para f entonces existe un conjunto Li-Yorke revuelto (ω-revuelto, respectivamente) para $\overline{f}$ con la misma cardinalidad que S.

(b) Si f es caótica en el sentido de Li-Yorke (ω-caótica, respectivamente) entonces $\overline{f}$ es caótica en el sentido de Li-Yorke (ω-caótica, respecticamente).

Demostración. (a) Considere la función $\varphi\colon X \longrightarrow \mathcal{K}(X), x \longmapsto \{x\}$. Note que

$$d_H(\varphi(x), \varphi(y)) = d_H(\{x\}, \{y\}) = d(x, y).$$

Por tanto, φ es una isometría, en efecto $\overline{f}$ es conjugada de f vía φ. De manera que se tiene $\varphi \circ f = \overline{f} \circ \varphi$. Por tanto, $\overline{f}(\{x\}) = \{f(x)\}$.

Sea S un sunconjunto de X Li-Yorke revuelto, entonces $\#S \geq 2$ y todo par de puntos distintos de S son un par de Li-Yorke. Entonces para $x, y \in S$ se tiene que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\longrightarrow\infty} d_H(\overline{f}^n(\{x\}), \overline{f}^n(\{y\})) &= \limsup_{n\longrightarrow\infty} d_H(\{f^n(x)\}, \{f^n(y)\}) \\ &= \limsup_{n\longrightarrow\infty} d(x, y) \geq 0.\end{aligned}$$

Además se tiene

$$\begin{aligned}\liminf_{n\longrightarrow\infty} d_H(\overline{f}^n(\{x\}), \overline{f}^n(\{y\})) &= \liminf_{n\longrightarrow\infty} d_H(\{f^n(x)\}, \{f^n(y)\}) \\ &= \liminf_{n\longrightarrow\infty} d(x, y) = 0.\end{aligned}$$

Lo que prueba que si x, y son un par de Li-Yorke para f entonces $\{x\}, \{y\}$ son un par de Li-Yorke para $\overline{f}$. Por tanto, considere el conjunto

$$\overline{S} = \{\{x\} \in \mathcal{K}(X) \colon x \in S\}.$$

Note que $\#\overline{S} \geq 2$ y cualesquiera dos puntos en $\overline{S}$ es un par de Li-Yorke. Mostrando que existe un conjunto Li-Yorke revuelto para $\overline{f}$.

Por último note que φ sirve de biyección entre S y $\overline{S}$, de manera que tienen las misma cardinalidad.

En el caso de conjuntos ω-revueltos se razona de forma análoga trabajando con la función φ que hemos definido.

(b) Si f tiene caos en el sentido de Li-Yorke entonces f tiene un conjunto S que es Li-Yorke revuelto, entonces por (a) se sigue que $\overline{f}$ tiene un conjunto Li-Yorke revuelto con la misma cardinalidad de S. Como S es no numerable, entonces el conjunto Li-Yorke revuelto para $\overline{f}$ ha de ser no numerable, lo que prueba que $\overline{f}$ tiene caos en el sentido de Li-Yorke.

Un razonamiento análogo muestra que si f es ω-caótica entonces $\overline{f}$ es ω-caótica. $\square$

En virtud del Teorema 3.15 se tiene

$$\begin{tikzcd} f\colon X \arrow[r] \arrow[d, phantom, ""] & X \\ \overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \arrow[r] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom] & \mathcal{K}(X). \end{tikzcd}$$

$$\text{LYC, } \omega\text{C}$$

3.2. Caos distribucional

La noción de caos distribucional fue introducida por Schweizer y Smítal en [33], y es generalizada posteriormente por Balibrea, Smítal y Štefánková en [3] y [34].

Definición 3.16. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Para $x, y \in X$; $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\xi(x,y,n,t) = \#\left\{i\colon 0 \leq i < n \text{ y } d(f^i(x), f^i(y)) < t\right\}.$$

Definimos la *función de distribución superior* de x, y por

$$F^*_{xy}(t) = \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\xi(x,y,n,t).$$

Y definimos la función de distribución inferior de x, y por

$$F_{xy}(t) = \liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\xi(x,y,n,t).$$

Ambas funciones son no decrecientes, y además $0 \leq F_{xy} \leq F^*_{xy} \leq 1$. Si $t < 0$ entonces $F^*_{xy}(t) = 0$, y si $t > \operatorname{diam}(X)$ entonces $F_{xy}(t) = 1$.

Estas funciones representan el límite superior e inferior de las veces que la distancia $d(f^i(x), f^i(y))$ entre las trayectorias de x y y es menor que t durante n iteraciones.

Definición 3.17. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Si existe un par de puntos $x, y \in X$ tal que

($\mathrm{d_1C}$) $F^*_{xy} \equiv 1$ y $F_{xy}(t) = 0$ para algún $t > 0$ decimos que f tiene *caos distribucional de tipo 1.*

($\mathrm{d_2C}$) $F^*_{xy} \equiv 1$ y $F_{xy}(t) < F^*_{xy}(t)$ para algún $t > 0$ decimos que f tiene *caos distribucional de tipo 2.*

(d$_3$C) $F_{xy}(t) < F^*_{xy}(t)$ para todo $t \in J$, donde J es un intervalo no degenerado, decimos que f tiene *caos distribucional de tipo 3.*

Note que
$$\mathrm{d_1C} \Rightarrow \mathrm{d_2C} \Rightarrow \mathrm{d_3C},$$
pero no recíprocamente.

En [34] prueban que existe una función que tiene caos distribucional de tipo 2 pero no tiene caos distribucional de tipo 1; y en [3] prueban que existe una función que tiene caos distribucional de tipo 3 pero que no tiene caos en el sentido de Li-Yorke.

Teorema 3.18. Sean $g\colon Y \longrightarrow Y$ y $f\colon X \longrightarrow X$ sistemas dinámicos conjugados vía $\varphi\colon Y \longrightarrow X$, donde (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos. Entonces g tiene caos distribucional de tipo 1 (de tipo 2, respectivamente) si y sólo si f tiene caos distribucional de tipo 1 (de tipo 2, respectivamente).

Demostración. Sea $\varphi\colon Y \longrightarrow X$ un homeomorfismo que conjuga a g y f, entonces $\varphi \circ g = f \circ \varphi$. Por la continuidad de φ, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in Y$ si $d_Y(x, y) < \delta$ entonces $d_X(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$. De manera que
$$d_Y(g^n(x), g^n(y)) < \delta \Rightarrow d_X(\varphi \circ g^n(x), \varphi \circ g^n(y)) < \varepsilon,$$
y como $\varphi \circ g^n = f^n \circ \varphi$ entonces
$$d_Y(g^n(x), g^n(y)) < \delta \Longrightarrow d_X(f^n \circ \varphi(x), f^n \circ \varphi(y)) < \varepsilon.$$
Entonces
$$G^*_{xy}(\delta) \leq F^*_{\varphi(x)\varphi(y)}(\varepsilon), \tag{3.1}$$
donde G^*_{xy} y F^*_{xy} son las funciones de distribución superior de g y f respectivamente.

Similarmente por la continuidad de φ^{-1}, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño tal que para $x, y \in Y$ $d_X(\varphi(x), \varphi(y)) < \delta$ implica que $d_Y(x, y) < \varepsilon$. Y como consecuencia
$$F_{\varphi(x)\varphi(y)}(\delta) \leq G_{xy}(\varepsilon), \tag{3.2}$$
donde F_{xy} y G_{xy} son las funciones de distribución inferior de f y g respectivamente.

Ahora, si $G^*_{xy} \equiv 1$ entonces por (3.1) se tiene $F^*_{\varphi(x)\varphi(y)} \equiv 1$. Y si, por otro lado, $G_{xy}(\varepsilon) = 0$ entonces por (3.2) se tiene que $F_{\varphi(x)\varphi(y)}(\delta) = 0$. Y como consecuencia si g tiene caos distribucional de tipo 1, entonces f tiene caos distribucional de tipo 1.

Además, si $G_{xy}(\varepsilon) < 1$ entonces, por (3.2), $F_{\varphi(x)\varphi(y)}(\delta) < 1$, de manera que si g tiene caos distribucional de tipo 2, entonces f tiene caos distribucional de tipo 2. □

El teorema anterior nos dice que el caos distribucional de tipo 1 y de tipo 2 se preservan bajo conjugación. En [3] prueban que la noción de caos distribucional de tipo 3 no se preserva bajo conjugación.

Como el caos distribucional de tipo 1 es más fuerte que el de tipo 2 y tipo 3. Entonces sólo nos concentraremos en el caos distribucional de tipo 1. En efecto el caos distribucional se puede definir de la siguiente manera.

Definición 3.19. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Un subconjunto S de X se dice *distribucionalmente revuelto* para f si $\#S \geq 2$ y para todo par de puntos distintos $x, y \in S$ se tiene

(a) $F^*_{xy}(t) = 1$ para todo $t > 0$,

(b) $F_{xy}(t) = 0$ para algún $t > 0$.

Al par x, y le llamamos *par distribucionalmente caótico* para f. También decimos que f tiene *caos distribucional* si existe un conjunto distribucionalmente revuelto no numerable para f.

Note que esta definición de caos distribucional coincide con la definición de caos distribucional de tipo 1.

Teorema 3.20. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico.

(a) Si existe un conjunto $S \subset X$ que es distribucionalmente revuelto para f entonces existe un conjunto distribucionalmente revuelto para $\overline{f}$ con la misma cardinalidad de S.

(b) Si f tiene caos distribucional entonces $\overline{f}$ tiene caos distribucional.

La prueba del Teorema 3.20 sigue la misma idea del Teorema 3.15, el cual considerea la función $\varphi\colon X \longrightarrow \mathcal{K}(X),\ x \longmapsto \{x\}$, que es una isometría.

En virtud del Teorema 3.20 entonces podemos *bajar* en el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} f\colon X \arrow[r, no head] & {} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathrm{dC}"] & X \\ \overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \arrow[r, no head] & {} \arrow[r] & \mathcal{K}(X). \end{tikzcd}$$

En [22] muestran el siguiente teorema el cual afirma que el recíproco de los Teoremas 3.20 y 3.15 no son verdaderos en general.

Teorema 3.21. Existe un espacio métrico compacto X el cual admite una función $f\colon X \longrightarrow X$ que no tiene par de Li-Yorke, ni conjunto ω-revuelto, ni conjunto distribucionalmente revuelto tal que su hiperextensión $\overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ tiene caos de Li-Yorke, ω-caos y caos distribucional.

En [22] para la prueba del teorema anterior lo que hacen es considerar la compactificación de los enteros (considerado como un espacio topológico discreto), $X_\infty = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ y definir la función $f\colon X_\infty \longrightarrow X_\infty$ por

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & n \in \mathbb{Z}, \\ \infty, & n = \infty. \end{cases}$$

El siguiente diágrama nos resume los resultados en cuanto a la nociones de caos de Li-Yorke, ω-caos y caos distribucional

Noción de caos	f		$\overline{f}$
LYC, ωC, dC		$\Rightarrow$	
		$\not\Leftarrow$	

3.3. Caos de Li-Yorke para operadores lineales

Si T es un operador lineal continuo, en un espacio de Fréchet X, que tiene caos en el sentido de Li-Yorke entonces $\overline{T}$ también por el Teorema 3.15. Bernardes, Peris y Rodenas [12] muestran usando el teorema de Banach-Steinhaus el siguiente lema.

Lema 3.22. Sea T un operador lineal continuo en un espacio de Fréchet X. Si $\overline{T}$ tiene un par de Li-Yorke, entonces existe un subconjunto residual Z de X tal que $\mathrm{Orb}(x, T)$ es no acotada para cada $x \in Z$.

A la luz del Lema 3.22 y por el Criterio de caos de Li-Yorke, ver Teorema 15 en [11] se prueba el siguiente teorema.

Teorema 3.23. Sea T un operador lineal continuo en un espacio de Fréchet X y defina

$$NS(T) = \left\{x \in X\colon\ (T^n x)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tiene una subsucesión que converge a } 0\right\}.$$

Si span $(NS(T))$ es denso en X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) T tiene caos de Li-Yorke.

(b) $\overline{T}$ tiene caos de Li-Yorke.

(c) $\overline{T}$ tiene un par de Li-Yorke

Demostración. Las relaciones $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ son triviales. Entonces basta demostrar que $(c) \Rightarrow (a)$. Por el Criterio de caos de Li-Yorke, ver Teorema 15 en [11], necesitamos probar que existe una sucesión acotada $(a_n)_n$ en $\overline{NS(T)}$ tal que la sucesión $(T^n a_n)_n$ es acotada. Por (c) y el Lema 3.22, podemos tomar un vector $a \in X$ tal que $\mathrm{Orb}(a, T)$ es no acotada. Como span $(NS(T))$ es denso en X, $a \in \overline{\text{span}\,(NS(T))}$. Por lo tanto, es suficiente tomar $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. □

Como una consecuencia del teorema se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.24. Sea X un espacio de Fréchet de sucesiones en el cual $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base. Suponga que la traslación hacia la izquierda con pesos

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \ldots),$$

es un operador en X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) B_w tiene caos de Li-Yorke.

(b) $\overline{B_w}$ tiene caos de Li-Yorke.

(c) $\overline{B_w}$ tiene un par de Li-Yorke.

Demostración. En este caso, el conjunto $NS(B_w)$ contiene un subespacio denso de X, a saber el conjunto de todas las sucesiones de soporte finito. Por tanto, el corolario se sigue del teorema anterior. □

En los espacios clásicos de Banach l_p, $1 \le p < \infty$ y c_0, Bermúdez, Bonilla, Martínez y Peris en [10] muestran que B_w tiene caos de Li-Yorke si y sólo si

$$\sup\{|w_n \cdot \ldots \cdot w_m|\colon n \in \mathbb{Z}_+, m > n\} = \infty.$$

Lo que da una caracterización en término de la sucesión de pesos.

Capítulo 4

Propiedades de especificación

Las propiedades de especificación fueron definidas por Bowen en [15], las cuales son satisfechas por muchos sistemas dinámicos discretos que surgen naturalmente en aplicaciones. La terminología que vamos a usar para definir las propiedades de especificación y los resultados importantes se pueden encontrar en [22].

El objetivo principal de este capítulo es dar a conocer las propiedades de especificación, las cuales son nociones más fuertes que el caos en el sentido de Devaney. Queremos ver cuándo es posible *bajar* y *subir* en el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} f\colon X \arrow[r] & X \\ \overline{f}\colon \mathcal{K}(X) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\updownarrow\ ¿\text{SPSP}?"] & \mathcal{K}(X). \end{tikzcd}$$

donde SPSP son las siglas en inglés de la propiedad de especificación periódica fuerte, la cual definiremos brevemente. También veremos un ejemplo el cual nos permite concluir que el caos exacto en el sentido de Devaney para $\overline{f}$ no implica el caos exacto en el sentido de Devaney para f.

4.1. Propiedades de especificación en el hiperespacio

Vamos a trabajar con funciones continuas $f\colon X \longrightarrow X$ donde (X, d) es un espacio métrico compacto.

Definición 4.1. Decimos que una función continua $f\colon X \longrightarrow X$ satisface *la propiedad de especificación periódica fuerte* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero $N_\varepsilon > 0$ tal que para cualesquiera entero $s \geq 2$, puntos $y_1, y_2, \ldots, y_s \in X$ y enteros

$$0 = a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_s \leq b_s,$$

con $a_j - b_{j-1} \geq N_\varepsilon$ para $j = 2, \ldots, s$, entonces existe un punto $x \in X$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $d\left(f^i(x), f^i(y_l)\right) < \varepsilon$ para $a_l \leq i \leq b_l$ y $l = 1, \ldots, s$,

(b) $f^{b_s+N_\varepsilon}(x) = x$.

Si esta definición se cumple solamente para el caso especial $s = 2$ decimos que f satisface la *propiedad de especificación periódica*, abreviamos PSP en inglés.

Si se omite en la definición de propiedad de especificación periódica fuerte la condición (b) (en la propiedad de especificación periódica, respectivamente) obtenemos la noción de propiedad de especificación fuerte, que abreviamos por SSP (*propiedad de especificación débil*, abreviamos WSP, respectivamente).

Si reemplazamos la condición (a) y (b) en la definición de propiedad de especificación periódica fuerte por

$$d\left(f^{i+k(b_s+N)}(x), f^{i+k(b_s+N)}(y_l)\right) < \varepsilon,$$

para $k \in \mathbb{N}, a_l \leq i \leq b_l$ y $l = 1, \ldots, s$ entonces se obtiene el concepto de *propiedad de especificación fuerte recurrente*, abreviamos RSSP en inglés. En el caso específico $s = 2$ entonces se dice que f satisface la *propiedad de especificación débil recurrente*, que abreviamos por RWSP.

Mencionaremos algunos resultados dados en [17] de los cuales se omitirá demostración. El siguiente teorema nos dice que la propiedad de especificación periódica fuerte implica el caos en el sentido de Devaney.

Proposición 4.2. Sea $f \colon X \longrightarrow X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto (X, d). Si f satisface las propiedad de especificación periódica fuerte, entonces el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X y f es mezclante.

Note que en particular f es totalmente transtiva y topológicamente transitiva, por lo tanto si f satisface las propiedad de especificación entonces f tiene caos total en el sentido de Devaney.

Proposición 4.3. Sean $f \colon X \longrightarrow X$ y $g \colon Y \longrightarrow Y$ dos funciones continuas definidas en espacios métricos compactos (X, d_X) y (Y, d_Y), respectivamente. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

(a) Si f satisface la propiedad de especificación periódica fuerte entonces f^k satisface la propiedad de especificación periódica fuerte para cualquier $k \geq 1$.

(b) Si f y g satisfacen la propiedad de especificación periódica fuerte entonces $f \times g$ satisface la propiedad de especificación periódica fuerte.

El siguiente teorema nos permite *bajar* en el esquema planteado al inicio del presente capítulo, ver Proposición 5 en [8].

Teorema 4.4. Sea $f \colon X \longrightarrow X$ un sistema dinámico que satisface la propiedad de especificación periódica fuerte. Entonces $\overline{f} \colon \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ satisface la propiedad de especificación periódica fuerte.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N_{\varepsilon/2}$ el entero positivo como en la propiedad de especificación periódica fuerte para f.

Sean $K_1, \ldots, K_s \in \mathcal{K}(X)$ y considere los enteros a_j, b_j para $j = 1, \ldots, s$, tales que

$$0 = a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_s \leq b_s,$$

con $a_j - b_{j-1} \geq N_{\varepsilon/2}$ para $j = 2, \ldots, s$.

Como $\overline{f}$ es continua y $\mathcal{K}(X)$ es un espacio métrico compacto, entonces existe $\eta > 0$ tal que si $d_H(A, B) < \eta$ entonces

$$d_H(\overline{f}^i(A), \overline{f}^i(B)) < \varepsilon/2,$$

para $A, B \in \mathcal{K}(X)$ y $a_l \leq i \leq b_l$ y $l = 1, \ldots, s$.

Para $n \in \mathbb{N}$ existe $L_j \in \mathcal{K}(X)$ con $\#L_j \leq n$ tal que

$$d_H(K_j, L_j) < \eta.$$

Por tanto, $d_H(\overline{f}^i(K_j), \overline{f}^i(L_j)) < \varepsilon/2$ para $a_l \leq i \leq b_l$, $l, j = 1, \ldots, s$.

Sea $L_j = \{y_{j,1}, \ldots, y_{j,s}\}$, $j = 1, \ldots, s$. Como f satisface la propiedad de especificación periódica fuerte entonces existe $x \in X$ tal que $f^{b_s + N_{\varepsilon/2}}(x) = x$ y

$$d(f^i(x), f^i(y_{j,l})) < \varepsilon/2,$$

para $a_l \leq i \leq b_l$ y $l, j = 1, \ldots, s$. Tomando $K = \{x\}$ vemos que

$$\overline{f}^{b_s + N_{\varepsilon/2}}(K) = f^{b_s + N_{\varepsilon/2}}(\{x\}) = \{f^{b_s + N_{\varepsilon/2}}(x)\} = \{x\} = K.$$

Y además

$$d_H(\overline{f}^i(K), \overline{f}^i(L_j)) \leq d(f^i(x), f^i(y_{j,l})) < \varepsilon/2,$$

para $a_l \leq i \leq b_l$ y $j, l = 1, \ldots, s$.

Por tanto, se tiene que

$$d_H(\overline{f}^i(K), \overline{f}^i(K_l)) < d_H(\overline{f}^i(K), \overline{f}^i(L_l)) + d_H(\overline{f}^i(K_l), \overline{f}^i(L_l)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

para $a_l \leq i \leq b_l$ y $l = 1, \ldots, s$. Todo esto muestra que $\overline{f}$ satisface la propiedad de especificación periódica fuerte. $\square$

De manera que la propiedad de especificación periódica fuerte puede *bajar* en el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} f\colon X & \longrightarrow & X \\ & \Big\downarrow \text{SPSP} & \\ \overline{f}\colon \mathcal{K}(X) & \longrightarrow & \mathcal{K}(X). \end{array}$$

4.2. Ejemplo

Vamos a presentar un ejemplo, el cual está construido en [22], de una función f tal que su hiperextensión satisface la propiedad de especificación periódica fuerte y que además tiene caos exacto en el sentido de Devaney pero que f no tiene caos exacto en el sentido de Devaney ni satisface la propiedad de especificación periódica fuerte. Todos los resultados y sus demostraciones que mostraremos a continuación están basados completamente en el artículo [22].

Dado una sucesión de sistemas dinámicos, que denotamos por $((f_n, X_n))_{n=1}^{\infty}$ donde X_n es un espacio métrico compacto para todo n, podemos considerar el sistema dinámico producto denotado por $(\prod_{n=1}^{\infty} f_n, \prod_{n=1}^{\infty} X_n)$, este sistema dinámico se define de forma natural por el teorema de Tychonoff.

La siguientes serie de lemas nos ayudarán a cumplir nuestro objetivo.

Lema 4.5. Si $((f_n, X_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión cualquiera de sistemas dinámicos tal que para cada entero positivo n el conjunto de todos los puntos recurrentes regularmente de f_n es denso en X_n entonces el sistema dinámico producto $(\prod_{n=1}^{\infty} f_n, \prod_{n=1}^{\infty} X_n)$ tiene un conjunto denso de puntos recurrentes regularmente.

Lema 4.6. Si $((f_n, X_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión cualquiera de sistemas dinámicos con propiedad de especificación periódica fuerte (o propiedad de especificación periódica) entonces el sistema dinámico producto $(\prod_{n=1}^{\infty} f_n, \prod_{n=1}^{\infty} X_n)$ tiene propiedad de especificación fuerte recurrente (o propiedad de especificación débil recurrente).

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe un entero positvo M tal que

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sea N_n la constante dada por la propiedad de especificación periódica para f_n, donde $1 \leq n \leq M$ y sea $N = \max N_n$. Sean $x, y \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ y $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2$ enteros tales que $b_1 - a_1 > N$ y $b_2 - a_2 > N$. Sean $p_1, \ldots, p_M$ puntos periódicos tales que cada p_j se obtiene de la propiedad de especificación periódica para f_j, x_j, y_j. Define el punto

$$p = (p_1, \ldots, p_M, q_{M+1}, q_{M+2}, \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n,$$

donde $q_j \in X_j$ son puntos cualesquiera. Un cálculo directo verífica que p satisface las propiedades de especificación. □

Lema 4.7. Si la función continua f tiene la propiedad de especificación fuerte recurrente (débil recurrente) entonces su hiperextensión $\overline{f}$ tiene la propiedad de especificación periódica fuerte (o propiedad de especificación periódica).

Demostración. Asuma que f satisface la propiedad de especificación fuerte recurrente. Sea $\varepsilon > 0$ y sea N la constante dada por la propiedad de especificación fuerte recurrente para $\varepsilon/2$. Fijamos $s \geq 2$, conjuntos $A_1, \ldots, A_s$ y $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_s \leq b_s$ con $b_j - a_j > N$.

Sean $U^l_{i,1}, \ldots, U^l_{i,r}$ conjuntos abiertos que cubren a $\overline{f}^i(A)$, dado por bolas de diámetro menor que $\varepsilon/4$ y centros A_i, donde $a_l \leq i \leq b_l$. Asumimos que el número r es el mismo para cualquier i y l. Sea $y^l_{i,j} \in A_l$ el centro de la bola $U^l_{i,1}$. Sea $x^{i,j}$ el punto dado por la propiedad de especificación fuerte recurrente para los puntos $y^1_{i,j}, \ldots, y^s_{i,j}$ y $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_s \leq b_s$. Por un argumento similar en la prueba del Lema 2.8 se puede encontrar un punto periódico $P_{i,j} \in \mathcal{K}(X)$ con período $b_s + N$ y tal que

$$d_H\left(\overline{f}^k(P_{i,j}), \overline{f}^k(\{y^l_{i,j}\})\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } a_l \leq i \leq b_l \text{ y } l = 1, \ldots, s.$$

Tomando el conjunto

$$P = \bigcup_{i,j} P_{i,j},$$

entonces P es el punto periódico deseado. □

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{Z}_{n+1}$ el grupo cíclico con $n+1$ elementos. Dotamos a $\mathbb{Z}_{n+1}$ con la topología discreta. Sea $X_n = (\mathbb{Z}_{n+1})^\infty = \{(x_m)_{m=1}^\infty \colon x_m \in X_{n+1}, m \in \mathbb{N}\}$ el espacio topológico producto de una cantidad no numerable de copias de $\mathbb{Z}_{n+1}$. Resulta que X_n es homeomorfo al conjunto de Cantor; es decir, X_n es un espacio compacto, perfecto y tiene una base de conjuntos cerrado-abiertos numerable. Esta base consiste de los conjuntos cilindros de la forma

$$[z_1, \ldots, z_k] = \{(x_m)_{m=1}^\infty \in X_n \colon x_1 = z_1, \ldots, x_k = z_k\},$$

donde $k \in \mathbb{N}$ y $z_1, \ldots, z_k$ es una sucesión arbitraria de elementos de $\mathbb{Z}_{n+1}$ de longitud k.

Definimos la función $f_n \colon X_n \longrightarrow X_n$, por $f\left((x_m)_{m=1}^\infty\right) = (y_m)_{m=1}^\infty$ donde

$$y_m = \begin{cases} x_{m+1}, & x_1 \neq x_{n+1} \\ 1 + x_{m+1}, & x_1 = x_{n+1} \end{cases}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Lema 4.8. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces para la función $f_n \colon X_n \longrightarrow X_n$ definida anteriormente se tiene

(a) La función f_n es continua.

(b) f_n no tiene puntos periódicos con período igual a n.

(c) Si $n \geq 3$, entonces f_n satisface la propiedad de especificación periódica fuerte.

(d) La función f_n es topológicamente exacta.

Demostración. (a) Vamos a probar que, dado $z \in X_n$, la preimagen de cualquier vecindario abierto de z bajo f_n es abierto. En efecto, sea $[z_1, \ldots, z_k]$ $(k \geq n)$, tenemos que

$$f^{-1}([z_1, \ldots, z_k]) = \left(\bigcup_{a \in \mathbb{Z}_{n+1} \setminus \{z_n\}} [a, z_1, \ldots, z_k] \right) \cup [z_n - 1, z_1 - 1, \ldots, z_k - 1]$$

es abierto. Si $k < n$ se obtiene la descomposición disjunta

$$[z_1, \ldots, z_k] = \bigcup_{a_1, \ldots, a_{n-k}} [z_1, \ldots, z_k, a_1, \ldots, a_{n-k}].$$

(b) Suponga que existe una sucesión $(x_m)_{m=1}^{\infty} \in X_n$ tal que

$$(y_m)_{m=1}^{\infty} = f((x_m)_{m=1}^{\infty}) = (x_m)_{m=1}^{\infty}.$$

Por la definición de f_n podemos ver que $k + x_{m+n} = x_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, donde $k = \#\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon x_j = x_{j+n}\}$. Claramente $0 \leq k \leq n$. Considere dos casos:

1. Si $k > 0$ entonces existe un $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_j = x_{j+n}$ y teniendo en cuenta la igualdad $k + x_{j+n} = x_j$ vemos que $k = 0$, lo que es una contradicción.

2. Si $k = 0$ entonces en particular $x_{n+1} = x_1$; luego se tiene que $k \geq 1$, lo que es una contradicción.

(c) Reescribiendo la definición de la propiedad de especificación periódica fuerte para f_n y usando las propiedades elementales de los espacios métricos compactos X_n vemos que es suficiente probar lo siguiente: existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $s, t \in \mathbb{N}$ y para dos sucesiones finitas de puntos $u_1, \ldots, u_s$ y $v_1, \ldots, v_t$ de elementos de $\mathbb{Z}_{n+1}$ podemos encontrar una sucesión $w_1, \ldots, w_N$ tal que

$$f_n^{s+N}([u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_N, v_1, \ldots, v_t]) = [v_1, \ldots, v_t].$$

Fijamos s, t y dos sucesiones $u_1, \ldots, u_s$ y $v_1, \ldots, v_t$ como se ha mencionado. Afirmamos que $N = 2n$. Para ver esto, sea $k = \#\{j \in \{1, \ldots, s-n\} \colon x_j = x_{j+n}\}$ $\operatorname{mód}\ (n+1)$. Si $k > 0$ entonces definimos $w_i = u_{s-n+i}$ para $i = 1, \ldots, n-k+1$ y $w_i = u_{s-n+i}{+}1$ para $i = n-k, \ldots, n$, y en otro caso $w_i = u_{s-n+i}{+}1$ para $i = 1, \ldots, n$. En alguno de los casos, para $i = n+1, \ldots, 2n$ defina w_i tal que $w_i \neq w_{i-n}$ y $w_i \neq v_i$. Podemos hacer esto porque hemos asumido $n \geq 2$. Por esta construcción se tiene que

$$f_n^{s+N}([u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_N, v_1, \ldots, v_t]) = [v_1, \ldots, v_t],$$

lo que termina la prueba.

(d) Es claro, por las mismas técnicas usadas previamente, que si $[u_1, \ldots, u_k]$ es un conjunto cilindro no vacío, entonces $f_n^{k+2n}([u_1, \ldots, u_k]) = X_n$. □

El siguiente resultado prueba que el recíproco de los Teoremas 2.19, 2.24, y 4.4 no es verdadero, ver Teorema 14 en [22].

Teorema 4.9. Existe un sistema dinámico $f \colon X \longrightarrow X$ topológicamente exacto que no satisface la propiedad de especificación periódia fuerte y tal que $\operatorname{Per}(f)$ no es denso en X pero su hiperextensión $\overline{f}$ tiene caos exacto de Devaney y satisface la propiedad de especificación periódica fuerte.

Demostración. Para $n \in \{2, \ldots\}$ sea (f_n, X_n) el sistema dinámico construida previamente al Lema 4.8, por tal lema cada f_n tiene caos exacto en el sentido de Devaney y satisface la propiedad de especificación periódica fuerte. Por tanto, su producto cartesiano es una función f topológicamente exacta con propiedad de especificación fuerte recurrente, por el Lema 4.6. Otra vez por el Lema 4.8 uno puede ver que f tiene puntos no periódicos con período mayor o igual que 2, y como f es topológicamente transitiva y no es igual a la función identidad entonces el conjunto $\mathrm{Per}(f)$ no es denso. Por tanto, f no tiene caos exacto en el sentido de Devaney y no satisface la propiedad de especificación periódica fuerte. Por otro lado, la hiperextensión $\overline{f}$ tiene caos exacto en el sentido de Devaney y satisface las propiedades de especificación periódica fuerte po los Lemas 4.5 y 4.7, y por el Teorema 2.23. □

Note que como $\overline{f}$ tiene caos exacto de Devaney entonces $\overline{f}$ tiene caos de Devaney, que por el Teorema 2.17 es equivalente al caos total en el sentido de Devaney; por estos hechos se concluye

$$\overline{f} \text{ totDev C } \nRightarrow f \text{ totDev C},$$

y

$$\overline{f} \text{ Dev C } \nRightarrow f \text{ Dev C},$$

puesto que f no tiene conjunto denso de puntos periódicos.

Capítulo 5

Conclusiones

Si consideramos las propiedades parciales de las distintas definiciones de caos se tiene:

Propiedades	f		$\overline{f}$
Transitividad topológica		$\not\Rightarrow$	
		$\Leftarrow$	
Totalmente transitiva		$\Rightarrow$	
		$\Leftarrow$	
Exactamente topológica		$\Rightarrow$	
		$\Leftarrow$	
Débilmente mezclante		$\Rightarrow$	
		$\Leftarrow$	
Mezclante		$\Rightarrow$	
		$\Leftarrow$	
Densidad de puntos periódicos		$\Rightarrow$	
		$\not\Leftarrow$	

A manera de conlusión tenemos el siguiente cuadro que nos resume los resultados expuestos en cuanto a las distintas nociones de caos, y también sobre la propiedad de especificación periódica fuerte:

Noción de caos	f		$\overline{f}$
Dev C		$\not\Rightarrow$	
		$\not\Leftarrow$	
totDev C, exDev C, LYC, ωC, dC, SPSP		$\Rightarrow$	
		$\not\Leftarrow$	

En general las distintas nociones de caos, de forma colectiva, no implican sus respectivas nociones de caos de forma individual. Pero las distintas nociones de caos, de forma individual, sí tienen como consecuencia las respectivas nociones de caos de forma colectiva, exceptuando el caso de caos en el sentido de Devaney donde el caos individual no implica el caos colectivo ni viceversa.

Bibliografía

[1] E. Akin and S. Kolyada, *Li-Yorke sensitivity*, Nonlinearity **16** (2003), no. 4, 1421–1433.

[2] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite dimensional analysis*, third ed., Springer, Berlin, 2006, A hitchhiker's guide.

[3] F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals **23** (2005), no. 5, 1581–1583.

[4] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 4, 332–334.

[5] J. Banks, *Chaos for induced hyperspace maps*, Chaos Solitons Fractals **25** (2005), no. 3, 681–685.

[6] K. Barich, *Proving completeness of the hausdorff induced metric space*, Whitman College, Washington (2011).

[7] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, second ed., Academic Press Professional, Boston, MA, 1993, Revised with the assistance of and with a foreword by Hawley Rising, III.

[8] W. Bauer and K. Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. **79** (1975), 81–92.

[9] F. Bayart and E. Matheron, *Hypercyclic operators failing the hypercyclicity criterion on classical Banach spaces*, J. Funct. Anal. **250** (2007), no. 2, 426–441.

[10] T. Bermúdez, A. Bonilla, F. Martínez-Giménez, and A. Peris, *Li-Yorke and distributionally chaotic operators*, J. Math. Anal. Appl. **373** (2011), no. 1, 83–93.

[11] N. C. Bernardes, Jr., A. Bonilla, V. Müller, and A. Peris, *Li-Yorke chaos in linear dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems **35** (2015), no. 6, 1723–1745.

[12] N. C. Bernardes, Jr., A. Peris, and F. Rodenas, *Set-valued chaos in linear dynamics*, Integral Equations Operator Theory **88** (2017), no. 4, 451–463.

[13] J. Bès and A. Peris, *Hereditarily hypercyclic operators*, J. Funct. Anal. **167** (1999), no. 1, 94–112.

[14] G. D. Birkhoff, *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta Math. **43** (1922), no. 1, 1–119.

[15] R. Bowen, *Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 377–397.

[16] M. de la Rosa and C. Read, *A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic*, J. Operator Theory **61** (2009), no. 2, 369–380.

[17] M. Denker, C. Grillenberger, and K. Sigmund, *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 527, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[18] G. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry*, second ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2008.

[19] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.

[20] J. L. García Guirao and M. Lampart, *Li and Yorke chaos with respect to the cardinality of the scrambled sets*, Chaos Solitons Fractals **24** (2005), no. 5, 1203–1206.

[21] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, *Linear chaos*, Universitext, Springer, London, 2011.

[22] J. L. G. Guirao, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha, and A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal. **71** (2009), no. 1-2, 1–8.

[23] W. HUANG and X. YE, *Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **21** (2001), no. 1, 77–91.

[24] M. Kuchta and J. Smítal, *Two-point scrambled set implies chaos*, European Conference on Iteration Theory (Caldes de Malavella, 1987), World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989, pp. 427–430.

[25] M. Lampart, *Two kinds of chaos and relations between them*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **72** (2003), no. 1, 119–127.

[26] S. H. Li, *ω-chaos and topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), no. 1, 243–249.

[27] S. Li, Y. Ogura, and V. Kreinovich, *Limit theorems and applications of set-valued and fuzzy set-valued random variables*, Theory and Decision Library. Series B: Mathematical and Statistical Methods, vol. 43, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2002.

[28] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), no. 10, 985–992.

[29] G. Liao, L. Wang, and Y. Zhang, *Transitivity, mixing and chaos for a class of set-valued mappings*, Sci. China Ser. A **49** (2006), no. 1, 1–8.

[30] A. Peris, *Set-valued discrete chaos*, Chaos Solitons Fractals **26** (2005), no. 1, 19–23.

[31] H. Román-Flores, *A note on transitivity in set-valued discrete systems*, Chaos Solitons Fractals **17** (2003), no. 1, 99–104.

[32] W. Rudin, *Functional analysis, mcgrawhill*, Inc, New York (1991).

[33] B. Schweizer and J. Smítal, *Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), no. 2, 737–754.

[34] J. Smítal and M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*, Chaos Solitons Fractals **21** (2004), no. 5, 1125–1128.