
Balance energético de un cohete térmico nuclear durante un sobrevuelo



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Autor: ***Gutiérrez Briceño, Jaime***

Máster en Ingeniería Aeroespacial

Trabajo Final de Máster

Curso académico 2018-2019

Tutor: Dr. D. Morano Fernández, Jose Antonio

Cotutor: Dr. D. Acedo Rodríguez, Luis

Valencia, Julio 2019

RESUMEN.....	1
ABSTRACT.....	2
RESUM	3
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	4
INTRODUCCIÓN.....	4
VISIÓN GLOBAL DEL PROYECTO.....	5
CAPÍTULO 2 CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROYECTO	6
LOS CIMIENTOS.....	6
<i>Los Sobrevuelos Planetarios.....</i>	<i>6</i>
<i>La asistencia gravitatoria</i>	<i>7</i>
<i>Trayectoria en el sobrevuelo.....</i>	<i>8</i>
IMPLEMENTACIÓN DEL MOTOR TÉRMICO NUCLEAR.....	10
<i>El proyecto NERVA.....</i>	<i>10</i>
<i>La modelización de un motor térmico nuclear.....</i>	<i>11</i>
CAPÍTULO 3 MODELIZACIÓN DE LA BASE	13
MISIÓN PIONEER 11	13
HORIZONS	13
MODELIZACIÓN DEL SOBREVUELO DE LA PIONEER 11	15
ENERGÍAS PIONEER 11.....	18
<i>Energía Cinética por unidad de masa K</i>	<i>19</i>
<i>Energía Potencial-Rotacional L</i>	<i>19</i>
<i>Energía Potencial V.....</i>	<i>21</i>
<i>Comparativa final</i>	<i>21</i>
CAPÍTULO 4 MODELIZACIÓN DEL IMPULSO DE UN MOTOR TÉRMICO NUCLEAR	23
LA DEPENDENCIA RESPECTO DE LA MASA.....	23
CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES DEL PROYECTO.....	27
GENERAL.....	27
ESTUDIO DEL PUNTO DE ENCENDIDO	30
<i>Encendido en la entrada</i>	<i>30</i>
<i>Encendido a la salida</i>	<i>32</i>
<i>Tabla Resumen</i>	<i>33</i>
ESTUDIO DEL RADIO OBJETIVO	34
CAPÍTULO 6 PRESUPUESTO DEL PROYECTO	36
ANEXO 1 CONSTANTES UTILIZADAS	37
<i>Constantes sobrevuelos</i>	<i>37</i>
<i>Constantes motor NERVA</i>	<i>37</i>
BIBLIOGRAFÍA	38

Resumen

Este trabajo se basa en la modelización de la unión de dos ideas ya existentes. La primera es la maniobra de un sobrevuelo. Esta maniobra es la técnica esencial en todas las misiones interplanetarias, basada en impulsar gravitacionalmente las sondas espaciales sin ningún gasto de combustible. La segunda es un proyecto llevado a cabo en los años sesenta. El proyecto NERVA realizó el estudio más importante hasta la fecha sobre los cohetes térmicos nucleares, construyendo y obteniendo sus especificaciones experimentalmente.

La modelización consiste en integrar mediante el problema de los tres cuerpos una órbita ficticia que realiza un sobrevuelo y al que se le aplica un impulso térmico nuclear de un motor tipo NERVA. Para ello se integra primero el sobrevuelo de la sonda Pioneer11 alrededor de Saturno y a través de la ecuación de Tsiolkovsky se añade el efecto del encendido de motores.

El estudio del modelo se basa en obtener la máxima velocidad de salida posible para así optimizar el vuelo ficticio. Esto se consigue encendiendo los motores en el periapsis de la órbita, momento en el cual la sonda tiene la máxima velocidad y momento a partir del cual la gravedad del planeta sobrevolado comienza a actuar en contra. La variación de la altura de paso es otro factor influyente. Con todo, se consiguen velocidades de salida de hasta 183 km/s, una velocidad de hasta 8 veces superior a las de un sobrevuelo clásico.

Abstract

The present work is based on the modelization of two different and already existing ideas. On one hand the maneuver of the Flybys. This technique is used in almost all the interplanetary missions, based on using the big bodies gravity to gain a speed boost without any fuel consumption. On the other hand, is a project carried out in the last sixties. The NERVA project is one of the most important studies about thermal nuclear rockets existing, getting to a point of building and testing real models.

The construction of the model is based on the integration of a fictional probe during its trayectory on a flyby. In addition to this, an impulse of one thermal nuclear rocked from the project is added using the Tsiolkovsky ecuation. In order to do that, we first integrate the actual trayectory of the Pioneer11 during its flyby, and later on we simulate the power on of the engines.

The following study is based on improving the outter speed of the fictional probe. For that, the better point of power on of the engines is located on the periapsis of the orbit. At this point the probe has the maximun speed, and from this point the probe will go against the Planet's gravity, trying to pull away from it. The passing altitue is another variable. With all this factor in consider, the fictional probe can reach up to 8 times the speed of a normal flyby, gaining access to a heavy time reduced kind of missions.

Resum

Aquest treball es basa en la modelització de la unió de dues idees ja existents. La primera és la maniobra d'un sobrevol. Aquesta maniobra és la tècnica essencial en totes les missions interplanetàries, basada en impulsar gravitacionalment les sondes espacials sense cap despesa de combustible. La segona és un projecte dut a terme en els anys seixanta. El projecte NERVA va realitzar l'estudi més important fins avui sobre els coets tèrmics nuclears, construint i obtenint les seues especificacions experimentalment.

La modelització consisteix a integrar mitjançant el problema dels tres cossos una òrbita fictícia que realitza un sobrevol i al qual se li aplica un impuls tèrmic nuclear d'un motor tipus NERVA. Per a això s'integra primer el sobrevol de la sonda Pioneer11 al voltant de Saturn i a través de l'equació de Tsiolkovsky s'afeg l'efecte de l'encès de motors.

L'estudi del model es basa en obtenir la màxima velocitat d'eixida possible per a així optimitzar el vol fictici. Això s'aconsegueix encenent els motors en el periapsis de l'òrbita, moment en el qual la sonda té la màxima velocitat i moment a partir del qual la gravetat del planeta sobrevolat comença a actuar en contra. La variació de l'altura de pas és un altre factor influent. Amb tot, s'aconsegueixen velocitats d'eixida de fins a 183 km/s, una velocitat de fins a 8 vegades superior a les d'un sobrevol clàssic.

Capítulo 1 Introducción

Introducción

Desde los años 50 del pasado siglo se han diseñado y probado varios modelos de cohetes y naves que harían uso de la energía nuclear para conseguir parte o la totalidad de su impulso dentro del contexto de los viajes interplanetarios. *El proyecto Orion* (Dyson, George, 2003) se puso en marcha siguiendo una propuesta inicial de Stanislaw Ulan en 1946, seguidos de los cálculos del físico Frederick Reines y Ulan (Everett, C.J.; Ulam S.M., December 15, 2010). Este proyecto estaba basado en la idea de propulsión por pulsos nucleares, en la que una serie de explosiones atómicas controladas impulsarían una nave en el espacio. Este diseño combina un empuje del orden de meganewtons con un alto impulso específico (Engler, Richard, 1987).

En los diseños más optimistas esta nave podría alcanzar una velocidad correspondiente a una fracción pequeña de la velocidad de la luz (0.1 c), permitiéndole alcanzar el sistema Alpha Centauri en un tiempo estimado de 44 años. Sin embargo, el tratado PTBT (*Partial test Ban Treaty*) de 1963 que reducía las detonaciones nucleares permitidas a aquellas que tuviesen lugar bajo tierra, puso fin a este proyecto.

Un dispositivo alternativo para aprovechar la energía nuclear es el llamado cohete térmico nuclear, en el que básicamente, una reacción nuclear auto-sostenida y controlada en un reactor de estado sólido genera el calor suficiente para expulsar por la tobera a gran velocidad una masa de gas de hidrógeno que circula desde un depósito. El programa NERVA de la Comisión de Energía Atómica y la NASA realizó una serie de pruebas durante los años 60 hasta la cancelación oficial del proyecto en 1973.

Por otra parte, la técnica esencial en todas las misiones interplanetarias para impulsar las sondas espaciales ha sido el vuelo asistido gravitacionalmente. En estas misiones una nave realiza una serie de sobrevuelos alrededor de los planetas internos (Venus, La Tierra) o externos (Júpiter o Saturno) permitiendo a las naves una ganancia de energía en el sistema de referencia heliocéntrico sin gasto alguno de combustible. Recientemente la NASA ha anunciado la reactivación del programa de cohetes térmicos nucleares para misiones a Marte. La combinación de la gravedad asistida en sobrevuelos y el impulso de estos cohetes podría optimizar el consumo de energía y los tiempos para alcanzar sus objetivos.

Visión global del proyecto

En este proyecto se considerará la técnica clásica del sobrevuelo (asistencia gravitatoria) para impulsar las naves en el sistema de referencia heliocéntrico Solar. A esta base se le sumará el efecto de un impulso obtenido mediante el encendido de un cohete térmico nuclear cuando la nave se encuentre dentro de la esfera de influencia del planeta en cuestión. Particularizando, se utilizará el sobrevuelo que realizó la Pioneer 11 en 1974 sobre Saturno y se le añadirá el empuje de un motor térmico nuclear con las mismas especificaciones que los diseñados en el proyecto *NERVA*.

Se analizarán los distintos momentos en los que se puede producir el encendido, antes del sobrevuelo, durante el sobrevuelo y posterior, con el objetivo de determinar la eficiencia máxima del proceso en términos de máxima velocidad de salida y variación total de energía de la nave. Además, se estudiará el efecto de la variación del radio objetivo de la órbita.

En ausencia de fuerzas externas el balance energético del sobrevuelo se ha estudiado como un problema de los tres cuerpos (M, Valtonen, 2006) durante el cual se mantenía constante el invariante de Jacobi (J.D. Anderson, J.K. Campbell, M.M. Nieto, 2017). Al existir impulsos externos, es necesario la integración de la trayectoria usando métodos numéricos e implementar al mismo una dependencia con la masa. Para ello se va a utilizar la herramienta matemática *MATLAB*, y más concretamente su función *Ode45* (Shampine, L. F. and M. W. Reichelt, 1997). *Ode45* se basa en una fórmula explícita de Runge-Kutta, el par Dormand-Prince. Se trata de un solver de ecuaciones diferenciales de un solo paso, para calcular la función en el instante de tiempo siguiente únicamente necesita la solución en el instante de tiempo inmediatamente anterior. (Dormand, J.R and P.J. Prince, 1980) (Shampine, L. F. and M. W. Reichelt, 1997)

Tras esta introducción inicial, el proyecto consta de un capítulo dedicado a contextualizar el trabajo, explicando el concepto de sobrevuelo y la trayectoria que siguen las sondas durante el mismo, así como la definición de asistencia gravitatoria.

A continuación, se dedica el siguiente capítulo a la cimentación del proyecto. Se particulariza el estudio para el sobrevuelo de la Pioneer11 sobre Saturno y se asegura un modelo que sea capaz de representarlo fielmente, explicando las simplificaciones que se han realizado para conseguirlo.

El corazón del proyecto reside en el capítulo 4, donde se añade al modelo el efecto de un motor térmico nuclear basado en las especificaciones del proyecto *NERVA* (NASA, 1970).

Por último, un capítulo de conclusiones hace un repaso a las gráficas más importantes extraídas del trabajo y los estudios sobre el punto de encendido junto con el efecto de la variación en el radio objetivo de la órbita.

Al final se encuentra la bibliografía utilizada así como un Anexo donde se resumen todos los valores de las constantes utilizadas a lo largo del proyecto.

Capítulo 2 Contextualización del proyecto

Los cimientos

Los Sobrevuelos Planetarios

Se denomina sobrevuelo planetario a la trayectoria de una sonda o nave espacial al entrar dentro de la esfera de influencia de un cuerpo celeste. En sus comienzos, estos vuelos buscaban obtener datos científicos de los cuerpos sobrevolados.

A partir de los años 60, los nuevos planteamientos de las misiones *Voyager* de la NASA comenzaron a evaluar la posibilidad de emplear los sobrevuelos para obtener una asistencia gravitatoria que permitiese modificar la trayectoria de la sonda y aumentar su energía. Esto abría un gran abanico de beneficios, entre los más destacables el ahorro de energía y/o combustible y por tanto de peso económico en la misión, así como nuevos tiempos de duración al obtener la nave aumentos significativos de velocidad.

La transferencia de energía a la nave proviene del momento angular que posee cada planeta por estar girando alrededor del sol. Esta transferencia puede ser positiva o negativa dependiendo del sentido de giro del planeta y la dirección de aproximación de la nave, modificando en ambos casos la energía cinética de la misma.

Hohmann y Wiesel analizaron el proceso mediante el método de las cónicas enlazadas (Hohmann, 1925) (Wiesel, 1989). El método consiste en la separación y enlace de órbitas. En primer lugar, se considera una órbita kepleriana alrededor del sol (pre-flyby) que al alcanzar la nave la esfera de influencia del planeta se enlaza cinemáticamente con una órbita hiperbólica alrededor de éste realizando el sobrevuelo (flyby). Finalmente, al alcanzar de nuevo el límite de la esfera de influencia del planeta su órbita se enlaza con una nueva órbita alrededor del Sol (post-flyby)

Los dos puntos de enlace se determinan en función de la esfera de influencia del planeta, dada por el límite de Roche (Eric W. Weisstein, 2007):

$$\frac{r}{R} = (3m/M_{sun})^{1/3}$$

Donde m/M_{sun} representa la relación entre las masas del planeta y el sol respectivamente y R el radio del planeta sobrevolado.

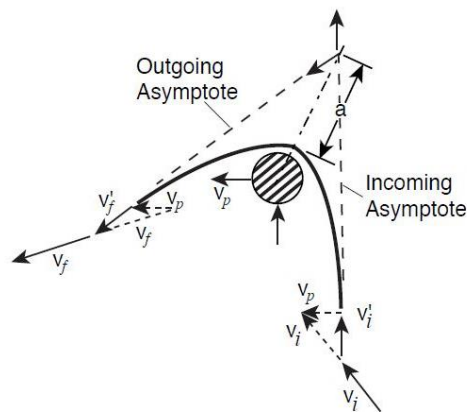


Ilustración 1 Geometría de un sobrevuelo (Flandro, 1963)

La asistencia gravitatoria

Se define como la transferencia de energía que se produce entre la nave que realiza el sobrevuelo y el planeta, debido al movimiento de rotación alrededor del sol. Se definen en este punto por tanto dos sistemas de referencia que se utilizarán ampliamente en el desarrollo de todo el proyecto. El primero se centra en el centro de masas del planeta sobre el cual se realiza el sobrevuelo, denominándose sistema de referencia local. El segundo queda centrado en el baricentro del Sistema Solar, denominándose heliocéntrico solar.

La transferencia de energía que capta la nave proviene del momento angular que posee el planeta por girar alrededor del Sol. Dentro de la esfera de influencia y en un sistema de referencia local, la energía de la nave se conserva, aumentando su energía cinética al acercarse al planeta a costa de una disminución en su energía potencial. En el momento de la salida el efecto es el contrario.

En el sistema de referencia baricéntrico solar en cambio, cada planeta posee una velocidad de rotación alrededor del sol. Esta velocidad se suma a la que tenía previamente la nave, aumentando la energía cinética total de la misma.

No existe ninguna violación de la ley de conservación de la energía. El cambio en el momento angular es absorbido por el planeta sobre el que se está realizando el sobrevuelo. Debido a la gran disparidad entre las masas del cuerpo que sobrevuela y el planeta, el cambio en el planeta es infinitesimal. Esto es; la nave gana energía y el planeta lo pierde. En un caso extremo, si la nave sobrevolase el planeta infinitas veces utilizando esta técnica, el momento angular del planeta alrededor del sol terminaría por anularse, y el mismo comenzaría a acercarse hacia el Sol como si estuviese “cayendo” hacia él.

Trayectoria en el sobrevuelo

Se partirá de la concepción de Hohmann y Wiesel y el punto de partida será el punto de unión entre la órbita de Kepler alrededor del sol y la órbita hiperbólica alrededor del planeta; justo en el borde de la esfera de influencia del planeta. En este apartado se definen qué elementos contextualizan la trayectoria del sobrevuelo y cuáles pueden ser despreciados en pos de los más definitorios.

Se parte de un problema de 3 cuerpos, entre la nave, el Sol como cuerpo celeste principal y el planeta sobre el que se realiza el sobrevuelo. Particularizando en el sistema de referencia local, las fuerzas de atracción entre los cuerpos quedan determinados a partir de la Ley de gravitación Universal de Newton, en su forma vectorial:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{\|r\|^2} \vec{r} \quad (2.1)$$

Ecuación 2-1 Fuerza de atracción entre dos cuerpos.

Siendo G la constante de gravitación universal, m_1 y m_2 las masas de los cuerpos respectivamente y r es el radio vector Centro-Nave.

Donde no se van a tener en cuenta los efectos de otros grandes cuerpos celestes (Júpiter, etc).

Los cuerpos celestes no se van a tomar como esferas de radio perfecto, si no que sobre el cuerpo que se sobrevuele se tendrá en cuenta su achatamiento mediante sus coeficientes J_n . Esto quedará reflejado en el radiovector de posicionamiento de la nave (en el sistema de referencia local) de la forma:

$$r = \left[1 - J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2 \sin(\phi) - J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_4 \sin(\phi) - J_6 \left(\frac{R}{r} \right)^6 P_6 \sin(\phi) \right] \quad (2.2)$$

Ecuación 2-2 RadioVector de posicionamiento en función de los coeficientes J_n .

Donde R es el radio de referencia del cuerpo sobrevolado, P_n los polinomios de Legendre de grado n y ϕ su latitud, obtenida como producto vectorial de el vector dirigido al polo norte del planeta y el radiovector de la nave. El sexto coeficiente armónico J_6 es muy pequeño y despreciable por tanto en nuestros cálculos.

Por último, la dinámica y cinemática del problema quedan unidos mediante la segunda ecuación de Newton, quedando por tanto definida la trayectoria que seguirá la nave durante el sobrevuelo.

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (2.3)$$

Ecuación 2-3 Segunda Ley de Newton

El sistema de ecuaciones que define el primer modelo del sobrevuelo queda definido tras dividir por la masa de la nave:

$$\frac{d \vec{v}}{dt} = \vec{a}(t) = \vec{f}_{Sat} + \vec{f}_{Sun} \quad (2.4)$$

Ecuación 2-2 Sistema de un modelo de sobrevuelo

La trayectoria del cuerpo es obtenida a partir de esta ecuación mediante integración.

Implementación del motor térmico nuclear

El proyecto NERVA

NERVA es el acrónimo de *Nuclear Engine for Rocket Vehicle Application*. Fue un programa que se desarrolló en Estados Unidos en colaboración con la NASA y la comisión de energía atómica (AEC). Fue dirigido por la oficina de propulsión nuclear espacial (SNPO) hasta que fue cancelado en 1972.

El proyecto demostró que los cohetes térmicos nucleares son una herramienta viable y fiable para la exploración del espacio exterior. En 1968 la SNPO certificó que el último motor NERVA (NASA, 1970), el NRX/XE, poseía los requerimientos necesarios para llevar a la humanidad a Marte. Desgraciadamente, aunque los motores estaban concebidos para realizar misiones espaciales el programa espacial estadounidense fue severamente recortado antes de que cualquier misión pudiera tener lugar.

No obstante, la NASA considera el proyecto NERVA como un gran éxito, alcanzando e incluso excediendo sus objetivos iniciales. Su gran meta era establecer la tecnología necesaria para la propulsión espacial nuclear, asentando la base de lo que podrían ser los sistemas y diseños que tuvieran aplicación en misiones espaciales. Virtualmente, todos los planes de misiones espaciales que utilizan propulsión nuclear tienen su base en el proyecto NERVA y son diseños derivados de sus motores NRX o Pewee.

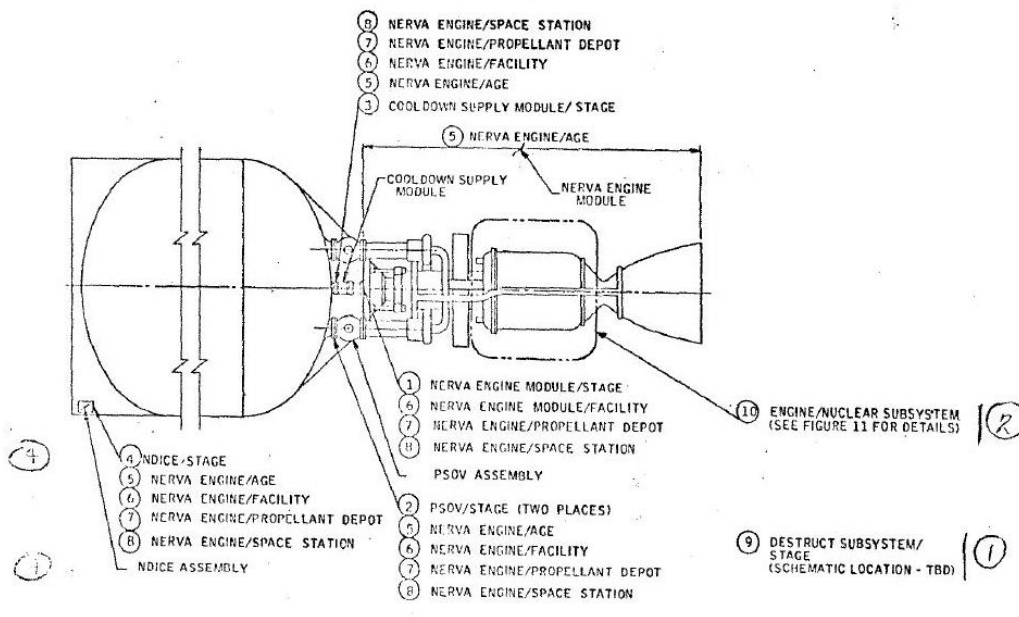


Ilustración 2 Esquema cohete NERVA (NASA, 1970)

La modelización de un motor térmico nuclear

Partiendo del modelo de sobrevuelo ya descrito, el objetivo ahora es proyectar cómo sería un encendido de motores en un punto dado de la trayectoria. Se implementa la idea de que la nave que realiza la misión porta consigo uno de los motores NERVA. A través de las numerosas pruebas que se realizaron en el proyecto y de los informes del mismo se parte de datos conocidos de sus características principales.

Tabla 1 Especificaciones del motor NERVA (NASA, 1970)

Diámetro [m]	10.55	Empuje [kN]	336.6
Longitud [m]	43.69	ISP (nivel mar) [s]	380
Masa en vacío [kg]	34019	Tiempo quemado [s]	1200
Masa total [kg]	178321	Propelente	L-H2
Masa Comburente [kg]	154302	Motores	1 Nerva-2

El empuje que genera un motor se puede determinar de diferentes maneras. Para nuestro caso de estudio se utilizará su definición más básica, dada a partir de la 3 ley de Newton. El empuje es una fuerza de reacción, cuando un sistema expulsa o acelera una masa en una dirección ésta produce una fuerza de igual magnitud, pero en dirección contraria sobre el sistema.

Es claro que es necesario implementar una dependencia respecto de la masa en la modelización, creando una fuerza debida a la expulsión de la misma y desplazando un sistema a lo largo de una trayectoria que cada vez cuesta menos de mover al pesar cada vez menos.

La segunda Ley de Newton relaciona las fuerzas externas respecto del cambio en la cantidad de movimiento del sistema completo, incluyendo en el mismo la nave y la expulsión del propelente. El desarrollo de la ecuación de Tsiolkovsky:

$$\sum F_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{P_2 - P_1}{\Delta t} \right) \quad (2.5)$$

Ecuación 2-5 2ª Ecuación de Newton

Donde $P1$ es la cantidad de movimiento en $t = t0$ y $P2$ la cantidad de movimiento en $t = t0 + \Delta t$, es decir;

$$P1 = (m + \Delta m) V$$

$$P2 = m (V + \Delta V) + \Delta m V_e \quad (2.6)$$

Ecuación 2-6 Cantidades de movimiento en dos instantes de tiempo

siendo:

V la velocidad de la nave en $t = t0$

$V + \Delta t$ la velocidad de la nave en $t = t0 + \Delta t$

V_e la velocidad de salida de los gases durante el Δt

$m + \Delta m$ la masa de la nave antes del encendido

m la masa de la nave tras el encendido

La velocidad de salida V_e en el sistema de referencia del observador se relaciona con la velocidad de salida de los gases en un sistema de referencia centrado en el cohete v_e , tomada como un valor constante e igual al impulso específico del motor multiplicado por la gravedad al nivel del mar.

$$V_e = V - v_e \quad (2.7)$$

Ecuación 2-7 Composición de movimiento en la velocidad de escape.

Sustituyendo y simplificando se llega a la expresión:

$$\sum F_i = m(t) \frac{dV}{dt} - v_e \frac{dm}{dt} \quad (2.8)$$

Ecuación 2-8 Composición de movimiento en la velocidad de escape.

Una vez que se enciendan los motores queda claro que la nave experimentará una aceleración y por ende un aumento significativo en su velocidad. En el contexto de un sobrevuelo esto implica un cambio en la trayectoria de la órbita, y por tanto, haciendo pasar a la nave por una más cercana al planeta. Una de las simplificaciones que se va a tener en cuenta en el desarrollo del proyecto es que se cuenta con un sistema director del empuje instalado. Esto es, un motor con una tobera móvil capaz de dirigir el empuje en todo momento. De esta forma y aún con el aumento de la velocidad la nave es capaz de mantener la trayectoria del sobrevuelo sin salirse de la misma.

Capítulo 3 Modelización de la Base

Misión Pioneer 11

El objetivo principal del proyecto es el estudio de una misión con un encendido de motores térmicos nucleares durante un sobrevuelo, para ello el primer paso es afianzar un modelo que represente una trayectoria de sobrevuelo. El 6 de abril de 1973 la NASA lanzó la sonda Pioneer 11 (o Pioneer G), cuyo objetivo era el de estudiar el cinturón de asteroides, el ambiente alrededor de Saturno y Júpiter, los rayos cósmicos y el viento solar. Debido a las grandes distancias que recorrió la sonda, el último contacto se tuvo el 30 de septiembre de 1995, y la última recepción de datos dos meses más tarde.

Lo que nos concierne sobre esta sonda es que se basó en la técnica de los sobrevuelos durante su viaje, primero en Júpiter y después en Saturno, para ajustar su trayectoria, reducir el consumo, y alcanzar los objetivos para los que estaba diseñada.

Simular esta misión es nuestra primera labor. Teniendo como objetivo alcanzar un modelo que represente con la suficiente precisión los datos sobre la trayectoria de la Pioneer 11 durante su sobrevuelo real sobre Saturno, ocurrido realmente entre el 31 de agosto y el 2 de septiembre de 1979. De esta forma una vez alcanzada este resultado, se dispondrá de un modelo fiable y verídico para poder aplicar los efectos de un impulso durante su trayectoria, dando garantía y validez al modelo final.

Horizons

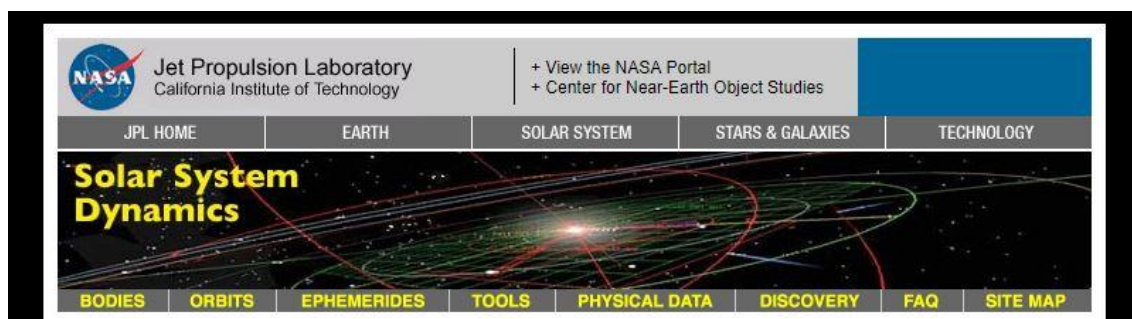


Ilustración 3 Portada pagina Web Horizons

Las efemérides de la Pioneer 11 han sido extraídas de la web del sistema Horizons, perteneciente al Jet Propulsion Laboratory de la NASA (Jet Propulsion Laboratory, California, 2019). La fecha del sobrevuelo se produjo entre el 31 de agosto y el 2 de septiembre de 1979. Se toma un intervalo de 3 días con tomas de datos cada minuto, para poder marcar con precisión los puntos de entrada/salida de la esfera de influencia de Saturno.

La configuración en cuanto a la toma de datos se muestra en la imagen siguiente:

```

*****
Ephemeris / WWW_USER Wed Nov 21 09:32:25 2018 Pasadena, USA / Horizons
*****
Target body name: Pioneer 11 (spacecraft) (-24) {source: pioneer_11}
Center body name: Solar System Barycenter (0) {source: DE431mx}
Center-site name: BODY CENTER
*****
Start time : A.D. 1979-Aug-31 00:00:00.0000 TDB
Stop time : A.D. 1979-Sep-02 00:00:00.0000 TDB
Step-size : 1 minutes
*****
Center geodetic : 0.00000000,0.00000000,0.00000000 {E-lon(deg),Lat(deg),Alt(km)}
Center cylindric: 0.00000000,0.00000000,0.00000000 {E-lon(deg),Dxy(km),Dz(km)}
Center radii : (undefined)
Output units : KM-S
Output type : GEOMETRIC cartesian states
Output format : 2 (position and velocity)
Reference frame : ICRF/J2000.0
Coordinate system: Ecliptic and Mean Equinox of Reference Epoch
*****
JDTDB
X Y Z
VX VY VZ
*****

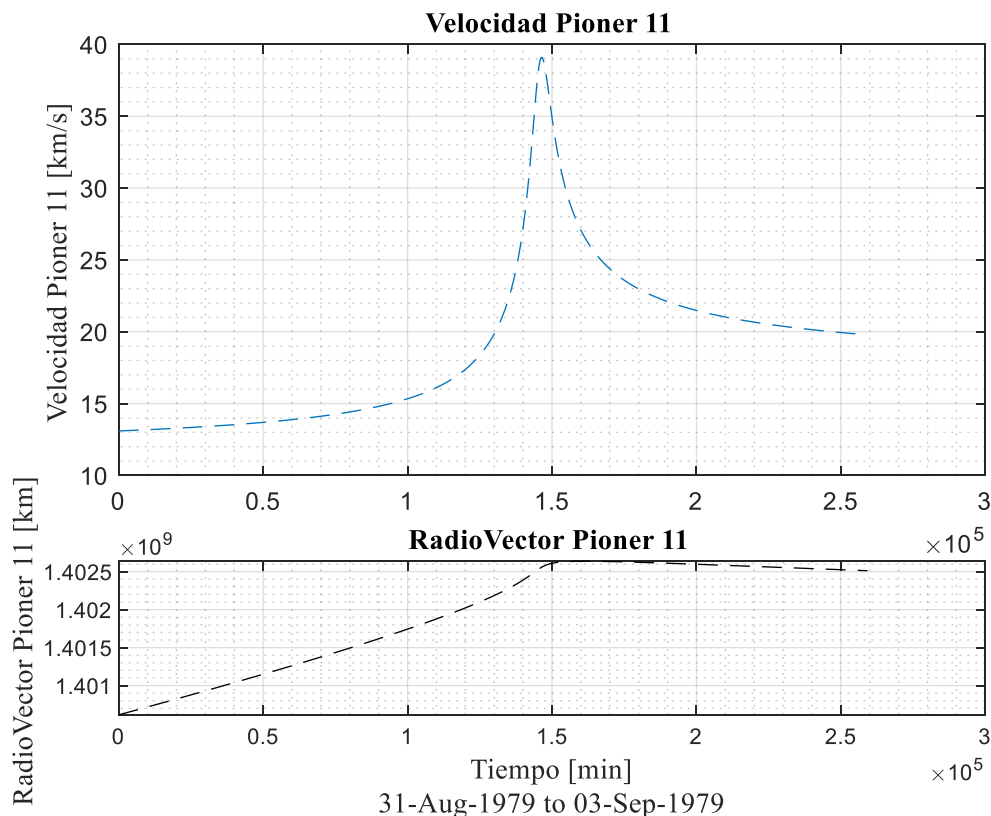
```

Ilustración 4 Configuración Datos Horizons

De esta forma se obtiene un vector con las componentes de posición y velocidad de la sonda separadas en cada una de sus proyecciones a cada eje.

Traducando estos datos a *MATLAB* se obtiene el primer paso, conseguir un modelo real con el cual poder comparar con el modelo integrado que se construye a continuación.

Los primeros datos se muestran a continuación:



Gráfica 1 Velocidad y posición Pioneer11 durante su sobrevuelo en Saturno. (Jet Propulsion Laboratory, California, 2019)

Se muestra claramente el salto de velocidad entre la entrada y la salida de la sonda, siendo la entrada de 13 km/s, un pico de 40 km/s, y una velocidad de salida de 20 km/s, consiguiendo un aumento de 7 km/s sin ningún tipo de gasto propio en la nave, probando toda la teoría de los sobrevuelos.

El siguiente paso es la simulación de los mismos, alcanzando un modelo que sea capaz de representar estos resultados con un nivel de exactitud adecuado.

Modelización del sobrevuelo de la Pioneer 11

Para la integración de la trayectoria de la Pioneer 11 en su sobrevuelo sobre Saturno se va a utilizar la herramienta *MATLAB*. Se ha escogido la misma debido a su función *Ode45*, la cual permite integrar casi cualquier sistema de ecuaciones, y en segundo lugar por la familiarización con la misma.

Para simplificar las ecuaciones y para que las mismas sean viables se elegirá siempre el sistema de referencia local, y posteriormente una vez integradas la velocidad y posición, realizar por simple composición de movimientos el cambio al sistema de referencia baricéntrico solar.

Como ya se vió en el capítulo 2, el sistema de ecuaciones a integrar es un sistema homogéneo de grado 2 que viene definido por la 2 ecuación de Newton. En *MATLAB* y más concretamente en la función de *Ode45* se permite integrar sistemas de ecuaciones de hasta primer orden. Por lo tanto, es necesario realizar un cambio de variable doblando el número de ecuaciones, pero disminuyendo en un grado el sistema completo.

Sea un Vector Y de dimensiones 6×1 , siendo sus tres primeras componentes la posición en los ejes coordenados del sistema de referencia local $X Y Z$ y las 3 siguientes la componente de velocidad. El vector Y será el objetivo de la integración. Construyendo el modelo y realizando el cambio de variable se obtiene el siguiente sistema de 6 ecuaciones de primer orden a integrar:

$$Y = \begin{Bmatrix} y1 = X \\ y2 = Y \\ y3 = Z \\ y4 = \dot{X} \\ y5 = \dot{Y} \\ y6 = \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad dY = \begin{Bmatrix} \dot{y1} = \dot{X} = y4 \\ \dot{y2} = \dot{Y} = y5 \\ \dot{y3} = \dot{Z} = y6 \\ \dot{y4} = \ddot{X} \\ \dot{y5} = \ddot{Y} \\ \dot{y6} = \ddot{Z} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Ecuación 3-1 Modelo a integrar MATLAB

El siguiente paso es caracterizar cada una de las componentes de la aceleración a través de la segunda Ley de Newton. Comenzando por la fuerza de atracción de Saturno por unidad de masa:

$$f_{Saturn}(x, t) = - \frac{G M_{Saturn}}{(\sqrt{y1(t)^2 + y2(t)^2 + y3(t)^2})^3} y1(t) \quad [kN/kg] \quad (3.2)$$

Ecuación 3-2 Fuerza de atracción de Saturno proyectada en el eje X. SR centrado en Saturno.

$$f_{Saturn}(y, t) = - \frac{G M_{Saturn}}{\left(\sqrt{y1(t)^2 + y2(t)^2 + y3(t)^2}\right)^3} y2(t) \text{ [kN/kg]} \quad (3.3)$$

Ecuación 3-3 Fuerza de atracción de Saturno proyectada en el eje Y. SR centrado en Saturno

$$f_{Saturn}(z, t) = - \frac{G M_{Saturn}}{\left(\sqrt{y1(t)^2 + y2(t)^2 + y3(t)^2}\right)^3} y3(t) \text{ [kN/kg]} \quad (3.4)$$

Ecuación 3-4 Fuerza de atracción de Saturno proyectada en el eje Z. SR centrado en Saturno

Donde cada componente entre paréntesis indica el paso de la integración. Nótese que cada componente de fuerza ha sido puesta en función de una variable de tiempo, cuando la misma no aparece. Esta dependencia del tiempo indica el paso de integración en el que nos encontramos, que se identifica con el tiempo en el que se encontraba la Pioneer 11 en ese instante.

Para poder colocar en el tiempo cada una de las integraciones se define un vector que vaya minuto a minuto, y se toma el instante inicial el momento en que la Pioneer 11 entra en la esfera de influencia de Saturno. Debido a que el sobrevuelo se ha tomado en un intervalo de 3 días, el vector de tiempo que posiciona cada uno de los pasos de integración tiene una dimensión de 4321×1 , resultado de dividir los 3 días en minutos.

La siguiente fuerza a introducir en el sistema es la atracción del Sol sobre la Pioneer. Esta fuerza estará en función de la distancia del Sol a la nave, y será necesario realizar otra composición de movimientos para configurarla en función únicamente de componentes en el sistema de referencia local. No obstante, la órbita de Saturno ha sido conocida desde hace mucho tiempo, y sus efemérides pueden ser obtenidas de la misma forma que se obtuvieron los datos iniciales sobre la Pioneer 11 a través de *Horizons*.

$$f_{Sun}(x, t) = - \frac{G M_{Sun}}{\left(\sqrt{(y1(t) + X_{sat}(t))^2 + (y2(t) + Y_{sat}(t))^2 + (y3(t) + Z_{sat}(t))^2}\right)^3} y1(t) \text{ [kN/kg]} \quad (3.5)$$

Ecuación 3-5 Fuerza de atracción del Sol sobre la nave proyectada sobre el eje X. SR centrado en Saturno

$$f_{Sun}(y, t) = - \frac{G M_{Sun}}{\left(\sqrt{(y1(t) + X_{sat}(t))^2 + (y2(t) + Y_{sat}(t))^2 + (y3(t) + Z_{sat}(t))^2}\right)^3} y2(t) \text{ [kN/kg]} \quad (3.6)$$

Ecuación 3-6 Fuerza de atracción del Sol sobre la nave proyectada sobre el eje Y. SR centrado en Saturno

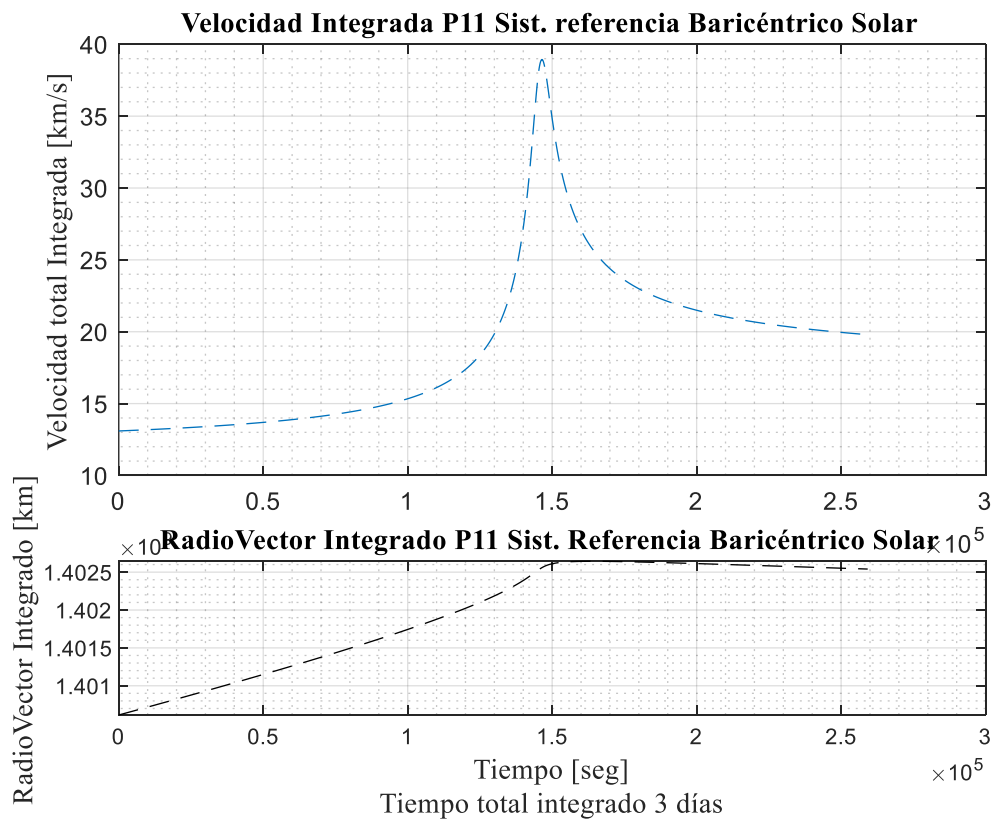
$$f_{Sun}(z, t) = - \frac{G M_{Sun}}{\left(\sqrt{(y1(t) + X_{sat}(t))^2 + (y2(t) + Y_{sat}(t))^2 + (y3(t) + Z_{sat}(t))^2} \right)^3} y3(t) \text{ [kN/kg]} \quad (3.7)$$

Ecuación 3-7 Fuerza de atracción del Sol sobre la nave proyectada sobre el eje Y. SR centrado en Saturno

El efecto del achatamiento de Saturno es introducido a través de las constantes J_2 , J_4 y J_6 . No obstante, los efectos del achatamiento sobre la trayectoria de la Pioneer 11 son mucho menores que los efectos de otros cuerpos celestes sobre la misma, por lo que antes de introducirlos se realiza una primera simulación sin los mismos.

Por último, es necesario realizar el cambio de sistema de referencia local a sistema de referencia baricéntrico solar para poder apreciar el salto en la velocidad. Esto se realiza simplemente sumando al vector Y el vector de las posiciones y velocidades de Saturno extraídas de *Horizons*.

Los primeros resultados de la simulación se muestran a continuación.



Gráfica 2 Velocidad y Vector de posición integrados. Primeros resultados en el sistema de referencia baricéntrico Solar.

Comparando con la *gráfica 1* que representaba el movimiento real de la Pioneer 11 se puede apreciar que la diferencia es muy pequeña. La máxima velocidad alcanzada extraída de *Horizons* es de 39,1 km/s, respecto de la máxima integrada de 38,93 km/s, lo que representa una diferencia del 0.4%. Esto defiende la premisa de que el achatamiento de Saturno apenas tiene influencia en la trayectoria de la órbita, y proporciona un primer modelo de integración sólido.

Energías Pioneer 11

En el artículo publicado en 2017 *The Energy Transfer Process in planetary Flybys* se realiza un estudio en profundidad sobre el tema en cuestión, profundizando en los cambios de energías que se dan en una sonda cuando realiza un sobrevuelo. (J.D. Anderson, J.K. Campbell, M.M. Nieto, 2017).

Una de las aportaciones de este artículo es la representación gráfica de las energías en el vuelo de la sonda Pioneer 11 alrededor de Saturno, por lo que se hace lógico el realizar la comparativa con el modelo ya montado con el objetivo de sondear finalmente su validez.

Las gráficas en cuestión muestran la variación de Energía cinética, la contribución a la Energía Potencial de Saturno, la energía mecánica total de la sonda, y la constante de Jacobi; Todas en unidades de energía por unidad de masa.

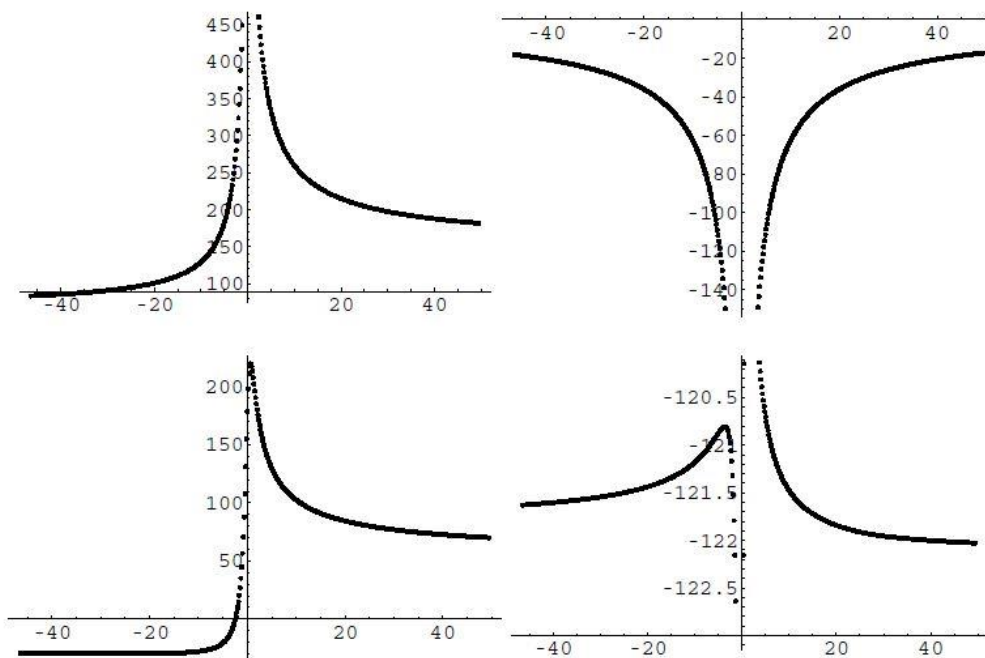


Ilustración 5 Gráficas extraídas de (J.D. Anderson, J.K. Campbell, M.M. Nieto, 2017). De arriba-abajo, izquierda-derecha: Energía Cinética [kJ/kg], Energía potencial Saturno [kJ/kg], Energía mecánica [kJ/kg] y Constante de Jacobi de la Pioneer 11 en su sobrevuelo sobre Saturno.

En el artículo se comprueba la conservación de la energía de la sonda en el sistema de referencia baricéntrico solar, a través de Integral de Jacobi. (Moulton, 1970).

$$J = (K + V) + L = (\varepsilon) - w \hat{z} \cdot r \times V \quad (3.8)$$

Ecuación 3-8 Conservación de la energía a través del invariante de Jacobi

Donde J es la constante de Jacobi, K la energía cinética, V la energía potencial, L la energía potencial-rotacional y ε la energía mecánica total, todas por unidad de masa. A su vez w es la velocidad angular de Saturno, cuyo vector se alinea con \hat{z} , el vector unidad normal al plano de

rotación de Saturno. La ecuación muestra el cambio entre energía cinética y momento angular durante un sobrevuelo.

Es técnicamente impreciso hablar de la energía total de la Pioneer 11 separando este concepto del resto del sistema Solar. Por ello, en cada uno de los pasos posteriores se van a utilizar las efemérides integradas desde el sistema baricéntrico Solar.

Si el objetivo es además comparar las gráficas del artículo con los datos integrados hasta el momento es necesario formular las mismas hipótesis. Dentro del contexto de utilizar el baricentro del sistema solar como referencia, no se tienen en cuenta todos los cuerpos que se encuentran dentro del mismo. Se toma como un problema de 3 cuerpos; La sonda, Saturno y el Sol. Se dejan de lado perturbaciones que ocasionan otros cuerpos del sistema solar como por ejemplo Júpiter. Es en este contexto cuando nos preguntamos por las componentes de la propia energía de la Pioneer.

Energía Cinética por unidad de masa K

Quizás esta sea la energía más simple de calcular. Partiendo de la velocidad integrada absoluta de la sonda:

$$K = \frac{1}{2} V_{p11}^{Solar^2} \quad (3.9)$$

Ecuación 3-9 Energía cinética por unidad de masa.

Siendo V_{p11}^{Solar} la velocidad de la Pioneer 11 en el sistema de referencia baricéntrico solar integrada a lo largo de todo el sobrevuelo.

Energía Potencial-Rotacional L

Anderson, Campbell y Nieto proporcionan una expresión para el cálculo de esta energía.

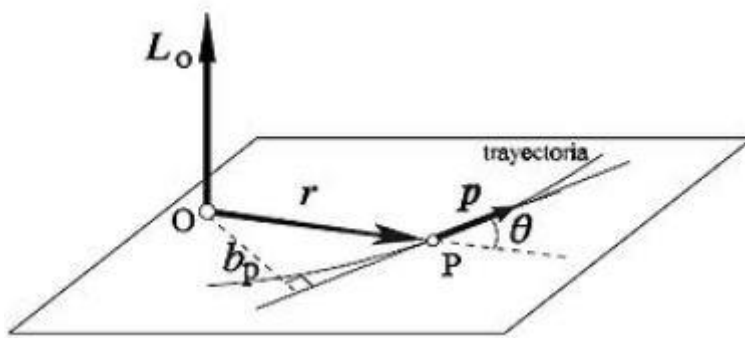
$$L = -w \hat{z} \cdot \bar{r} \times \bar{V} \quad (3.10)$$

Ecuación 3-10 Energía potencial rotacional.

Donde w es el módulo de la velocidad angular de Saturno, \hat{z} la inclinación de su órbita, y $\bar{r} \times \bar{V}$ representa el producto vectorial de la posición y la velocidad absolutas de la sonda.

Nótese que es un término negativo en conjunto. Esto es así porque representa el intercambio entre la energía de Saturno y la Pioneer11. La fórmula demuestra que antes del sobrevuelo y después del mismo, la resta de este término respecto de la energía mecánica total de la sonda se mantiene constante, dejando el intercambio de energías a cero de nuevo. Es interesante no obstante ver la variación del mismo entre ambos puntos.

Para el cálculo de la velocidad angular de Saturno se toma el mismo como una masa puntual y se aplica su definición.



$$\vec{L} = r \times (m \vec{v})$$

$$|L| = m r v \sin(\theta) = m v b_p = m \omega r^2$$

Ilustración 6 Representación del Momento angular de una partícula

Siendo b_p el brazo, definido como la distancia de la recta tangente en todo momento a la órbita respecto del punto del que se toma el momento. Tomando el módulo del momento angular por unidad de masa y despejando se obtiene la velocidad angular de Saturno alrededor del sol a partir de los datos extraídos de Horizons de su posición y velocidad.

$$\vec{\omega}_{Sat} = \frac{\vec{r}_{Sat} \times \vec{V}_{Sat}}{|r_{Sat}^2|} \quad (3.11)$$

Ecuación 3-11 la velocidad angular de Saturno alrededor del sol.

Para el cálculo de la inclinación de la órbita se realiza el módulo del producto vectorial de dos radiovectores de posición de Saturno en su órbita respecto del sol, y se considera invariante durante los 3 días de integración. Al tener guardados todas las posiciones de Saturno en un vector basta con tomar dos y realizar el producto.

$$\hat{z} = \frac{\vec{r}_{1Sat} \times \vec{r}_{2Sat}}{|r_{Sat}|} \quad (3.12)$$

Ecuación 3-12 la Módulo producto vectorial de dos radiovectores de Saturno.

Una vez calculados todos los términos se juntan y aplica la fórmula proporcionada por Anderson, Campbell y Nieto.

Energía Potencial V

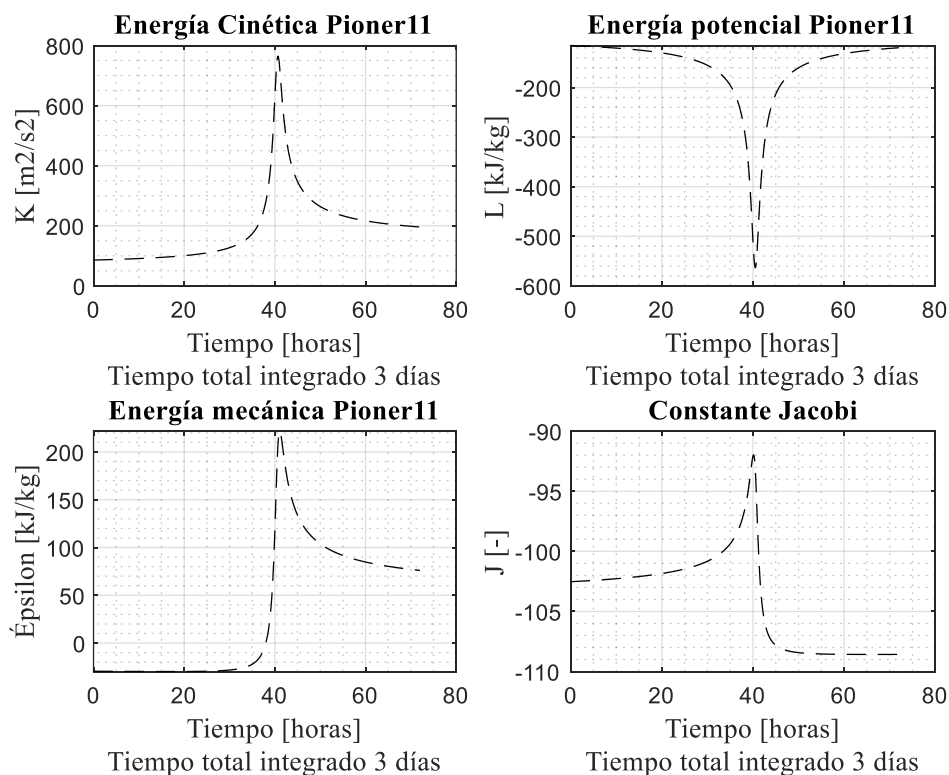
La fórmula de la energía potencial vuelve a ser de nuevo simple de calcular. La fuerza que deriva de este potencial ha sido la utilizada en el modelo de integración, y dentro del mismo contexto utilizado anteriormente se van a despreciar los efectos del achatamiento de Saturno, así como el efecto de más cuerpos celestes dentro y fuera del sistema Solar, simplificando el problema como siempre a 3 cuerpos. De esta forma la energía potencial por unidad de masa de la Pioneer 11 a su paso por Saturno queda definida como:

$$V = \left(-\frac{G M_{Sun}}{|\vec{r}_{Sun} - \vec{r}_{p11}|} - \frac{G M_{Sat}}{|\vec{r}_{Sat} - \vec{r}_{p11}|} \right) \quad (3.13)$$

Ecuación 3-13 Energía potencial por unidad de masa Pioneer 11 alrededor de Saturno.

Comparativa final

Se muestra a continuación la comparativa del balance de energías con los valores integrados respecto de los resultados presentados por Anderson, Campbell y Nieto.



Gráfica 3 Energías a partir del modelo integrado De arriba-abajo, izquierda-derecha: Energía Cinética [kJ/kg], Energía potencial Saturno [kJ/kg], Energía mecánica [kJ/kg] y Constante de Jacobi de la Pioneer 11 en su sobrevuelo sobre Saturno.

Se puede comprobar cómo los resultados son bastante precisos en todas las gráficas excepto en la constante de Jacobi. En el artículo esta constante permanece en torno a -120 kJ/kg en los puntos de entrada y salida, y en nuestro modelo se posiciona en torno a los -110 kJ/kg.

No ha sido posible el ajuste a este valor debido a que no queda muy claro cuáles han sido los factores exactos y las condiciones bajo las cuáles se ha obtenido este valor.

No obstante, al conseguir este grado de exactitud respecto de los valores del resto de energías se toma definitivamente como válido y preparado el modelo construido de integración, obteniendo así un sólido cimiento sobre el que construir el modelado del impulso de los cohetes NERVA.

Capítulo 4 Modelización del Impulso de un motor térmico nuclear

La dependencia respecto de la masa

Una vez construido un modelo fiable es posible la implementación de los cambios necesarios para la modelización de un impulso de uno de los motores térmicos nucleares del proyecto NERVA.

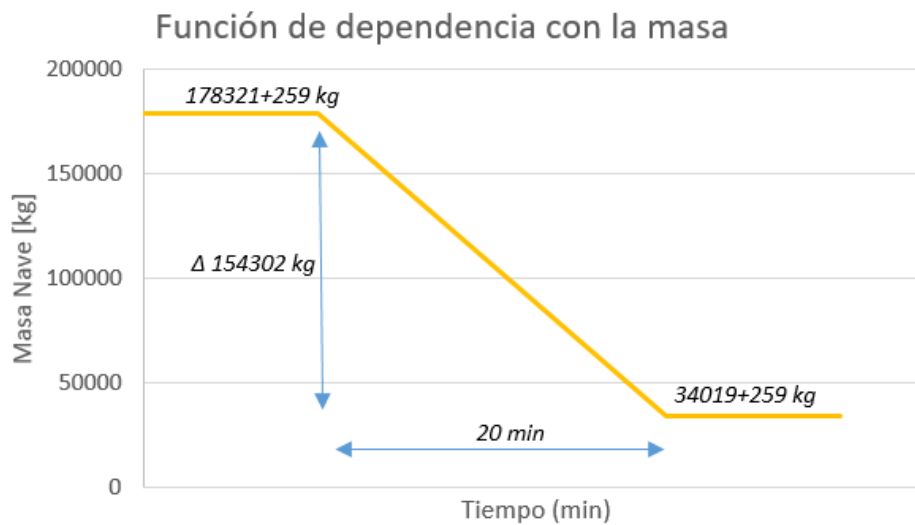
La gran diferencia con respecto al modelo base es la necesaria implementación de la dependencia con la masa, como se explicó en el Capítulo 2. Esto tiene dos efectos determinantes, la aparición de una fuerza de impulso causada por la expulsión del propelente y el efecto que tiene el mover un objeto que cada vez pesa menos, y, por tanto, más fácil de desplazar. El modelo de integración viene determinado por la Ecuación (3.1), vista en el Capítulo 2.

Basándonos en los datos de Especificaciones del motor NERVA (NASA, 1970), en la *Tabla 1*, es posible montar una función de dependencia con la masa. Para ello es necesario modelar cómo va a ser el encendido del motor y su apagado, cómo se va a ir quemando el propelente dentro del cohete y durante cuánto tiempo, así como cuando se va a encender.

El encendido y apagado del motor van a ser idealizados. Por lo general los motores necesitan de un tiempo para alcanzar su régimen de funcionamiento óptimo, durante el cual el empuje que producen es complejo de simular y, por lo general, por debajo del valor de empuje óptimo. Todo este proceso va a ser simplificado suponiendo que justo en el momento del encendido se pasa a tener unos valores de empuje óptimo de los motores. Esta simplificación no es demasiado optimista, ya que por lo general los tiempos de encendido suelen ser pequeños respecto al tiempo total que el motor va a estar proporcionando el empuje. Se recuerda además que la modelización de este empuje, aunque vectorial vista en el Capítulo 2 se considera tangente a la trayectoria de la sonda en todo momento.

De la misma forma que en el encendido se modela un apagado perfecto, cortando automáticamente el empuje del motor en el momento del apagado.

Con todo esto, la función de dependencia con la masa del motor NERVA implementado en el modelo es la siguiente:



Gráfica 4 Representación de la variación de la masa con el tiempo

La pendiente de la recta representa el empuje, y su función lineal de masa-tiempo introduce el efecto de mover un objeto cada vez menos pesado.

Recordando la Ecuación (3.1), la 2 ley de Newton aplicada a nuestro caso de estudio:

$$\frac{d(m \vec{v})}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + v_e \frac{dm}{dt} \quad (4.1)$$

Ecuación 4-1 Cantidad de Movimiento extendida

Donde ahora tanto $m(t)$ como $\frac{dm}{dt}$ son funciones conocidas.

La ecuación a integrar por tanto es:

$$\frac{d(\vec{v})}{dt} = \vec{a}(t) = \vec{f}_{Sat} + \vec{f}_{Sun} - v_e \frac{dm}{m(t) dt} \quad (4.2)$$

Ecuación 4-2 Modelo a integrar con Encendido de Motores

Donde la dependencia de la masa ha sido dividida a ambos lados para tenerla concentrada en un único término a la derecha. Los efectos de atracción del Sol y Saturno son idénticos a los utilizados en el Capítulo 3, ecuaciones 3.5, 3.6 y 3.7.

De igual forma que en la modelización sin impulso, la implementación en *MATLAB* se basa en el mismo cambio de variable utilizado para la integración del sobrevuelo, visto en el Capítulo 2.

$$Y = \begin{cases} y1 = X \\ y2 = Y \\ y3 = Z \\ y4 = \dot{X} \\ y5 = \dot{Y} \\ y6 = \dot{Z} \end{cases} \quad dY = \begin{cases} \dot{y}1 = \dot{X} = y4 \\ \dot{y}2 = \dot{Y} = y5 \\ \dot{y}3 = \dot{Z} = y6 \\ \dot{y}4 = \ddot{X} \\ \dot{y}5 = \ddot{Y} \\ \dot{y}6 = \ddot{Z} \end{cases} \quad (4.3)$$

Ecuación 4-3 Modelo a integrar *MATLAB*

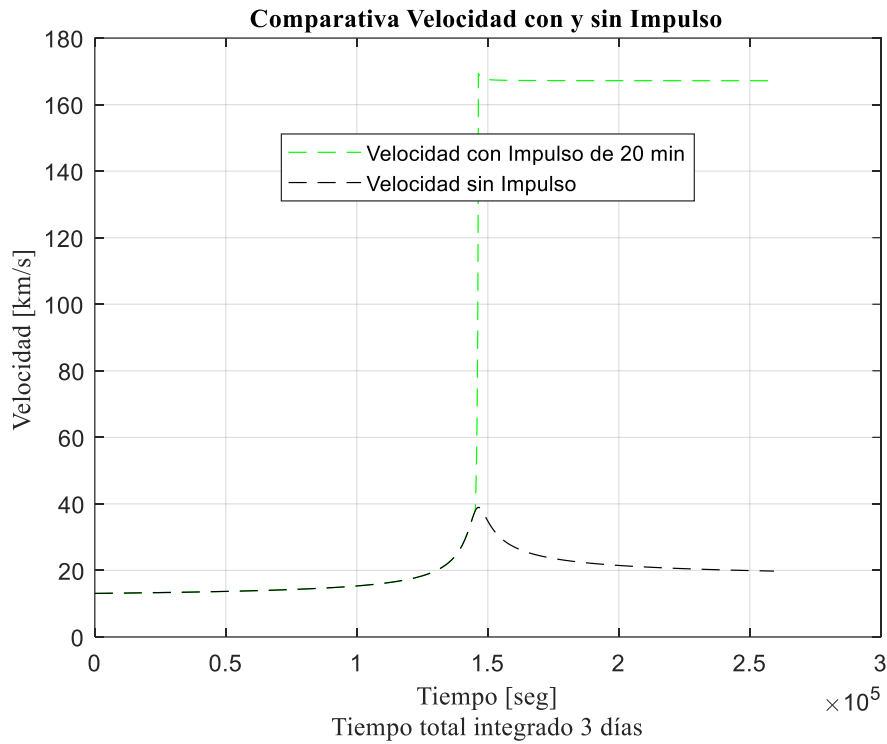
Una vez definido el sistema de ecuaciones hay que especificar las condiciones iniciales y temporales del estudio. Análogamente al modelado sin impulso, se va a tomar como condiciones iniciales la misma velocidad y posición que tenía la sonda en el momento de entrar en la esfera de influencia de Saturno, extraídas las mismas de Horizons.

Las condiciones temporales cambian, no obstante. Se mantiene la ventana de integración de 3 días, por lo que el vector temporal es el mismo, pero dentro del mismo hay que especificar el momento de encendido y apagado del motor; Es decir, estos puntos temporales son clave para la modelización del sistema, ya que dentro de los mismos se utilizará el modelado con impulso de la sonda (Sistema de ecuaciones 4.2) y fuera de los mismos el modelado sin impulso (Sistema de Ecuaciones 2.4).

El máximo tiempo que el motor puede estar encendido son 20 minutos, tiempo dado por las especificaciones del motor *NERVA*. Como se ha visto en las gráficas de velocidad que se han integrado, el efecto de la asistencia gravitacional es máximo en el punto de máxima cercanía al planeta. Por tanto y con la idea de maximizar el efecto de los motores, se toma como decisión que el punto de encendido se encuentre simétrico respecto a este punto. Esto es, se comenzará el encendido 10 minutos antes de llegar a este punto, y se mantendrá encendido 10 minutos más tras sobrepasarlo.

Este modelado sigue estando en el Sistema de Referencia centrado en Saturno, por lo que tras la integración, es necesario realizar la composición de movimientos y trasladar los datos al Sistema de Referencia baricéntrico Solar.

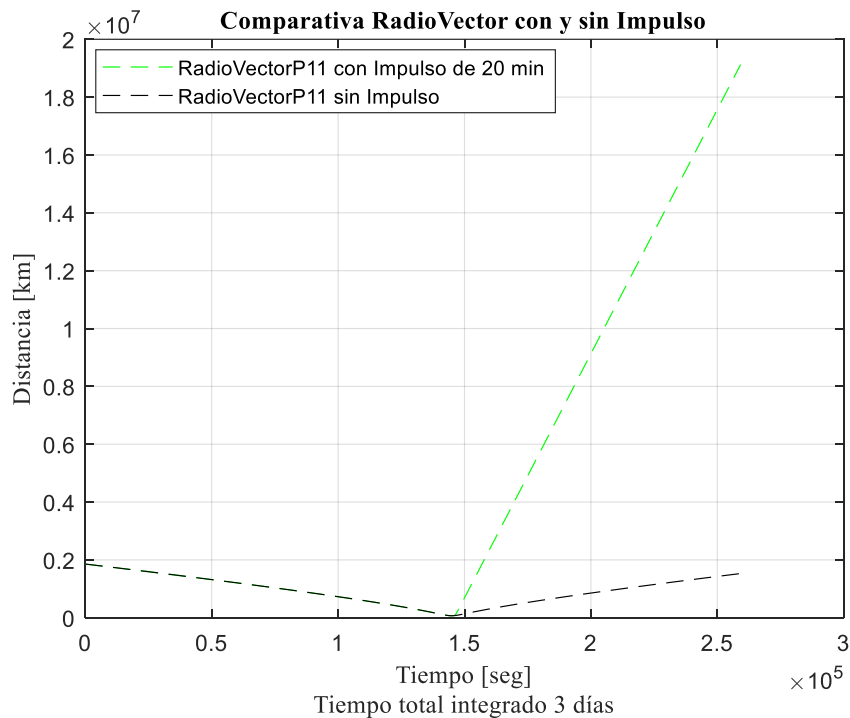
Con estas condiciones, los primeros resultados de la simulación en *MATLAB* se muestran a continuación.



Gráfica 5 Comparativa Velocidad en un sobrevuelo con y sin impulso. Punto de encendido centrado. SR baricéntrico Solar.

Donde se puede apreciar un salto de casi 8 veces la velocidad de salida previa del sobrevuelo.

Respecto al radio vector:



Gráfica 6 Comparativa Radiovector en un sobrevuelo con y sin impulso. Punto de encendido centrado. SR baricéntrico Solar.

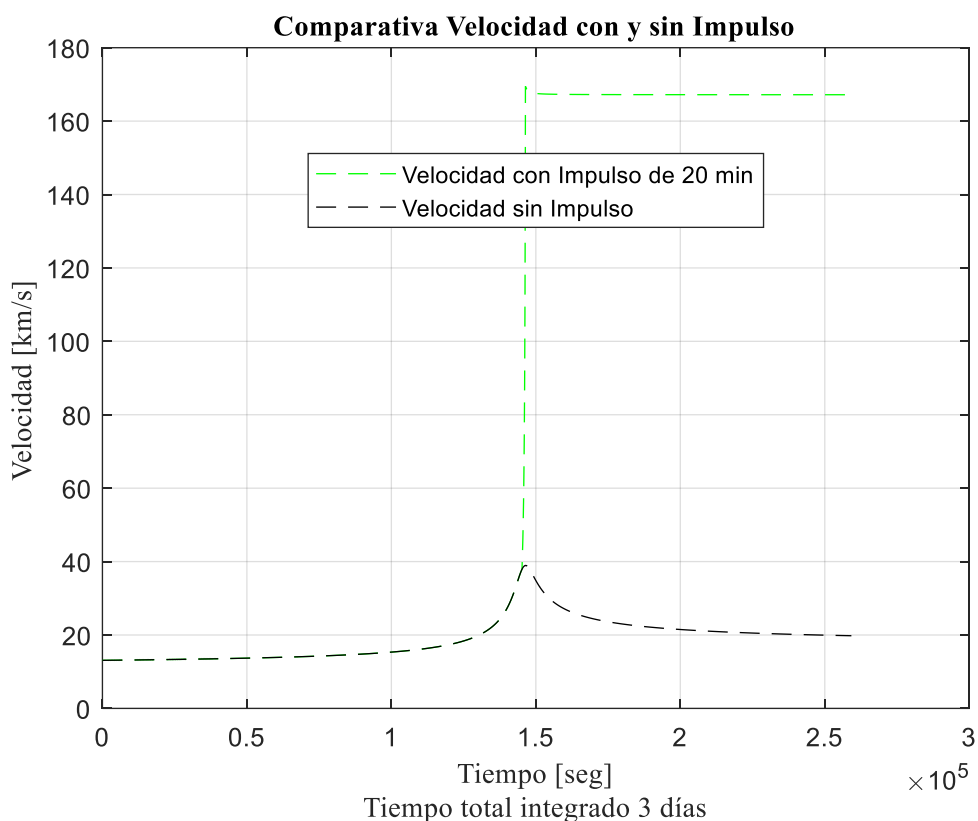
En el momento del encendido se aprecia cómo va aumentando la distancia mucho más rápido que en el caso del sobrevuelo, razonadamente.

Capítulo 5 Conclusiones del proyecto

General

Al aplicar un impulso en un tiempo centrado en el periapsis de un sobrevuelo sobre Saturno podemos ver que la Velocidad de salida de la esfera de influencia de Saturno es hasta 8.4 veces superior a la de un sobrevuelo convencional. Esta es la conclusión directa que se extrae del estudio de un sobrevuelo con un impulso de motor térmico nuclear tipo NERVA.

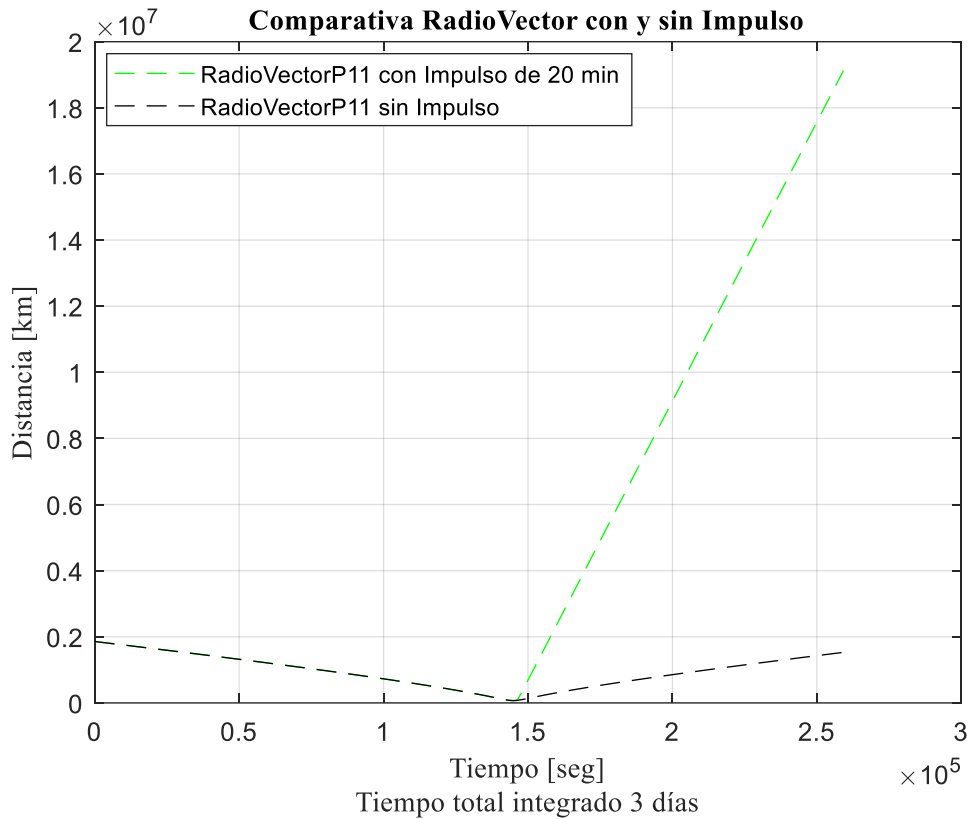
Nada más ver las gráficas comparativas de *Velocidad-Tiempo* del modelo con impulso y sin impulso se puede ver claramente este efecto:



Gráfica 7 Comparativa Velocidad en un sobrevuelo con y sin impulso. Punto de encendido centrado. SR baricéntrico Solar

Se aprecia claramente el efecto del impulso durante el tiempo de encendido, en forma de casi asíntota vertical. Debido a los tiempos de estudio, el hecho de que parezca una solución no continua a las ecuaciones es puramente gráfica; el espacio temporal que se ha tomado es de 3 días, mientras que el impulso de los motores dura únicamente 20 minutos. El salto por tanto es en realidad continuo.

Introduciendo a su vez la comparativa de los radio-vectores de posicionamiento en el sistema de referencia centrado en Saturno:



Gráfica 8 Comparativa Radiovector en un sobrevuelo con y sin impulso. Punto de encendido centrado en Saturno

Donde se obtiene una altura de paso de 20894 km sobre la superficie de Saturno en el periapsis de la órbita.

Se aprecia claramente el aumento de velocidad en el momento del encendido; *La distancia respecto del planeta aumenta más rápidamente y la órbita de paso queda más pegada al planeta.*

El efecto de alejarse de manera más pronunciada del planeta puede indicar una menor transferencia del momento angular de Saturno a la Pioneer11, ya que permanece menos tiempo dentro de su esfera de influencia. Este efecto se puede apreciar de nuevo en la gráfica de *Velocidad-Tiempo* sin impulso, en la “campana” que se produce.

Esta *Campana* tiene dos tramos claramente diferenciados; un tramo de aumento de velocidad o subida y otro tramo de disminución de la velocidad o bajada. La *Subida* representa el tramo de acercamiento a Saturno, donde la Pioneer11 se encuentra en una zona de atracción hacia el planeta. La *Bajada* representa el alejamiento del planeta y el intento de salir de su esfera de influencia, donde comienza a ir en contra de dicha fuerza de atracción. Como la nave inicialmente trae cierta velocidad (la suficiente como para no quedar atrapada en su campo de gravedad y/o caer hasta el planeta) los tiempos de permanencia en la zona de *Subida* son mayores que los tiempos de permanencia en la zona de *Bajada*, ganando más velocidad que la pérdida a posterior. (Siempre teniendo en cuenta que la velocidad de acercamiento es por detrás del planeta y no al contrario, lo que produciría justo el efecto contrario).

Lo interesante por tanto parece ser maximizar los tiempos de acercamiento y disminuir los tiempos de alejamiento; *Permanecer lo máximo posible en la zona de subida y disminuir la zona de bajada, encender justo los motores en periapsis del sobrevuelo para salir cuanto antes de la zona de Bajada y así disminuir las pérdidas.* Esto se puede apreciar en la gráfica mostrada, donde se ve cómo la zona de *Bajada* de la campana es mínima y la diferencia entre la velocidad en el periapsis y la de salida de la esfera de influencia es del 1.34 %. (169.48 km/s frente a 167.2 km/s).

El punto de encendido por tanto parece clave en la maximización del efecto de los motores, no siendo lo mismo un encendido prematuro o a posteriori. Se va a realizar un estudio para cuantificar estas pérdidas que tiene este efecto, para así poder justificar aquellas misiones en las que sea más conveniente estos tipos de encendido.

A su vez, la fuerza de atracción es el principal factor que influye en las diferencias de velocidades entrada-salida de un sobrevuelo, y esta es proporcional a la distancia de la nave al planeta. Resulta interesante por tanto realizar un estudio en cómo se ven afectados los datos por la variación del radio objetivo de la órbita, y de si existe una altura de paso ideal que haga que la atracción sea lo suficientemente grande como para aumentar la velocidad en el acercamiento, pero sin ser lo suficiente como para que las pérdidas en la salida sean demasiado altas.

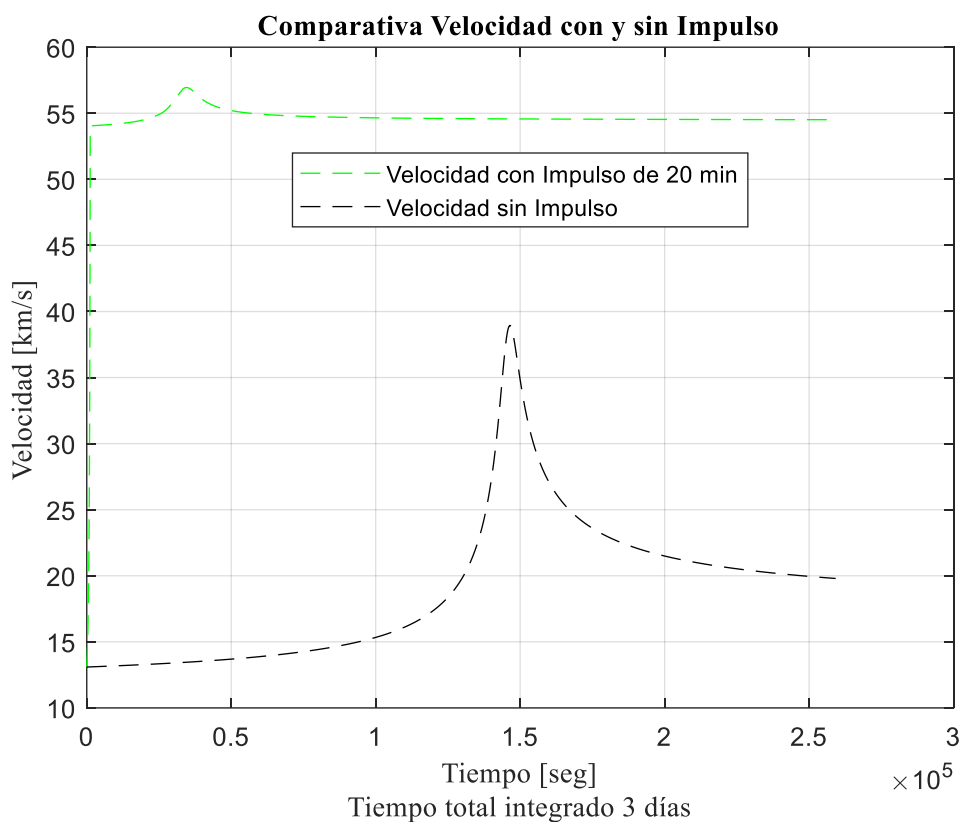
Estudio del punto de encendido

En el apartado anterior se ha planteado la idea de un punto óptimo de encendido en el periapis de la órbita de Saturno. La idea ahora es comprobar esta premisa, realizando la misma simulación con dos puntos de encendido diferentes y comprobar las diferencias en ganancia de velocidad respecto del máximo.

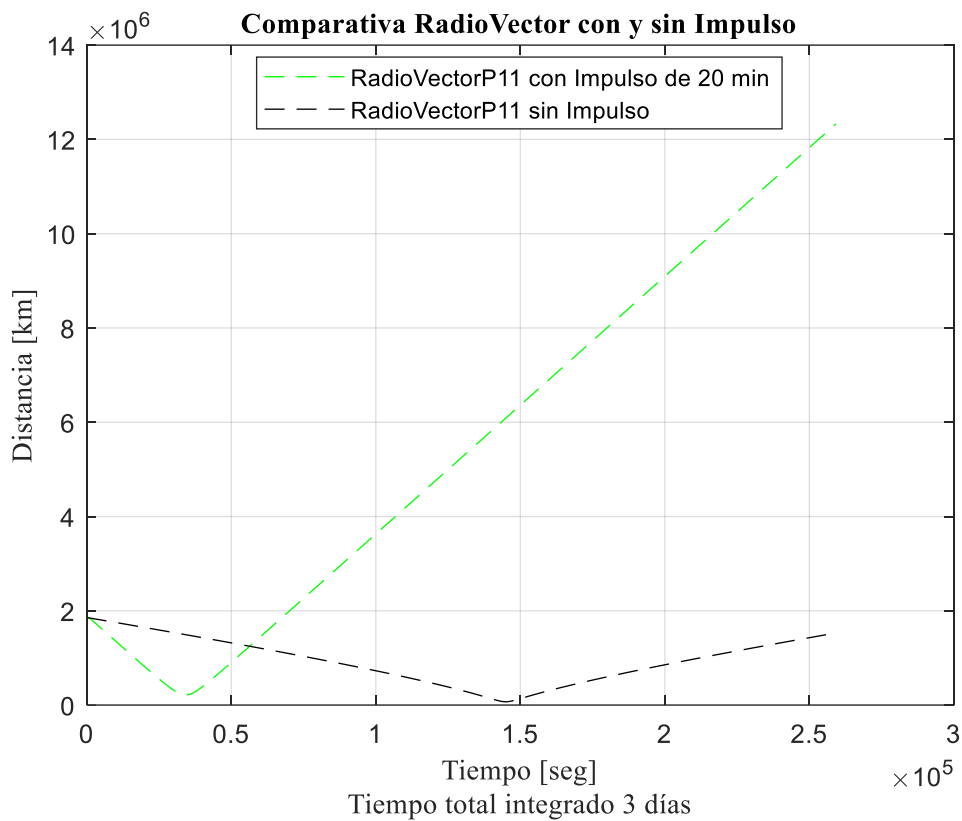
Se plantean 2 puntos de encendido, uno nada más entrar en la esfera de influencia de Saturno y otro en la salida de la esfera de influencia.

Se muestran a continuación las gráficas de *Velocidad-Tiempo* y *Posición-Tiempo* obtenidas para cada uno de los puntos de encendido.

Encendido en la entrada



Gráfica 9 Comparativa Velocidad-Tiempo con Impulso-Sin Impulso. Punto de encendido prematuro. SR baricéntrico Solar



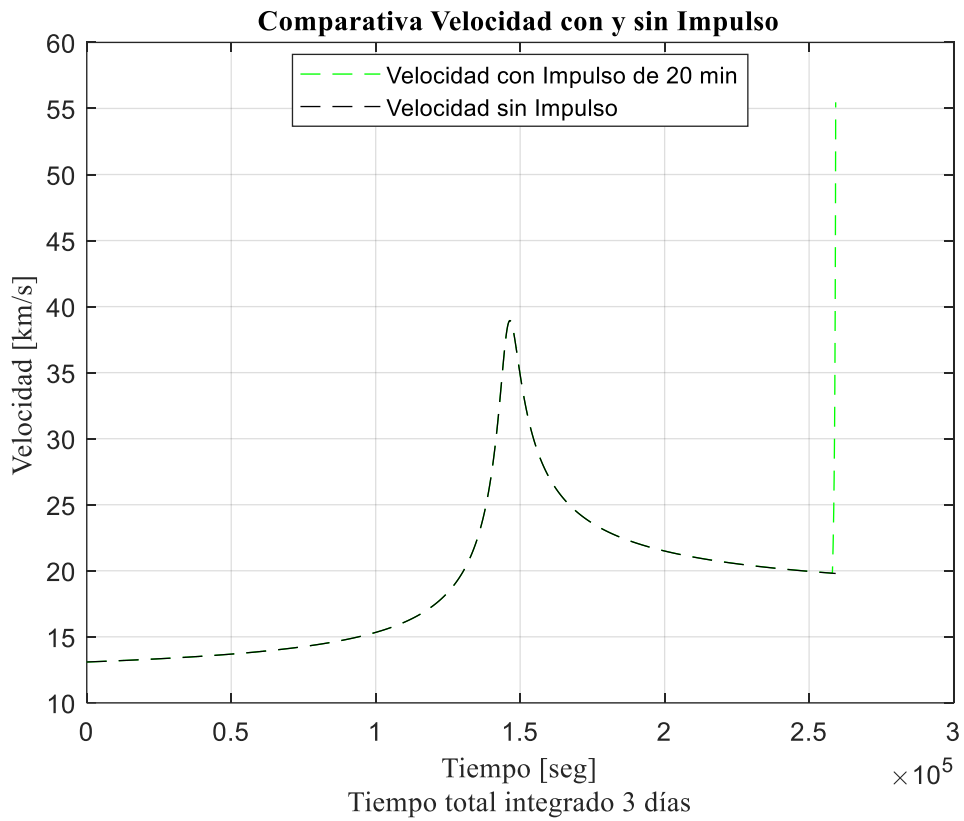
Gráfica 10 Comparativa Distancia-Tiempo con Impulso-Sin Impulso. Punto de encendido prematuro. SR baricéntrico Solar

El efecto directo de este encendido es alcanzar el periapsis de la órbita con más velocidad y por tanto antes que en el caso del encendido en el mismo propio. Se aprecia cómo la campana se sitúa por tanto muy a la izquierda de la gráfica, y que la misma es muy pequeña. La gran velocidad con la que se alcanza apenas da tiempo al sobrevuelo a hacer un cambio significativo en la velocidad. La estancia tanto en la zona de Bajada como en la de Subida se reducen.

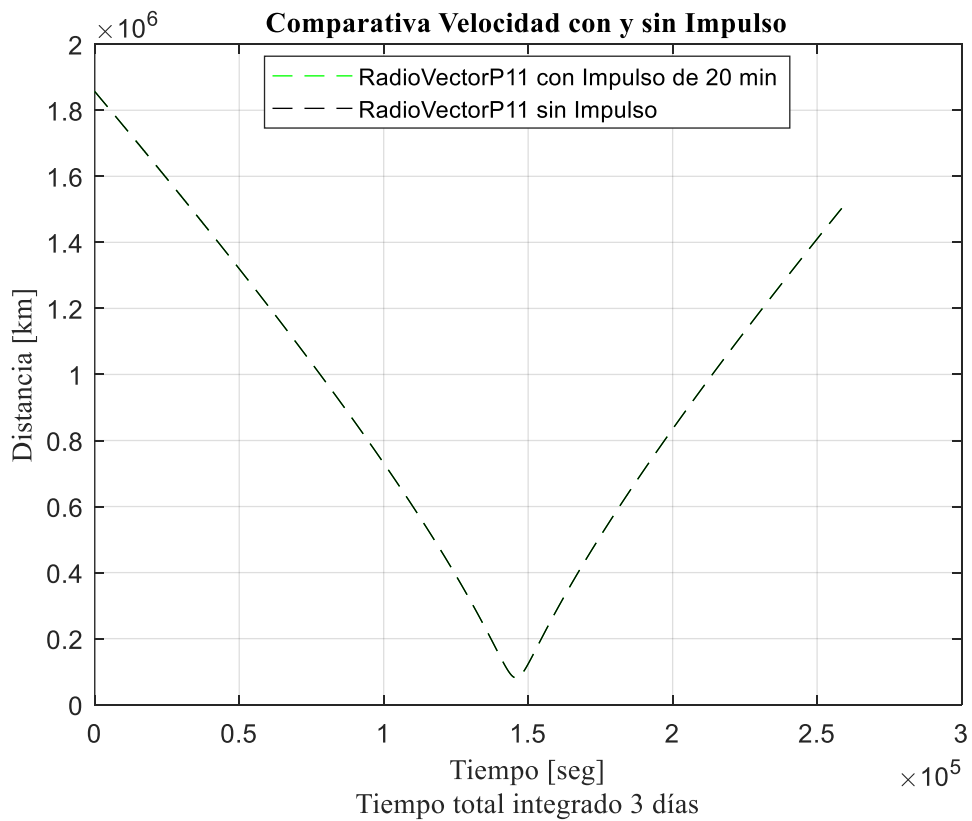
Se cumple por un lado con la premisa de reducir el tiempo de permanencia en la zona de Bajada, pero se reduce también el tiempo en la zona de Subida. El efecto se ve en la gráfica, la velocidad máxima que se alcanza son 56.951 km/s, muy por debajo de la alcanzada en el punto óptimo del periapsis.

Este punto de encendido únicamente aporta una mayor velocidad de entrada, por tanto, alcanzando una órbita mucho más próxima al planeta, pero con una velocidad de salida muy por debajo de la que se podría alcanzar retrasando el encendido. Resultaría mucho más lógico además en los términos del problema el encender los motores nada más abandonar la Tierra, ahorrándose la problemática de transportar todo el motor Nuclear hasta Saturno.

Encendido a la salida



Gráfica 11 Comparativa Velocidad-Tiempo con Impulso-Sin Impulso. Punto de encendido a posteriori. SR baricéntrico Solar



Gráfica 12 Comparativa Distancia-Tiempo con Impulso-Sin Impulso. Punto de encendido a posteriori. SR baricéntrico Solar

La velocidad de salida coincide en este caso con la máxima alcanzada, llegando a los 55,466 km/s. Este caso de estudio es muy similar al estudiado en los sobrevuelos, ya que hasta el punto de salida de la esfera de influencia no se tiene en cuenta el efecto del impulso.

La gráfica por tanto es idéntica, y únicamente se aprovecha el incremento de velocidad que proporciona el sobrevuelo clásico. Ambas zonas de la campana son idénticas, ni se reducen ni se aumentan los tiempos de permanencia en ambas zonas. Es un encendido estándar, que podría darse en cualquier punto de la órbita hiperbólica posterior que se alcanza tras salir de Saturno.

El único punto beneficioso de encender los motores en este punto es quizás la seguridad. Resulta un punto más seguro ya que la nave tendría una velocidad mucho más baja, al no estar realizando un sobrevuelo no estaría sometida a la misma tensión que en el periapsis.

Tabla Resumen

Tabla 2 Resumen punto de encendido de motores.

	<i>Encendido entrada</i>	<i>Encendido periapsis</i>	<i>Encendido Salida</i>	<i>Sobrevuelo</i>
<i>V. salida [km/s]</i>	54.51	167.18	55.47	19.79
<i>Ganancias en velocidad respecto al sobrevuelo</i>	275.37%	844.53%	280.19%	-
<i>Pérdidas en velocidad respecto al punto óptimo de encendido</i>	67.39%	-	66.82%	88.16%

Se comprueba por tanto la localización del punto óptimo de encendido (en términos de velocidad de salida) en el periapsis de la órbita del sobrevuelo, ya que se reducen los tiempos de permanencia en la zona de Bajada y se aprovecha al máximo el efecto del sobrevuelo.

Estudio del radio objetivo

El radio objetivo se define como la distancia existente entre la asíntota definida por el vector velocidad inicial al entrar en la esfera de influencia del planeta. El radio objetivo de la órbita sería el radio objetivo mínimo que causaría un impacto de la órbita contra la superficie del planeta.

En nuestro estudio la variación del radio objetivo se va a conseguir variando el ángulo inicial de la velocidad, haciendo rotar al mismo hacia Saturno. Esto va a desembocar en un punto de periapsis con menor altitud respecto de la superficie de Saturno, una mayor fuerza de atracción hacia el mismo y una mayor velocidad en el punto de periapsis.

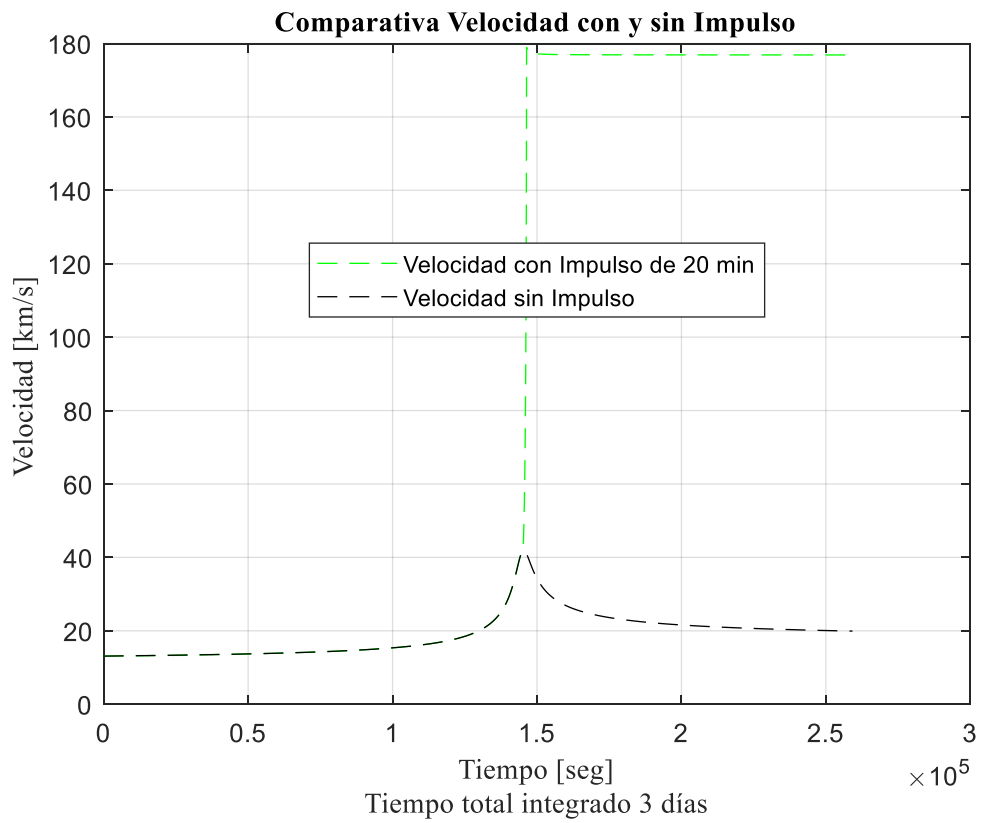
A primera vista los resultados parecen claros; el efecto del impulso cuando se apoye en una velocidad más elevada en el periapsis se traducirá en mayores velocidades a la salida. No obstante, parece que existirá un punto en el que al pasar tan cercano a la superficie del planeta (sin tener en cuenta toda la problemática que ocasionaría pasar muy cerca de las nubes y de su atmósfera) la fuerza de atracción será lo suficientemente grande como para reducir demasiado la velocidad en la zona de Bajada, llegando a atrapar a la nave.

En todo el estudio anterior la altitud de paso está fijada en los 20581 km. Haciendo rotar cada vez más la velocidad se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3 Efecto de la variación del radio objetivo

<i>Sin rotar</i>	<i>1 grado</i>	<i>1.5 grados</i>	<i>2 grados</i>	<i>2.2 grados</i>	
20894	10991	6845.9	3242.8	1984.3	<i>Altitud de paso [km]</i>
168.49	177.93	180.01	180.70	180.63	<i>Máx. Velocidad [km/s]</i>
167.18	175.79	177.96	178.71	178.66	<i>Velocidad de salida [km/s]</i>

La altura óptima por tanto de paso parece encontrarse en torno a los 3000 km sobre la superficie de Saturno. A partir de este punto la fuerza de atracción comienza a ser más perjudicial que beneficiosa, comenzando a ser menor la velocidad a la salida de la esfera de influencia.



Gráfica 13 Comparativa Velocidad-Tiempo con altitud óptima sobre Saturno. SR Baricéntrico Solar.

Capítulo 6 Presupuesto del proyecto

Esta sección trata el coste estimado del tiempo y los recursos dedicados a este proyecto. Dado que se trata de un proyecto teórico la gran mayoría del gasto se concentra en las horas de simulación y estudio de datos. No obstante, se realiza una división entre recursos humanos, software y hardware utilizado, así como un porcentaje añadido al final por sobrecostes. La siguiente tabla muestra el resumen de cada uno de ellos.

	Horas	Coste de la Hora (h/ €)	Coste Total (€)
Ingeniero de primer año	340	25	8500
Portátil	225	2	450
Licencia Matlab	200	0.7	140
Licencia Microsoft office	75	0.5	37.5
Impresión	-	-	50
		TOTAL	9177.591
		TOTAL + sobrecoste	11104.77

Coste total el proyecto junto con un 21% de costes añadidos:

Once mil, ciento cuatro Euros con setenta y siete céntimos

Anexo 1 Constantes utilizadas

Constantes sobrevuelos

$$G M_{Sun} = 132712440018 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$G M_{Saturn} = 37940586 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$R_{Saturn} = 60330 \text{ km}$$

$$v^{p11}_{in} = 7.847 \text{ km/s}$$

$$v^{p11}_{outter} = 31.808 \text{ km/s}$$

$$J_2^S = 0.0162906$$

$$J_4^S = -0.000936$$

$$J_6^S = 0.000086$$

$$\alpha_p^S = 40.58364 \text{ deg}$$

$$\delta_p^S = 83.53804 \text{ deg}$$

Constantes motor NERVA

$$\text{Diámetro} = 10.55 \text{ m}$$

$$\text{Longitud} = 43.69 \text{ m}$$

$$\text{MTOW} = 178321 \text{ kg}$$

$$\text{OEWv} = 34019 \text{ kg}$$

$$\text{TOF} = 154302 \text{ kg}$$

$$\text{Empuje} = 336.6 \text{ kg}$$

$$\text{ISP (sea level)} = 380 \text{ s}$$

$$\text{Tiempo quemado} = 1200 \text{ s}$$

Bibliografía

- Dormand, J.R and P.J. Prince. (1980). A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J.Comp.Appl.Math*, Vol. 6, 19-26.
- Dyson, George. (2003). *Project Orion – The Atomic Spaceship 1957–1965*. Penguin.
- Engler, Richard. (1987). *Atomic Power in Space: a History*. Whashington, D.C: United States Department of Energy.
- Eric W. Weisstein. (2007). Eric Weisstein's World of Physics – Roche Limit. *scienceworld.wolfram.com*.
- Everett, C.J.; Ulam S.M. (December 15, 2010). On a Method of Propulsion of Projectiles by Means of External Nuclear Explosions. Part I. *Los Alamos Scientific Laboratory*. p. 5.
- Flandro, G. (1963). Fast reconnaissance Missions of the Outer Solar System Utilizing Energy Derived from the Gravitational Field of Jupiter. *Astronautica Acta* 12, 329-337.
- Haslett. (May 1995). *Space Nuclear Thermal Propulsion Program Final Report*. Kirtland Air Force Base, New Mexico: Phillips Laboratory.
- Hohmann. (1925). *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper: Untersuchungen Über das Raumfahrtproblem*. English translation: *The availability of Heavenly Bodies*. R. Oldenbourg, Munich.
- J.D. Anderson, J.K. Campbell, M.M. Nieto. (2017). The Energy transfer process in planetary flybys. *New Astronomy*.
- Jet Propulsion Laboratory, California. (2019, May 13). *HORIZONS Web - Interface*. Retrieved from HORIZONS Web - Interface: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>
- M, Valtonen. (2006). *The Three-Body Problem*.
- Moulton. (1970). *An introduction to Celestial Mechanics*. Dover, New York.
- NASA. (1970). *Detail Specification. Part 1. Performance/desing and qualification requirements for Engine, NERVA, 75K, Full Flow*. AeroJet Nuclear Systems Company.
- Piqueras Nebot, Pablo. (2017). *Análisis orbital para los sobrevuelos de la nave Juno sobre Júpiter*. valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Shampine, L. F. and M. W. Reichelt. (1997). The Matlab ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 18, 1-22.
- Wiesel, W. (1989). *Spaceflight Dynamics* . New York: McGraw - Hill.