



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN Y
DIRECCIÓN DE EMPRESAS. UPV

Diseño de una cartera de valores de riesgo mínimo compuesta por subyacentes cotizadas de Bankia y Mapfre

Jorge Navarro Del Valle

Grado en Administración y
Dirección de Empresas

Tutorizado por:

Cristina Santamaría Navarro

Cotutorizado por:

Antoni Vidal Ferrandiz

Curso Académico 2018-2019

Agradecimientos

Infinito es el agradecimiento que se tiene por personas como Cristina y Toni, las cuales han permitido culminar esta etapa tan importante en mi vida. El esfuerzo y la dedicación que han estado demostrando, es un gran reflejo de su profesionalidad.

Agradecer este TFG también a mi familia, por los ánimos que me han ido aportando día tras día y con los que se ha hecho mucho más ligero estos últimos momentos de la carrera.

Por último, quería recordar a cuatro personas que, aun no estando presentes, me dan muchísima fuerza para seguir con todo. María, José, Carmen, Virgilio. Vuestro recuerdo está más vivo que nunca.

Índice

Índice de gráficas.....	5
Índice de tablas	6
1. Motivación e Introducción	7
1.1. Resumen.....	7
1.2. Estructura del trabajo	7
1.3. Objetivos	8
1.4. Asignaturas relacionadas	9
2. Antecedentes. Situación Actual.....	10
2.1. Contextualización	10
2.2. IBEX-35.....	12
2.3. Análisis bursátil	13
2.3.1. Análisis técnico	13
2.3.1.1. Análisis chartista	13
2.3.1.2. Análisis técnico en el sentido estricto	14
2.3.2. Análisis fundamental	17
2.3.3. Análisis estadísticos.....	17
3. Bankia.....	17
3.1. Valor en bolsa	18
4. Mapfre	20
4.1. Valor en bolsa	21
5. Modelización de subyacentes cotizadas	23
5.1. Modelo determinista	23
5.2. Modelo estocástico	24
5.2.1. Procesos estocásticos de Wiener y Movimiento Browniano.....	25
5.2.2. Modelo estocástico para los subyacentes: Modelo Log-Normal.....	29
5.2.3. El Lema de Itô	31
5.2.4. Solución del modelo Log-Normal mediante el Movimiento Browniano Geométrico (MBG)	32
5.2.5. Principales funciones estadísticas del Movimiento Browniano Geométrico	34
5.2.5.1. Media del Movimiento Browniano Geométrico	34

5.2.5.2. Varianza del Movimiento Browniano Geométrico	35
6. Estimación de los parámetros μ y σ	36
6.1. Método de Momentos Estadísticos	37
6.2. Método de Máxima Verosimilitud.....	40
6.3. Cálculo de los parámetros μ y σ	44
6.3.1. Cálculo de los parámetros μ y σ de Bankia	44
6.3.2. Cálculo de los parámetros μ y σ de Mapfre	46
7. Resultados y validación de los modelos.....	47
7.1. Predicción de Bankia	47
7.2. Predicción de Mapfre	50
7.3. Validación de los modelos	52
7.3.1. Validación de Bankia.....	53
7.3.2. Validación de Mapfre	54
8. Consideraciones del modelo estocástico	55
8.1. Consideraciones de los resultados	55
8.2. Consideraciones del método empleado.....	56
9. Confección de la cartera de valores.....	56
9.1. Conceptos esenciales	57
9.2. Tipos de riesgo.....	58
9.3. Consideraciones previas	59
9.4. Matriz Varianza-Covarianza	60
10. Cálculo de los pesos de la cartera de valores	61
10.1. Simulación de Montecarlo	61
10.2. Predicción de la cartera	61
10.3. Resultados	63
11. Conclusiones.....	64
Bibliografía.....	66
Anexos.....	68
Anexo A.....	68
Anexo B.....	69

Índice de gráficas

Gráfica 1: Evoluci3n del índice del IBEX-35 desde el 22/05/2018 al 22/05/2019.	14
Gráfica 2: Evoluci3n temporal de la cotizaci3n de Bankia y del IBEX-35 en base 100, durante el periodo comprendido entre 05/06/2017 y 05/06/2019.	19
Gráfica 3: Evoluci3n del precio de cotizaci3n de Bankia desde el 05/06/2014 al 05/06/2019.	19
Gráfica 4: Evoluci3n temporal de la cotizaci3n de Mapfre y del IBEX-35 en base 100, durante el periodo comprendido entre 05/06/2017 y 05/06/2019.	21
Gráfica 5: Evoluci3n del precio de cotizaci3n de Mapfre desde el 05/06/2014 al 05/06/2019.	22
Gráfica 6: Representaci3n visual del Movimiento Browniano.	27
Gráfica 7: Representaci3n simplificada visual del Movimiento Browniano.	27
Gráfica 8: Representaci3n visual del resultado de la predicció a 5 días de las acciones de Bankia mediante el Método de Momentos Estadísticos, junto con el valor real de las acciones superpuesto.	49
Gráfica 9: Representaci3n visual del resultado de la predicció a 5 días de las acciones de Bankia mediante el Método de Máxima Verosimilitud, junto con el valor real de las acciones superpuesto.	50
Gráfica 10: Representaci3n visual del resultado de la predicció a 5 días de las acciones de Mapfre mediante el Método de Momentos Estadísticos, junto con el valor real de las acciones superpuesto.	51
Gráfica 11: Representaci3n visual del resultado de la predicció a 5 días de las acciones de Mapfre mediante el Método de Máxima Verosimilitud, junto con el valor real de las acciones superpuesto.	52
Gráfica 12: Representaci3n visual de la evoluci3n de los pesos de la cartera compuesta por los valores de Bankia y Mapfre desde el instante $t=30$ hasta $t=34$	63

Índice de tablas

Tabla 1: Cotizaciones de las acciones de Mapfre desde el día 09/05/2019 al 23/05/2019 junto con el cálculo de las medias móviles a cinco y diez días.	15
Tabla 2: Cotizaciones de las acciones de Mapfre desde el día 09/05/2019 al 23/05/2019 junto con el cálculo de las medias móviles ponderadas a cinco y diez días.	16
Tabla 3: Fecha y cantidad de los dividendos repartidos por Bankia desde el año 2015. 20	
Tabla 4: Fecha y cantidad de los dividendos repartidos por Mapfre desde el año 2009. 23	
Tabla 5: Comparación básica entre un modelo determinista y un modelo estocástico. . 25	
Tabla 6: Demostración de la igualdad en la distribución del Movimiento Browniano y su simulación.	28
Tabla 7: Cierre de las cotizaciones de Bankia desde el día 26/04/2019 al 07/06/2019 en euros.	44
Tabla 8: Diferencias logarítmicas de las cotizaciones de Bankia obtenidas desde 26/04/2019 hasta el 07/06/2018.	45
Tabla 9: Cierre de las cotizaciones de Mapfre desde el día 26/04/2019 al 07/06/2019 en euros.	46
Tabla 10: Diferencias logarítmicas de las cotizaciones de Mapfre obtenidas desde 26/04/2019 hasta el 07/06/2018.	46
Tabla 11: Resultados de la predicción a 5 días de las acciones de Bankia mediante el Método de Momentos Estadísticos.	48
Tabla 12: Resultados de la predicción a 5 días de las acciones de Bankia mediante el Método de Máxima Verosimilitud.	49
Tabla 13: Resultados de la predicción a 5 días de las acciones de Mapfre mediante el Método de Momentos Estadísticos.	51
Tabla 14: Resultados de la predicción a 5 días de las acciones de Mapfre mediante el Método de Máxima Verosimilitud.	52
Tabla 15: Resultado del proceso de validación de Bankia para el MME.	54
Tabla 16: Resultado del proceso de validación de Bankia para el MMV.	54
Tabla 17: Resultado del proceso de validación de Mapfre para el MME.	54
Tabla 18: Resultado del proceso de validación de Mapfre para el MMV.	54
Tabla 19: Evolución de los pesos de la cartera compuesta por los valores de Bankia y Mapfre desde el instante $t=30$ hasta $t=34$	63

1. Motivación e Introducción

En este apartado se plantea el resumen básico del contenido del presente trabajo, así como la estructuración del mismo. Posteriormente se plantearán los dos objetivos principales que se persigue con el trabajo y las asignaturas que guardan relación con el trabajo.

1.1. Resumen

Conocer exactamente el valor de cotización de las acciones dentro de los distintos mercados bursátiles es inalcanzable. Pero este hecho no imposibilita aproximar, con cierto margen de error, un rango de valores o la tendencia que puede seguir un valor cotizado.

Para poder llegar a analizar las acciones, es necesario conocer el origen de las mismas, la finalidad que tienen, el funcionamiento que siguen dentro de las economías, así como el tipo de mercado en el que se encuentran cotizando. En este caso, el análisis se centrará en dos valores, Bankia y Mapfre, los cuales operan en el mercado bursátil conocido como IBEX-35. Se analizará la trayectoria que ambas empresas han tenido a lo largo de su vida económica, así como las fluctuaciones y tendencias de sus acciones en bolsa, esto último, es el punto más importante para el desarrollo del Trabajo de Fin de Grado.

Una vez se tenga una concepción mucho más cercana de las empresas, se procederá a analizar las tendencias que ambos valores han tenido durante un mes, para poder generar un modelo matemático, el cual permitirá realizar predicciones. A la hora de generar dicho modelo, emplearemos el Movimiento Browniano Geométrico con lo que conseguiremos incorporar el concepto de aleatoriedad, cuya presencia en el mercado bursátil es muy notable. Los parámetros de este modelo se estimarán mediante dos métodos estadísticos distintos, los cuales se compararán para poder escoger el más óptimo entre los dos.

Con los parámetros estimados tendremos dos modelos que pueden generar predicciones a corto plazo de manera independiente. El objetivo principal de este proyecto es poder generar una cartera de valores con ambas acciones que garantice un riesgo mínimo. Se procederá a generar una matriz de varianza-covarianza con la que se podrá observar la correlación entre los activos seleccionados y crear una cartera dinámica que minimice el riesgo de la misma.

1.2. Estructura del trabajo

El presente Trabajo de Fin de Grado sigue la siguiente estructura:

En primer lugar, se llevará a cabo una introducción en la que se especifica en que consiste el trabajo, el objetivo que se persigue así como las asignaturas que guardan relación con el mismo.

Continuando el esquema, en la sección 2, se realizará una descripción del origen de la financiación hasta llegar a la parte que más afecta al trabajo, las acciones. Se procederá también a describir el mercado nacional de las acciones, así como los análisis más utilizados que se emplean en la actualidad.

Posteriormente, en la sección 3 y 4 se tratarán las empresas Bankia y Mapfre y sus últimas cotizaciones en bolsa.

Una vez conocido todo el entorno que envuelve al mercado bursátil, y en concreto, a las acciones, se describirá la metodología empleada en la sección 5.

Sentadas ya las bases de los mencionados activos financieros, se procederá a desarrollar de forma matemática todo el proceso de modelización hasta la obtención de los resultados en la sección 5. Esta primera parte de la modelización matemática se focaliza en análisis individuales de las empresas con las que se obtendrán unos resultados que posteriormente se contrastarán con la segunda fase de la modelización.

Una se ha introducido todo el apartado de la modelización se procederá a estimar los parámetros μ y σ que permitirán realizar las predicciones individuales en la sección número 6

Posteriormente, en la sección 7 se obtendrán los resultados de las predicciones habiendo, previamente, verificado que modelo es más preciso.

El apartado 8 contendrá una serie de consideraciones los cuales se tratarán de remarcar tras las realización íntegra del modelo estocástico.

El apartado 9 contendrá todos los aspectos importantes del modelo de carteras así como el desarrollo de la propia modelización.

Continuando la fase de modelización, se realiza una cartera de valores con la que se busca minimizar el riesgo en la sección 10.

Para culminar el Trabajo de Fin de Grado se expondrán una serie de conclusiones en el apartado 11 que englobarán a todo el documento.

1.3. Objetivos

Los objetivos principales son:

Analizar dos valores que cotizan en el IBEX-35, para posteriormente generar un modelo matemático con el que poder confeccionar una pequeña cartera de valores cuya finalidad es realizar una predicció a 5 días, del valor de la cartera.

Asimismo, demostrar una posible alternativa a los dos tipos de análisis más empleados, fundamental y técnico, y sus posibles aplicaciones.

1.4. Asignaturas relacionadas

A continuación, se enumeran las asignaturas de las cuales han sido necesarias para aplicar los conocimientos, tanto teóricos como prácticos, en el presente trabajo de fin de grado:

“Introducción a las finanzas”: Con esta asignatura se empieza a comprender los conceptos básicos que giran en torno a las finanzas.

“Introducción a la estadística”: En el transcurso de la mencionada asignatura se introducen conceptos para poder entender los aspectos más básicos de la estadística.

“Modelos matemáticos para la administración y dirección de empresas”: Tras la realización, y durante el estudio de dicha asignatura, se comienza a visualizar la posibilidad de modelizar ciertos aspectos económicos y por lo tanto, aportar una visión más científica de la economía.

“Métodos estadísticos y económicos”: Una vez terminada la asignatura, el alumno consigue ampliar sus conocimientos en el mundo estadístico.

“Econometría”: Al realizar econometría se obtiene conocimientos acerca de la estadística, aplicada a la economía. Mediante series temporales de datos cuantitativos se generan modelos de predicció. Se aprende por tanto a construir y validar los modelos estadísticos generados.

“Matemáticas financieras”: Con la asignatura mencionada, se amplía y se profundiza en los conocimientos básicos obtenidos en “Introducción a las Finanzas”.

“Dirección financiera”: Principalmente, el estudio de esta asignatura, proporciona una visión mucho más amplia de todas las formas posibles de financiación así como el funcionamiento de los mercados financieros a nivel general.

“Banca y bolsa”: Básicamente da a conocer el funcionamiento, de manera sencilla, de los bancos así como de las bolsas y los procesos evolutivos que en ambos apartados han acaecido. Además introduce herramientas que permiten realizar análisis de las cotizaciones de las acciones.

“Análisis del Riesgo Financiero”: Dicha asignatura se destaca por ser la precursora del presente Trabajo de Fin de Grado. Combina todos los aspectos mencionados en las asignaturas relacionadas, mediante el uso de una aplicación informática, “Mathematica”. Se adquieren los conocimientos matemáticos que rigen la asignatura, y posteriormente se programan los modelos para obtener todo aquello que se ha especificado en la metodología, es decir, un modelo matemático, generado a través de las treinta últimas cotizaciones de las empresas, el cual permite realizar una predicció.

Por lo tanto, se puede considerar que es la asignatura vertebral el Trabajo de Fin de Grado, tanto en la forma de proceder como en la finalidad que se persigue.

2. Antecedentes. Situación Actual

A la hora de hablar de los antecedentes, se hará una breve descripción sobre la financiación empresarial y el surgimiento de la misma. Posteriormente se introducirán los distintos tipos de financiación, dando un enfoque mayor a la financiación propia, y en concreto mediante salidas a bolsa y ampliaciones de capital. Para finalizar, se especificará y explicará de forma concisa los métodos más utilizados a la hora de predecir la tendencia del precio de cotización de las acciones.

2.1. Contextualización

A día de hoy, la economía se puede considerar el motor fundamental del progreso en las sociedades. Esto es debido a la misma definición de la palabra “economía”, pues implica la asignación de recursos, los cuales son limitados, de la manera más óptima y con la finalidad de producir bienes y servicios para satisfacer las necesidades humanas. En la actualidad, y gracias a la globalización, un aspecto que ha ido cogiendo mayor relevancia en el contexto nacional e internacional ha sido la necesidad de financiar a las distintas unidades económicas que actúan en los distintos mercados y puntos geográficos del globo.

La financiación se basa en un intercambio de recursos económicos entre unidades de ahorro con superávit y unidades de ahorro con déficit. En el momento que se produce ese intercambio se genera una obligación, aunque esta obligación no tiene por qué estar estipulada, de devolver la financiación obtenida con los intereses que se acuerden. En estos casos los intereses son la remuneración que recibe el prestatario por facilitar sus recursos y dependiendo del producto financiero, ambas variables, intereses y retorno del capital, puede variar.

En el mundo empresarial existe una gran variedad de productos financieros que pueden solventar una situación de déficit de ahorro, ya sea para acometer una inversión que requiere un gran desembolso, o por necesidades operativas específicas en función del tipo de actividad económica que se lleva cabo, entre una gran cantidad de finalidades financieras. Está claro que no todas las necesidades de financiación tienen un único tipo de producto financiero que puede solventar la situación, ya sea por el grado de complejidad del mismo producto, por el coste que este lleva asociado para la empresa interesada o según la fuente de la financiación, propia o ajena. Este último aspecto tiene una mayor relevancia pues afecta de manera significativa a la cultura y estrategia de la empresa (Brealey, Myers, Montllor i Serrats, Tarrazón Rodón, & Ribas i Miràngels, 1993).

Por un lado se encuentra la financiación ajena, en la que un agente externo canaliza el superávit de ahorro que tiene hacia la entidad, normalmente con un coste asociado y que se conoce como intereses, anteriormente identificados. Normalmente, se estipula el plazo en el que se prevé retornar el capital facilitado por el prestatario, aunque siempre cabe la

posibilidad de renegociar cualquier aspecto del acuerdo. No obstante, al hacer referencia a la financiación, en este caso ajena, se tienda a pensar en la prestación de recursos monetarios, normalmente préstamos, empréstitos o pólizas de crédito entre otros, cabe también la posibilidad la prestación de infraestructuras o muebles necesarios para la actividad económica de la empresa mediante el leasing o el renting. En este tipo de situaciones, el agente externo se convierte en acreedor de la empresa, por lo tanto no participa en la toma de decisiones de la empresa, y en función del tipo de producto financiero contratado, tendrá preferencia o no a la hora de cobrar en caso de que la empresa entrara en situación concursal. Desde el punto de vista de la empresa permite un crecimiento mayor en comparación con el uso de recursos propios, aunque exige un coste mayor a la financiación propia. En cuanto a las consideraciones como inversor, se destaca que en la mayoría de casos hay preferencia de cobro frente a los socios, lo que implica un menor riesgo, y el cobro de intereses estipulados en el mismo contrato con la entidad.

Por otro lado es posible llevar a cabo una financiación propia. Este tipo de financiación no implica a ningún agente externo a la empresa y básicamente se trata de utilizar el ahorro acumulado por la propia entidad para cualquier necesidad financiera que surja. Puede manifestarse mediante la amortización, deterioro constante e irreversible de los activos de la entidad, mediante el empleo de las reservas las cuales dispone el ente, o también mediante ampliaciones de capital. En este último caso, las personas, tanto jurídicas como físicas, aportan recursos económicos en función del valor de las acciones y adquieren la condición de socio. Al ser considerado socio, la empresa no tiene la necesidad de reembolsar el capital adquirido ni tampoco la necesidad de retribuir intereses, Sin embargo, el socio obtiene derechos de voto en las juntas de accionistas y dependiendo de la estrategia de la empresa, el cobro de dividendos, los cuales se consideran la retribución de los socios. A primera vista puede parecer una forma de invertir un tanto arriesgada puesto que se desconoce cuándo podría recuperarse la inversión llevada a cabo. Es por eso que a la hora de comprar acciones, la finalidad que se persigue por parte de los inversores es la de formar parte en la toma de decisiones en la empresa a largo plazo, o la de actuar activamente en los mercados de acciones, conocidos como “*bolsa*”. Esta última opción suele realizarse con un parte del capital social denominado “*capital flotante*” o “*free float*”, dicho capital social no mantiene el derecho a voto, solo el de la remuneración económica mediante dividendos, o entrega de acciones, lo cual facilita la gobernabilidad en las empresas y la libre circulación de las propias acciones (López Lubián & García Estévez, 2009).

Una vez se realiza la ampliación de capital o la salida a bolsa, las acciones ofertadas, pasan a negociarse en los denominados mercados primarios. Dichos mercados son los que proporcionan la financiación mediante la venta de las acciones, pues las transacciones tienen lugar entre la empresa emisora y el interesado en la compra de las acciones. Normalmente, a la hora de llevar a cabo estas operaciones, existen dos modalidades, las cuales vienen impuestas por la Comisión Nacional del Mercado de Valores (en adelante CMNV) para garantizar la seguridad de los inversores. Estas dos modalidades son la oferta pública de suscripción (en adelante OPS) y la oferta pública de venta (en adelante OPV) (Comisión Nacional del Mercado de Valores, s.f.).

En el primero de los casos, se amplía el capital de la empresa emisora de tal forma que los socios ven disminuido el porcentaje de participación que ostentan previa ampliación. Por ese motivo las acciones dan lugar a los denominados derechos de suscripción que permitirían mantener el porcentaje de participación pre ampliación. Pero para poder participar en la OPS es necesario que los socios transfieran esos derechos a las personas, tanto jurídicas como físicas, que están interesadas en formar parte de la junta de accionistas, pues sin los derechos de suscripción no podría contemplarse la compra de las recién originadas acciones. Una forma común a la hora de transferir esos derechos de suscripción es mediante la venta de los mismos, para poder posteriormente, adquirir las nuevas acciones.

Las ofertas públicas de venta distan en cuanto a funcionamiento, finalidad y efecto que tienen lugar, respecto de la OPS. No varía el porcentaje de participación de los socios puesto que no se crean nuevas acciones. Además llevan asociados unos períodos establecidos para conocer la demanda de acciones, con la finalidad de evitar una subida progresiva e intensa del valor de la acción. La diferencia, anteriormente mencionada, radica en que se lleva cabo la oferta de un gran número de acciones por parte de un accionista, aunque es muy común que la propia empresa ponga a disposición del público en general acciones que en posteriores OPS no llegaron a venderse. De esta última forma, estarían obteniendo la financiación que no llegaron a obtener en la salida a bolsa o anterior ampliación de capital.

De este modo, un accionista busca la maximización de los beneficios respecto al capital invertido, y al mismo tiempo, minimizar los riesgos que conlleva la inversión.

2.2. IBEX-35

El IBEX-35 es el mercado bursátil de referencia en España. Dicho mercado bursátil funciona gracias al Sistema de Interconexión Bursátil Español (SIBE en adelante), cuya función es conectar todas las transacciones posibles, a tiempo real, que tienen lugar en las cuatro bolsas españolas, Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia. Este sistema se encuentra gestionado y sustentado por la empresa Bolsas y Mercados Españoles, también conocido como BME (Bolsas y Mercados Españoles, s.f.).

La composición del IBEX-35 está hecha por las 35 empresas con mayor liquidez que operan en el SIBE. Entre ellas, se encuentran: Acciona, Acerinox, ACS, AENA, Amadeus It Group, Arcelormittal, Banco Sabadell, Bankia, Bankinter, BBVA, Caixabank, Cellnex Telecom, CIE. Automotive, Colonial, Enagas, Ence, Endesa, Ferrovial, Grifols, IAG, Iberdrola, Inditex, Indra, Mapfre, Masmovil, Mediaset, Meliá Hotels, Merlin Prop., Naturgy, Red Eléctrica, Repsol, Santander, Siemens Gamesa, Telfónica y Viscofan.

2.3. Análisis bursátil

Una pregunta que suele ser muy recurrente cuando se habla de acciones, trata sobre el precio que va a tener dicho activo financiero en el futuro. Evidentemente, la respuesta a esta pregunta no se puede saber con exactitud. Sin embargo se pueden estimar ciertas tendencias, teniendo en cuenta distintos tipos de análisis. Cada uno de estos análisis sigue un método específico que les hace diferenciarse entre ellos, aunque en ocasiones sin llegar a brindar una mayor seguridad en una futura inversión. Muchas veces, el tipo de análisis que se emplea va ligado a la forma de actuar que va a tener el inversor. En ninguna de las formas que la persona plantee la inversión, debe considerar los análisis sustitutos entre sí, es más, muchas veces se suelen emplear de forma complementaria para poder garantizar una mayor seguridad a la respuesta que se acaba obteniendo.

Normalmente, cuando se habla de análisis del precio de las acciones, los análisis más empleados y conocidos son el técnico y el fundamental. En el presente Trabajo de Fin de Grado se incluye un método distinto a los anteriormente mencionados, el análisis estadístico, el cual tendrá especial hincapié en la estadística y modelización matemática.

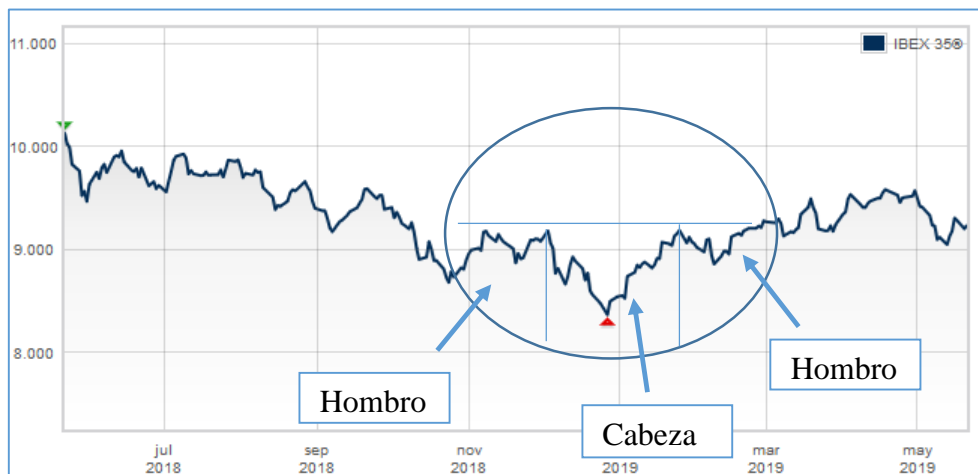
2.3.1. Análisis técnico

El análisis técnico se focaliza en las gráficas que se crean a partir de las cotizaciones de una acción a lo largo del tiempo, y de las figuras recurrentes que van apareciendo en la mencionada gráfica. Se trata, por lo tanto, de observar la tendencia que una acción está siguiendo y prever de algún modo el valor futuro de cotización. Es posible incluir dentro de este rango, los análisis con una base un tanto numérica, a partir de la observación de las gráficas. Por último, se destaca que este tipo de análisis se suele emplear para la toma de decisiones a corto plazo en la bolsa.

2.3.1.1. Análisis chartista

Se basa en la visualización de posibles figuras, que identificarían un patrón de comportamiento en la cotización de la acción. Son conocidas muchas figuras las cuales identifican fenómenos en las cotizaciones. Las más destacadas son: “hombro-cabeza-hombro”, “resistencias”, “soportes”, “canales”, “suelo redondeado”, entre otras. A continuación se muestra una gráfica en la que se ha identificado una figura “hombro-cabeza-hombro” invertido:

Gráfica 1: Evolución del índice del IBEX-35 desde el 22/05/2018 al 22/05/2019.



Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos en Bolsas y Mercados Españoles (BME).

Al realizar las previsiones mediante el análisis chartista, se da por contado que el movimiento de los precios se lleva a cabo mediante tendencias las cuales se reiteran a lo largo del tiempo.

2.3.1.2. Análisis técnico en el sentido estricto

Este análisis es menos visual y conlleva un componente más aritmético que el anterior tipo de análisis. Se emplean los conceptos de medias móviles, tanto simples como ponderadas, y el indicador de fuerza relativa, también conocido RSI.

El uso de las medias móviles se basa en llevar a cabo cálculos promedios con las últimas cotizaciones dentro de un periodo de tiempo. Previamente se escoge una cantidad de días con las que realizar los promedios. El objetivo final de este método es el de minimizar las distorsiones en los análisis debido a la volatilidad del mercado en el corto plazo. También es posible llegar a trazar un soporte guía, que junto al análisis chartista, permitiría un análisis mucho más completo. A continuación se muestra un ejemplo del cálculo de medias móviles:

Tabla 1: Cotizaciones de las acciones de Mapfre desde el día 09/05/2019 al 23/05/2019 junto con el cálculo de las medias móviles a cinco y diez días.

Fecha	Número	Cotización	Media móvil a 5 días	Media móvil a 10 días
09/05/2019	0	2,602		
10/05/2019	1	2,62		
13/05/2019	2	2,576		
14/05/2019	3	2,619		
15/05/2019	4	2,634	2,6102	
16/05/2019	5	2,692	2,6282	
17/05/2019	6	2,678	2,6398	
20/05/2019	7	2,645	2,6536	
21/05/2019	8	2,662	2,6622	
22/05/2019	9	2,656	2,6666	2,6384
23/05/2019	10	2,607	2,6496	2,6389

Fuente: Elaboración propia a partir de datos consultados en diario Expansión.

A la hora de realizar los cálculos se han utilizado las siguientes fórmulas:

$$MM_{5i} = \frac{d_i + d_{i-1} + d_{i-2} + d_{i-3} + d_{i-4}}{5}$$

$$\text{si } d_{i-1}, d_{i-2}, d_{i-3}, d_{i-4} > 0$$

$$MM_{10i} = \frac{d_i + d_{i-1} + d_{i-2} + d_{i-3} + d_{i-4} + d_{i-5} + d_{i-6} + d_{i-7} + d_{i-8} + d_{i-9}}{10}$$

$$\text{si } d_i, d_{i-1}, d_{i-2}, d_{i-3}, d_{i-4}, d_{i-5}, d_{i-6}, d_{i-7}, d_{i-8}, d_{i-9} > 0$$

MM_{5i} = Valor de la media móvil a cinco días para el día i

MM_{10i} = Valor de la media móvil a diez días para el día i

d_i = Cotización de la acción el día i

El análisis básico que se obtiene de dichos datos, es que todo aquel valor que se encuentre por encima de la media móvil calculado, sigue una tendencia alcista y viceversa.

Continuando con otro concepto del análisis técnico en el sentido estricto, se encuentra el análisis mediante medias móviles, pero en este caso ponderadas. La diferencia radica en el peso que se atribuye a los valores más recientes, ya que se consideran más importantes las cotizaciones más actuales. Más abajo se muestra una tabla con los cálculos que se

realizan para generar las medias móviles ponderadas. Se destaca que el constante cálculo de las medias móviles ponderadas permitirían generar un soporte, y a su vez un análisis técnico más preciso.

Tabla 2: Cotizaciones de las acciones de Mapfre desde el día 09/05/2019 al 23/05/2019 junto con el cálculo de las medias móviles ponderadas a cinco y diez días.

Fecha	Número	Cotización	Media móvil a 5 días	Media móvil a 10 días
09/05/2019	0	2,602		
10/05/2019	1	2,62		
13/05/2019	2	2,576		
14/05/2019	3	2,619		
15/05/2019	4	2,634	2,6165	
16/05/2019	5	2,692	2,6417	
17/05/2019	6	2,678	2,6537	
20/05/2019	7	2,645	2,6574	
21/05/2019	8	2,662	2,6625	
22/05/2019	9	2,656	2,6641	2,6535
23/05/2019	10	2,607	2,6463	2,6451

Fuente: Elaboración propia a partir de datos consultados en diario Expansión.

Los cálculos que se han seguido son los siguientes:

$$MM_{5i} = \frac{d_i * n_i + d_{i-1} * n_{i-1} + d_{i-2} * n_{i-2} + d_{i-3} * n_{i-3} + d_{i-4} * n_{i-4}}{n_i + n_{i-1} + n_{i-2} + n_{i-3} + n_{i-4}}$$

$$\text{si } d_{i-1}, d_{i-2}, d_{i-3}, d_{i-4} > 0$$

$$MM_{10i} = \frac{d_i * n_i + d_{i-1} * n_{i-1} + \dots + d_{i-8} * n_{i-8} + d_{i-9} * n_{i-9}}{n_i + n_{i-1} + n_{i-2} + n_{i-3} + n_{i-4} + n_{i-5} + n_{i-6} + n_{i-7} + n_{i-8} + n_{i-9}}$$

$$\text{si } d_i, d_{i-1}, d_{i-2}, d_{i-3}, d_{i-4}, d_{i-5}, d_{i-6}, d_{i-7}, d_{i-8}, d_{i-9} > 0$$

MM_{5i} = Valor de la media móvil ponderada para el día i

MM_{10i} = Valor de la media móvil a diez días para el día i

d_i = Cotización de la acción el día i

n_i = Factor de ponderación correspondiente

a la posición que ocupa el día dentro de la selección

2.3.2. Análisis fundamental

El análisis fundamental trata de obtener el valor intrínseco de la acción para poder compararlo con el valor de cotización y tomar una decisión en base a la diferencia que se obtiene. Dicho análisis, emplea elementos de las empresas como los propios estados financieros, datos macroeconómicos y demás información que pueda considerarse de utilidad y guarde relación con la empresa a analizar. Este tipo de análisis suele emplearse por inversores que buscan invertir en el mercado bursátil a largo plazo.

Cuando se habla de utilizar los estados financieros para encontrar el valor fundamental de la acción, se traduce al empleo de ratios, tanto de deuda como de rentabilidad. Dentro del primer grupo se encuentran ratios tan comunes como el fondo de maniobra, ratio de tesorería, apalancamiento, etc. Cuando se trata de calcular la rentabilidad, los más conocidos son el ROA (Rentabilidad de los activos), ROE (Rentabilidad para el accionista), entre otros.

2.3.3. Análisis estadísticos

Otra forma de analizar las cotizaciones de los distintos activos financieros, puede ser aquella que se fundamente en un trato estadístico de los datos. En este tipo de análisis se emplean conceptos como: la media, desviación típica, varianza, recta de regresión, MAPE, entre muchos más. El enfoque que suelen tener este tipo de análisis, es el de llevar a cabo una observación de los datos mediante métodos estadísticos, para posteriormente generar un modelo matemático que permita representar las cotizaciones, de la forma más certera posible. Finalmente, habiendo validado el modelo resultante, se introducen los días para los cuales se desea conocer el valor futuro de la acción y se genera un resultado con las posibles cotizaciones. Este resultado siempre viene acompañado por intervalo de confianza que recoge, la precisión o confianza de la estimación obtenida.

El análisis estadístico es el que se empleará en este Trabajo de Fin de Grado para poder cumplir el objetivo previsto, el cual es generar una cartera de valores con las acciones de Bankia y Mapfre.

3. Bankia

Actualmente Bankia se encuentra posicionado como el cuarto banco más grande de España. Además cuenta con 2.298 oficinas repartidas por todo el territorio nacional, junto con 16.069 empleados trabajando en ellas y en la sede central. El año pasado obtuvo un beneficio atribuido de 205 millones de euros y un incremento del alta neta de clientela del 43%, lo que suponía 137.000 nuevos clientes desde Marzo de 2018 (Bankia, 2019).

Se destaca, también, que Bankia ha alcanzado un 12,43% del “CET1 Fully Loaded¹”, lo que implica que es capaz de soportar una contingencia o imprevisto significativo, con el riesgo que asume en sus activos (BBVA, 2017). Toda la información mencionada aparece en el anexo A con una mayor pormenorización. Por último, indicar que Bankia, al igual que todos los bancos con sede en España, se encuentra acogida al Fondo de Garantía de Depósitos para poder garantizar aquellos depósitos de personas, tanto física como jurídica, hasta los 100.000 € (Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito, s.f.).

La creación de Bankia se remonta al año 2010, mediante la fusión de siete cajas de ahorro (Caja Madrid, Bancaja, Caja Canarias, Caja Ávila, Caixa Laietana, Caja Segovia y Caja Rioja) con la finalidad de garantizar liquidez al sistema financiero español, el cual se veía afectado por la citada crisis (Bankia, 2019).

Las anteriores cajas mencionadas se encontraban, a nivel general, en situaciones muy comprometidas. Un ejemplo es el caso de Caja Madrid, cuyos créditos a particulares superaban un 35% la media del sector, así como importes de los mismos que superaban en un 80% el valor de tasación del inmueble (Encinas, 2017).

En Julio del 2011, se produjo una nefasta salida a bolsa, debido especialmente a la falsedad en los estados contables, informes de auditorías favorables cuando no debían serlo (El Mundo, 2017), e incluso avisos por parte del Banco de España de lo perjudicial que podía llegar a ser la operación (El Boletín, 2016).

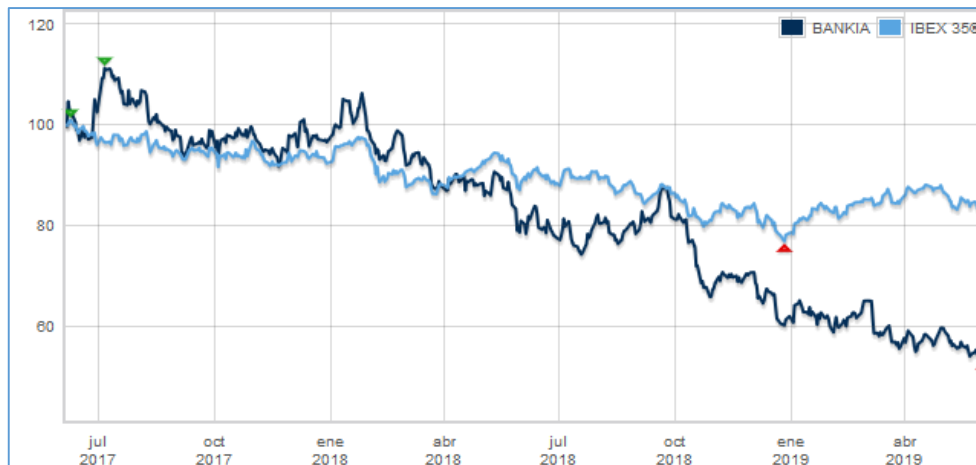
A día de hoy, su presidente es José Ignacio Goirigolzarri Tellaache y lleva ejerciendo el cargo desde el 9 de Mayo de 2012. Su antecesor en el cargo era Rodrigo Rato. Dicho expresidente que se vio envuelto en los sucesos anteriormente mencionados. Es por esto, por lo que el actual presidente trata de llevar a cabo una gestión eficiente y sobre todo, mejorar la reputación que Bankia suscitó tras la fusión y salida a bolsa. Tal es el caso, que Bankia se está adhiriendo y manteniendo proyectos que muestran un gran sentido de la responsabilidad social corporativa. Entre los proyectos, se encuentra la unión a la Iniciativa Financiera del Programa de Naciones Unidas para el Medio Ambiente (UNEP FI) por la cual, las entidades financieras se comprometan con el desarrollo sostenible (Valencia plaza, 2019), o por otro lado, la dotación de 650.000€ a la Fundación Bancaja, para que puede mantener sus programas de ayudas sociales a lo largo de la Comunidad Valenciana (Agencia EFE, 2019).

3.1. Valor en bolsa

La acción de Bankia cotiza en el mercado bursátil IBEX-35. Su valor en bolsa, al igual que el IBEX-35 y las distintas empresas que lo componen, ha tenido un descenso generalizado y notable durante el ejercicio 2018. Dicho descenso se observa mucho más acusado en Bankia que en el mismo IBEX-35.

¹ Ratio empleado en el sector bancario para cuantificar el porcentaje de capital que puede tolerar el impago de los activos con mayor riesgo. Se definió en Basilea III.

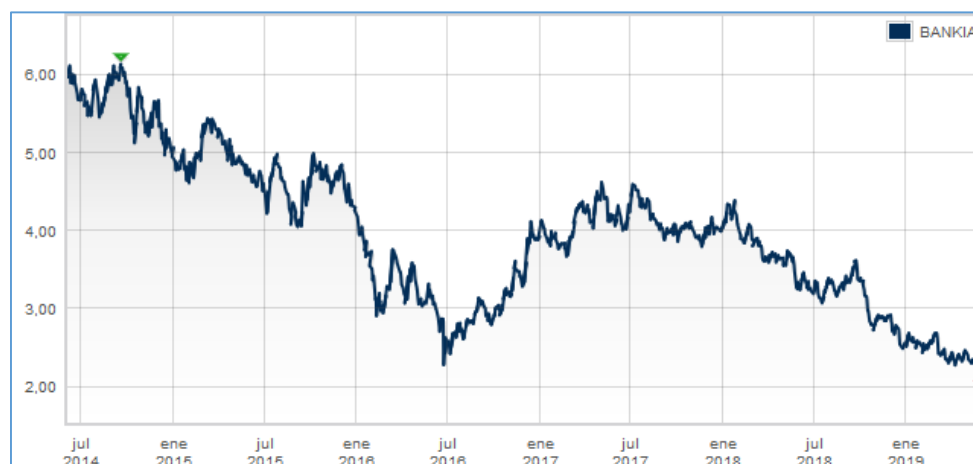
Gráfica 2: Evolución temporal de la cotización de Bankia y del IBEX-35 en base 100, durante el periodo comprendido entre 05/06/2017 y 05/06/2019.



Fuente: Bolsas y Mercados Españoles (BME).

En Bankia se cuantifica el descenso en un 37.40% desde el 01/01/2018 al 01/01/2019, pasando de ser su cotización 4,041, a 2,53 €. Con una perspectiva de cinco años, desde Julio del año 2014, Bankia ha tenido una tendencia continua decreciente, llegando a pasar de un precio de cotización 6 a 2,21 €. Dentro de esta tendencia bajista se llegó a observar un repunte que comenzó en Julio de 2016, con un precio de 2,27 €, y culminó en Julio del año siguiente llegando a tener un máximo de 4,62 €. Las previsiones que se realizan al observar el gráfico continúan siendo pesimista aunque no se llega a descartar en ningún momento un repunte como el acontecido en Julio de 2016.

Gráfica 3: Evolución del precio de cotización de Bankia desde el 05/06/2014 al 05/06/2019.



Fuente: Bolsas y Mercados Españoles (BME).

En cuanto al reparto de dividendos, Bankia ha mantenido una política bastante activa, pues ha ido repartido dividendos año tras año y en unas fechas muy similares, con incrementos bastante significativos entre ellos. A continuación una tabla con los dividendos repartidos desde el año 2015 hasta el actual (Expansión, s.f.):

Tabla 3: Fecha y cantidad de los dividendos repartidos por Bankia desde el año 2015.

Fecha	Importe absoluto	Importe neto ²	Ejercicio
11/04/2019	0,12 €	0,09 €	2018
20/04/2018	0,11 €	0,09 €	2017
31/03/2017	0,03 €	0,02 €	2016
31/03/2016	0,03 €	0,02 €	2015
07/07/2015	0,02 €	0,01 €	2014

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del diario Expansión.

4. Mapfre

Mapfre fue fundada en el año 1933 como una mutualidad de los Seguros de la Agrupación de fincas Rústicas de España, con el objetivo primordial de asegurar a los trabajadores de las explotaciones agrícolas. Es a partir del año 1955, ampliando la escueta gama de productos que disponía, en concreto con el seguro de automóviles, cuando comienza a colocarse como una de las empresas más punteras en el sector asegurador en España. En la actualidad la gama de productos de las aseguradoras se extendido de forma exponencial, aunque acaban separándose en dos grandes grupos, tramo de Vida y tramo de No Vida. El ramo de Vida incluye seguros de vida, accidentes y decesos. El ramo de No Vida el resto: automóvil, salud, responsabilidad civil, multirriesgo que a su vez engloba el hogar, comercio, comunidades, etc. Actualmente Mapfre, se encuentra como segundo grupo asegurador de España por detrás de VidaCaixa (Sector Asegurador, 2019).

Al igual que Bankia, Mapfre también muestra un alto grado de responsabilidad social corporativa con la creación y mantenimiento de la fundación Mapfre. La fundación Mapfre no tiene un objetivo predeterminado pero tratar de influir y aportar en gran cantidad de asuntos de interés general. Tal es el caso que la misma Sociedad Española de Neurología premió a la Fundación Mapfre por la campaña “ICTUS-Evita, aprende, actúa” (Grupo Aseguranza, 2019).

Actualmente Mapfre España se encuentra presidida por Antonio Huertas desde el año 2012. Bajo su mandato, y a finales 2018, Mapfre España contaba con 5.256 oficinas repartidas por todo el mundo y con una plantilla total de 86.564 empleados. El beneficio atribuible alcanzado en ese año ha sido de 528,9 millones de euros, con un nivel de activo

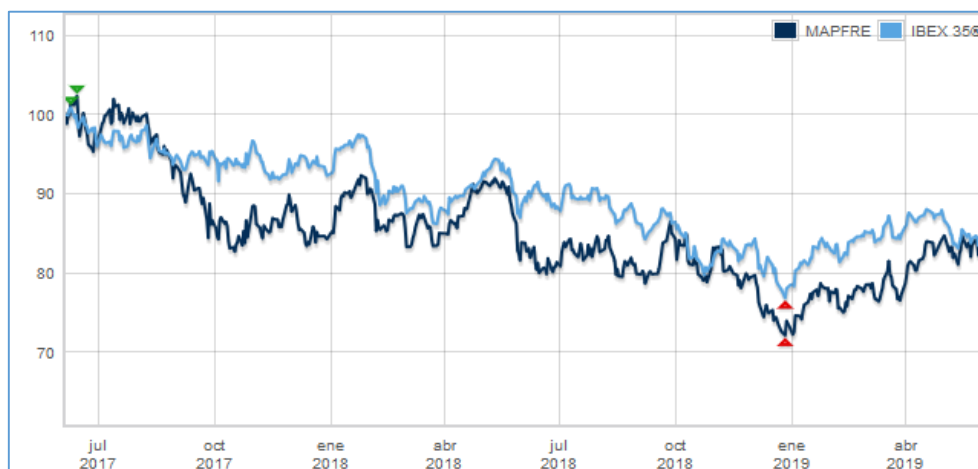
² Importe del dividendo habiéndose practicado la retención para el Impuesto Sobre la Renta de las Personas Físicas.

y pasivo que rondaba los 67.290,8 millones. En cuanto a la emisión de primas en el mercado español, se destaca un pequeño decrecimiento en el ramo de Vida, cuantificado en un 1,7%, pasando en Diciembre de 2017 de una cuantía de 29.407 a 28.914 millones de euros. Dicho decrecimiento en cuanto a emisión de primas se ve compensado con el ramo de No Vida, puesto que tiene lugar un crecimiento que amortigua dicho descenso, por valor de 3,9%. En valores absolutos, Mapfre consigue pasar de unos ingresos por emisión de primas de 34.028 millones a 35.368 millones de euros (Mapfre, s.f.). Igualmente, en el anexo B se muestra desglosado y con un mayor nivel de detalle las primas emitidas.

4.1. Valor en bolsa

Mapfre al igual que la mayoría de empresas que componen el IBEX-35, han sufrido una caída significativa a lo largo del año 2018. En este caso, las variaciones de Mapfre han fluctuado de manera muy similar que el IBEX-35, en contraposición a Bankia, cuyo descenso, como se ha mencionado anteriormente, ha sido más acusado.

Gráfica 4: Evolución temporal de la cotización de Mapfre y del IBEX-35 en base 100, durante el periodo comprendido entre 05/06/2017 y 05/06/2019.

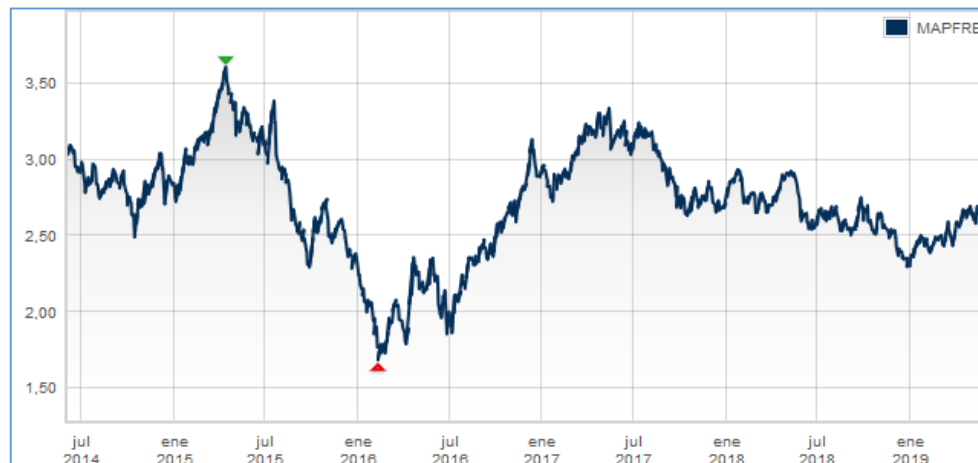


Fuente: Bolsas y Mercados Españoles (BME).

Desde el principio hasta el final del año 2018, el valor en bolsa de Mapfre ha sufrido un descenso notable cuantificado en un 9,21% pasando su valor, a día 01/01/2018, de 2,5553 a 2,32 € por acción. Si se visualiza la cotización de Mapfre a lo largo de 5 años, no se distingue ninguna tendencia mayor clara, que posibilite la formulación de una hipótesis sobre la tendencia venidera. Si bien, han ocurrido grandes variaciones a lo largo de los últimos años, llegando a alcanzar un máximo el 15/04/2015, con una cotización de 3,60 €, y un año más tarde aproximadamente, el día 11/02/2016, alcanzando el mínimo en cinco años llegando a cotizar 1,68 € por acción, finalmente el precio de cotización ha acabado

en un valor pr3ximo al de inicio del periodo. Desde el inicio del periodo, 05/06/2014 hasta el 05/06/2019, la variaci3n total en el precio de cotizaci3n ha sido de -12,80%.

Gráfica 5: Evoluci3n del precio de cotizaci3n de Mapfre desde el 05/06/2014 al 05/06/2019.



Fuente: Bolsas y Mercados Espa3oles (BME).

Mapfre ha llevado a cabo una polític a bastante m ás activa que Bankia en cuanto a reparto de dividendos se refiere. La estrategia seguida ha sido la de llegar a repartir dos dividendos por a3o manteniendo cierta regularidad en las cuantías a pagar a los accionistas. Entre los dividendos que se llegan a repartir se hace una distinció n, dividendo a cuenta y dividendo complementario.

El primero de ellos es el reparto de dividendos a cuenta y tiene lugar al final del a3o, normalmente en el mes de Diciembre, sin haber llegado a cerrar el ejercicio contable. Es por eso, que al a3o siguiente, normalmente por el mes de Junio, se reparte el dividendo complementario una vez cerrada la contabilidad que corresponde al ejercicio del a3o anterior, atribuyendo por tanto los beneficios que quedaban por obtener al cierre del ejercicio como los que corresponden a las empresas del grupo, dado su complejo grupo empresarial (Expansi3n, s.f.).

Tabla 4: Fecha y cantidad de los dividendos repartidos por Mapfre desde el año 2009.

Fecha	Importe absoluto	Importe neto ³	Ejercicio	Tipo
25/06/2018	0,09 €	0,07 €	2018	Complementario
20/12/2018	0,06 €	0,05 €	2018	A cuenta
14/06/2018	0,09 €	0,07 €	2017	Complementario
14/12/2017	0,06 €	0,05 €	2017	A cuenta
20/06/2017	0,09 €	0,07 €	2016	Complementario
23/12/2016	0,06 €	0,05 €	2016	A cuenta
24/06/2016	0,07 €	0,06 €	2015	Complementario
15/12/2015	0,06 €	0,05 €	2015	A cuenta
18/06/2015	0,08 €	0,06 €	2014	Complementario
15/12/2014	0,06 €	0,05 €	2014	A cuenta
20/06/2014	0,08 €	0,06 €	2013	Complementario
20/12/2013	0,05 €	0,04 €	2013	A cuenta
28/06/2013	0,07 €	0,06 €	2012	Complementario
12/12/2012	0,04 €	0,03 €	2012	A cuenta
29/06/2012	0,08 €	0,00 €	2011	Complementario
14/12/2011	0,07 €	0,06 €	2011	A cuenta
22/06/2011	0,08 €	0,06 €	2010	Complementario
01/12/2010	0,07 €	0,06 €	2010	A cuenta
16/06/2010	0,08 €	0,06 €	2009	Complementario
02/12/2009	0,07 €	0,06 €	2009	A cuenta

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del diario *Expansión*.

5. Modelización de subyacentes cotizadas

Inicialmente se introducirá el modelo determinista y el modelo estocástico para predecir el valor futuro de las acciones cotizadas en el mercado bursátil. La introducción a los modelos determinista sirve de precedente para poder comprender mejor el funcionamiento de los modelos estocásticos. A la hora de llevar los cálculos a cabo, se ha empleado el programa conocido como “*Wolfram Mathematica 11.3 Student Edition*”.

5.1. Modelo determinista

Los modelos deterministas son aquellos que se emplean en ambientes de certidumbre y sin intervención del azar. Esto es, con activos financieros en los cuales se acuerda el rendimiento que se obtendrá al final de la vida útil de la inversión, como puede ser un

³ Importe del dividendo habiéndose practicado la retención para el Impuesto Sobre la Renta de las Personas Físicas.

préstamo, letras del tesoro, bonos, entre otros. Dentro de los modelos determinísticos, se emplea para el cálculo de los rendimientos, el denominado Régimen de Capitalización a Interés Compuesto Continuo (en adelante RCICC), que cumple lo siguiente (Chiang & Wainwright, 1967):

$$S_0 = \text{capital inicial}$$

$$\mu = \text{rendimiento de la inversión}$$

$$S(t) = \text{valor del subyacente en el instante } t$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{l} E.D.O.^4 \\ C.I.^5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} S'(t) = \mu S(t), \\ S(0) = S_0 \end{array} \right. \quad t > 0, \rightarrow S(t) = S_0 e^{\mu t}, \quad (1)$$

Este modelo es útil para los activos mencionados anteriormente ya que, a priori, no se espera que el valor del capital inicial varíe y además se conoce el momento del reembolso de la inversión. Pero este tipo de modelos no son compatibles con las acciones, puesto que el valor nominal de la inversión realizada no se mantiene constante hasta el final, y además, el plazo en el que se reembolsa es desconocido, puesto que no se acuerda entre la parte oferente y demandante.

5.2. Modelo estocástico

El mercado bursátil se caracteriza por ser un ambiente de incertidumbre. Además de tener en cuenta los aspectos anteriores, es necesario considerar factores exógenos al mercado bursátil, como son las subidas de interés, políticas económicas de los países, última información disponible de la empresa, tendencias del mercado, etc.

No se pueden generar modelos que recogieran de manera determinista todas las posibles variables que pueden afectar a la cotización de las acciones, por lo que, englobamos todos estos aspectos en el concepto de variabilidad o volatilidad. Dicho concepto de volatilidad acaba recogiendo en una variable, denominada variable aleatoria, y siendo representada por el término "Z". A continuación se muestra una tabla con una comparación entre un modelo determinista y uno estocástico:

⁴ Ecuación Diferencial Ordinaria la cual se resuelve a partir de una Condición Inicial

⁵ Condición Inicial

Tabla 5: Comparación básica entre un modelo determinista y un modelo estocástico.

	Determinista	Estocástico
Número	$a = 7$	v. a. ⁶ : $A \sim N(\mu = 7; \sigma^2 > 0)$
Función	$x(t) = 7t$	p. e. ⁷ : $X(t) = A * t, A \sim N(\mu = 7; \sigma^2 > 0)$

Fuente: Elaboración propia a partir de los apuntes de la asignatura Análisis de Riesgos Financieros.

Un modelo determinista atribuye a una constante "a" el valor 7, por ejemplo. En el caso de un modelo estocástico, dicha constante pasa a ser una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 7, y de varianza superior a 0. Así pues, una función $x(t) = 7t$ se puede representar como un proceso estocástico $X(t) = A * t$ donde A es la variable aleatoria anterior

5.2.1. Procesos estocásticos de Wiener y Movimiento Browniano

La incertidumbre que se asocia a los subyacentes financieros se realiza mediante el denominado proceso estocástico de Wiener $\{W(t): t > 0\}$, el cual sigue las siguientes reglas.

- W1, se conoce el valor en el origen.

$$P[W(0) = 0] = 1.$$

- W2, el proceso de Wiener tiene implícitos los incrementos estacionarios:

$$W(t) - W(s) \stackrel{d}{=} W(t+h) - W(s+h), \quad \forall h: s, t, s+h, t+h \in [0, +\infty[.$$

- W3, sus incrementos son independientes entre sí:

$$W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n \leq +\infty, \quad n \geq 1.$$

⁶ Variable Aleatoria

⁷ Proceso Estocástico

⁸ El símbolo " $\stackrel{d}{=}$ " implica que se sigue la misma distribución en las variables aleatorias que se localizan en ambos lados de la igualdad.

- W4, los incrementos son de tipo gaussiano, con media 0 y varianza en proporci3n al incremento temporal:

$$W(t) - W(s) \sim N(\mu = 0; \sigma^2(t - s)), \quad \sigma > 0.$$

Si consideramos $\sigma^2 = 1$, entonces $\{W(t): t \geq 0\}$, se denominar3 Movimiento Browniano (MB) y se pasar3 a denotar $\{B(t): t \geq 0\}$. Entonces:

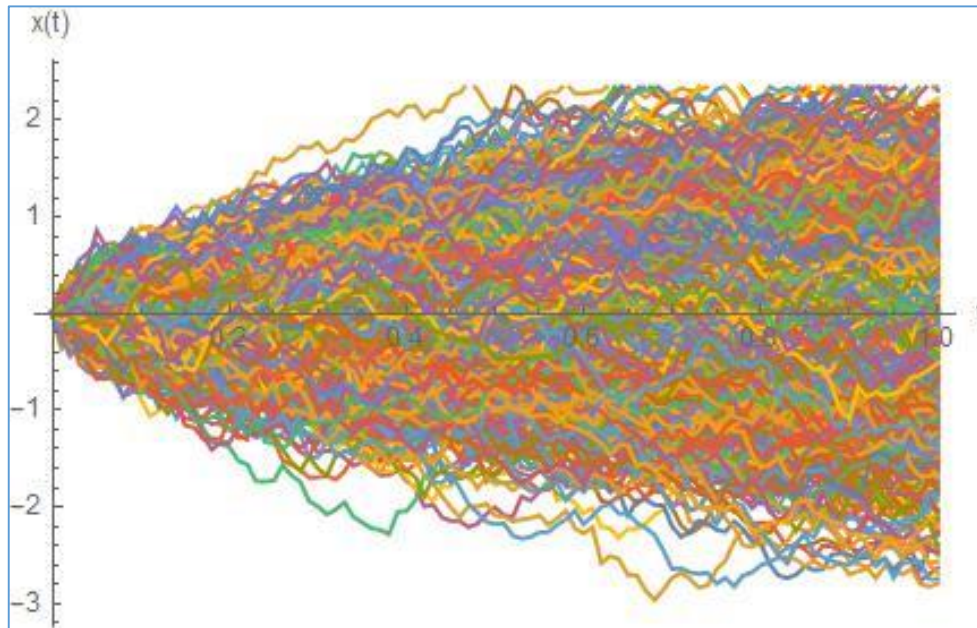
$$W(t) \equiv B(t).$$

Si se toma como valor de la varianza $\sigma^2 = 1$, $s = 0$ en W4, y se emplea W1, se deduce que:

$$W(t) \sim N(0; t), \quad (2)$$

En consecuencia el proceso estoc3stico de Wiener es una variable aleatoria normal de media 0 y varianza t . Es decir, que la varianza se incrementar3 cuanto m3s se aleje del origen. M3s adelante se muestra una gr3fica en la que se representa las m3ltiples posibles trayectorias de $W(t)$:

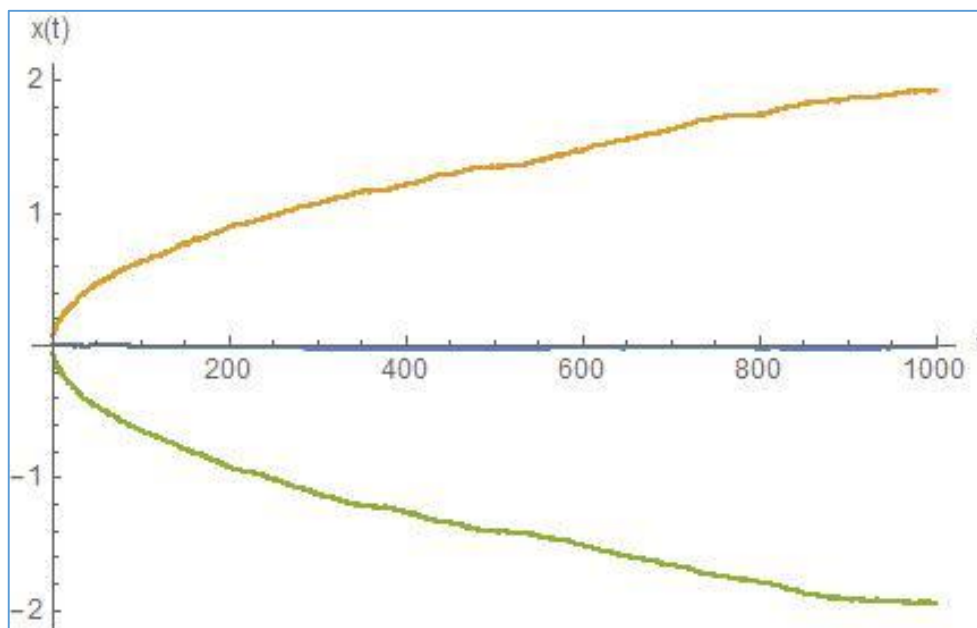
Gráfica 6: Representación visual del Movimiento Browniano.



Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Este último gráfico permite visualizar de una forma aglomerada el concepto del Movimiento Browniano. Seguidamente se muestra una gráfica que recoge el Movimiento Browniano de una forma más simplificada, en la cual se puede apreciar en mayor medida el incremento de la varianza conforme aumenta la variable "t".

Gráfica 7: Representación simplificada visual del Movimiento Browniano.



Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Continuando con el proceso de Wiener, se describe las propiedades estadísticas a continuación:

La primera (P1) y la segunda propiedad (P2) estadística se deducen de la cuarta regla del proceso de Wiener:

$$\mathbb{E}[W(t)] = 0,$$

$$\mathbb{V}[W(t)] = t.$$

La tercera propiedad estadística corresponde a las características de la covarianza dentro del proceso de Wiener:

$$\text{Cov}[W(t), W(s)] = \min(s, t).$$

En estos momentos se procede a resolver el resultado que se muestra en la propiedad de la covarianza tomando la siguiente condición $0 < s < t$:

$$\text{Cov}[W(t), W(s)] = \mathbb{E}[W(t)W(s)] - \mathbb{E}[W(t)]\mathbb{E}[W(s)].$$

A la hora de simular las trayectorias que se generan en el Movimiento Browniano, la forma más sencilla es la siguiente:

$$W(t) \equiv B(t) =^d \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N(0; 1), \quad (3)$$

Dicha igualdad en la distribución se demuestra con la siguiente tabla:

Tabla 6: Demostración de la igualdad en la distribución del Movimiento Browniano y su simulación.

	$W(t) \equiv B(t)$	$\sqrt{t}Z, \quad Z \sim N(0; 1)$
Distribución	Gaussiana	Gaussiana ⁹

⁹ La transformación lineal de una variable aleatoria gaussiana, da como resultado el mismo tipo de distribución, es decir, gaussiana.

Media	0 (W4)	$\mathbb{E}[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t}\mathbb{E}[Z] = \sqrt{t} * 0 = 0$
Varianza	t (W4)	$\mathbb{V}[\sqrt{t}Z] = (\sqrt{t})^2\mathbb{V}[Z] = t * 1 = t$

Fuente: Elaboración propia a partir de los apuntes de la asignatura Análisis de Riesgos Financieros.

En este caso, (3) es un caso singular de la siguiente propiedad del MB que se designa $\frac{1}{2}$ -*autosemejante*:

$$B(t * s) =^d \sqrt{t} B(s), \quad t > 0, s \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Si se considera $s = 1$ en (4) se obtiene:

$$B(s) =^d \sqrt{t} B(1),$$

teniendo en cuenta por (2) que $B(1) \sim N(0; 1)$, haciendo $Z = B(1)$, se deduce (3).

La forma más habitual de implementar la simulación del MB se consigue a través de la recurrencia, la cual se sustenta en las mismas propiedades del MB:

$$\begin{aligned} W(t_{i+1}) - W(t_i) &\sim N(0; t_{i+1} - t_i), \quad 0 < i < N - 1, \\ W(t_{i+1}) - W(t_i) &=^d \sqrt{t_{i+1} - t_i} * Z_i, \quad Z_i \sim N(0; 1), 0 < i < N - 1, \\ W(t_0 = 0) &= 0. \end{aligned}$$

5.2.2. Modelo estocástico para los subyacentes: Modelo Log-Normal

Para poder continuar con la modelización es necesario introducir la dinámica de los subyacentes del modelo determinista. Teniendo en cuenta que la acción se encuentra en la bolsa, y por lo tanto, un ambiente de incertidumbre, es necesario emplear el Teorema Central de Límite de Estadística para poder determinar la tasa de rendimiento μ . Dicha tasa de rendimiento se modeliza mediante un valor nominal determinístico más la perturbación, de distribución normal, propia del ambiente de incertidumbre. Se detalla a continuación la tasa de rendimiento descrita:

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma W'(t), \quad \sigma > 0, \quad (5)$$

teniendo en cuenta que:

$$\mu = \text{Valor nominal}$$

$$\sigma = \text{Intensidad de la perturbación}$$

$$W'(t) = \text{Ruido blanco}$$

El denominado Ruido Blanco resulta de realizar la derivada, en un sentido muy genérico, ya que no es posible llevar a cabo la derivada del proceso estocástico de Wiener, dándose como condición $\sigma > 0$ (Baxter & Rennie, 1999).

En estos momentos, sin perder de vista el modelo determinístico, se planteará las bases del modelo estocástico, el cual será más notorio durante el mismo Trabajo de Fin de Grado, se procede a derivar el modelo determinista:

$$S'(t) = \mu S(t) \rightarrow \frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t) \rightarrow dS(t) = \mu S(t) dt.$$

Se procede a incluir la expresión de la ecuación (5), en este último apartado:

$$\begin{aligned} dS(t) &= (\mu + \sigma W'(t)) S(t) dt \\ dS(t) &= \mu S(t) dt + \sigma W'(t) S(t) dt. \quad (6) \end{aligned}$$

Recordando la definición de diferencial en términos de la derivada:

$$dW(t) = W'(t) dt,$$

(6) se puede definir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases}. \quad (7)$$

De esta forma, añadiendo la condición inicial, se obtiene el modelo Log-Normal para los activos cotizados, pasando a ser una Ecuación Diferencial Estocástica (En adelante EDE).

5.2.3. El Lema de Itô¹⁰

El objetivo en estos momentos es encontrar $S(t)$ cumpliendo (7) y empleando el Lema de Itô. El lema de Itô es una herramienta que permita derivar procesos estocásticos en los cuales se encuentra implícita una EDE (Wilmott, Howison, & Dewynne, 1998), de la siguiente forma:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Por lo tanto, el Lema de Itô se puede considerar la “regla de la cadena” de los modelos estocásticos con los que derivar las funciones de dichos modelos.

El mencionado lema, sigue tres hipótesis que permiten el planteamiento de la tesis que posteriormente se aplicaría al modelo estocástico:

1. $f(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$, f cumple lo anteriormente descrito, y por ende, son posibles las siguientes derivadas parciales:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

2. $X = \{X(t): t \geq 0\}$ es un proceso estocástico de tipo Itô, cumpliendo, además, la EDE

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

3. El proceso estocástico $Y(t) = \{Y(t): t \geq 0\}$ pasa a definirse de la siguiente forma:

$$Y(t) = f(X(t), t).$$

Habiéndose planteado las tres hipótesis sobre las que sustenta el Lema de Itô, se procede a desarrollar la tesis del lema dado que $Y(t)$ cumple la siguiente EDE tipo Itô:

¹⁰ El lema de Itô es una herramienta ideada para poder derivar los procesos estocásticos, ideado por el matemático japonés Kiyosi Ito en el año 1951

$$dY(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) + \mu(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) + \frac{1}{2} \sigma^2(X(t), t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t) \right) dt + \sigma(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) dW(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

o de forma mucho más abreviada:

$$dY = \left(f_t + \mu f_x + \frac{1}{2} \sigma^2 f_{xx} \right) dt + \sigma f_x dW.$$

5.2.4. Solución del modelo Log-Normal mediante el Movimiento Browniano Geométrico (MBG)

Una vez planteadas las bases del Lema de Itô se procede a obtener la solución de (7), o sea, Modelo Log-Normal. Se recuerda:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases}. \quad (9)$$

En este momento se procede a identificar los aspectos de la EDE de la función anterior que siguen los mismos patrones que la EDE del Lema de Itô:

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t),$$

se deduce por tanto lo siguiente:

$$X(t) = S(t) \equiv x = S,$$

$$\mu(X(t), t) = \mu(S(t), t) = \mu S(t) \equiv \mu(x, t) = \mu S,$$

$$\sigma(X(t), t) = \sigma(S(t), t) = \sigma S(t) \equiv \sigma(x, t) = \sigma S.$$

Se escoge $f(x, t) = \ln(x)$ cumpliendo las siguientes situaciones y teniendo en cuenta que son funciones continuas:

$$\begin{cases} f_x = \frac{1}{x} \\ f_{xx} = -\frac{1}{x^2} \\ f_t = 0 \end{cases},$$

aplicando el Lema de Itô se deduce que el proceso estocástico es el siguiente:

$$Y(t) = \ln(S(t)),$$

que también cumple la siguiente EDE del tipo Itô:

$$d(\ln(S(t))) = \left(0 + \mu S(t) \frac{1}{S(t)} + \frac{1}{2} (\sigma S(t))^2 * \left(\frac{-1}{(S(t))^2} \right) \right) dt + \sigma S(t) * \frac{1}{S(t)} dW(t).$$

Si se simplifica, queda de la siguiente forma:

$$d(\ln(S(t))) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t).$$

En este punto, solo queda integrar para obtener la solución del MBG:

$$\begin{aligned} \int_0^T d(\ln(S(t))) &= \int_0^T \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^T \sigma dW(t), \\ \ln(S(T)) - \ln(S(0)) &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma(W(T) - W(0)), \\ \ln\left(\frac{S(T)}{S_0}\right) &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W(T), \\ \frac{S(T)}{S_0} &= e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) T + \sigma W(T)}. \end{aligned}$$

Entonces, la solución que se obtiene al MBG es:

$$S(T) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W(T)}. \quad (10)$$

5.2.5. Principales funciones estadísticas del Movimiento Browniano Geométrico

Antes de proceder a desarrollar las principales funciones estadísticas, se sustituye la variable T por t en la expresión (10):

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}.$$

El modelo resultante es aquel que representa la actividad de un subyacente cotizado en ambientes de incertidumbre, como es en este caso el IBEX-35. Es necesario tener en cuenta que $S(t) \geq 0$, por lo tanto, las realizaciones que tengan lugar serán también positivas ($S(t, \omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$). Además, es posible llevar a cabo simulaciones del proceso estocástico de Wiener ($\sigma^2 = 1$), teniendo en cuenta (3):

$$W(t) \equiv B(t) = {}^d \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N(0; 1)$$

incorporando la simulación del MBG queda como resultado la siguiente expresión:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad Z \sim N(0; 1). \quad (11)$$

Aunque se ha obtenido la solución del modelo Log-Normal, es conveniente conocer, en la medida de lo posible, tanto el comportamiento medio como la varianza o volatilidad del MBG. Por eso, en los siguientes modelos se procede al cálculo de los mismos.

5.2.5.1. Media del Movimiento Browniano Geométrico

La función media del MBG se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}\left[S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}\right] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}[e^{\sigma\sqrt{t}Z}].$$

Para poder llevar a cabo el cálculo, se realiza la siguiente sustitución $\lambda = \sigma\sqrt{t}$. Igualmente, se calcula la media de $e^{\sigma\sqrt{t}Z}$ teniendo en cuenta la reciente sustitución:

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Z}] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\frac{\lambda^2}{2}},$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad Z \sim N(0; 1). \quad (12)$$

Se deshace en estos momentos la sustitución que se había llevado a cabo en (12) para facilitar los cálculos, y se simplifica toda la expresión que se ha descrito al principio del apartado hasta llegar a obtener la función media del MBG:

$$\mathbb{E}[S(t)] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{(\sigma\sqrt{t})^2}{2}} = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = S_0 e^{\mu t},$$

$$\mathbb{E}[S(t)] = S_0 e^{\mu t}. \quad (13)$$

El hecho de obtener la media del modelo estocástico, como se ha indicado anteriormente, es conveniente dado que el comportamiento de los subyacentes, se comportan en media como (1).

5.2.5.2. Varianza del Movimiento Browniano Geométrico

En el caso que ocupa el Trabajo de Fin de Grado, para obtener la varianza se emplea la siguiente expresión:

$$\mathbb{V}[S(t)] = \mathbb{E}[(S(t))^2] - (\mathbb{E}[S(t)])^2, \quad (14)$$

teniendo en cuenta (13), se procede al cálculo:

$$\mathbb{E}[(S(t))^2] = \mathbb{E}\left[(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z})^2\right] = (S_0)^2 e^{(2\mu - \sigma^2)t} \mathbb{E}[e^{2\sigma\sqrt{t}Z}].$$

Se recurre de nuevo a la sustitución para el cálculo del fragmento $\mathbb{E}[e^{2\sigma\sqrt{t}Z}]$, pero en este caso de la siguiente forma $\lambda = 2\sigma\sqrt{t}$. Siguiendo el cálculo que se ha realizado en el apartado anterior en (12) y se obtiene como resultado de la media lo siguiente:

$$\mathbb{E}[e^{2\sigma\sqrt{t}Z}] = e^{2\sigma^2 t}.$$

Habiendo llegado a este punto, se enlazan los cálculos realizados independientemente para obtener el resultado de la expresión $\mathbb{E}[(S(t))^2]$, y finalmente obtener la función de la Varianza del MBG:

$$\mathbb{E}[(S(t))^2] = (S_0)^2 e^{(2\mu - \sigma^2)t} e^{2\sigma^2 t} = (S_0)^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t}, \quad (15)$$

y finalmente se sustituye (13) y (15) en (14) para obtener la función varianza:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[S(t)] &= (S_0)^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t} - (S_0 e^{\mu t})^2 = (S_0)^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t} - (S_0)^2 e^{2\mu t} \\ \mathbb{V}[S(t)] &= (S_0)^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1) > 0. \quad (16) \end{aligned}$$

6. Estimación de los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$

Una vez obtenido tanto la solución del MBG y sus funciones media y varianza, es necesario estimar los parámetros μ y σ para, al final del proceso de estimación, llegar a obtener resultados tangibles sobre los que emitir un juicio.

A la hora de estimar los mencionados parámetros, se pueden aplicar las siguientes tres técnicas estadísticas:

- Método de Momentos Estadísticos (en adelante MME).
- Método de Máxima Verosimilitud (en adelante MMV).
- Método de Momentos No Paramétrico (en adelante MMNP).

Normalmente, es conveniente emplear al menos dos métodos para comprobar lo similares que son entre ellos, y que, por lo tanto, las estimaciones que se arrojan en el modelo final, no tendrán una diferencia muy significativa dependiendo del método que se escoja. La elección del método se llevará a cabo una vez se haya montado el modelo con ambos parámetros y se haya validado mediante el Error Porcentual Absoluto Medio (en adelante

MAPE) y el Error Cuadrático Medio (en adelante ECM). Para estimar los parámetros, en este Trabajo de Fin de Grado se emplearán los métodos de Momentos Estadísticos y el de Máxima Verosimilitud. Previamente a la exposición de los siguientes apartados, se realiza un cambio de notación para los parámetros mencionadas de la siguiente forma:

$$\mu \rightarrow \hat{\mu}, \quad \sigma \rightarrow \hat{\sigma}.$$

Dicho cambio en la notación se lleva a cabo para evitar confusión, dado que ambos signos se emplearan para designar la media (μ) y la varianza (σ) de los datos que se empleen en los futuros cálculos significando por tanto $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ el valor en cuestión de los parámetros.

Durante el desarrollo de este punto, en primer lugar se teorizan, calculan y definen las ecuaciones que permiten el cálculo de los parámetros. En segundo y último lugar se implementan los datos de las cotizaciones de Bankia y Mapfre para obtener las estimaciones que se hacen de los parámetros mencionados.

6.1. Método de Momentos Estadísticos

En primer lugar, se parte de la solución del MBG:

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \rightarrow \frac{S(t)}{S_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \\ &= \\ \frac{S(t)}{S_0} &= e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}. \end{aligned}$$

Y se aplica el logaritmo neperiano en ambos lados de la expresión:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \ln(S(t)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t; \sigma^2 t\right), \quad (17)$$

ahora, se calcula la expresión (17) para los instantes t_{i+1} y t_i , y posteriormente se restan ambas expresiones:

$$\begin{aligned}
 t_{i+1} &\rightarrow \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_{i+1} + \sigma W(t_{i+1}) \\
 t_i &\rightarrow \ln(S(t_i)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_i + \sigma W(t_i) \\
 \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) &= \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S(t_i)) = \\
 &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sigma (W(t_{i+1}) - W(t_i)), \quad (18)
 \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 t_{i+1} &= t_i + \Delta t \rightarrow t_{i+1} - t_i = \Delta t, \\
 W(t_{i+1}) - W(t_i) &\sim N(0; \Delta t),
 \end{aligned}$$

por lo tanto, de la expresión (18) se puede deducir:

$$\begin{aligned}
 U_i &= \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) = \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S(t_i)) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right) \Delta t; \sigma^2 \Delta t\right), \\
 0 &\leq i \leq N - 1, \quad (19)
 \end{aligned}$$

y se desprende:

$$\mathbb{E}[U_i] = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t, \quad \mathbb{V}[U_i] = \sigma^2 \Delta t, \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (20)$$

Teniendo en cuenta las cotizaciones y conociendo que el modelo Log-Normal es estable, se cumple que:

$$S(t_i) \approx S_i, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (21)$$

Además, de la expresión (19) se conoce también que la distribución que se sigue es Gaussiana. Luego, es conocida también la distribución del incremento del logaritmo del valor teórico de la cotización de la acción, esto es, la diferencia que se muestra a continuación:

$$\ln(S(t_{i+1})) - \ln(S(t_i)). \quad (22)$$

Sin perder de vista la expresión (21), se deduce que el incremento del logaritmo de las cotizaciones es muy similar, o sea:

$$\ln(S_{i+1}) - \ln(S_i), \quad 0 \leq i \leq N - 1, \quad (23)$$

Lo que se persigue con el MME, es equiparar los primeros datos estadísticos de la población a los datos muestrales, es decir las cotizaciones, que se emplean en la estimación de los parámetros. Para poder llegar a definir el sistema de ecuaciones del cual se obtendrá los parámetros, se parte en primer lugar de la igualdad, de la media y la varianza, de la muestra y los valores teóricos, (22) y (23).

Entonces, teniendo en cuenta la muestra de $N + 1$ cotizaciones S_i , se generan los N valores obtenidos en (23):

$$u_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i), \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (24)$$

Se continúa calculando la media y quasi-varianza muestrales de u_i :

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_i, \quad s = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (u_i - \bar{u})^2, \quad (25)$$

se iguala la expresión de la media y la varianza de la expresión (20) y de (25):

$$\begin{cases} \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t = \bar{u} \\ \sigma^2 \Delta t = s^2 \end{cases}. \quad (26)$$

Por último, se resuelve el sistema de ecuaciones de la expresión (26) y se obtiene las funciones que definen los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\mu}_{MME} = \frac{\bar{u} + \frac{s^2}{2}}{\Delta t}, \quad \hat{\sigma}_{MME} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (27)$$

La notación de los parámetros con los subíndices se emplea para poder diferenciarlos del cálculo mediante el MMV.

6.2. Método de Máxima Verosimilitud

El MMV busca, en la medida de lo posible, obtener las estimaciones de los parámetros más real que hacen la consecución de la muestra de las acciones. Se emplea por tanto una función de verosimilitud:

$$L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma)$$

Dicha función de verosimilitud consta de dos variables, μ y σ , las cuales se tratan de maximizar mediante la optimización.

Con la condición de que la muestra proceda de una población descrita mediante una variable aleatoria continua X , cuya función de densidad de probabilidad (en adelante fdp) se define $f(s; \vec{\theta})$ y siendo $\vec{\theta} = (\mu, \sigma)$ el vector de los parámetros de los que depende X , se entiende que la probabilidad de que ocurra la muestra para el valor obtenido en el vector de los parámetros $\vec{\theta} = (\mu, \sigma)$ se describe mediante la siguiente fdp:

$$L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma) = f(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma), \quad (28)$$

El planteamiento que se sigue en el MMV es que la muestra se conoce y los parámetros μ y σ son variables que se desean calcular. Por ende, es necesario asumir que la cotización de la acción se rige por el modelo Log-Normal:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases}, \quad (29)$$

y que, además, la solución $S(t)$, de la EDE de Itô, es markoviana y por tanto cumple la siguiente condición $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_i < \dots t_N\}$. Esto genera lo siguiente:

$$P[S(t_{i+1}) = S_{i+1} | S(t_0) = S_0, S(t_1) = S_1, \dots, S(t_i) = S_i] = P[S(t_{i+1}) = S_{i+1} | S(t_i) = S_i], \quad 0 \leq i \leq N - 1$$

cuya descripción se puede realizar igualmente como fdp:

$$f(S_{i+1} | S_0, S_1, \dots, S_i) = f(S_{i+1} | S_i), \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (30)$$

Ahora, aprovechando la propiedad “en cadena” de las probabilidades condicionadas desarrolladas como fdp, se puede obtener a grandes rasgos la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma) &= f(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma) \\ &= f(S_0) f(S_1 | S_0) f(S_2 | S_0, S_1) \dots f(S_{i+1} | S_0, S_1, \dots, S_i) \dots f(S_N | S_0, S_1, \dots, S_{N-1}). \end{aligned}$$

Se recuerda (30) y se aplica a toda la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} f(S_0) f(S_1 | S_0) f(S_2 | S_1) \dots f(S_{i+1} | S_i) \dots f(S_N | S_{N-1}) \\ = \prod_{i=0}^{N-1} f(S_{i+1} | S_i). \quad (31) \end{aligned}$$

Se tiene en cuenta $f(S_0) = 1$, ya que la primera cotización es conocida.

En estos momentos se procede a asignar un tipo de distribución a la fdp recién obtenida. Para ello se sigue el esquema de Euler-Maruyama¹¹ que permitirá aproxima la solución de la EDE que define el modelo Log-Normal. Se considera pues, la siguiente aproximación:

$$t_{i+1} = (i + 1)\Delta t, \quad 0 \leq i \leq N - 1$$

esto permite realizar la misma aproximación en el modelo Log-Normal:

¹¹ Leonhard Euler fue un matemático suizo del siglo XVIII que ideó el método de Euler para aproximar las EDE a una solución numérica. Posteriormente, Gisiro Maruyama matemático japonés del siglo XX, perfeccionó dicho método. A la hora de denominar el método se emplean ambos apellidos debido a la contribución que ambos llevaron a cabo en el susodicho método.

$$S(t_{i+1}) \approx S^{(i+1)}, \quad (32)$$

se actúa, por lo tanto, de la misma forma en todo el modelo:

$$\begin{cases} S^{(i+1)} = S^{(i)} + \mu S^{(i)} \Delta t + \sigma S^{(i)} \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}, & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ S^{(0)} = S_0 \end{cases} \quad (33)$$

Esto es, en consecuencia, el esquema de Euler-Maruyama.

Teniendo presente la regla W4 del Movimiento Browniano, o proceso estocástico de Wiener:

$$\begin{aligned} W(t_{i+1}) - W(t_i) &\sim N(0; t_{i+1} - t_i = \Delta t), \\ W(t_{i+1}) - W(t_i) &= \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad Z_i \sim N(0; 1), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (34)$$

se sustituye (34) en la expresión (33):

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} + \mu S^{(i)} \Delta t + \sigma S^{(i)} \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

lo cual permite deducir la distribución que se sigue:

$$S^{(i+1)} | S^{(i)} \sim N \left((1 + \mu \Delta t) S^{(i)}; \sigma^2 (S^{(i)})^2 * \Delta t \right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Considerando $S_i \approx S^{(i)}$, se obtiene lo siguiente:

$$f(S_{i+1} | S_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{S_{i+1} - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}, \quad (35)$$

donde:

$$\begin{cases} \mu_i = (1 + \mu\Delta t)S^{(i)} \\ \sigma_i = \sigma S_i \sqrt{\Delta t} \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Finalmente, si se reemplaza esta última expresión en (31), se obtendrá la función de verosimilitud que se pretende maximizar para obtener los parámetros μ y σ :

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma) &= L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma) = \prod_{i=0}^{N-1} f(S_{i+1}|S_i) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{S_{i+1}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \\ L(\mu, \sigma) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \\ &= L(\mu, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i S_i \sqrt{\Delta t}}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}-(1+\mu\Delta t)S_i}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}}\right)^2} \end{aligned}$$

Para poder llevar a cabo la maximización de una forma más simple, se procederá a calcular el logaritmo neperiano en toda la función, y por ello, trabajar con una función de log-verosimilitud:

$$\begin{aligned} \max_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0} \tilde{L}(\mu, \sigma) &= \ln(L(\mu, \sigma)) \\ &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(\Delta t) - N \ln(\sigma) - \sum_{i=0}^{N-1} \ln(S_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - (1 + \mu\Delta t)S_i}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}}\right)^2. \end{aligned}$$

Dado que $\max f(x) \equiv \min -f(x)$, se entiende que:

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0} \tilde{L}(\mu, \sigma) = \min_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0} \tilde{\tilde{L}}(\mu, \sigma),$$

por consiguiente:

$$\tilde{L}(\mu, \sigma) = \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{i=0}^{N-1} \ln(S_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - (1 + \mu\Delta t)S_i}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}} \right)^2.$$

Posteriormente, utilizando las técnicas de optimización para funciones que poseen dos variables se obtiene las siguientes fórmulas para estimar los parámetros μ y σ :

$$\hat{\mu}_{MMV} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 \right), \quad \hat{\sigma}_{MMV} = \sqrt{\frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \hat{\mu}_{MMV}\Delta t \right)^2}. \quad (36)$$

6.3. Cálculo de los parámetros μ y σ

En este apartado se procederá a calcular los parámetros μ y σ , para Bankia y Mapfre, con los dos métodos anteriormente descritos. Los datos de los que se parten en ambas empresas son los de las veintinueve anteriores cotizaciones al día 7 de Junio de 2019, incluyendo esta última también. Para indicar los periodos t , se establece como el primer día de cotización $t = 0$ y el último $t = 29$

En primer lugar se estimará los parámetros de Bankia y posteriormente los de Mapfre.

6.3.1. Cálculo de los parámetros μ y σ de Bankia

A continuación se muestran los treinta últimos cierres en la cotización que Bankia ha tenido, desde el día 7 de Junio de 2019:

Tabla 7: Cierre de las cotizaciones de Bankia desde el día 26/04/2019 al 07/06/2019 en euros.

Día	26/04	29/04	30/04	02/05	03/05	06/05	07/05	08/05	09/05	10/05
Cierre	2,367	2,436	2,465	2,464	2,438	2,398	2,346	2,360	2,317	2,330
Día	13/05	14/05	15/05	16/05	17/05	20/05	21/05	22/05	23/05	24/05
Cierre	2,296	2,304	2,304	2,350	2,321	2,301	2,318	2,270	2,231	2,249
Día	27/05	28/05	29/05	30/05	31/05	03/06	04/06	05/06	06/06	07/06
Cierre	2,263	2,285	2,25	2,301	2,264	2,21	2,251	2,262	2,166	2,177

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del diario Expansión.

En primer lugar se obtiene las diferencias de los logaritmos de las cotizaciones:

Tabla 8: Diferencias logarítmicas de las cotizaciones de Bankia obtenidas desde 26/04/2019 hasta el 07/06/2018.

0,0287	0,0118	-0,0004	-0,0106	-0,0165	-0,0219
0,0059	-0,0183	0,0055	-0,0146	0,0034	0
0,0197	-0,0124	-0,0086	0,00736	-0,0209	-0,0173
0,0080	0,0062	0,0096	-0,0154	0,0224	-0,0162
-0,0241	0,0183	0,0048	-0,0433	0,0050	

Fuente: Elaboración propia mediante el programa Mathematica.

Una vez se han obtenido las diferencias logarítmicas, se calcula la media y la varianza de estos datos mediante la expresión (25):

$$\bar{u} = -0,002885,$$

$$s = 0,000274.$$

Ha de tenerse en cuenta también, $\Delta t = 1$ dado que la diferencia entre las cotizaciones es de un día. Se sustituyen los datos obtenidos en la expresión (27) y se obtiene lo siguiente:

$$\hat{\mu}_{MME} = -0,002748,$$

$$\hat{\sigma}_{MME} = 0,016569.$$

Se procede de la misma forma pero con la expresión (36) para obtener las estimaciones mediante el MMV:

$$\hat{\mu}_{MMV} = -0,002657,$$

$$\hat{\sigma}_{MMV} = 0,015937.$$

Los resultados de ambos métodos son muy parecidos, por lo que se puede afirmar que las predicciones que se hagan más adelante, en ningún caso van a verse afectadas significativamente por el método de estimación de los parámetros empleado. Otro aspecto para considerar es que el parámetro $\hat{\mu}$, en ambos casos ha resultado negativo, por lo que se entiende que independientemente del método empleado, las predicciones van a ser negativas también. Dicho de otra forma, la tendencia que se prevé que siga el modelo será descendente.

6.3.2. Cálculo de los parámetros μ y σ de Mapfre

Al igual que en el cálculo de Bankia, se consignan previamente las treinta últimas cotizaciones que han tenido lugar hasta el día 7 de Junio de 2019, esta última también incluida:

Tabla 9: Cierre de las cotizaciones de Mapfre desde el día 26/04/2019 al 07/06/2019 en euros.

Día	26/04	29/04	30/04	02/05	03/05	06/05	07/05	08/05	09/05	10/05
Cierre	2,632	2,666	2,675	2,692	2,677	2,627	2,646	2,645	2,602	2,620
Día	13/05	14/05	15/05	16/05	17/05	20/05	21/05	22/05	23/05	24/05
Cierre	2,576	2,619	2,634	2,692	2,678	2,645	2,662	2,656	2,607	2,654
Día	27/05	28/05	29/05	30/05	31/05	03/06	04/06	05/06	06/06	07/06
Cierre	2,675	2,666	2,613	2,654	2,628	2,608	2,657	2,637	2,632	2,666

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del diario Expansión.

Como anteriormente, se comienza el cálculo de los parámetros mediante el MME. Una vez se dispone de las cotizaciones se generan diferencias logarítmicas de las mismas:

Tabla 10: Diferencias logarítmicas de las cotizaciones de Mapfre obtenidas desde 26/04/2019 hasta el 07/06/2018.

0,0128	0,0033	0,0063	-0,0055	-0,0188	0,0072
-0,0003	-0,0163	0,0068	-0,0169	0,0165	0,0057
0,0217	-0,0052	-0,0123	0,0064	-0,0022	-0,0186
0,0178	0,0078	-0,0033	-0,0200	0,0155	-0,0098
-0,0076	0,0186	-0,0075	-0,0018	0,0128	

Fuente: Elaboración propia mediante el programa Mathematica.

Se emplean las diferencias en la expresión (25) para obtener la media y la varianza:

$$\bar{u} = 0,000442,$$

$$s = 0,000156.$$

Siguiendo la misma hipótesis que en el cálculo de los parámetros de Bankia, el incremento temporal pasa a ser $\Delta t = 1$. Solo queda sustituir los datos y obtener los valores de los parámetros:

$$\hat{\mu}_{MME} = 0,000520,$$

$$\hat{\sigma}_{MME} = 0,012496.$$

Finalmente, se vuelven a estimar los parámetros μ y σ , mediante el MMV haciendo uso de la expresión (36)

$$\hat{\mu}_{MMV} = 0,000500,$$

$$\hat{\sigma}_{MMV} = 0,012074.$$

Al igual que ha ocurrido en el caso de Bankia, los valores de los parámetros son muy parecidos, por lo que se reafirma que las predicciones no van a tener diferencias significativas dependiendo del método de estimación de los parámetros. En este caso μ , es positiva pero próxima a 0, por lo que se deduce una tendencia, a priori, alcista, pero que no se puede considerar muy sólida debido a su proximidad al valor nulo.

7. Resultados y validación de los modelos

Durante el desarrollo de este apartado, se llevan a cabo dos predicciones resultantes de utilizar los parámetros obtenidos de los dos métodos estadísticos empleados. Cada predicción concluye con dos validaciones, mediante el MAPE y el ECM, para conocer cual de las dos predicciones es más robusta. Se empleará la función media para arrojar un valor promedio de la cotización, teniendo en cuenta la volatilidad del mercado bursátil. Igualmente se acompaña dicha función media con la función varianza del MBG para establecer un intervalo de confianza (en adelante IC) del 95%, en el cual se recogería las inesperadas variaciones que puedan acontecer en la bolsa.

7.1. Predicción de Bankia

Se procede en primer lugar con la empresa Bankia siguiendo el orden de estimación de los parámetros, es decir, primero el MME y posteriormente el MMV.

Se recuerda que el valor de los parámetros μ y σ obtenidos mediante el MME son los siguientes:

$$\hat{\mu}_{MME} = -0,002748,$$

$$\hat{\sigma}_{MME} = 0,016569.$$

Dichos valores se implementarán en las funciones media y varianza del MBG descritas en las expresiones (13) y (16), para obtener un rango de posibles valores de la predicción. Además se introduce el valor inicial de la inversión S_0 , el cual es equivalente a la primera cotización de la serie escogida. Una vez introducidos los valores se procede a obtener los resultados para los instantes $t = 30, 32, 33, 34$ y 34 , dando lugar a la predicción a 5 días. Es necesario tener en cuenta que el instante $t = 29$ corresponde a la cotización del día 07/06/2019, o sea, la última que se escoge como muestra. Para poder implementar los intervalos de confianza superior e inferior se emplea la siguiente fórmula:

$$IC_{95\%} = \mathbb{E}[S(t)] \pm 1,96\sqrt{\mathbb{V}[S(t)]}, \quad (37)$$

Llegados a este punto, se pueden obtener los valores medios de la predicción así como los límites inferior y superior manteniendo un intervalo de confianza del 95%:

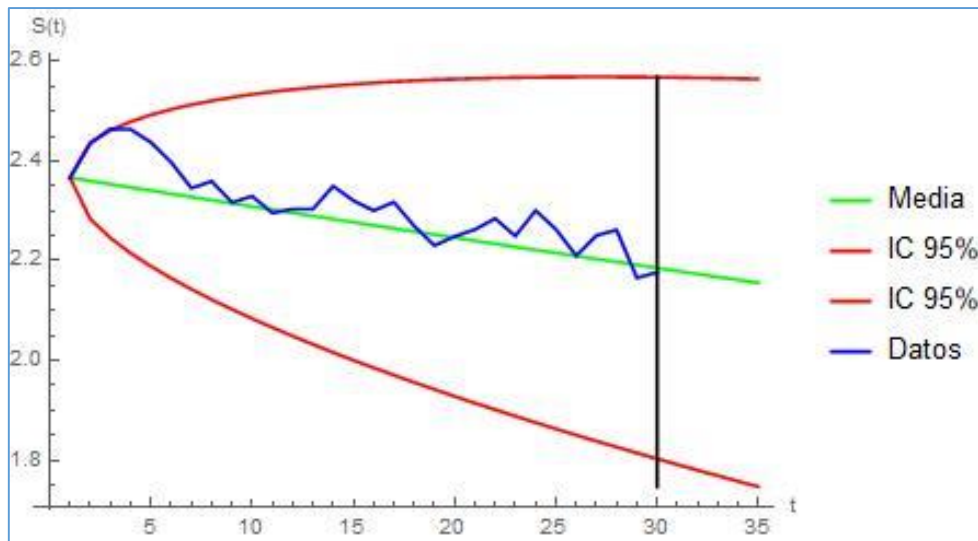
Tabla 11: Resultados de la predicción a 5 días de las acciones de Bankia mediante el Método de Momentos Estadísticos.

S(t)	IC 95% inferior	Media	IC 95%
S(30)	1,791162	2,179685	2,568209
S(31)	1,779815	2,173703	2,567592
S(32)	1,768617	2,167738	2,566859
S(33)	1,757565	2,161789	2,566014
S(34)	1,746651	2,155857	2,565062

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Igualmente se acompaña el resultado con una gráfica para facilitar una comprensión más visual:

Gráfica 8: Representación visual del resultado de la predicción a 5 días de las acciones de Bankia mediante el Método de Momentos Estadísticos, junto con el valor real de las acciones superpuesto.



Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

En este punto, se realiza la predicción mediante el MMV. Previamente se recuerdan los valores de los parámetros:

$$\hat{\mu}_{MMV} = -0,002657,$$

$$\hat{\sigma}_{MMV} = 0,015937.$$

Se incluyen los resultados de los parámetros en las expresiones (13) y (16) así como en la número (37) para obtener los IC:

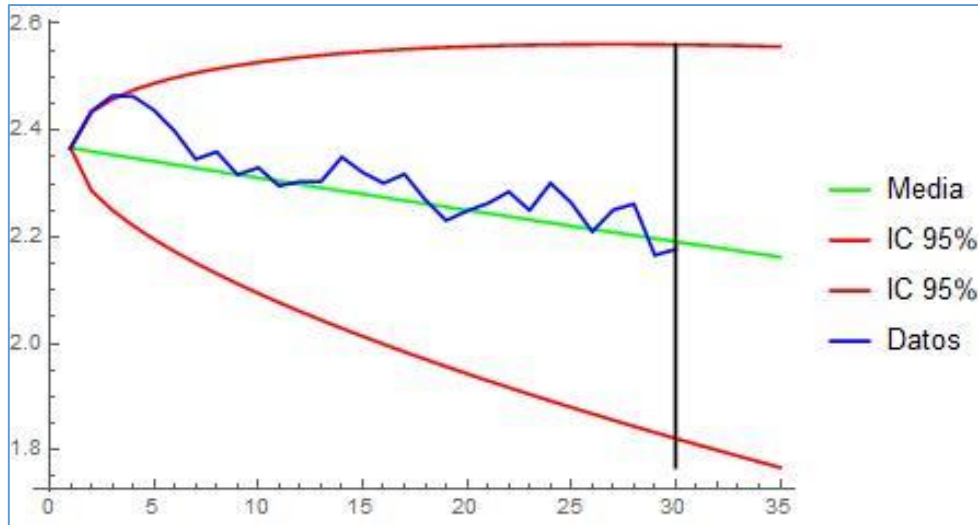
Tabla 12: Resultados de la predicción a 5 días de las acciones de Bankia mediante el Método de Máxima Verosimilitud.

S(t)	IC 95% inferior	Media	IC 95%
S(30)	1,810942	2,185614	2,560286
S(31)	1,799934	2,179813	2,559692
S(32)	1,789070	2,174028	2,558986
S(33)	1,778345	2,168258	2,558172
S(34)	1,767752	2,162504	2,557255

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Junto con la gráfica:

Gráfica 9: Representaci3n visual del resultado de la predicció a 5 días de las acciones de Bankia mediante el Método de Máxima Verosimilitud, junto con el valor real de las acciones superpuesto.



Fuente: Elaboraci3n propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

7.2. Predicció de Mapfre

Se continúa realizando las predicciones con la empresa Mapfre. Al igual que en la secci3n anterior, primero se realizará la predicció con el MME y seguidamente con el MMV.

Los valores de los parámetros de Mapfre mediante el MME son los siguientes:

$$\hat{\mu}_{MME} = 0,000520,$$

$$\hat{\sigma}_{MME} = 0,012496.$$

Ambos valores se sustituyen en las funciones media (13) y varianza (16) del MBG, junto con la primera cotizaci3n de la serie. Seguidamente se implementan los resultados obtenidos de (13) y (16) en (37) y se generan las siguientes predicciones:

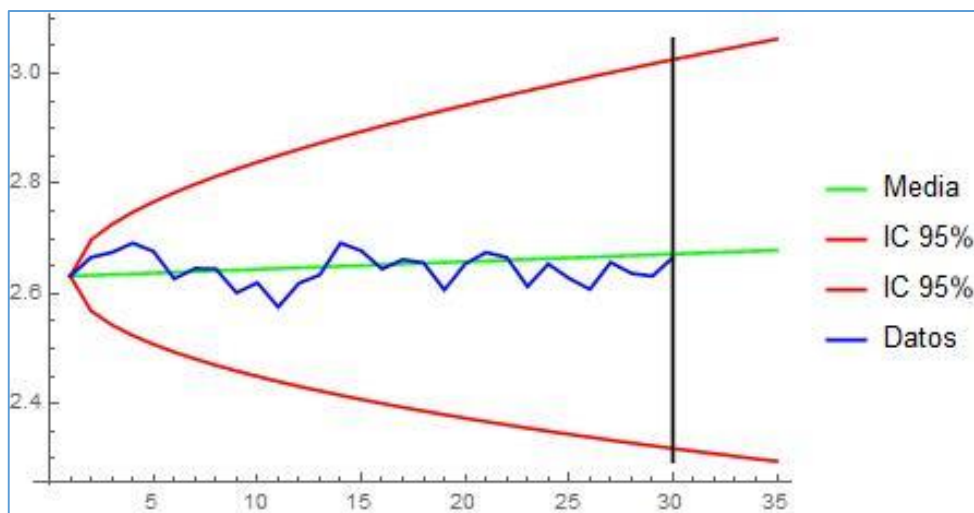
Tabla 13: Resultados de la predicción a 5 días de las acciones de Mapfre mediante el Método de Momentos Estadísticos.

S(t)	IC 95% inferior	Media	IC 95%
S(30)	2,314351	2,673435	3,032519
S(31)	2,309604	2,674827	3,040051
S(32)	2,304945	2,676221	3,047496
S(33)	2,300371	2,677614	3,054857
S(34)	2,295878	2,679009	3,062139

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

De igual modo se añade la gráfica que permite una mayor comprensión visual del resultado de las predicciones:

Gráfica 10: Representación visual del resultado de la predicción a 5 días de las acciones de Mapfre mediante el Método de Momentos Estadísticos, junto con el valor real de las acciones superpuesto.



Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Finalmente, se realizan las predicciones mediante MMV. Se procede, por tanto, a computar el valor de las estimaciones obtenido mediante dicho método:

$$\hat{\mu}_{MMV} = 0,000500$$

$$\hat{\sigma}_{MMV} = 0,012074$$

Se implementan los resultados de los parámetros así como la primera cotización de las acciones de Mapfre dentro en las expresiones (13) y (16). Y, como en las anteriores predicciones, se tiene en cuenta la expresi3n (37) para la obtenci3n de los IC:

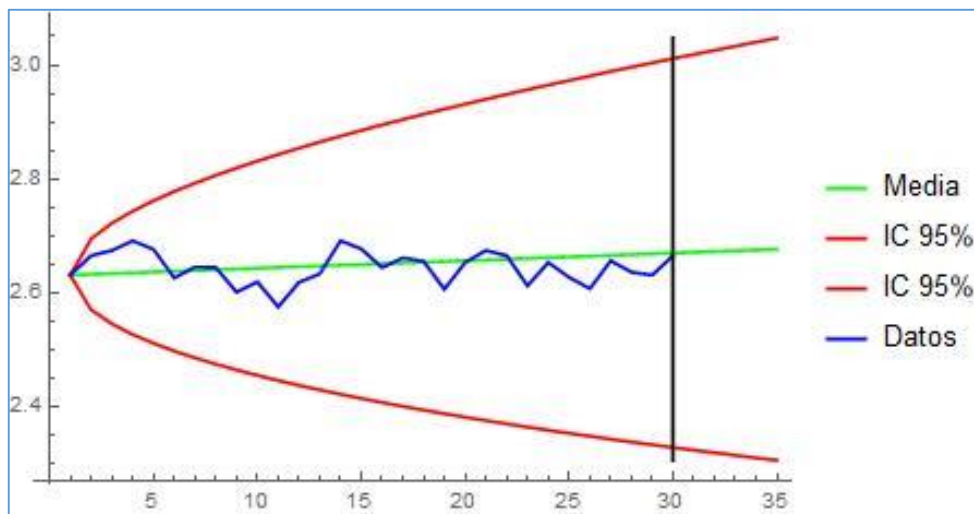
Tabla 14: Resultados de la predicció a 5 días de las acciones de Mapfre mediante el Método de Máxima Verosimilitud.

S(t)	IC 95% inferior	Media	IC 95%
S(30)	2,325131	2,671844	3,018556
S(31)	2,320549	2,673182	3,025815
S(32)	2,316053	2,674521	3,032989
S(33)	2,311639	2,675861	3,040083
S(34)	2,307304	2,677201	3,047099

Fuente: Elaboraci3n propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Al igual que en los apartados anteriores, se adjunta una gráfica de la predicció:

Gráfica 11: Representaci3n visual del resultado de la predicció a 5 días de las acciones de Mapfre mediante el Método de Máxima Verosimilitud, junto con el valor real de las acciones superpuesto.



Fuente: Elaboraci3n propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

7.3. Validaci3n de los modelos

Llegados a este punto, se sabe de forma aproximada que tendencias probablemente sigan las acciones de Bankia y Mapfre durante los cinco días siguientes de cotizaci3n al 07/06/2019. A la hora de realizar las predicciones se han llevado a cabo un total de cuatro predicciones, dos por cada empresa. Por ende, para medir como de precisas son cada una de las predicciones se realiza la validaci3n del modelo. Dicha validaci3n consistirá en

comparar los modelos matemáticos resultantes mediante el Error Porcentual Absoluto Medio y el Error Cuadrático Medio de los datos, denominados también MAPE y ECM. El MAPE muestra las desviaciones que tiene el modelo respecto de los datos reales en datos porcentuales, no en unidades, y por su parte, el ECM mide las distancias entre los valores reales y los estimados al cuadrado.

Es necesario hacer unas consideraciones previas en cuanto a los métodos de validación. La primera de ellas, respecto del MAPE, es que un modelo se puede considerar apto cuando su MAPE es menor del 5%. En caso de que ambos modelos tengan un MAPE inferior al 5% se escogerá aquel que menor MAPE arroje. Respecto al ECM, no hay ningún valor guía que indique robustez o aptitud a cerca del modelo, es más, se puede decir que su uso básicamente es comparativo. Por lo tanto, aquel modelo que dé como resultado un menor ECM será el más adecuado entre los comparados. Finalmente se indica que es bastante improbable, a la hora de hacer la validación del modelo, que se obtengan resultados contradictorios entre sí, por lo que si un modelo es mejor cuando se compara mediante le MAPE, también lo será mediante el ECM

Las expresiones que permitirán calcular tanto el MAPE como el ECM:

$$MAPE = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|v_i - \tilde{v}_i^{ex}|}{v_i}, \quad (38)$$

$$ECM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - \tilde{v}_i^{ex})^2}, \quad (39)$$

teniendo en cuenta que:

$v_i =$ *valor de la cotización de la acción en el instante i*

$\tilde{v}_i^{ex} =$ *valor estimado mediante la función media del MBG en el instante i*

7.3.1. Validación de Bankia.

Para poder validar los modelos es necesario conocer los valores que arroja la función media del MBG desde el periodo $t = 0$, hasta el instante $t = 30$, sin llegar a incluirse las predicciones.

La primera validación de todas las llevaremos a cabo con el MME. Teniendo en cuenta las expresiones (38) y (39) se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 15: Resultado del proceso de validación de Bankia para el MME.

MAPE	1,652563%
ECM	0,050719

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

De la misma forma, se calcula el MAPE y el ECM para el Método de Máxima Verosimilitud:

Tabla 16: Resultado del proceso de validación de Bankia para el MMV.

MAPE	1,593962%
ECM	0,049248

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Teniendo los resultados de ambos métodos de validación se puede afirmar que el método que muestra unas predicciones más precisas y robustas es el Método de Máxima Verosimilitud, por lo que, a la hora de generar la cartera, se tendrá en cuenta los resultados y los parámetros obtenidos mediante el mencionado método.

7.3.2. Validación de Mapfre

Continuando el mismo patrón que se ha llevado en el anterior apartado, se lleva a cabo las validaciones con las expresiones (38) y (39). En primer lugar se realiza la validación del MME:

Tabla 17: Resultado del proceso de validación de Mapfre para el MME.

MAPE	0,971961%
ECM	0,032186

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Se sigue el mismo método para la obtención del MAPE y el ECM del MMV:

Tabla 18: Resultado del proceso de validación de Mapfre para el MMV.

MAPE	0,959316%
ECM	0,031814

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

En el caso de Mapfre, al igual que en Bankia, el método más robusto y preciso es el Método de Máxima Verosimilitud. Por lo tanto, se tendrá en cuenta las estimaciones y los valores que se han generado con el MMV.

8. Consideraciones del modelo estocástico

En este apartado se tratará realizar consideraciones que se han tenido en cuenta respecto de los resultados, así como del método desarrollado y llevado a cabo.

8.1. Consideraciones de los resultados

El procedimiento que se ha llevado a cabo en los anteriores apartados ha permitido hacerse una idea a cerca del comportamiento que va a tener el valor en bolsa de las acciones de Bankia y Mapfre de forma individual y a corto plazo.

En el caso de Bankia la tendencia bajista es bastante visible, y si además, se tiene en cuenta la tendencia que está teniendo durante los dos últimos años, se podría afirmar que no es el mejor momento para invertir en dicho subyacente, sino más bien, para desinvertir. El valor μ es negativo por lo que se puede evidenciar aún más el descenso en el corto periodo de tiempo. Además, ha de tenerse en cuenta que el coeficiente β de Bankia ronda el 1,45 durante las fechas de realización del análisis, por lo que continuará de forma más agresiva la tendencia del mercado bursátil en el que se encuentra (Yahoo!, 2019). Y, si la situación que ocupa últimamente el IBEX-35 es de descenso, Bankia replicará de forma más acusada el comportamiento de dicho mercado.

Respecto a Mapfre no hay ninguna conclusión clara que poder realizar. Si bien su valor μ es positivo, este es muy cercano a cero, por lo que se teme que la tendencia que se llegue a describir sea altamente volátil y pueda variar de un momento para otro. Algo al respecto del análisis estadístico individual del valor que se puede destacar, es que se mantiene en una franja de valores, entre 2,666 y 2,607 aproximadamente y que es probable que se mantenga en este soporte y resistencia a expensas del comportamiento del mercado, ya que el coeficiente β ronda el valor 1 (Yahoo!, 2019). Por lo tanto, la tendencia que vaya seguir en el futuro va estar muy ligada al comportamiento del IBEX-35 a grandes rasgos.

Como conclusión, si se tuviera que realizar una mínima inversión teniendo que escoger entre las dos empresas analizadas, y se fijará como criterio los resultados obtenidos, se debería de invertir en Mapfre en su totalidad.

8.2. Consideraciones del método empleado

Centrando las consideraciones en el método empleado para la obtención de las predicciones hay varios aspectos a destacar.

El primero ellos, adelantado anteriormente, es que es un análisis basado en la modelización matemática y que asimismo emplea conceptos estadísticos. El modelo que se obtiene durante todo el proceso muestra unos resultados que en ningún caso puede considerarse 100% verídicos, hecho el cual es contemplado en el propio modelo estocástico. Por ende, el análisis estadístico llevado a cabo debe utilizarse como un instrumento de ayuda a la toma de decisiones de inversión o desinversión, y en ningún momento como un modelo que refleje con exactitud el comportamiento del mercado.

El segundo aspecto, que motiva el primero, es que es un modelo que recoge los factores exógenos de una forma muy simplificada. Todos los elementos del macroentorno, así como los más intrínsecos a la empresa acaban englobados en la variable aleatoria, sin llegar a diferenciar aquellos que puedan afectar de una forma mucho más directa a la cotización de la acción. Se puede confirmar, por tanto, que es un modelo simplificado y que puede llegar a adaptarse en función del criterio del inversor incluyendo aquellas variables que se consideren más importantes.

Otro de los aspectos a tener en cuenta es, que, al fin y al cabo, es otra forma de analizar el mercado de forma individual. Esto, en ningún momento quiere decir que haga rivalidad a las otras dos alternativas de análisis de mercado, análisis fundamental y técnico. Por lo tanto, una combinación de los tres tipos de análisis indicados puede incluso llegar a generar unas conclusiones más efectivas a la hora de tomar decisiones, en contraposición a la realización de forma individual con cada uno de los tipos de análisis. Se desprende, por tanto, que el análisis estadístico contiene un carácter complementario respecto de los otros dos.

9. Confeció de la cartera de valors

La creación de carteras de valors nace por la necesidad de reducir el riesgo que se asocia a una inversión. La forma en la que se reduce el riesgo es diversificando las inversiones que se realizan, en lugar de realizar la inversión íntegra en un valor concreto del mercado bursátil.

Por lo tanto, cuando se trata de componer una cartera de valors, los objetivos que se persiguen son obtener rendimientos y además minimizar el riesgo de la inversión que se deriva de la composición de la cartera. Dependiendo del porcentaje de peso que ostente un valor, de los que componen la cartera, el riesgo total variará.

Previamente a la confección de una cartera, hay que tener en consideración que el riesgo total que se asume en la cartera no es la suma de los riesgos individuales. Por eso, es necesario conocer el grado de correlación que mantienen los activos entre sí.

9.1. Conceptos esenciales

La composición de la cartera puede ser de n subyacentes, teniendo en cuenta que $1 \leq i \leq n$. Se parte, también, del vector $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, siendo θ_i las unidades del activo i dentro la misma cartera. Este valor θ_i , tiene como regla básica que $1 \leq i \leq n$, así como también:

$$\begin{cases} \theta_i < 0 \rightarrow \text{posición corta del activo } i, \\ \theta_i > 0 \rightarrow \text{posición larga del activo } i. \end{cases}$$

Cuando se habla de posición se trata de la compra de un valor con la previsión de que su valor en bolsa siga una tendencia alcista. Por contra, la posición corta indica que ha de venderse el activo con la mayor inmediatez posible dado el descenso del valor, así como también que se posee el activo prestado, y convendría venderlo.

A la hora crear la cartera únicamente se tendrá en cuenta activos que cotizan en un mercado bursátil, mayoritariamente acciones. A las carteras que trabajan únicamente con este tipo de activo financiero se les denomina cartera pura en riesgo (Hull, 1946). En el presente trabajo, dado que se ha tratado las acciones de Bankia y Mapfre de una forma descriptiva y analítica, se continuará empleado dichos subyacentes, y por ende, la cartera resultante será pura en riesgo. Aquellas carteras que emplean al menos un activo de los denominados de renta fija pasan a denominarse cartera mixta en riesgo. Este tipo de carteras permite minimizar aún más el riesgo de la cartera dada la naturaleza de los activos de renta fija.

Al igual que en las unidades de un activo, con los pesos de la cartera también se trabaja mediante vectores. Igualmente, los resultados que se obtengan respecto a la composición de la cartera se facilitarán en porcentaje ya que esto permitiría replicar los resultados para cualquier cantidad monetaria que se deseara invertir en la cartera. La forma de representar los pesos de manera algebraica en el instante $t = 0$ es la siguiente:

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=0}^n \omega_i = 1$$

Una de las hipótesis que se plantea es que las acciones no reparten dividendos en ningún momento, por lo que no habría que implementar el rendimiento extra que se generaría por el reparto del mismo.

El rendimiento que se espera obtener de la cartera sería la suma ponderada de los rendimientos de cada activo adquirido, y se denotaría de la siguiente forma:

$$\mu = \mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}[R_i] = \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i,$$

siendo:

$$R_i = \text{rentabilidad del activo } i \text{ no pagando dividendos}$$

El riesgo de la cartera es la varianza del rendimiento esperado de la misma. Para poder distinguir que se está incluyendo un nuevo activo, se utiliza como notación el subíndice j :

$$\sigma^2 = \mathbb{V}[R] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n \omega_i R_i\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \text{Cov}[R_i, R_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (40)$$

siendo:

$$\rho_{ij} = \text{coeficiente de correlación de los activos } i \text{ y } j$$

9.2. Tipos de riesgo

Cuando se habla de riesgo en el área de las finanzas, a grandes rasgos se pueden definir dos tipos. El primero de ellos sistemático y el segundo no sistemático (Jorion, 2007).

El riesgo sistemático es aquel que aparece debido a circunstancias globales, como puedan ser grandes cambios en el entorno macroeconómico o hechos históricos. Este riesgo, puesto que el mundo se encuentra en una fase globalización tan avanzada, pueden afectar en mayor o menor grado a las cotizaciones de las acciones, pero siempre se encuentra presente. Como su propio nombre indica, es el riesgo mismo que se asume por el funcionamiento del sistema global en sí, y por ende, es imposible reducirlo aplicando la diversificación de carteras.

Por el contrario, el riesgo no sistemático afecta a un determinado activo. Este, sustancialmente depende del funcionamiento de la empresa y de los aspectos más cercanos que la envuelven. Un ejemplo de riesgo sistemático que podría afectar sería el de una empresa minera, la cual agota todos los yacimientos de minerales que tiene a su disposición. Este hecho en concreto es improbable que afecta a alguna empresa que se dedique al asesoramiento financiero, por lo que se denota como un riesgo no sistemático específico de la empresa minera. Es por lo tanto el riesgo que se tratará de minimizar.

9.3. Consideraciones previas

A la hora de operar para obtener la cartera que minimiza el riesgo, se trabaja con vectores y matrices, por lo que la notación variará. Cuando se habla de los pesos de la cartera, estos se englobarán dentro de un vector transpuesto definido de la siguiente forma:

$$\vec{\omega}^T = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{bmatrix}_{n \times 1} .$$

Para definir el rendimiento o retorno de la cartera se emplearía la siguiente notación:

$$\mu = \vec{m} \vec{\omega}^T = \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i = \vec{\omega} \vec{m}^T .$$

Por último, para describir el riesgo de la cartera de forma matricial se seguiría lo siguiente:

$$\sigma^2 = \mathbb{V} \left[\sum_{i=1}^n \omega_i R_i \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \omega_i \omega_j = \vec{\omega} C \vec{\omega}^T \geq 0,$$

Siendo C:

$$C_{ij} = \begin{cases} \mathbb{V}[R_i] = \sigma_i^2, & \text{si } i = j \\ \text{Cov}[R_i, R_j] = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

9.4. Matriz Varianza-Covarianza

La construcción de una matriz Varianza-Covarianza en primer lugar permitiría conocer el grado de correlación entre las dos empresas escogidas. Cuanto menor sea el grado de correlación, menor será el riesgo sistemático, y por tanto menor el riesgo total de la cartera.

El uso de la matriz varianza-covarianza no se limita únicamente a conocer si se diversifica el riesgo con los activos escogidos o no. En el proceso de estimación de la evolución de los pesos de las acciones, será necesario para poder generar los pesos de la cartera en los instantes $t = 30, 31, 32, 33, 34,$.

Para poder generar la matriz de Varianza-Covarianza, previamente es necesaria la obtención del coeficiente de correlación:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (41)$$

una vez se ha obtenido el coeficiente de correlación se procede a generar la matriz de varianza-covarianzas

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \\ \rho_{ji}\sigma_i\sigma_j & \sigma_j^2 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

al obtener la matriz de varianzas-covarianzas será posible minimizar mediante el siguiente programa de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Min. } \sigma^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \omega_i \omega_j = \vec{\omega} C \vec{\omega}^T, & n \geq 2, \\ \text{s. a. } &\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \end{aligned}$$

cuyo resolución de lugar a la siguiente expresión, que permite el cálculo de los pesos óptimos para una cartera de riesgo mínima:

$$\vec{\omega}^* = \frac{\vec{1} C^{-1}}{\vec{1} C^{-1} \vec{1}^T}. \quad (43)$$

10. Cálculo de los pesos de la cartera de valores

En este apartado se procede a calcular el peso de las acciones de Bankia y Mapfre para la composición de una cartera de mínimo riesgo utilizando la Simulación de Montecarlo.

10.1. Simulación de Montecarlo

La simulación de Montecarlo es un método que, apoyándose en la estadística y la probabilidad, trata de generar números aleatorios de la distribución que se desee obtener. El uso que se ha llegado a hacer del mismo ha sido para llegar a estimar soluciones complejas de diversas índoles, relacionadas con temas logísticos, químicos, matemáticos, financieros, etc. (Moreno Navarro, 2012).

Dentro de la cartera de riesgo mínimo, introduciremos el método Montecarlo para generar la variable estadística, que anteriormente se generaba mediante el Movimiento Browniano Geométrico. A la hora de emplear el método, se generarán unos 10.000.000 de simulaciones mediante el programa Mathematica, como se ha estado empleado a lo largo de todo el Trabajo de Fin de Grado.

10.2. Predicción de la cartera

La predicció de la cartera se realizará a cinco días, al igual que en el caso del modelo estocástico individual. En este caso, en vez de partir de los treinta datos de cotización junto con la predicció de los cinco días siguientes, se utilizará la expresión (11) tomando como instante $t = 30, 31, 32, 33, 34, 35$. A la hora de simular la variable aleatoria se utilizará el método Montecarlo mencionado en el anterior apartado. Una vez obtenidos los resultados para los distintos periodos de tiempo, se generan las matrices de varianza-covarianza acorde a las expresiones (41 y 42).

Matriz varianza-covarianza en $t = 30$:

$$\begin{pmatrix} 0,036562 & 0,000009 \\ 0,000009 & 0,036562 \end{pmatrix}$$

Matriz varianza-covarianza en $t = 31$:

$$\begin{pmatrix} 0,037579 & -0,000009 \\ -0,000009 & 0,032381 \end{pmatrix}$$

Matriz varianza-covarianza en $t = 32$:

$$\begin{pmatrix} 0,038591 & 0,000002 \\ 0,000002 & 0,033448 \end{pmatrix}$$

Matriz varianza-covarianza en $t = 33$:

$$\begin{pmatrix} 0,039577 & 0,000003 \\ 0,000003 & 0,034502 \end{pmatrix}$$

Matriz varianza-covarianza en $t = 34$:

$$\begin{pmatrix} 0,040546 & 0,000017 \\ 0,000017 & 0,035602 \end{pmatrix}$$

Como se observa, todos los valores $\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ y $\rho_{ji}\sigma_i\sigma_j$, son independientes dado que los resultados son muy cercanos a cero, por lo que se ha conseguido minimizar de manera considerable la covarianza de ambos valores, y por ende, el riesgo. Lo único que resta es calcular el peso óptimo con las matrices obtenidas mediante la expresión (43). Se muestra una tabla con los resultados obtenidos de los pesos de la cartera de valores en porcentaje y su evolución:

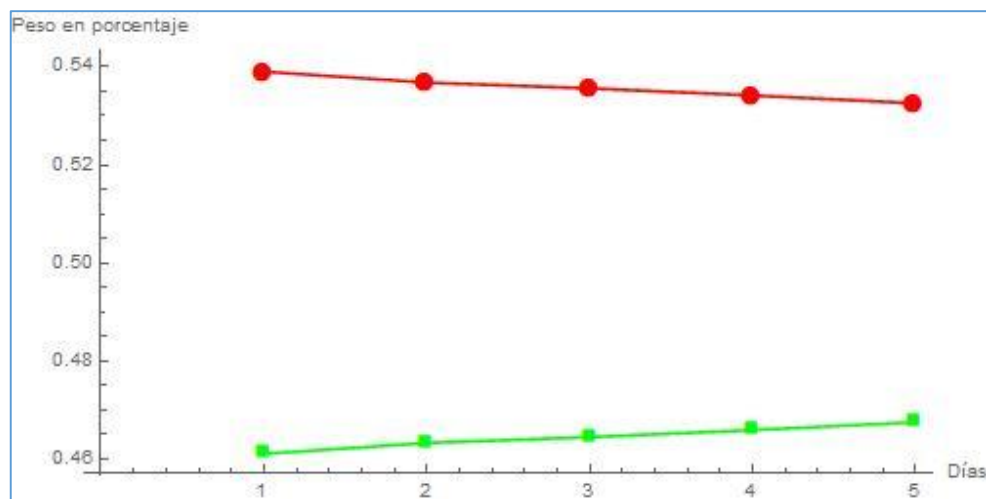
Tabla 19: Evolución de los pesos de la cartera compuesta por los valores de Bankia y Mapfre desde el instante $t=30$ hasta $t=34$.

t	Fecha	Bankia	Mapfre
$t = 30$	10/06/2019	46,1162%	53,8837%
$t = 31$	11/06/2019	46,2862%	53,7137%
$t = 32$	12/06/2019	46,4299%	53,5700%
$t = 33$	13/06/2019	46,5746%	53,4253%
$t = 34$	14/06/2019	46,7517%	53,2482%

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

Igualmente, se adjunta una gráfica que facilita la comprensión de los valores obtenidos:

Gráfica 12: Representación visual de la evolución de los pesos de la cartera compuesta por los valores de Bankia y Mapfre desde el instante $t=30$ hasta $t=34$.



Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en el programa Mathematica.

10.3. Resultados

Al introducir los datos de las dos acciones los resultados demuestran una correlación muy baja y una varianza aceptable por lo que se genera una cartera equilibrada con una representación significativa de ambos valores. El hecho de que la tendencia de Bankia sea creciente, en contraposición a Mapfre, es debido a que el modelo ha detectado una menor volatilidad del valor de Bankia.

11. Conclusiones

Se entiende que para poder llegar a realizar, comprender y aplicar los modelos que se han descrito a lo largo de este Trabajo de Fin de Grado, es muy importante tener unos conocimientos básicos sobre la materia. Dichos conocimientos básicos se pueden ir adquiriendo a lo largo del Grado en Administración y Dirección de Empresas cursando la totalidad de las asignaturas mencionadas en el apartado 1.4. Por lo que, si dicho Trabajo de Fin de Grado llegara a suscitar interés para la realización de uno similar, o por ampliación de conocimientos respecto al área de conocimiento acerca de la modelización matemática, contribuiría en gran medida cursar las asignaturas que se mencionan en dicho punto.

Llevar a cabo un análisis de la situación que envuelve a las empresas, en un primer momento puede parecer que no sea del todo necesario, o útil para este tipo de Trabajo de Fin de Grado. Sí que llega a ser necesario una contextualización en la que se llegue a conocer mínimamente a la empresa y su entorno, puesto que invertir una cantidad significativa en empresas, de las cuales no se dispone nada de información, no es en ningún caso una decisión racional. Como se ha mencionado anteriormente, todos los factores que afectan a la cotización de una empresa acaban recogidos en una variable aleatoria, pero dicha variable aleatoria puede no llegar a ser suficiente para un inversor.

También es importante tener unas mínimas nociones a cerca del IBEX-35, dado que las acciones escogidas pertenecen a empresas que cotizan en dicho mercado.

Por último, conocer los distintos tipos de análisis es fundamental si un inversor quiere llegar a tomar las decisiones más acertadas. Los distintos tipos de análisis en mayor o menor medida se ajustan a las necesidades del inversor que tiene en ese momento: posiciones en corto, inversiones a largo plazo, trading, etc. Pero, como se ha reiterado alguna vez en este Trabajo de Fin de Grado, los tres tipos de análisis acaban adquiriendo un carácter complementario respecto de los otros, y por lo tanto, aquellas decisiones más acertadas suelen ser las que combinan diversos tipos de análisis. El hecho de desarrollar específicamente el análisis de tipo estadístico se basa en la necesidad de dar a conocer otra forma más de analizar mercados que contengan un alto nivel de incertidumbre.

Centrado ahora las conclusiones en los modelos, y en concreto, en el modelo determinista y estocástico, se destaca lo siguiente:

La introducción de un modelo determinista se puede considerar la pieza inicial que da sentido y estructura al posterior desarrollo. Entender el funcionamiento de los modelos más básicos, permite poder aumentar el grado de complejidad de los modelos empleados de manera progresiva, y por lo tanto, ir afianzando los nuevos conceptos que se van introduciendo.

La realización del modelo estocástico puede plantear diversas cuestiones acerca de su utilidad o de la propia introducción en el mismo trabajo de fin de grado. La utilidad principal es la de analizar de forma individual los valores coticen dentro de un mercado

regido por la incertidumbre en el corto plazo. Una posible pr3ctica del m3todo estoc3stico puede plantearse en situaciones en la que el inversor desee llevar a cabo la conocida pr3ctica del trading, o en momentos en los que desee finalizar una inversi3n que lleva manteniendo cierto tiempo, al mejor precio posible. Es posible aplicarlo con otro tipo de activos financieros siempre y cuando la mencionada incertidumbre est3 presente. La inclusi3n del modelo estoc3stico dentro del presente Trabajo de Fin de Grado busca cubrir la necesidad de obtener informaci3n fiable a cerca de los activos financieros que pretenda escoger. Es posible considerarlo como un filtro de selecci3n entre los activos m3s rentables y aquellos que no lo son.

Continuando con el modelo de minimizaci3n del riesgo de una cartera, se buscaba los aspectos m3s esenciales del modelo estoc3stico, as3 como la visualizaci3n de la construcci3n del modelo mismo. La cartera arroja unos valores muy dispares en comparaci3n con el modelo estoc3stico, ya que se observa una clara decantaci3n por el valor de Mapfre como valor m3s rentable entre los dos, mientras que el modelo de la cartera muestra un equilibrio entre ambos valores. Dicho aspecto en ning3n caso quiere decir que el modelo de cartera con riesgo m3nimo sea un m3todo err3neo dado que la forma de escoger los valores var3a respecto del modelo estoc3stico. El modelo estoc3stico solo ha tenido en cuenta de forma individual, es decir, sin tener en cuenta la relaci3n entre ambos activos financieros, los valores de cotizaci3n. Adem3s, el modelo que se construye busca determinar el rendimiento que se espera obtener de la acci3n. Por su parte, el modelo de carteras prima la minimizaci3n del riesgo teniendo cuenta m3s de un activo y la correlaci3n entre ellos. Previamente al c3lculo de los pesos 3ptimos, se lleva a cabo la matriz de varianzas-covarianzas para conocer si los valores escogidos son independientes entre s3. Por lo tanto, la composici3n de la cartera se hace con aquellos valores que son menos vol3tiles, sin llegar a tener en cuenta la rentabilidad de los mismos. Por esto, se plantean dos posibles aplicaciones al modelo de minimizaci3n del riesgo de una cartera.

La primera de ellas, habiendo hecho una preselecci3n de aquellos activos m3s rentables en el mercado burs3til, componer la cartera minimizando el riesgo y sacrificando, en cierto modo, el rendimiento maximizable. La segunda aplicaci3n del modelo de Gesti3n del Riesgo de Carteras puede ser el de comprobar el riesgo de aquellas carteras que ya est3n compuestas para poder eliminar aquellos subyacentes que suponen un riesgo para la misma, y que adem3s pueden tener una covarianza considerable con otros activos.

Finalmente, se destaca que los modelos matem3ticos han sido generados de forma manual mediante el programa Mathematica, pero no se descarta en ning3n momento la automatizaci3n de los mismos. Esto supondr3a un gran atractivo para empezar a plantear el an3lisis estad3stico de las acciones como uno esencial para las empresas y profesionales que trabajan con los mercados con incertidumbre.

Bibliografía

- Agencia EFE. (16 de Mayo de 2019). *Agencia EFE*. Obtenido de Fundación Bancaja tendrá 650.000€ de Bankia para programas sociales en 2019: <https://www.efe.com/efe/comunitat-valenciana/sociedad/fundacion-bancaja-tendra-650-000-de-bankia-para-programas-sociales-en-2019/50000880-3978139> (Consultado 08 de junio de 2019)
- Bankia. (29 de Marzo de 2019). *Principales datos*. Obtenido de <https://www.bankia.com/es/> (Consultado 07 de junio de 2019)
- Baxter, M., & Rennie, A. (1999). *Financial calculus: an introduction to derivative pricing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- BBVA. (25 de Julio de 2017). *Ratio de capital*. Obtenido de 'El Flash': Ratio de capital de un banco ¿Qué es y cómo se calcula?: <https://www.bbva.com/es/ratio-de-capital-de-un-banco-que-es-y-como-se-calcula/> (Consultado 12 de junio de 2019)
- Bolsas y Mercados Españoles. (s.f.). *BME Renta Variable*. Obtenido de <https://www.bolsasymercados.es/esp/Home> (Consultado 5 de junio de 2019)
- Brealey, R., Myers, S., Montllor i Serrats, J., Tarrazón Rodón, M., & Ribas i Miràngels, E. (1 de Abril de 1993). *Fundamentos de financiación empresarial*. McGraw-Hill Interamericana.
- Chiang, A., & Wainwright, K. (1967). *Fundamentals methods of mathematical economics*. New York: McGraw-Hill/Irwin 2005.
- Comisión Nacional del Mercado de Valores. (s.f.). *Mercado Primario*. Obtenido de <https://www.cnmv.es/portal/home.aspx> (Consultado 10 de junio de 2019)
- El Boletín. (14 de Octubre de 2016). *El Boletín*. Obtenido de Un inspector del BdE avisó de que la salida a Bolsa de Bankia era "el primer paso" para la nacionalización: <https://www.elboletin.com/economia/140690/bde-bolsa-bankia-nacionalizacion-perdidas.html> (Consultado 10 de junio de 2019)
- El Mundo. (10 de Mayo de 2017). *El Mundo*. Obtenido de Cinco años de la nacionalización de Bankia: <https://www.elmundo.es/opinion/2017/05/10/59121442ca4741837d8b45cf.html> (Consultado 11 de junio de 2019)
- Encinas, M. Á. (22 de Febrero de 2017). *Cadena SER*. Obtenido de Bankia, historia de un desastre anunciado: https://cadenaser.com/ser/2017/02/21/economia/1487701797_103980.html (Consultado 10 de junio de 2019)

- Expansión. (s.f.). *Expansión*. Obtenido de <http://www.expansion.com/> (Consultado 13 de junio de 2019)
- Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito. (s.f.). *Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito*. Obtenido de <https://www.fgd.es/es/index.html> (Consultado 9 de junio de 2019)
- Grupo Aseguranza. (05 de Junio de 2019). *Grupo Aseguranza*. Obtenido de Fundación Mapfre, premiada por la sociedad Española de Neurología: <https://www.grupoaseguranza.com/noticias-de-seguros/fundacion-mapfre-premiada-sociedad-espanola-neurologia> (Consultado 9 de junio de 2019)
- Hull, J. (1946). *Risk management and financial institutions*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, cop. 2018.
- Jorion, P. (2007). *Value at risk: the new benchmark for managing financial risk*. New York: McGraw-Hill.
- López Lubián, F., & García Estévez, P. (2009). *Bolsa, mercados y técnicas de inversión*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- Mapfre. (s.f.). *Mapfre*. Obtenido de <https://www.mapfre.com/corporativo-es/acerca-mapfre/quienes-somos/> (Consultado 08 de junio de 2019)
- Moreno Navarro, C. (Septiembre de 2012). Composición de cartera réplica para la predicción del índice bursátil español IBEX 35. Valencia.
- Sector Asegurador. (2019). *Sector Asegurador*. Obtenido de Mejores compañías de seguros en España, valoración y razones-2019: <https://www.sectorasegurador.es/mejores-companias-seguros-espana-valoracion-razones/#Las-5-mejores-aseguradoras-del-mercado-en-terminos-generales> (Consultado 09 de junio de 2019)
- Valencia plaza. (29 de Mayo de 2019). *Valencia Plaza*. Obtenido de Bankia se une a los Principio de Banca Responsable de Naciones Unidas: <https://valenciaplaza.com/bankia-se-une-a-los-principios-de-banca-responsable-de-naciones-unidas> (Consultado 07 de junio de 2019)
- Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1998). *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge: Cambridge university Press.
- Yahoo! (2019). *Yahoo! Finanzas*. Obtenido de <https://es.finance.yahoo.com/> (Consultado 15 de junio de 2019)

Anexos

Anexo A

PRINCIPALES DATOS

BENEFICIO NETO ATRIBUIDO

205
millones €

RATIO CET1 PHASE IN

13,78%

RATIO CET1 FULLY LOADED

12,61%

INVERSIÓN SOCIAL

20,9
millones €

CONSEJEROS INDEPENDIENTES

66,7%

ÍNDICE DE SATISFACCIÓN DE CLIENTES

90,1%

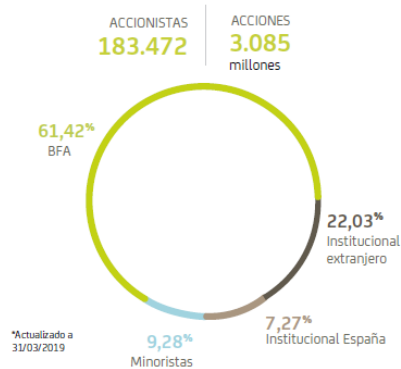
PLAZO MEDIO DE PAGO A PROVEEDORES

8,8 días

ENERGÍA ELÉCTRICA PROCEDENTE DE FUENTES RENOVABLES

100%

ESTRUCTURA ACCIONARIAL



ACCIONISTAS
183.472

ACCIONES
3.085
millones

DIVIDENDOS



Dividendos por acción en 2014, 2015 y 2016 teniendo en cuenta el efecto del contrasplit.

NEGOCIO

Anexo B

ha recuperado un 10% (de 4,20 a 3,80 USD/BRL), y la bolsa que subió un 25% desde mínimos de junio.

En el mercado bursátil el Índice BOVESPA terminó el año cerca de los 88.000 puntos, con una subida de 12,7% en el año (un 15% en euros).

Turquía

Se prevé que la economía de Turquía crezca un 3,2% en el promedio del año, una caída sustancial desde los 7,4% del año 2017, debido a la fuerte desaceleración que se está produciendo (creció solo un 1,6% en el tercer trimestre). Para 2019, se estima un decrecimiento en el entorno de -1,7%, como resultado de una previsible contracción durante la primera mitad de año. La inflación en diciembre se relajó al 20,3% después de haber alcanzado el 25,2% en octubre.

El año 2018 fue complejo para la economía turca. El cambio del contexto monetario global, con Estados Unidos iniciando las subidas de tipos de interés y varios mercados emergentes elevando tipos para defender los flujos y sus monedas, han puesto en la mira de los inversores las vulnerabilidades de algunos países emergentes. En el caso de Turquía, su principal vulnerabilidad se centra en el alto endeudamiento empresarial externo en dólares.

La mayor aversión al riesgo de los mercados puso en tensión a la lira turca hasta ubicarla en 6,5 TRY/USD en agosto y forzando al Banco Central a subir cuatro veces los tipos de forma agresiva, además de sustituir el tipo de referencia por el tipo repo a 1 semana que se situó en el 24% a final de año. El endurecimiento de la política monetaria junto a la publicación del Plan Económico 2019-2021, consiguió frenar la tendencia de la lira situándola a final de año en 5,29 TRY/USD. A medio plazo, sin embargo, no puede descartarse que resurjan los problemas derivados del apalancamiento corporativo en dólares, lo que podría activar de nuevo la volatilidad de la moneda y los mercados de capitales.

El índice bursátil BIST30 de Estambul, bajó un 21,4% en el año (-32% en euros).

México

La economía mexicana creció un 2,6% en el tercer trimestre, impulsada por todas las partidas (consumo, inversión y exportaciones), aunque se estima que en el cuarto trimestre haya desacelerado hacia un ritmo del 2,1% en la totalidad del año. La tasa de desempleo, por su parte, ha cerrado el año en el 3,4%.

La inflación se situó en el 4,9% en octubre, con la subyacente en el 3,7%, con la caída del precio del petróleo en la recta final del año, se espera que la inflación de cara a los próximos meses se modere. El Banco Central ha subido 25 puntos básicos los tipos de interés en su reunión de noviembre, hasta el 8,0%, y los ha mantenido en su reunión de diciembre.

El tipo de cambio en octubre y noviembre mostró cierta debilidad (llegando a 20,5 MXN/USD) pero consiguió cerrar el año en 19,65 MXN/USD. La Bolsa de Valores Mexicana bajó un 17% en el año terminando en 41.640 puntos.

Evolución de los mercados aseguradores

Mercado español³

En el ejercicio 2018 las primas emitidas de seguro directo del mercado asegurador español experimentaron un crecimiento del 1,3% respecto a 2017. El buen comportamiento de los ramos No Vida (crecen un 3,9%) se ve amortiguado por la variación negativa de las primas de Vida que caen un -1,7%.

CONCEPTO	dic-18	dic-17	% Var. 18/17
Vida	28.914	29.407	(1,7%)
No Vida	35.368	34.028	3,9%
Total Seguro Directo	64.282	63.435	1,3%

Cifras en millones de euros

Prácticamente todos los ramos de No Vida mostraron crecimientos, destacando los de Salud (5,6%) y Multirriesgos (4,0%) dentro de los ramos de mayor volumen. Por su parte, el seguro de Automóviles tuvo un alza del 1,9%, que supone 1,5 pp menos que en el mismo periodo del año anterior.

CONCEPTO	dic-18	dic-17	% Var. 18/17
Automóviles	11.135	10.924	1,9%
Salud	8.520	8.069	5,6%
Multirriesgos	7.245	6.965	4,0%
Resto de ramos No Vida	8.468	8.070	4,9%
Total No Vida	35.368	34.028	3,9%

Cifras en millones de euros

Las primas del seguro de Vida finalizaron 2018 con un descenso del 1,7% que si se compara con una caída del 13,8% registrada en el primer trimestre del año, se observa una ralentización en el decrecimiento que viene experimentando este segmento desde el tercer trimestre de 2017. Dicha ralentización afecta principalmente a la modalidad de Vida Ahorro, que representa el 86% de las primas de Vida, cuyas primas cayeron un 4,0% al finalizar 2018, frente a una caída del 18% en el primer trimestre del año. Por el contrario, las primas de Vida Riesgo han mantenido un excelente comportamiento en 2018, hasta crecer un 12,1%. En relación al negocio de Vida por su carácter individual o colectivo, según los últimos datos disponibles a septiembre de 2018, la emisión de individuales cae un 2,5% y la de colectivos crece un 13,1%.

Con datos a septiembre de 2018, la rentabilidad técnica de los ramos No Vida mostró una mejora de 1 pp respecto al mismo periodo del año anterior, gracias al descenso de los ratios de siniestralidad y de gastos, pero principalmente del primero, que baja 0,8 puntos. Esta mejora es de 1,9 pp en el ramo de Automóviles, debido al descenso de la siniestralidad. Por el contrario, el ratio combinado de los seguros Multirriesgos

3. Fuente: ICEA, los datos de 2018 son provisionales.