



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño



# *DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y CONTROL DE UN PÉNDULO INVERTIDO CON RUEDA DE REACCIÓN*

**MEMORIA PRESENTADA POR:**

*Iván Augusto Duarte Olivares*

**Máster Universitario en Ingeniería Mecatrónica**

**DIRECTOR:**

*Vicente Fermín Casanova Calvo*

*[Julio de 2019]*



# RESUMEN

---

El presente documento contiene el Trabajo de Fin del Máster Universitario en Ingeniería Mecatrónica de la Universitat Politècnica de València dirigido por Vicente Fermín Casanova Calvo y desarrollado por Ivan Augusto Duarte Olivares, durante el segundo curso del máster. El proyecto trata sobre el desarrollo de un prototipo de la variante de péndulo invertido, estabilizado a través de una rueda de reacción.

Una investigación previa sobre el problema del Péndulo Invertido y las diferentes variantes de este se ha realizado primero, antes de abordar el tema de la simulación, diseño y construcción. Dicha investigación contempla, además, información sobre la rueda de reacción y las diferentes aplicaciones de esta y del modelo del péndulo invertido con rueda de reacción.

Para el desarrollo del prototipo se ha realizado un planteamiento matemático del modelo, la validación de este utilizando las herramientas de Matlab y Simulink. La validación consiste en verificar el comportamiento del sistema de ecuaciones en caída libre, con y sin fricción, para luego realizar un control simple del modelo para estabilizarlo en la vertical con un regulador PID.

Se ha después un modelado tridimensional con SolidWorks y luego simulación de la física del modelo con las herramientas de Simscape Multibody Multiphysics. Esta simulación contempla el comportamiento del motor de manera realista y de las interacciones entre los cuerpos del modelo 3D con las fricciones de las juntas. El control de este es más completo, ya que aparte de la estabilización en la vertical, se ha conseguido realizar el levantamiento del péndulo y el seguimiento de referencias senoidales y triangulares satisfactoriamente.

Finalmente, se han impreso en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño las piezas diseñadas y se ha construido el prototipo del péndulo invertido con rueda de reacción. Se ha realizado el control del prototipo en un Arduino DUE con un regulador PID, logrando el rechazo de perturbaciones en posición vertical, el levantamiento desde un ángulo obtenido experimentalmente y se ha intentado realizar también el seguimiento de una referencia senoidal.



# ÍNDICE

1	Introducción.....	11
1.1	Objetivos.....	11
1.2	Justificación.....	12
2	Estudio previo y base teórica .....	13
2.1	El péndulo invertido.....	13
2.2	Variantes del péndulo invertido.....	14
2.2.1	Péndulo invertido doble.....	14
2.2.2	Péndulo invertido triple .....	14
2.2.3	Péndulo invertido sobre carrito.....	15
2.2.4	Péndulo invertido de Furuta .....	15
2.2.5	Péndulo invertido de Kapitza.....	16
2.2.6	Péndulo con hélice .....	16
2.3	La rueda de reacción .....	17
2.4	Péndulo invertido con rueda de reacción.....	17
2.5	Aplicaciones.....	18
2.5.1	Posicionamiento satelital .....	19
2.5.2	El Cubli.....	20
2.6	Motores eléctricos.....	21
2.6.1	Motores de Corriente Alterna .....	21
2.6.2	Motores de Corriente Continua .....	22
2.7	Modelo matemático del péndulo invertido con rueda de reacción.....	26
2.7.1	Validación del modelo con Matlab .....	28
2.8	Linealización .....	30
2.9	El control PID.....	31
3	Modelado tridimensional y simulación .....	33
3.1	Diseño de CAD 3D con SolidWorks.....	33
3.2	Diseño en Simulink mediante Simulink y Simscape Multibody.....	38
3.3	Métodos de control.....	41
3.3.1	Control PID paralelo de 1GDL:.....	41
3.3.2	Control híbrido para levantamiento del péndulo: .....	42
3.4	Simulación de diferentes escenarios y resultados .....	43
3.4.1	Seguimiento de referencia senoidal .....	44
3.4.2	Seguimiento de referencia triangular:.....	45

3.4.3	Rechazo de perturbaciones en posición vertical: .....	46
3.4.4	Levantamiento del péndulo:.....	47
4	Implementación real .....	49
4.1	Selección de componentes eléctricos .....	49
4.1.1	Motor eléctrico:.....	49
4.1.2	Microcontrolador .....	50
4.1.3	Sensor de inclinación.....	51
4.1.4	Fuente de alimentación.....	52
4.2	Selección de componentes mecánicos.....	52
4.2.1	Impresión 3D del cuadro, bases y rueda.....	53
4.2.2	Eje de la base.....	53
4.2.3	Rodamientos .....	53
4.2.4	Acoples.....	54
4.3	Programación del controlador .....	55
4.4	Inconvenientes encontrados y soluciones .....	57
4.5	Resultados del prototipo real .....	58
5	Conclusiones .....	63
5.1	Trabajo futuro .....	64
6	Bibliografía .....	65
7	Anexos.....	67
7.1	Presupuesto .....	67
7.2	Planos de construcción del péndulo .....	68
7.3	Esquema de conexión con el Arduino.....	72
7.4	Código fuente de Arduino.....	73

# FIGURAS

Figura 1 - Representación de un péndulo invertido clásico .....	13
Figura 2 - Representación de un péndulo invertido de 2GDL.....	14
Figura 3 - Representación de un péndulo invertido de 3 GDL.....	14
Figura 4 - Péndulo invertido sobre carrito con movimiento en el eje horizontal .....	15
Figura 5 - Representación del péndulo invertido de Furuta, rotación en el eje Z .....	15
Figura 6 - Representación del péndulo invertido de Kapitza .....	16
Figura 7 - Péndulo invertido con doble hélice y contrapeso para asegurar la posición vertical..	16
Figura 8 - Rueda de reacción con motor y estructura de montaje .....	17
Figura 9 - Punto de equilibrio natural y deseado del péndulo .....	18
Figura 10 - El Segway y su modelo físico simplificado .....	18
Figura 11 - Sistema de posicionamiento del telescopio Hubble.....	19
Figura 12 - Ejemplo de un CubeSat, el Ncube-2 noruego.....	20
Figura 13 - El Cubli balanceándose sobre una de sus esquinas.....	20
Figura 14 - Motor asíncrono de inducción (izquierda) y síncrono de rotor bobinado (derecha) .	21
Figura 15 - Composición de un motor CC con escobillas.....	22
Figura 16 - Motor paso a paso con rotor magnético .....	23
Figura 17 - Motor paso a paso de reluctancia variable .....	24
Figura 18 - Motor CC sin escobillas sensorizado.....	24
Figura 19 - Tabla de secuencia de conmutación de un motor sin escobillas con sensores .....	25
Figura 20 - Dibujo del péndulo invertido con rueda de reacción .....	26
Figura 21 - Modelo de ecuaciones no lineales del péndulo.....	29
Figura 22 - Validación del modelo matemático a partir de casi cero grados sin fricción.....	29
Figura 23 - Validación del modelo matemático con fricción.....	30
Figura 24 - Representación del PID paralelo.....	32
Figura 25 - Rueda de reacción con agujeros para pesas.....	33
Figura 26 - Cuadro de montaje del motor y la rueda de reacción.....	34
Figura 27 - Base del eje del péndulo invertido .....	34
Figura 28 - Base del sensor de posición angular del péndulo.....	35
Figura 29 - Eje de rotación del péndulo .....	35
Figura 30 - Render del péndulo con todos los elementos y pesas.....	36
Figura 31 - Propiedades de masa del ensamblaje de la rueda con su acople y tornillería .....	37
Figura 32 - Bloques del modelo en Simulink del péndulo invertido con rueda de reacción.....	38
Figura 33 - Vista del modelo en el Mechanics Explorer de Matlab con el suelo virtual .....	39
Figura 34 - Bloque del motor de corriente continua.....	40
Figura 35 - Bloque de Control del modelo .....	40
Figura 36 - Conjunto de bloques del modelo de Simulink .....	41
Figura 37 - Bloque de control para el levantamiento.....	42
Figura 38 - Modelo de Simulink del escenario de levantamiento .....	43
Figura 39 - Seguimiento de referencia senoidal de amplitud de $10^\circ$ .....	44
Figura 40 - Seguimiento de referencia triangular de amplitud de $10^\circ$ .....	45
Figura 41 - Rechazo de perturbaciones aleatorias en ambas direcciones .....	46
Figura 42 - Levantamiento y seguimiento de la referencia vertical .....	47
Figura 43 - Levantamiento y seguimiento con corrección de velocidad.....	48
Figura 44 - Motor sin escobillas Nidec 24H677 .....	49
Figura 45 - Vista superior de la placa Arduino DUE.....	50
Figura 46 - Potenciómetro serie 6120 de TT Electronics .....	52
Figura 47 - Acoplamiento de 6.35mm a 6mm .....	54

Figura 48 - Acoplamiento de sujeción de la rueda de reacción al motor .....	54
Figura 49 - Implementación del péndulo invertido en el laboratorio .....	58
Figura 50 - Resultado del rechazo de perturbaciones en posición vertical .....	59
Figura 51 - Detalle del rechazo de perturbaciones .....	59
Figura 52 - Detalle de la reducción gradual de velocidad en torno a posición cero.....	60
Figura 53 - Acercamiento de la señal mostrando el ruido y efecto de las vibraciones .....	60
Figura 54 - Levantamiento, seguimiento de referencia vertical y luego senoidal .....	61
Figura 55 - Detalle del seguimiento de la referencia senoidal.....	62

# TABLAS

---

Tabla 1 - Parámetros del motor RS-385PH-17120.....	39
Tabla 2 - Características del motor NIDEC 24H677 .....	49
Tabla 3 - Características de la placa de Arduino DUE .....	50
Tabla 4 - Características del potenciómetro 6127V2A180 de TT Electronics .....	52
Tabla 5 - Características del material Z-Ultrat de Zortrax.....	53



# 1 INTRODUCCIÓN

---

El trabajo de fin de máster presente consiste en el desarrollo de las actividades de diseño asistido por el ordenador, simulación del modelo propuesto, aplicación de un sistema de control y construcción del modelo de un péndulo invertido con rueda de reacción, accionada por un motor eléctrico de corriente continua.

El control de sistemas inestables para lograr estabilidad es de vital importancia en la construcción de maquinaria de utilidad para la vida diaria de las personas, como son los vehículos de transporte y satélites de comunicación. Por estos motivos se ha elegido un sistema inestable para la investigación y desarrollo de un sistema de control sobre un prototipo.

Se realiza una investigación previa y modelo matemático para posterior comparación con el sistema físico simulado, para confirmar que el comportamiento de ambos es similar. Para simular el sistema físico se implementa además un sistema de control para realizar la estabilización de este en una posición vertical, seguir señales referencias distintas y rechazar las perturbaciones que pueda sufrir este en el entorno real.

Luego de realizar las simulaciones y cambios necesarios en el modelo 3D diseñado con Solidworks, se procede con la implementación real del sistema y los ajustes pertinentes al sistema de control para lograr los resultados deseados. Se comparan estos resultados entonces con los de la simulación para que tan similares o no son estos y proponer algunas conjeturas sobre el porqué de estas.

## 1.1 OBJETIVOS

El objetivo principal del presente Trabajo de Fin de Máster es el diseño, análisis y realización de un prototipo del clásico problema del péndulo invertido, estabilizado mediante una rueda de reacción, accionada por un motor eléctrico y controlada a través de un microcontrolador.

### Objetivos específicos:

1. Realizar un modelo matemático del péndulo invertido con rueda de reacción
2. Diseñar los componentes mecánicos del prototipo con un programa de CAD 3D
3. Realizar un modelo y simulación del prototipo con Simulink y Matlab para analizar el comportamiento del prototipo
4. Diseñar un controlador para el modelo de Simulink y ajustar las ganancias de este para obtener la mejor respuesta posible del sistema
5. Seleccionar los componentes eléctricos y electrónicos del sistema. Los cuales consisten en un motor eléctrico, etapa de potencia del motor, sensor de posición angular del péndulo, microcontrolador para monitorizar y controlar el sistema y una fuente de alimentación
6. Construir los componentes mecánicos del péndulo invertido utilizando fabricación aditiva con una impresora 3D o una CNC
7. Realizar la programación de la aplicación de control del sistema embebido encargado de monitorear y controlar el sistema
8. Comparar y analizar los resultados de la simulación con los del prototipo construido

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

Primeramente, realizar el trabajo de fin de máster es un requerimiento que se debe cumplir para la obtención del título del Máster en Ingeniería Mecatrónica, de acuerdo con la normativa del Ministerio de Educación y Ciencia de España. Este trabajo se ha realizado en el laboratorio de control del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática y en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño de la Universitat Politècnica de València.

El poseer conocimientos sobre diseño mecánico asistido por el ordenador, el desarrollo de modelos de simulación mecánicos y eléctricos, la aplicación de los sistemas de control y la programación de sistemas embebidos es muy valorado en el ámbito industrial. El poder aplicar correctamente y en armonía las disciplinas que rigen estos conocimientos, es de vital importancia para un ingeniero mecatrónico, por ello la realización de este trabajo con dichos conocimientos.

Realizar el trabajo de fin de máster sobre el tema elegido permite desarrollar los conocimientos adquiridos durante los estudios del Máster en Ingeniería Mecatrónica y realizar una implementación práctica de estos, elevando la comprensión y utilidad de estos.

## 2 ESTUDIO PREVIO Y BASE TEÓRICA

### 2.1 EL PÉNDULO INVERTIDO

En la teoría de control es un muy conocido e importante problema, pues se trata de un sistema inestable y no lineal, que presenta un desafío y un ejemplo excelente para el aprendizaje sobre el control de sistemas no lineales, así como para observar las diferencias entre un control en bucle abierto y uno en bucle cerrado.

Se compone de una masa en el extremo de una barra que se une a pivote o junta giratoria unida a una base fija. El ángulo de la barra respecto al eje vertical (En el caso de la figura el eje  $y$ ) es lo que se desea mantener en cero para lograr una posición vertical.

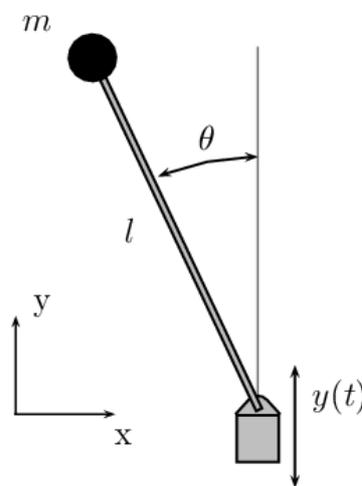


Figura 1 - Representación de un péndulo invertido clásico

La posición vertical deseada es un punto de equilibrio inestable, por lo que, al ser afectado el péndulo por una fuerza externa o desplazarse ligeramente del punto de equilibrio, y tener su centro de masa por encima del eje de rotación, se cae y produce un movimiento oscilatorio en la parte inferior hasta detenerse debido a la fricción y quedarse en una posición estable, pero con un ángulo de  $180^\circ$  respecto a la vertical. En un caso ideal y sin fricción, el movimiento oscilatorio no se detendría y al graficar la posición de la barra obtendríamos una senoidal.

Lograr obtener un control lineal para reducir la complejidad de este es posible, pero se debe realizar sobre un punto de funcionamiento en concreto. Esto trae el inconveniente de que, al introducirse perturbaciones muy grandes o desviarse la posición del péndulo demasiado, es imposible mantener el control sobre este.

## 2.2 VARIANTES DEL PÉNDULO INVERTIDO

### 2.2.1 Péndulo invertido doble

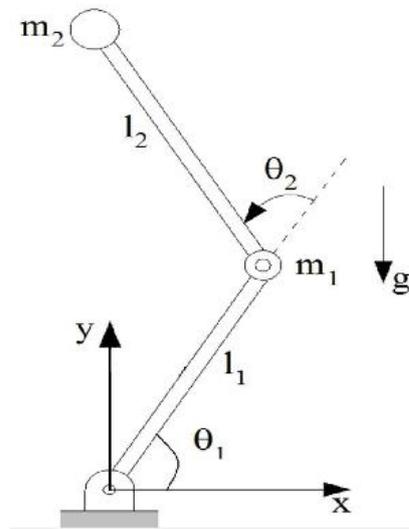


Figura 2 - Representación de un péndulo invertido de 2GDL

En este caso se agrega otra barra a la base, la cual se une con la barra original mediante una junta rotacional y agrega un segundo ángulo que debe ser controlado en conjunto con el original para lograr la posición deseada del péndulo.

### 2.2.2 Péndulo invertido triple

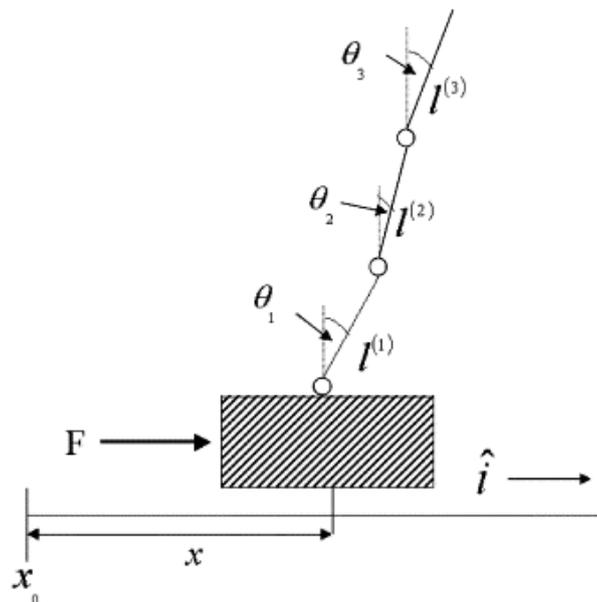


Figura 3 - Representación de un péndulo invertido de 3 GDL

Variante que incrementa aún más el grado de dificultad del sistema al agregar otra barra y junta rotacional, subiendo a 3 la cantidad de ángulos a controlar.

### 2.2.3 Péndulo invertido sobre carrito

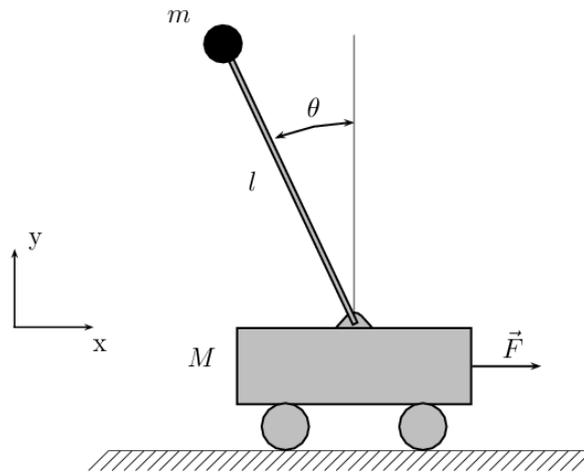


Figura 4 - Péndulo invertido sobre carrito con movimiento en el eje horizontal

Este es uno de los métodos más comunes para contrarrestar las perturbaciones del péndulo y establecer la posición vertical. Consiste en mover la base de la cual pivota el péndulo al montarlo sobre un carro al que se le aplica una fuerza en el eje horizontal para modificar su posición. Una desventaja es que este sistema no es capaz de mantener el péndulo en posición vertical sin modificar las coordenadas del origen de este.

### 2.2.4 Péndulo invertido de Furuta

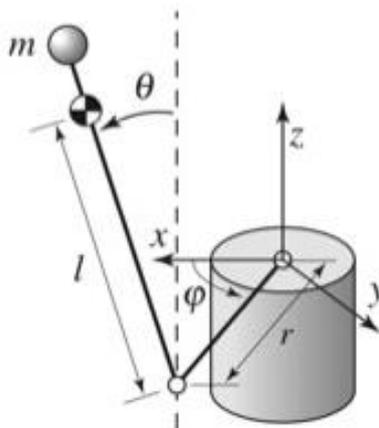


Figura 5 - Representación del péndulo invertido de Furuta, rotación en el eje Z

Inventado por Katsuhisa Furuta en el Instituto Tecnológico de Tokio en 1992, se basa en el movimiento rotacional de la base del péndulo en el eje horizontal para contrarrestar las perturbaciones del sistema. Al igual que en el caso del péndulo sobre el carro, el centro de coordenadas de la base se desplace para lograr cambiar el ángulo de la barra.

### 2.2.5 Péndulo invertido de Kapitza

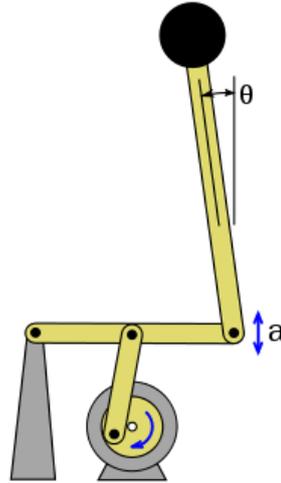


Figura 6 - Representación del péndulo invertido de Kapitza

Fue descrito inicialmente por Stephenson en 1908, que encontró que al mover el péndulo arriba y abajo con la frecuencia adecuada se puede lograr la estabilidad en posición vertical, pero no se pudo explicar hasta el 1951, cuando Pyotr Kapitza desarrolló la teoría que explica algunas de sus propiedades tan inusuales. El resultado de su trabajo trajo al mundo de la física lo que es la mecánica vibratoria.

En este caso, el equilibrio se logra mediante el movimiento oscilatorio en el eje vertical del péndulo, por ejemplo, con una manivela conectada a un motor que mueve un brazo que funciona de palanca para mover la base del péndulo.

### 2.2.6 Péndulo con hélice

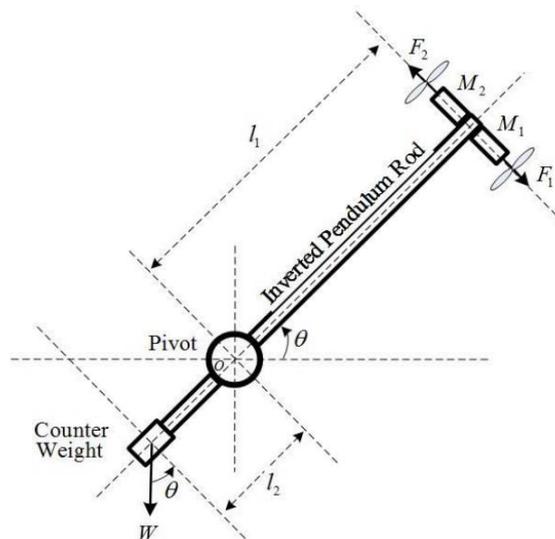


Figura 7 - Péndulo invertido con doble hélice y contrapeso para asegurar la posición vertical

En este caso, el péndulo siempre se mantiene en la posición de equilibrio vertical, aunque se le introduzcan perturbaciones, debido al contrapeso agregado a la base del péndulo y el ángulo deseado de la barra se consigue mediante el uso de dos motores con hélices en contraposición, los cuales ejercen fuerzas perpendiculares a la barra al girar y desplazar el aire.

## 2.3 LA RUEDA DE REACCIÓN

Es un tipo de volante de inercia utilizado principalmente para el control de actitud en las naves espaciales o satélites, ya que no requiere la aplicación de pares externos. Se utilizan para realizar pequeños cambios de orientación, por ejemplo, para mantener a la nave apuntando a un objetivo que se desplaza muy lentamente. Esto es de vital importancia, ya que se puede evitar el uso de cohetes y combustible, reduciendo el peso de la aeronave.

Las ruedas de reacción representan una parte muy pequeña de la masa total de las naves espaciales, por lo que los cambios que introducen en la orientación de esta son muy pequeños, proporcionando un control muy preciso de la actitud.

En nuestro caso, se utilizará una rueda de reacción para controlar el ángulo de la barra del péndulo, la cual deberá poder girar a cierta velocidad para contrarrestar las perturbaciones del sistema y llevar la barra al punto de equilibrio deseado.



Figura 8 - Rueda de reacción con motor y estructura de montaje

El momento angular se define como el producto del momento de inercia de un cuerpo y su velocidad rotacional  $L = I \cdot \omega$  sobre un eje en particular, pudiendo tratarse el momento de inercia como escalar cuando la trayectoria del cuerpo se produce en un solo plano. El momento de inercia depende de la posición del eje de rotación y la forma que tenga el cuerpo, por lo que podemos tener cuerpos con masas distintas, pero momentos de inercia iguales, cosa que se tendrá en cuenta a la hora de diseñar la rueda de reacción.

## 2.4 PÉNDULO INVERTIDO CON RUEDA DE REACCIÓN

Este último caso es el objeto de estudio de este trabajo de fin de máster. Para contrarrestar las perturbaciones y mantener la posición vertical se utiliza una rueda de reacción, la cual es girada por un motor eléctrico. Debido al fenómeno de conservación de movimiento angular, la rueda ejerce un par sobre la barra, el cual nos sirve para controlar el ángulo de esta.

## Condición deseada

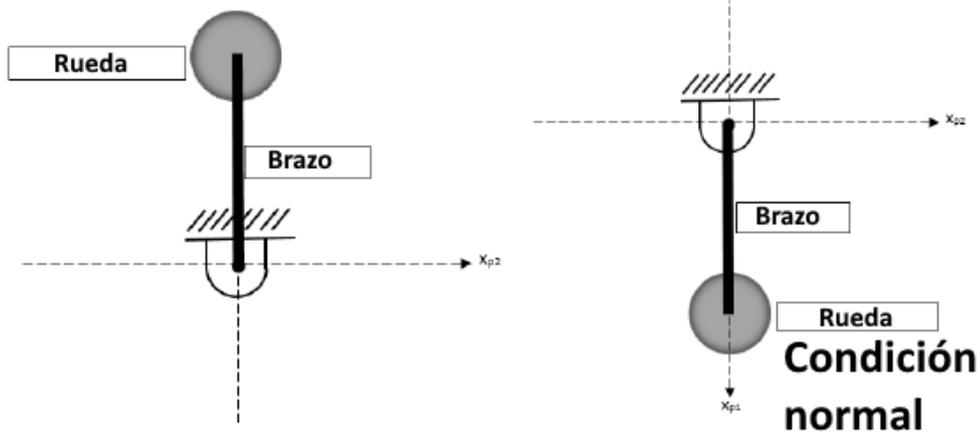


Figura 9 - Punto de equilibrio natural y deseado del péndulo

La ventaja respecto a los sistemas anteriores es que existen menos partes móviles y la base del péndulo no se tiene que mover de su origen para modificar el ángulo de la barra.

## 2.5 APLICACIONES

Los principales sectores en los que encontramos aplicaciones importantes del péndulo invertido son: aeroespacial, biomecánica y transporte.

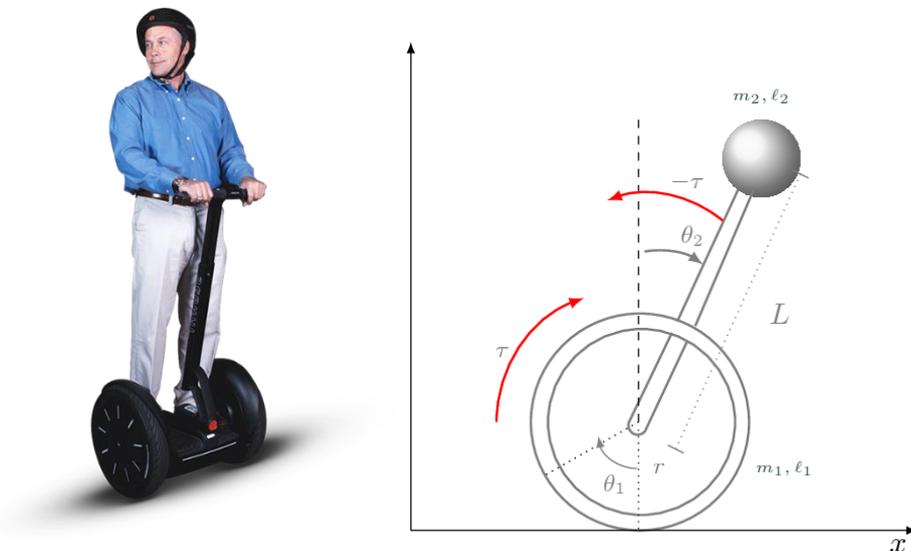


Figura 10 - El Segway y su modelo físico simplificado

El vehículo de transporte personal Segway es uno de los ejemplos más claros de la aplicación del péndulo invertido. En este se utiliza unas ruedas en la base para desplazar la posición horizontal del vehículo y mantener la estabilidad de este con su conductor, así como realizar giros y cambios de dirección al girar una rueda más rápido que la otra.

## 2.5.1 Posicionamiento satelital

En los satélites se utilizan las ruedas de reacción para mantener hacia donde apuntan con gran precisión, modelando el sistema con un péndulo de 3 grados de libertad. Un ejemplo de esta aplicación es en el telescopio Hubble, que utiliza 4 ruedas de reacción redundantes, para que, en caso fallar una de estas, se pueda lograr mantener la posición con sólo 3 ruedas, permitiéndole seguir operando hasta que se pueda realizar una misión para reemplazar la rueda afectada.

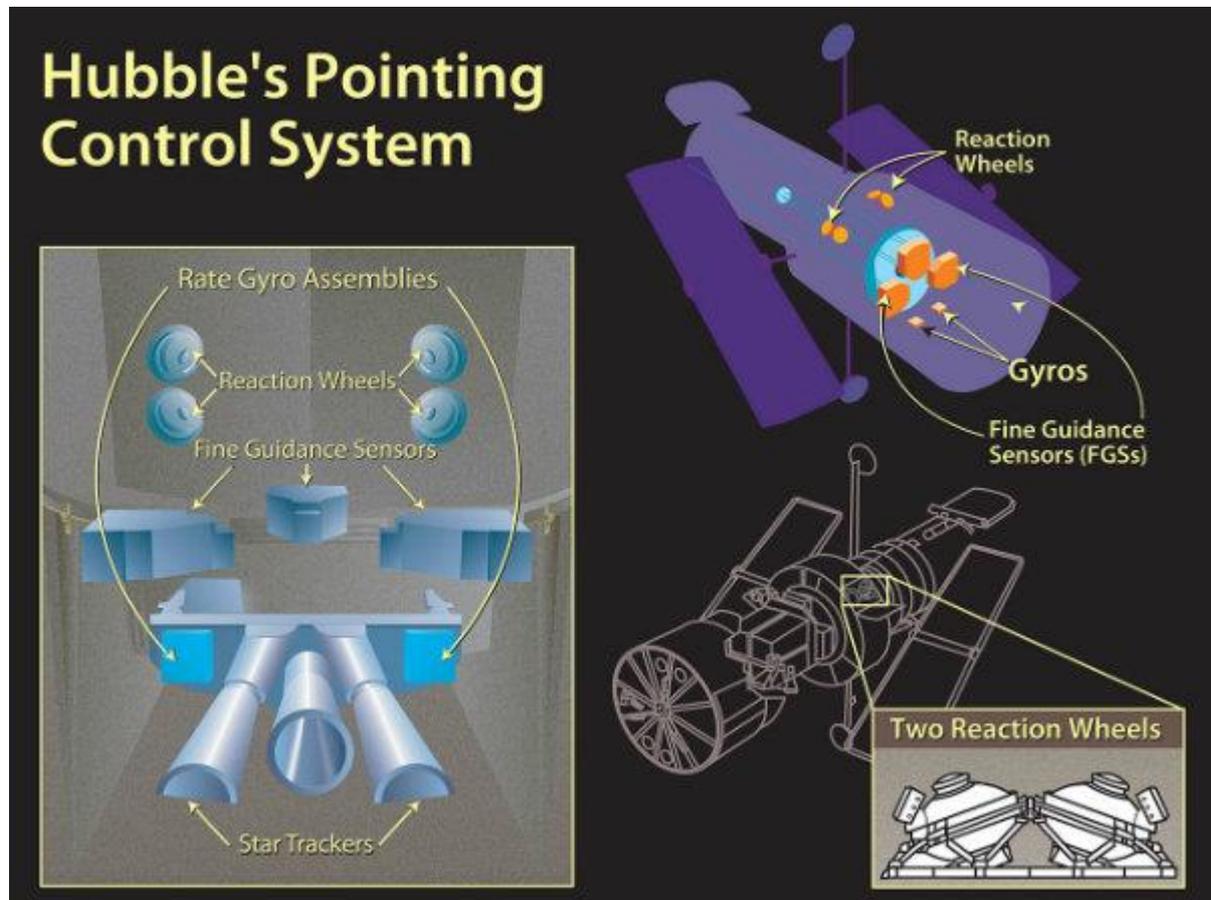
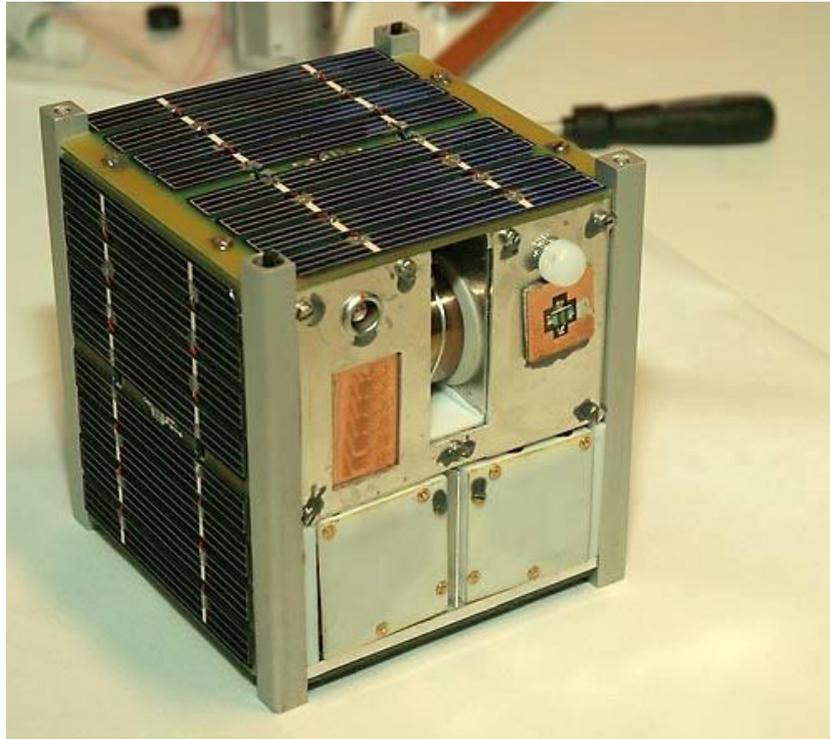


Figura 11 - Sistema de posicionamiento del telescopio Hubble

Utilizar ruedas de reacción en vez de propulsores de gas es muy conveniente en satélites con aplicaciones ópticas, ya que estos se pueden ver afectados por las partículas de gas que se desprenden al momento de ajustar la posición del satélite, además de que este método de estabilización es menos preciso.

Además, con las ruedas de reacción no se necesita tomar en cuenta el tamaño de los elementos agregados al cuerpo del satélite, por lo que se puede diseñar la nave de la forma óptima para la aplicación a desarrollar, sin limitaciones del sistema de posicionamiento. Esto ha servido para que sean implementadas en los nano satélites llamados "CubeSat", junto con barras de par, con el objetivo de detener el giro sin control que se produce en estos al ser lanzados al espacio.



*Figura 12 - Ejemplo de un CubeSat, el Ncube-2 noruego*

### 2.5.2 El Cubli

Una demostración muy interesante de la utilización de ruedas de reacción para controlar posición es el Cubli, un proyecto desarrollado desde el 2011 en el ETH Zurich (Instituto Federal Suizo de Tecnología de Zurich) por Michael Muehlebach y el Prof. Raffaello D'Andrea.

Es un cubo de 15cm de lado que contiene 3 ruedas de reacción posicionadas en 3 de sus caras de manera que quedan perpendiculares entre sí. Cada rueda puede ser frenada de manera instantánea para liberar el momento acumulado y lograr que el cubo pueda saltar, pudiendo saltar en una esquina y estabilizarse sobre la misma luego de alcanzar una posición vertical, además de controlar la dirección caída y así también conseguir una especie de caminata.



*Figura 13 - El Cubli balanceándose sobre una de sus esquinas*

El Cubli es una evolución de este trabajo de fin de máster, pasando de un péndulo invertido de 1 grado de libertad, a un péndulo de 3 grados de libertad. El primer prototipo del Cubli fue un péndulo invertido de 1gdl, similar al desarrollado en este trabajo de fin de máster.

## 2.6 MOTORES ELÉCTRICOS

Para hacer girar la rueda de reacción es necesario un motor eléctrico que sea capaz de girar a altas velocidades y tener una dinámica lo suficientemente rápida como para contrarrestar las perturbaciones de forma adecuada. Analizamos los diferentes tipos de motores eléctricos que podemos utilizar para lograr el objetivo.

### 2.6.1 Motores de Corriente Alterna

Estos motores funcionan con la misma corriente alterna que se utiliza para alimentar nuestros hogares, pero a diferentes niveles de tensión y varias fases. Se componen de un estátor en la parte externa, al que se le conecta la tensión, y un rotor en la parte interna, el cual puede ser bobinado o no, que está unido al eje que se conecta al sistema de interés para realizar un trabajo.

Estos motores pueden ser síncronos o asíncronos, dependiendo de su construcción:

- Los motores síncronos giran a una velocidad múltiplo de la frecuencia de alimentación y su rotor tiene imanes permanentes o electroimanes (rotor bobinado) para generar el campo magnético rotatorio
- los motores asíncronos o de inducción, por el contrario, giran a una velocidad menor a la frecuencia de alimentación y su rotor no posee ningún imán permanente o electroimán, se asemeja más a una jaula de ardilla. Puesto que en el rotor se induce un campo magnético que “sigue” al campo magnético estatórico, estando siempre detrás del mismo para poder generar un par.

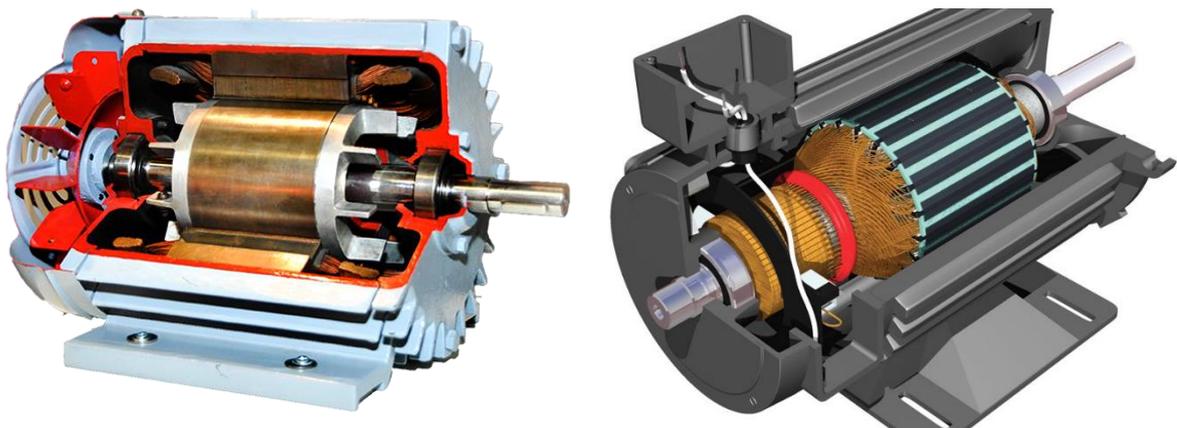


Figura 14 - Motor asíncrono de inducción (izquierda) y síncrono de rotor bobinado (derecha)

El principal problema de este tipo de motores es el control preciso de la velocidad, que se realiza variando la frecuencia de alimentación y la tensión para lograr mantener el par al variar la velocidad; esto lo hace un variador de frecuencia (VFD), pero estos son relativamente costosos.

Otro problema es que el precio de estos motores en tamaños reducidos es alto y al ser menos eficientes que los motores de corriente continua no producen tanto par para un motor de dimensiones similares.

Encima de esto no están hechos para trabajar a altas velocidades, mientras que existen motores de corriente continua que alcanza fácilmente las decenas de miles de revoluciones por minuto. Por estos motivos se descarta la posibilidad de utilizar este tipo de motores en el proyecto.

## 2.6.2 Motores de Corriente Continua

Los motores de corriente continua, como su nombre indica, trabajan con fuentes de corriente continuas a diferentes niveles de tensión según su construcción. Se componen igual de un rotor que puede tener imanes permanente bobinas y un estator con bobinas. Dependiendo del tipo de motor de continua, el rotor puede ser externo o interno y tener asociado un eje o no. Hablemos un poco de los distintos tipos de estos motores:

### Motor CC con escobillas

Son los motores más comunes hoy día y también los más baratos en la categoría de tamaños pequeños. Se componen de unos imanes permanentes o bobinas en el estator y un rotor bobinado, el cual genera un campo magnético al hacer circular corriente por los devanados y provoca que gire para alinear este C.M. con el del estator. Cada  $180^\circ$  debe de invertirse la polaridad del C.M. del rotor para mantener el movimiento; esto se logra con un conmutador, el cual tiene conectados los devanados del rotor de forma que cada vez que gire  $180^\circ$ , la dirección de la corriente se invierte y por tanto también la polaridad del C.M., provocando el giro.

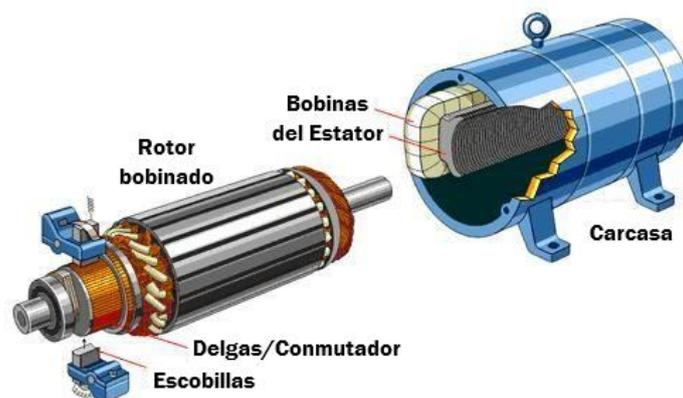


Figura 15 - Composición de un motor CC con escobillas

La velocidad se controla de manera sencilla variando la tensión del bobinado del rotor y se puede medir utilizando un encoder, tacómetro u otro sensor de rotación.

La desventaja principal es requiere unas escobillas que hacen contacto sobre el conmutador para alimentar los devanados del rotor, las cuales producen pérdidas, generan chispas y se desgastan con el tiempo, por lo que la vida útil de estos motores es limitada.

## Motor paso a paso convencional o de rotor magnético

Este tipo de motor no posee escobillas y divide la rotación del eje en una cantidad de pasos iguales, por lo que no necesita de un sensor de posición de retroalimentación y se puede realizar un control en lazo sin inconvenientes, siempre y cuando el motor sea seleccionado correctamente para la aplicación a realizar.

Se compone de un rotor de hierro con forma de engranaje y un estator con grupos de bobinas. Al energizar uno de estos grupos, se atraen los dientes del engranaje y se alinean con estas bobinas, dejando los dientes ligeramente desfasados del siguiente grupo de bobinas y, al apagarse el actual y encenderse el siguiente, provocan que se repita el proceso de alineación y desfase, logrando el giro del motor. A esta acción de energizar las bobinas de forma alternada se le llama paso. La posición del rotor se controla con la cantidad de pasos que se le aplican al motor y la velocidad con la frecuencia que se dan estos.

La mayoría de estos motores son de dos fases, aunque existen de mayor cantidad de fases, pero son más costosos. Los de fases pueden ser unipolares, bipolares o ambos a la vez, dependiendo de las conexiones que tengan los devanados.

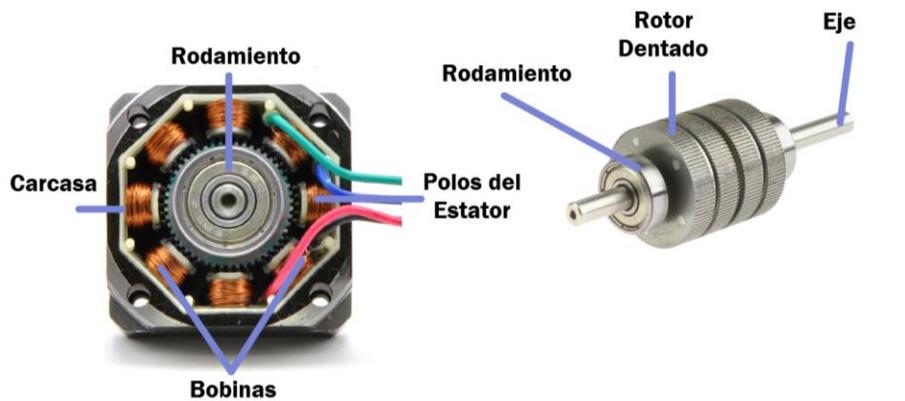


Figura 16 - Motor paso a paso con rotor magnético

Un motor unipolar puede tener bobinas con conexión central o dos bobinas unidas, pero siempre tres conexiones por fase. A la conexión central o el punto de unión de las bobinas se conecta la referencia y a los otros extremos la alimentación. Para lograr cambiar la dirección del movimiento se alimenta un extremo u otro de la bobina, por lo que la electrónica de control es muy sencilla y barata.

Un motor bipolar tiene una sola bobina por fase y requiere que se invierta el sentido de la corriente con el conmutador para realizar los cambios de dirección, haciendo un poco más costoso y complejo el sistema de control. La ventaja de esta configuración es que se utilizan mejor las bobinas, por lo que se necesita la mitad de estas, reduciendo el espacio y peso en estos.

## Motor paso a paso de reluctancia variable

Funcionan bajo el principio de que las líneas de flujo magnético siguen el camino de menor reluctancia (igual la corriente sigue el camino de menor resistencia eléctrica). El rotor y estator se van alineando de manera que la reluctancia sea siempre la mínima.

El rotor de estos motores es un tambor dentado de hierro no magnetizado, por lo que no poseen ningún par de parada. El estator se compone de varias bobinas que se van energizando en secuencia para provocar el movimiento del tambor. Estos motores tienen la desventaja de que, aunque pueden girar muy rápido, producen mucho más ruido que los otros motores paso a paso.

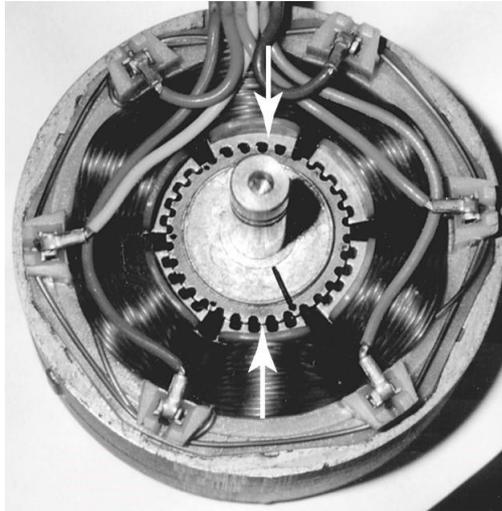


Figura 17 - Motor paso a paso de reluctancia variable

### Motor CC sin escobillas

A diferencia del motor con escobillas, al no tener componentes rozando entre ellos para conectar las bobinas del rotor, este es libre de mantenimiento y posee una eficiencia más elevada. En este los imanes permanentes se encuentran en el rotor y el bobinado en el estator. Por lo general los imanes son de tierras raras que producen un campo magnético más fuerte que los de ferrita utilizados generalmente en los motores con escobillas.

El movimiento del rotor se produce al alimentar un devanado del motor y alinearse el campo magnético del rotor con el generado por este. El proceso se repite en secuencia con los demás devanados para generar una rotación continua. El rotor de estos motores puede ser interno o externo y no necesariamente tener asociado un eje en el caso de los externos.



Figura 18 - Motor CC sin escobillas sensorizado

El control de estos motores es más complicado que el de escobillas, pues la conmutación se debe realizar mediante interruptores electrónicos y tiene que controlarse con precisión para lograr un movimiento suave. Se deben agregar sensores para conocer el ángulo en que se encuentra el rotor con el objetivo de no realizar una secuencia de conmutación a ciegas, ya que sin estos no es posible mover el motor a bajas velocidades sin que se produzca un movimiento a trozos.

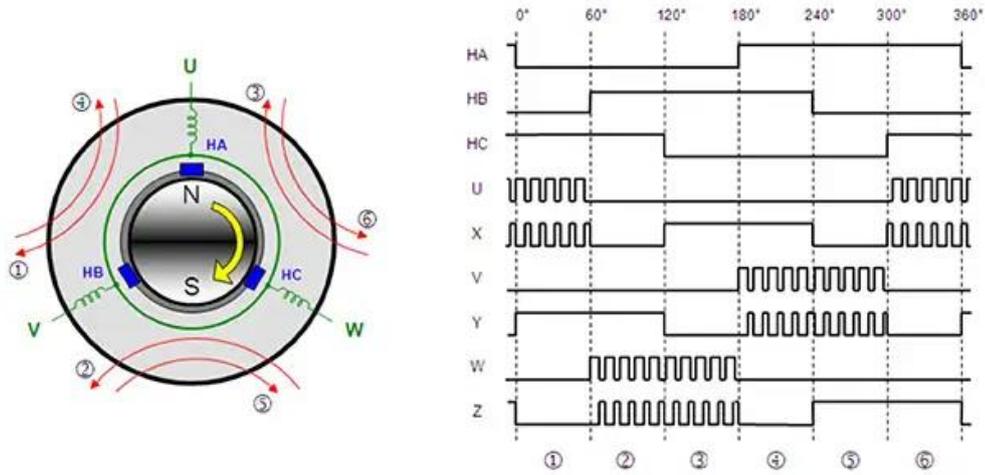


Figura 19 - Tabla de secuencia de conmutación de un motor sin escobillas con sensores

## 2.7 MODELO MATEMÁTICO DEL PÉNDULO INVERTIDO CON RUEDA DE REACCIÓN

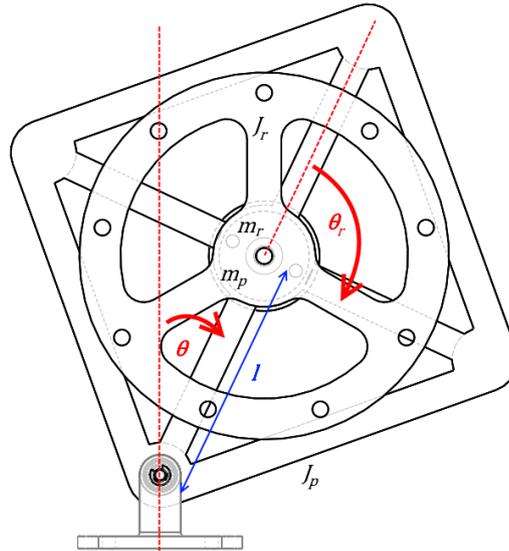


Figura 20 - Dibujo del péndulo invertido con rueda de reacción

Para realizar el modelo matemático partimos de los supuestos de que el rozamiento de viscoso del motor es despreciable y que su dinámica es bastante rápida. Además de esto, debemos identificar las variables de interés de análisis de nuestro modelo, inicialmente sin motor:

Variable	Descripción	Unidad de medida
$m_p$	Masa del péndulo	Kg
$m_r$	Masa de la rueda de reacción	Kg
$J_p$	Momento de inercia del péndulo respecto a su centro de masa	Kg*m <sup>2</sup>
$J_r$	Inercia de la rueda de reacción respecto a su centro de masa	Kg*m <sup>2</sup>
$l$	Distancia desde la base hasta el centro de masa del péndulo (Igual para el rotor)	m
$\theta$	Ángulo del péndulo respecto a la vertical	Radianes
$\theta_r$	Ángulo de la rueda de reacción	Radianes

Para obtener las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema se recurre al método del Lagrangiano, el cual nos permite trabajar con funciones escalares de energía en vez de vectores, simplificando el trabajo de resolución bastante. Las ecuaciones de movimiento se pueden expresar en base a una fuerza generalizada,  $\tau$ , en una coordenada generalizada  $q_i$ , quedando entonces las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

La energía cinética del sistema la representamos con la letra  $T$  y se define como la suma de la energía cinética del péndulo,  $T_p$ , y de la rueda,  $T_r$ . La energía cinética del péndulo depende de la

relación entre la masa y la inercia del péndulo con su velocidad de rotación, mientras que la de la rueda depende de la relación entre su masa e inercia con la velocidad de rotación del péndulo y también debe considerarse la relación entre la inercia de la rueda y su velocidad. Tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$T_p = \frac{1}{2}(m_p l^2 + J_p)\dot{\theta}^2$$

$$T_r = \frac{1}{2}[m_r l^2 \dot{\theta}^2 + J_r(\dot{\theta}_r + \dot{\theta})^2]$$

La energía potencial del sistema la representamos con la letra  $V$  y depende únicamente de la interacción de las masas del péndulo con la gravedad, respecto al punto pivote del sistema, por lo que se debe considerar únicamente la componente vertical en este caso. Se tiene entonces:

$$V = (m_p + m_r)lg \cos \theta$$

Con estas ecuaciones se aplica la definición del Lagrangiano,  $L$ :

$$L = \frac{1}{2}\{[(m_p + m_r)l^2 + J_p]\dot{\theta}^2 + J_r(\dot{\theta}_r + \dot{\theta})^2\} - (m_p + m_r)lg \cos \theta$$

Ahora se obtienen todas las derivadas parciales del sistema y tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = [(m_p + m_r)l^2 + J_p + J_r]\dot{\theta} + J_r \dot{\theta}_r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (m_p + m_r)lg \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_r} = J_r(\dot{\theta}_r + \dot{\theta})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_r} = 0$$

El par aplicado al sistema proviene del motor, siendo positivo sobre la rueda y con el efecto contrario sobre el péndulo. Para simplificar la resolución del problema, se desprecian las fuerzas de fricción y dinámica eléctrica del motor para obtener el par en base a la constante de torque del motor y la corriente aplicada a este:

$$\tau = kI$$

Agrupamos las siguientes variables para simplificar:

$$m = m_p + m_r ; J = ml^2 + J_p$$

Aplicando todo lo obtenido, las ecuaciones de Lagrange para las dos coordenadas generalizadas,  $\theta_r$  y  $\theta$  son:

$$J_r(\ddot{\theta}_r + \ddot{\theta}) = kI$$

$$(J + J_r)\ddot{\theta} + J_r \ddot{\theta}_r - mlg \sin \theta = -kI$$

Resolviendo ambas ecuaciones se obtiene:

$$\ddot{\theta}_r = \frac{kI(2J_r + J) - J_r g m \sin \theta}{J_r \cdot J} ; \ddot{\theta} = \frac{g m \sin \theta - 2kI}{J}$$

Agregando las pérdidas por fricción viscosa a las ecuaciones de Lagrange tenemos:

$$J_r(\ddot{\theta}_r + \ddot{\theta}) = kI - B_r\dot{\theta}_r$$

$$(J + J_r)\ddot{\theta} + J_r\ddot{\theta}_r - mlg \sin \theta = -kI - B_p\dot{\theta}$$

Resolviendo ambas ecuaciones se obtiene:

$$\ddot{\theta}_r = \frac{kI(2J_r + J) + J_r B_p \dot{\theta} - J_r g l m \sin \theta - B_r \dot{\theta}_r (J_r + J)}{J_r \cdot J}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g l m \sin \theta + B_r \dot{\theta}_r - 2kI - B_p \dot{\theta}}{J}$$

Es claro que si hacemos cero los coeficientes de fricción viscosa obtenemos las ecuaciones planteadas con anterioridad a estas.

### 2.7.1 Validación del modelo con Matlab

Es necesario confirmar que la toma de variables, los supuestos planteados y la aproximación realizada para obtener las ecuaciones de movimiento del péndulo producen un resultado correcto. Para esto tenemos primero que definir las entradas del sistema, variables de estado y las salidas. De entradas del sistema solo se tiene una, que sería la intensidad del motor, mientras que la salida sería el ángulo del péndulo con la vertical, ya que no nos interesa visualizar el ángulo de la rueda de reacción.

Las variables de estado podemos definir las como el ángulo del péndulo, la velocidad angular del péndulo, el ángulo de la rueda y la velocidad angular de la rueda. Podemos obtener entonces:

$$\mathbf{u} = I ; \quad \mathbf{x}_1 = \theta ; \quad \mathbf{x}_2 = \omega ; \quad \mathbf{x}_3 = \theta_r ; \quad \mathbf{x}_4 = \omega_r$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\omega}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{x_4} \\ \frac{g l m \sin x_1 + B_r x_4 - 2k u - B_p x_2}{m l^2 + J_p} \\ \frac{x_4}{x_4} \\ \frac{k u (2J_r + m l^2 + J_p) + J_r B_p x_2 - J_r g l m \sin x_1 - B_r x_4 (J_r + m l^2 + J_p)}{J_r (m l^2 + J_p)} \end{pmatrix}$$

Asignamos valores a las siguientes variables para simular con un modelo simple en Simulink:

- $g = \frac{9.81m}{s^2}$
- $m_p = 0.07kg$
- $m_r = 0.03kg$
- $l = 0.05m$
- $J_p = 6e^{-5}kgm^2$
- $J_r = 2e^{-6}kgm^2$
- $k = \frac{3e^{-2}Nm}{A}$
- $B_p = \frac{4e^{-5}Nm}{s}$
- $B_r = \frac{2e^{-6}Nm}{s}$

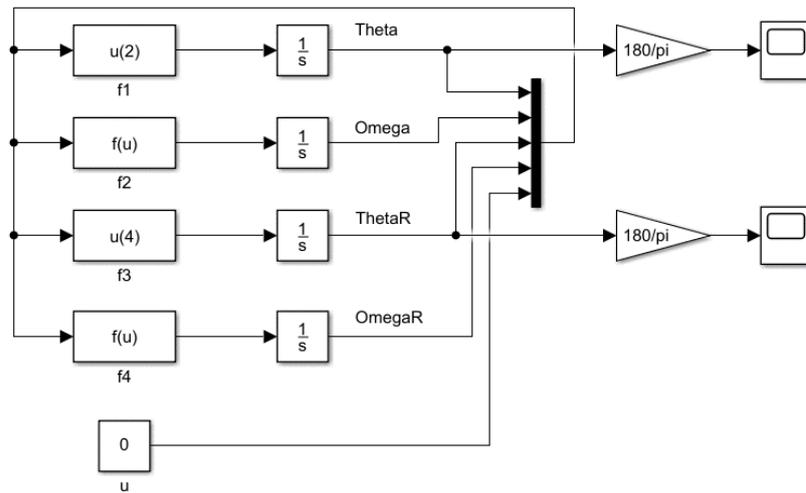


Figura 21 - Modelo de ecuaciones no lineales del péndulo

Se realizan dos simulaciones del péndulo con entrada de intensidad nula, para simular el comportamiento libre de este, que debe ser oscilatorio y, en el caso de fricción nula, sin pérdida de amplitud. La primera simulación es partiendo de una posición inicial de  $1e-5$  radianes, cercana a cero pero que le permita oscilar, con los coeficientes de fricción viscosa nulos; la segunda es partiendo del mismo punto, pero esta vez con los valores indicados anteriormente de los coeficientes de fricción viscosa.

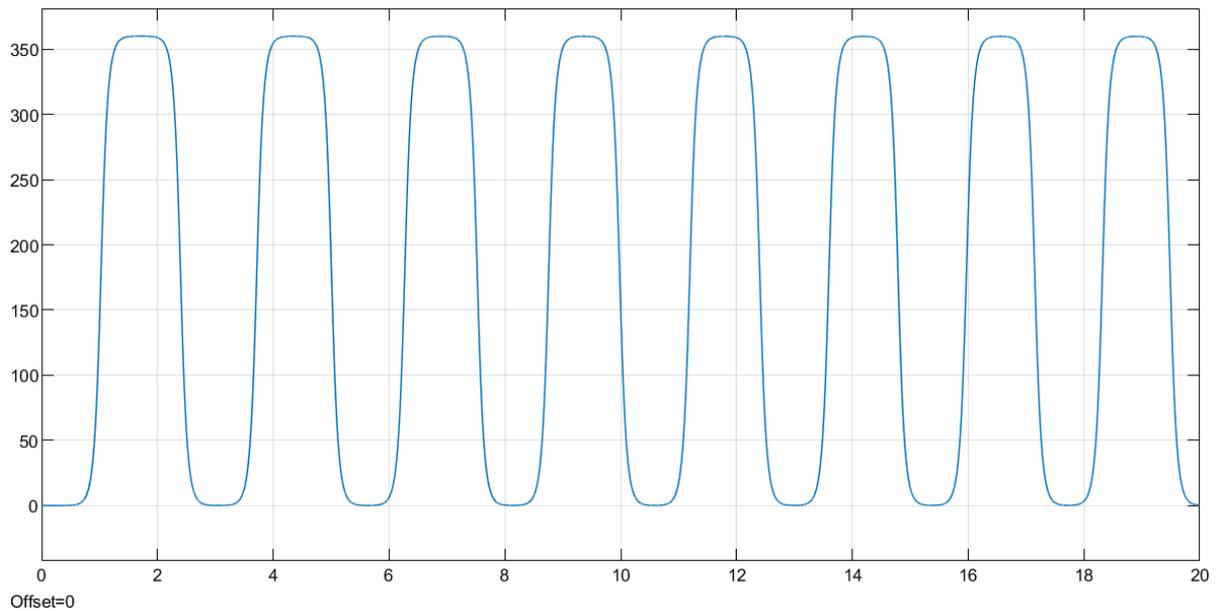


Figura 22 - Validación del modelo matemático a partir de casi cero grados sin fricción

Se observa como el péndulo mantiene una posición cercana a la vertical y lentamente va cayendo hasta pasar de  $10^{\circ}$  de diferencia respecto al cero, momento en el cual cambia rápidamente hasta elevarse nuevamente y alcanzar  $10^{\circ}$  de diferencia, para acercarse a cero y oscilar hacia el otro lado, repitiendo el proceso sin perder energía, lo cual es de esperarse ya que no existe fricción.

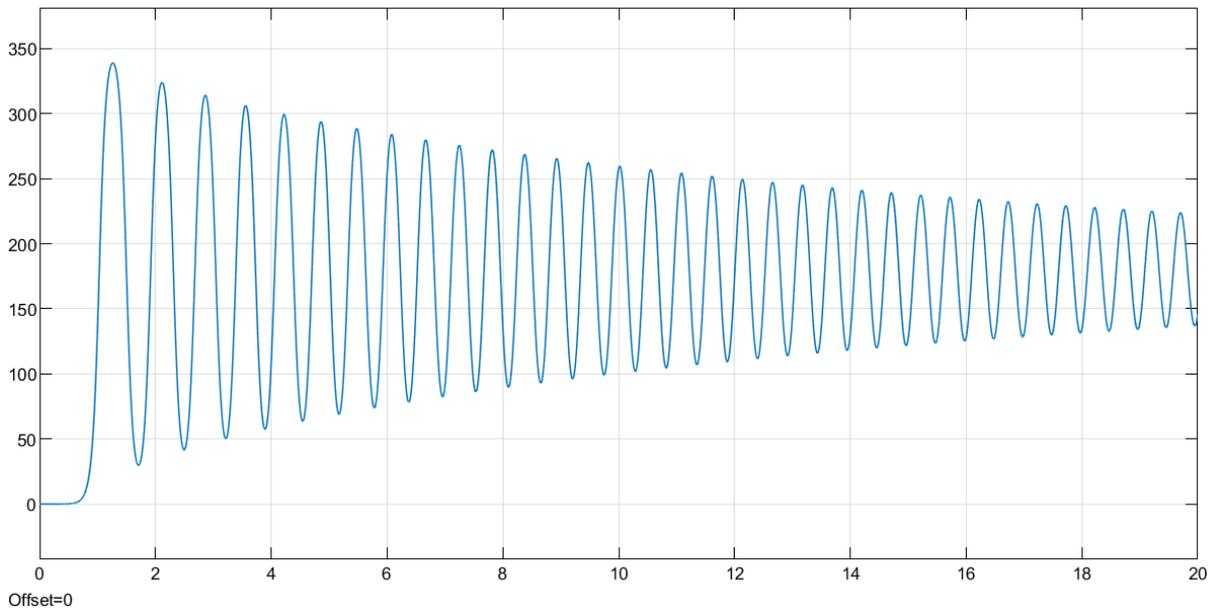


Figura 23 - Validación del modelo matemático con fricción

Para este caso, se observa un comportamiento inicial similar al caso sin fricción, pero no se alcanza la amplitud máxima y en las oscilaciones siguientes va decreciendo cada vez más, ya que va perdiendo energía por la fricción.

Con estas pruebas se puede concluir que las aproximaciones adoptadas para modelar matemáticamente el péndulo son correctas, por lo que se puede utilizar este para diseñar un sistema de control que debería funcionar adecuadamente para nuestro prototipo, siempre y cuando se realicen los ajustes pertinentes.

## 2.8 LINEALIZACIÓN

Para realizar la linealización se procede a obtener las derivadas parciales de las funciones:

$$\begin{pmatrix} \partial \dot{x}_1 \\ \partial \dot{x}_2 \\ \partial \dot{x}_3 \\ \partial \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \frac{glm \cos x_{10} \partial x_1 + B_r \partial x_4 - 2k \partial u - B_p \partial x_2}{ml^2 + J_p} \\ \frac{\partial x_4}{\partial x_1} \frac{k(2J_r + ml^2 + J_p) \partial u + J_r B_p \partial x_2 - J_r glm \cos x_{10} \partial x_1 - B_r (J_r + ml^2 + J_p) \partial x_4}{J_r (ml^2 + J_p)} \end{pmatrix}$$

$$\partial \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{glm \cos x_{10}}{ml^2 + J_p} & \frac{-B_p}{ml^2 + J_p} & 0 & \frac{0}{B_r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-glm \cos x_{10}}{ml^2 + J_p} & \frac{B_p}{ml^2 + J_p} & 0 & \frac{-B_r (J_r + ml^2 + J_p)}{J_r (ml^2 + J_p)} \end{pmatrix} \partial \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2k}{ml^2 + J_p} \\ 0 \\ \frac{k(2J_r + ml^2 + J_p)}{J_r (ml^2 + J_p)} \end{pmatrix} \partial u$$

Iguamos a cero en el sistema de ecuaciones original y evaluamos con el punto de funcionamiento definido por una entrada nula, lo que sería  $u = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{20} \\ \frac{glm \sin x_{10} + B_r x_{40} - B_p x_{20}}{ml^2 + J_p} \\ x_{40} \\ \frac{J_r B_p x_{20} - J_r glm \sin x_{10} - B_r x_{40} (J_r + ml^2 + J_p)}{J_r (ml^2 + J_p)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ - \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución final tomando como punto de funcionamiento  $x_{10} = \theta = 0^\circ$ ;  $x_{30} = 0^\circ$  sería:

$$\partial \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{glm}{ml^2 + J_p} & \frac{-B_p}{ml^2 + J_p} & 0 & \frac{B_r}{ml^2 + J_p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-glm}{ml^2 + J_p} & \frac{B_p}{ml^2 + J_p} & 0 & \frac{-B_r (J_r + ml^2 + J_p)}{J_r (ml^2 + J_p)} \end{pmatrix} \partial \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2k}{ml^2 + J_p} \\ 0 \\ \frac{k(2J_r + ml^2 + J_p)}{J_r (ml^2 + J_p)} \end{pmatrix} \partial u$$

Como sólo nos interesa saber la posición del péndulo, la ecuación de salida queda como:

$$\partial v = (\partial x_1) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \partial \underline{x} + (0) \partial u$$

Se observa que la tercera variable de estado, correspondiente al ángulo de la rueda de reacción, no influye en la dinámica del sistema, por lo que es posible reducir el orden de este si la eliminamos. La cuarta variable de estado pasaría a ser la tercera:

$$\partial \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{glm}{ml^2 + J_p} & \frac{-B_p}{ml^2 + J_p} & \frac{B_r}{ml^2 + J_p} \\ \frac{-glm}{ml^2 + J_p} & \frac{B_p}{ml^2 + J_p} & \frac{-B_r (J_r + ml^2 + J_p)}{J_r (ml^2 + J_p)} \end{pmatrix} \partial \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2k}{ml^2 + J_p} \\ \frac{k(2J_r + ml^2 + J_p)}{J_r (ml^2 + J_p)} \end{pmatrix} \partial u$$

## 2.9 EL CONTROL PID

El control Proporcional Integral y Derivativo es el tipo o algoritmo de control más utilizado en el ambiente industrial, por su fácil implementación y funcionamiento robusto en una gran cantidad de procesos y condiciones de operación distintas.

Este algoritmo combina la acción de tres tipos de control en una, con una ganancia o coeficiente independiente para cada uno de estos, los cuales se ajustan hasta conseguir la respuesta óptima para el proceso a controlar. Este algoritmo se utiliza en sistemas de lazo cerrado, por lo que es imprescindible tener una retroalimentación de la variable de proceso a controlar.

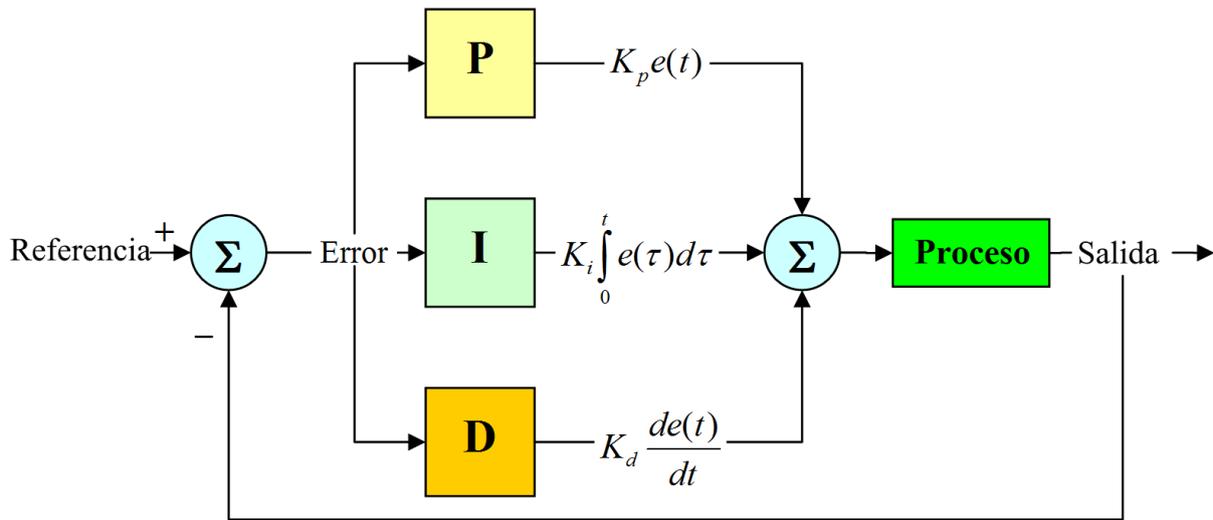


Figura 24 - Representacion del PID paralelo

Variando la constante proporcional se puede variar la respuesta del control sobre la diferencia entre la señal de referencia y la retroalimentación del proceso. Aumentar esta ganancia demasiado tiene como consecuencia que se produzcan oscilaciones en el proceso, llegando a la desestabilización cuando se aumenta todavía más esta.

La constante integral tiene el efecto de eliminar el error en estado estacionario del sistema, ya que se acumula el término del error en el tiempo. La respuesta integral aumentará siempre que exista un error, por mínimo que sea, hasta que este se haga cero. Aumentar demasiado esta ganancia también provoca oscilaciones, como en el caso de la ganancia proporcional y también retrasa el tiempo de subida y de establecimiento de referencia del proceso.

Al variarse la constante derivativa se reducen los efectos de cambios rápidos en la variable del proceso, ya que actúa sobre la razón de cambio del error. Esta respuesta es entonces muy sensible al ruido y por lo general se mantiene en un valor pequeño para que el controlador no responda con grandes cambios en la salida en presencia de ruido. La ganancia derivativa reduce la sobreoscilación del sistema y reduce el tiempo de establecimiento.

### 3 MODELADO TRIDIMENSIONAL Y SIMULACIÓN

Previo a la construcción del péndulo es necesario transformar las ideas de la forma final, material de construcción y dimensiones factibles para el funcionamiento en un diseño con herramienta CAD 3D, para modificar las veces que sea necesaria la idea antes de proceder a construir el prototipo, analizando los posibles problemas y evitando recaer en la prueba y error de los componentes reales.

#### 3.1 DISEÑO DE CAD 3D CON SOLIDWORKS

Para diseñar la rueda de reacción con un peso reducido, pero sin comprometer la capacidad inercial de la misma, partimos de las fórmulas de momento de inercia de un disco sólido y un anillo, siendo estas:

- Disco sólido:  $I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$
- Anillo:  $I = m \cdot r^2$

Obviamente el anillo tiene el doble de momento de inercia que el disco sólido para un mismo radio y masas distintas, por lo que optamos por una figura similar para la rueda, no pudiendo ser idéntica por necesitar elementos para enlazar la rueda con el motor. El diseño final consiste en un anillo exterior, unido a un disco central con un agujero para el eje del motor eléctrico y con agujeros a los cuales podemos adicionar pequeñas pesas, en caso de necesitar aumentar la masa de la rueda para variar el momento de inercia, así sea necesario durante las pruebas, sin tener que modificar la forma de la rueda. El renderizado de la rueda queda como sigue:

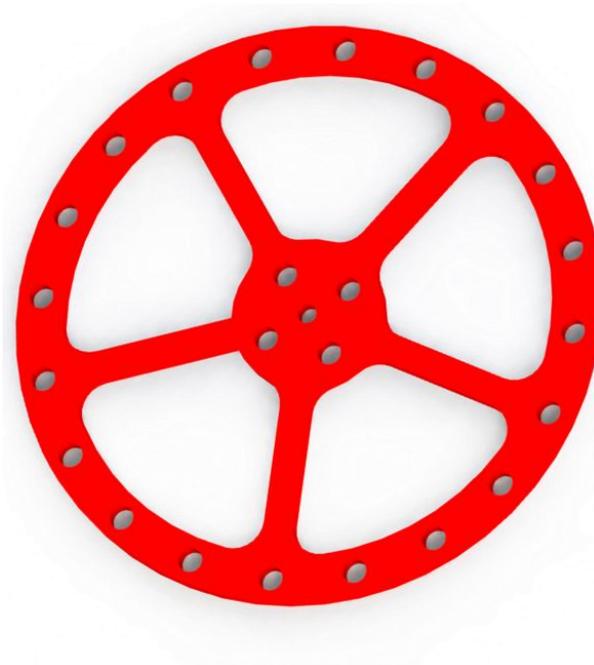
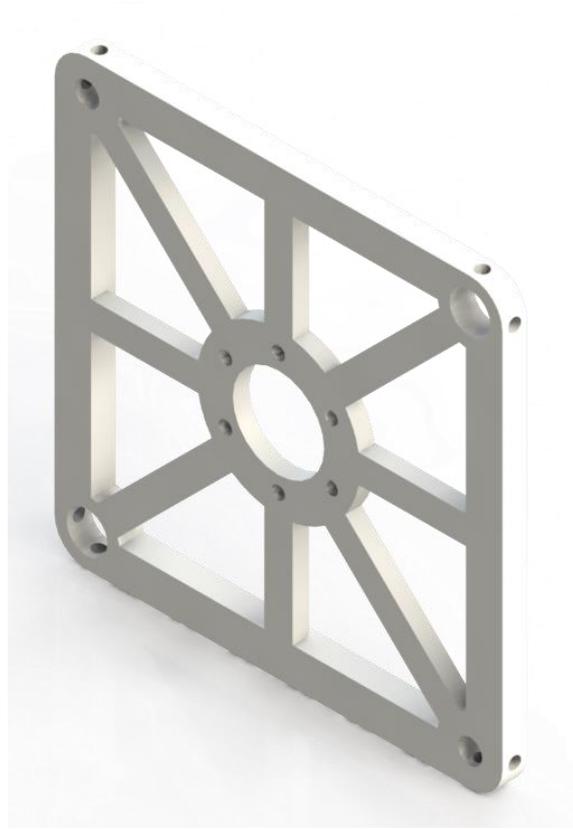


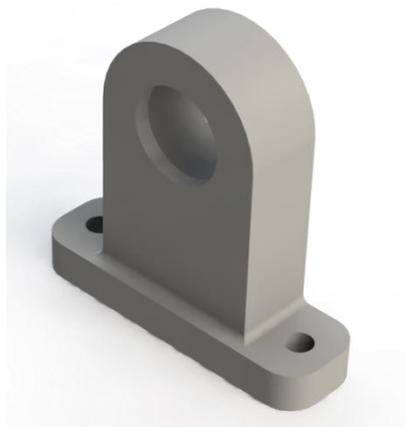
Figura 25 - Rueda de reacción con agujeros para pesas

Para fijar el motor en una posición central y poder unir el eje de este con la rueda se ha diseñado un recuadro con un agujero de diámetro mayor al del eje, así como dos agujeros a ambos lados para fijar el motor al cuadro. En la parte inferior se ha hecho un agujero de mayor diámetro, para acomodar los rodamientos de bolas que le permitirán girar libremente sobre el eje, con una fricción bastante reducida.



*Figura 26 - Cuadro de montaje del motor y la rueda de reacción*

Finalmente, se ha diseñado una base para acomodar un rodamiento, de la cual se utilizarán dos para soportar el eje de rotación del péndulo. La base cuenta con dos agujeros para fijarla a una mesa con tornillos y un diámetro exterior distinto en un extremo para evitar que se salga el rodamiento al insertarlo en este.



*Figura 27 - Base del eje del péndulo invertido*

Otra base se ha diseñado para soportar el potenciómetro que funcionará de sensor de posición angular para el péndulo. Esta base es similar a la de los rodamientos, pero de menor espesor, ya que el potenciómetro lleva una rosca para apretarlo a la base con una tuerca y asegurar su posición.



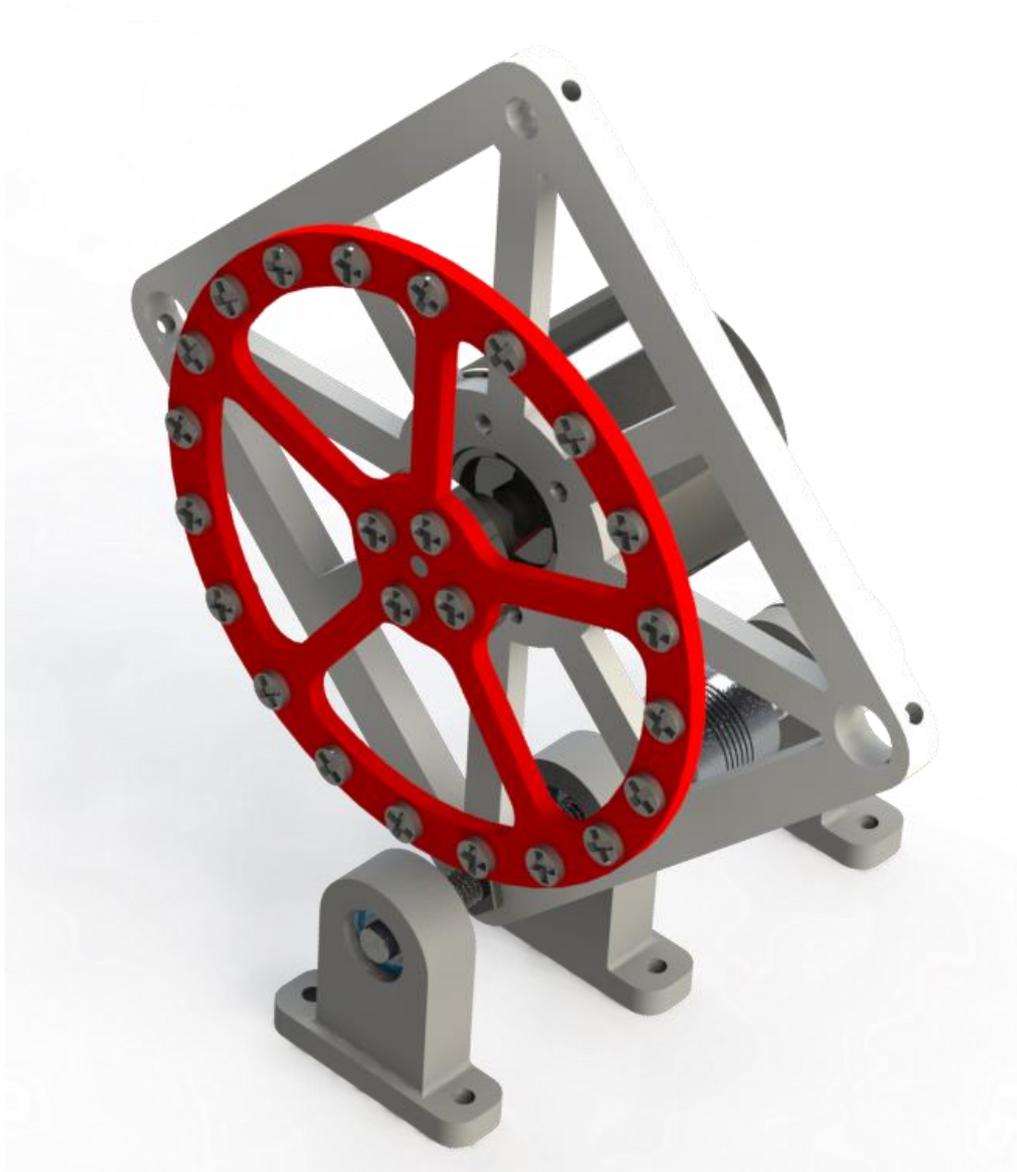
*Figura 28 - Base del sensor de posición angular del péndulo*

El eje es una varilla roscada de 6mm, con los extremos redondeados. Esta tiene la ventaja frente a un cilindro, de que se puede roscar directamente en el agujero del recuadro del péndulo o sujetarse al mismo con tuercas, sin necesidad de prisioneros o anillos de retención.



*Figura 29 - Eje de rotación del péndulo*

Al realizar el ensamble y agregar unos tornillos en los agujeros de la rueda de reacción, que funcionarían como las pesas para manipular el momento de inercia, y renderizando todo el modelo, tenemos el resultado siguiente:



*Figura 30 - Render del péndulo con todos los elementos y pesas*

A este modelo podemos realizarle un simple análisis de masa para tener la ubicación de su centro de masa, masa total y momentos de inercia de este (Que no deben confundirse con el de la rueda en sí). Esto también sirve a la hora de realizar la impresión 3D de los componentes de la cantidad de material mínima que se ha de gastar para construirlos.

El análisis de masa de la rueda de reacción con sus componentes añadidos es el que más interesa en sí, puesto que este se puede utilizar para las simulaciones y para mejorar el desempeño del sistema controlado.

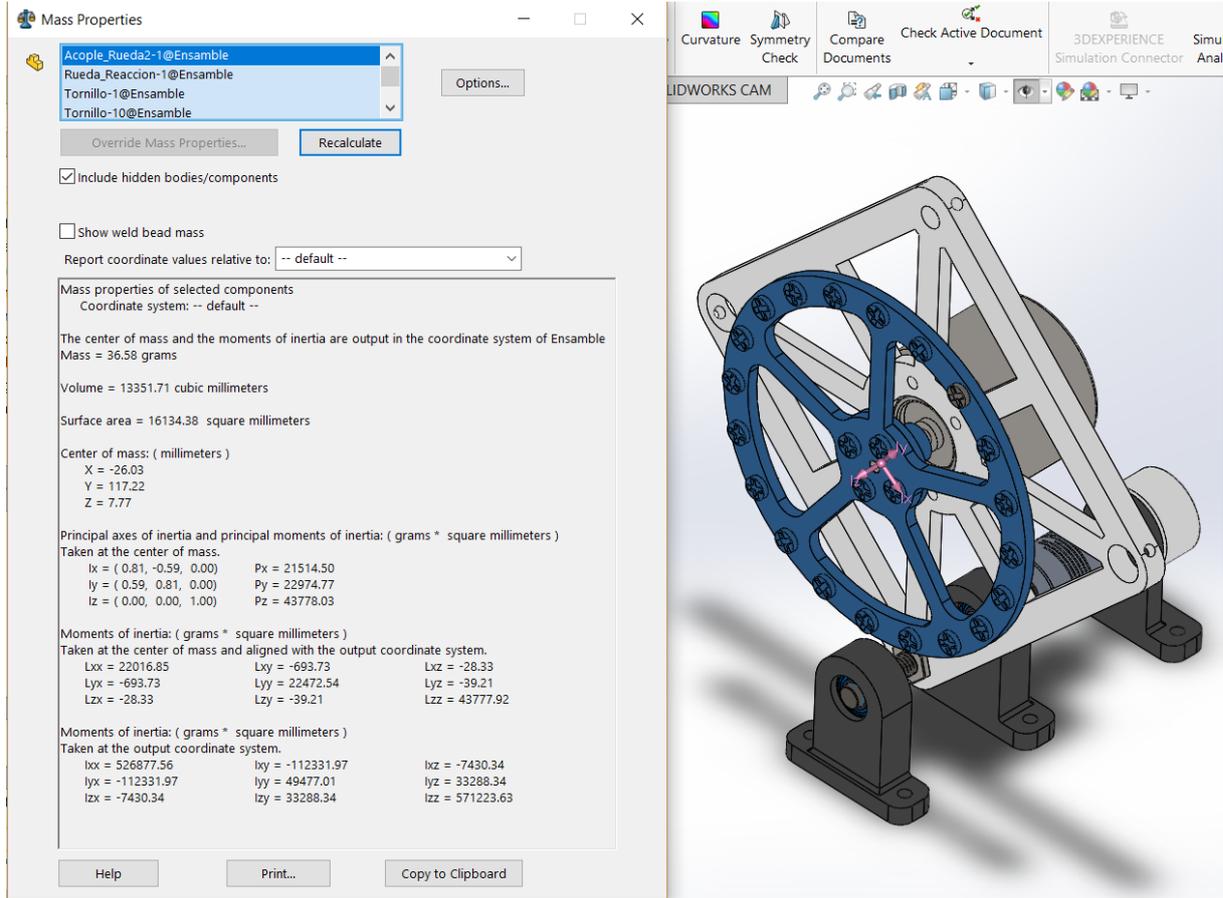


Figura 31 - Propiedades de masa del ensamblaje de la rueda con su acople y tornillería

### 3.2 DISEÑO EN SIMULINK MEDIANTE SIMULINK Y SIMSCAPE MULTIBODY

Para realizar el experimento de control del péndulo se ha construido un modelo en Simulink, utilizando las herramientas del paquete de librerías “Simscape Multibody”. Con dichas herramientas se introducen los modelos diseñados en Solidworks directamente con los bloques “File Solid” y se realizan las conexiones entre estos mediante juntas y transformaciones geométricas, simulando la física del producto final.

Luego de introducir y conectar todas las partes del modelo, se le agregan las fuerzas internas de rozamiento y se habilitan las entradas y salidas que sirven para monitorear y controlar las variables de interés del sistema. En el caso de estudio se requiere controlar únicamente la rotación de la rueda de reacción, la cual es provista por el motor eléctrico y se necesita, como mínimo, la retroalimentación del ángulo del péndulo, que es calculada por Simulink automáticamente durante la simulación.

Con todos estos elementos se completa el modelo base para realizar los ajustes del sistema de control, con el objetivo de lograr el seguimiento de referencias. Adicionalmente, es necesario agregar una entrada de perturbaciones al sistema, para simular fuerzas externas como el viento o una colisión de un objeto con el péndulo. Estas fuerzas se aplican en el extremo superior del recuadro del péndulo.

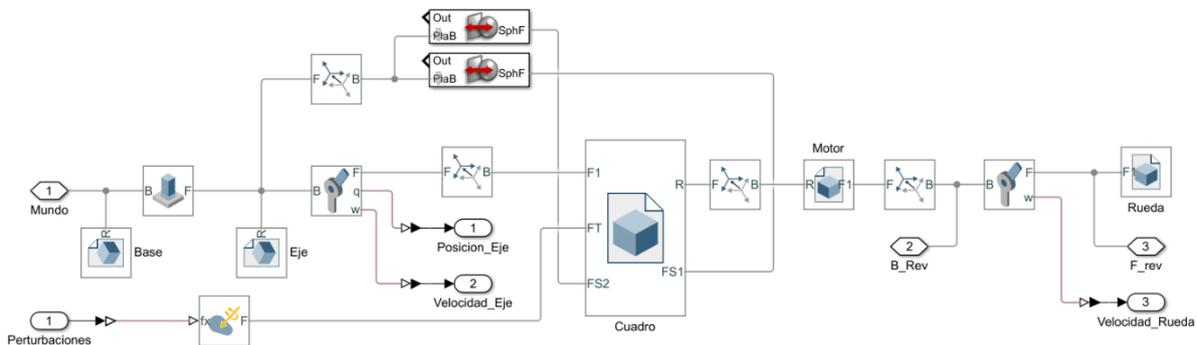


Figura 32 - Bloques del modelo en Simulink del péndulo invertido con rueda de reacción

Utilizando la librería de fuerzas de contactos disponible en la web de intercambio de archivos de Mathworks se modela un suelo imaginario para evitar que el péndulo caiga por debajo de la horizontal, simulando la condición de estar montado encima de una mesa. La interacción entre el suelo virtual y el recuadro del péndulo se realiza modelando un contacto entre esfera y plano, por lo que se han ubicado en el recuadro dos esferas, una en cada lado, de un diámetro suficiente como para que su superficie sobresalga de la estructura del recuadro y hagan contacto con el suelo virtual al caer este.

El modelo presentado en el explorador de mecánica de Matlab difiere del modelo final de SolidWorks debido a que no se necesitan tantos detalles para la simulación del comportamiento frente a la construcción del prototipo, y se ha dejado el primer diseño de la base de soporte del péndulo, además de no incluirse el potenciómetro.

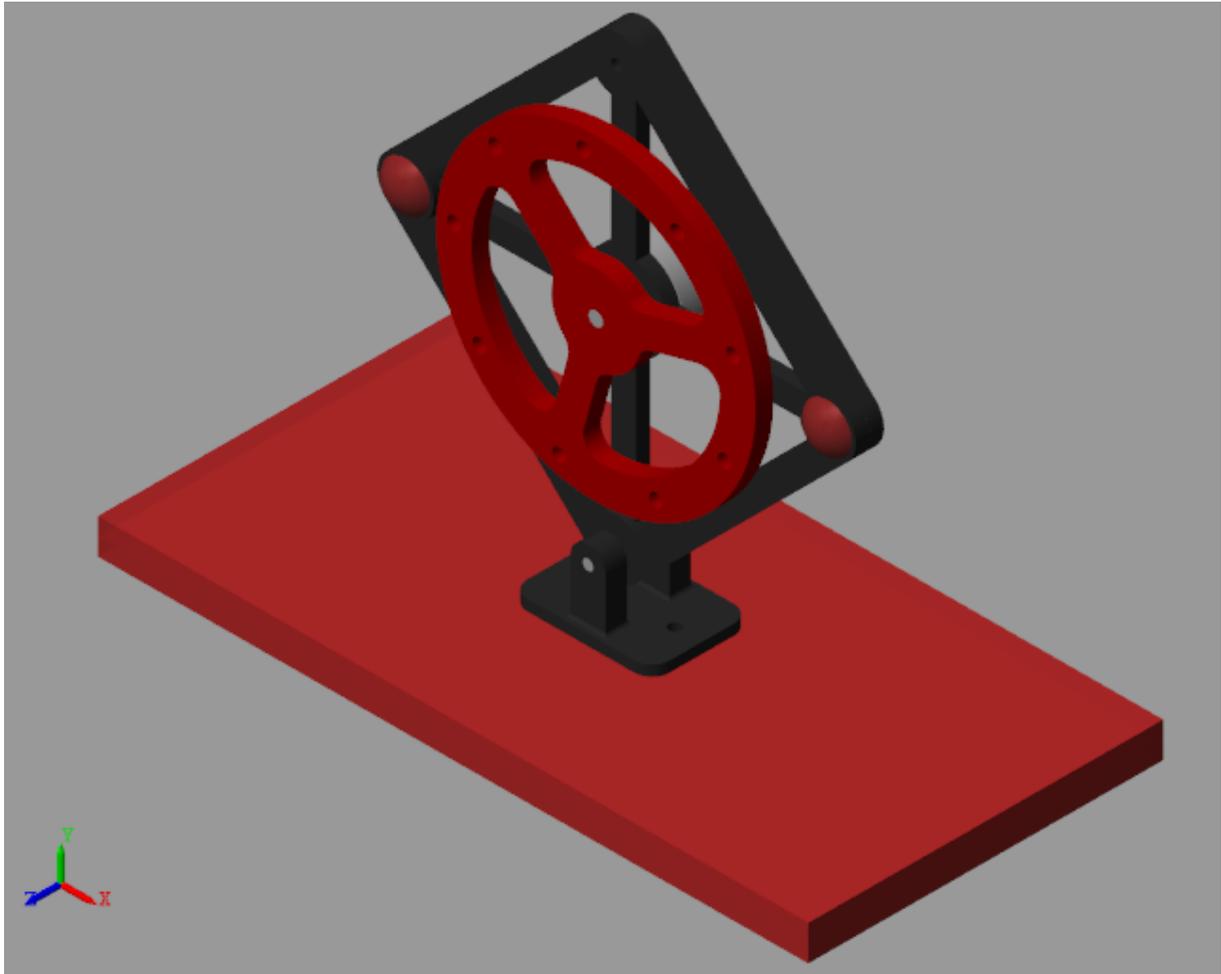


Figura 33 - Vista del modelo en el Mechanics Explorer de Matlab con el suelo virtual

El motor de corriente continua utilizado para girar la rueda de reacción se modela con el bloque “DC Motor” de la librería de Simscape. Este modelo permite la simulación de las características eléctricas y de par del motor utilizando parámetros que se pueden obtener fácilmente, en caso de no ser provistos por el fabricante del motor a utilizar. Para la simulación se utilizan las características del motor de corriente continua del fabricante Mabuchi, modelo RS-385PH-17120:

Tabla 1 - Parámetros del motor RS-385PH-17120

Descripción	Valor
<b>Par de bloqueo</b>	73.8 mNm
<b>Par nominal</b>	10.1 mNm
<b>Tensión máxima</b>	35 V
<b>Tensión nominal</b>	23.5 V
<b>Velocidad en vacío</b>	8600 rpm
<b>Intensidad de consumo en vacío</b>	0.076 A
<b>Tensión en vacío</b>	23.5 V
<b>Masa</b>	82 gr

Se ha enlazado la junta de revolución con el motor mediante un bloque de interface de la librería “Multiphysics”, con el objetivo reproducir correctamente los efectos físicos de la rueda sobre el movimiento del motor. La ventaja de este bloque es que no se necesita agregar una conexión de actuación sobre la junta, ya que todo se realiza a través de interacciones de fuerzas entre los marcos de referencia de base y seguidor.

La interfaz motor-rueda utiliza los marcos de referencia de base y seguidor de la junta rotacional para introducir la fuerza que produce el motor, induciendo un movimiento sobre la junta y capturando las fuerzas que ejerce la rueda al producirse dicho movimiento.

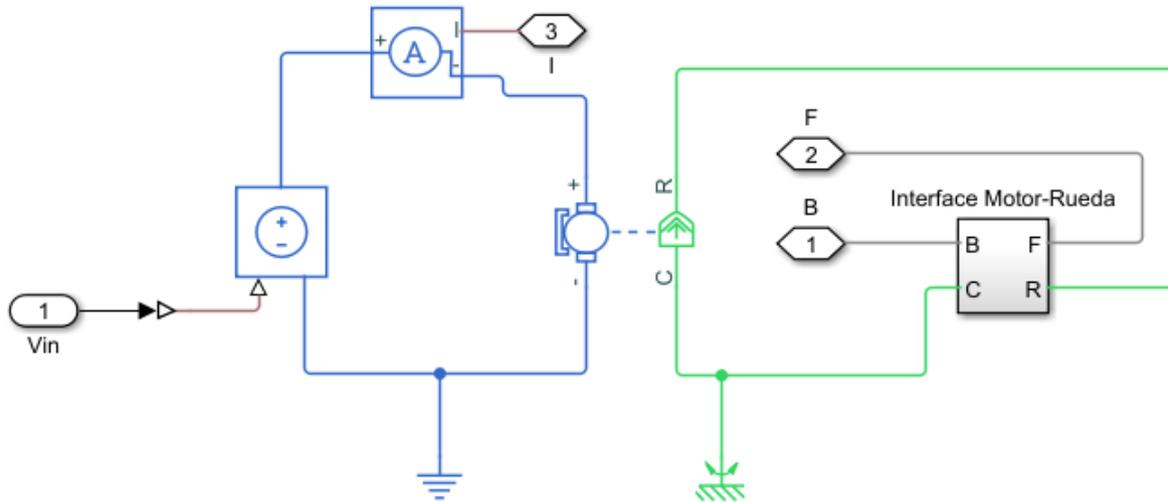


Figura 34 - Bloque del motor de corriente continua

El bloque de control también cuenta con un interruptor de encendido/apagado para poder deshabilitar la salida de la acción de control y dejar el sistema sin ninguna acción del motor, para poder observar el comportamiento de este cuando no se intenta controlar.

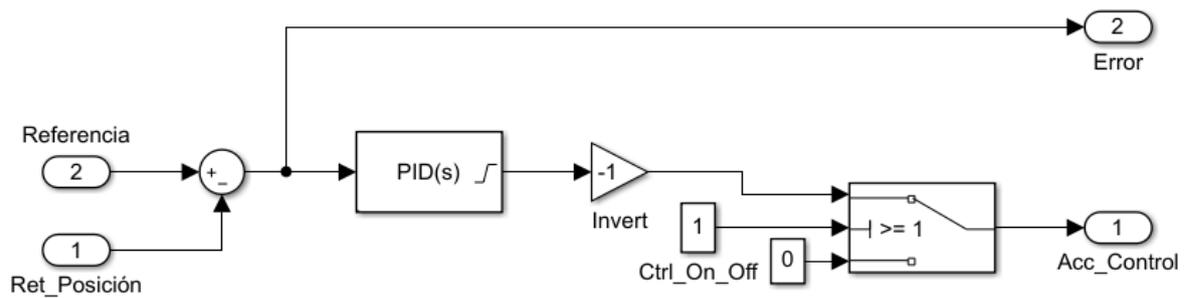


Figura 35 - Bloque de Control del modelo

Agregados ya todos los elementos base se interconectan entre sí, quedando de la forma mostrada en la figura siguiente:

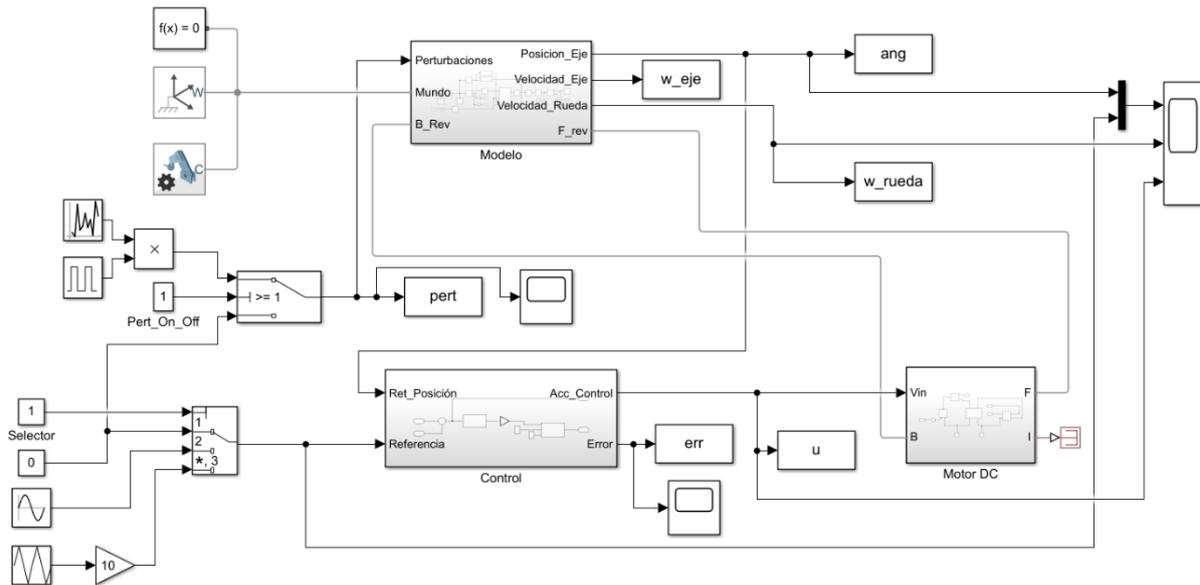


Figura 36 - Conjunto de bloques del modelo de Simulink

Por último, para forzar que la simulación corra en tiempo real y poder realizar modificaciones, tanto a las constantes del controlador como a las referencias durante la misma hay que activar el control de ritmo, el cual ya viene incluido en la versión R2018b de Matlab, por lo que no es necesario utilizar ninguna librería adicional.

### 3.3 MÉTODOS DE CONTROL

#### 3.3.1 Control PID paralelo de 1GDL:

Es el control más sencillo y rápido que se puede implementar para controlar el péndulo, ya que en el caso de la simulación con un modelo de sólidos no se requiere obtener un modelo matemático del sistema, además de ser ajustado fácilmente.

La metodología seguida para el ajuste es la variación de la constante proporcional ( $K_p$ ) hasta lograr una respuesta con el menor tiempo de establecimiento posible que permita alcanzar una referencia de escalón, sin provocar sobreoscilaciones de más de un 5% ni provocar una respuesta oscilatoria o inestable. Luego de estos se procede a ajustar la constante integral ( $K_i$ ) hasta eliminar el error de estado estacionario, que durante la simulación se ha identificado que es prácticamente cero para referencias de escalón, por lo que se mantiene esta constante en cero, ya que puede traer inestabilidades en el sistema de control. Finalmente, se aumenta la constante diferencial para amortiguar las sobreoscilaciones y mejorar la velocidad de respuesta del sistema.

El escalón de referencia se introduce colocando la posición inicial del sistema con un desfase de una cantidad de grados e iniciando la simulación.

### 3.3.2 Control híbrido para levantamiento del péndulo:

Para realizar el levantamiento con la rueda de reacción se debe hacer girar esta hasta cierta velocidad, utilizando una rampa de aceleración en el motor y luego detenerla forzosamente para liberar el momento angular acumulado y provocar que el péndulo rote en la dirección en la que estaba girando, lográndose con esto un control en lazo abierto.

Al terminar este proceso y el péndulo estar en un ángulo cercano al cero, se procede a cambiar al control en lazo cerrado que se ha diseñado anteriormente para mantener el péndulo en posición vertical. Se ha utilizado un control PID de 1GDL para mantener el péndulo en posición vertical, además de una retroalimentación de velocidad con integrador para reducir la velocidad de la rueda lentamente luego de haber alcanzado la posición.

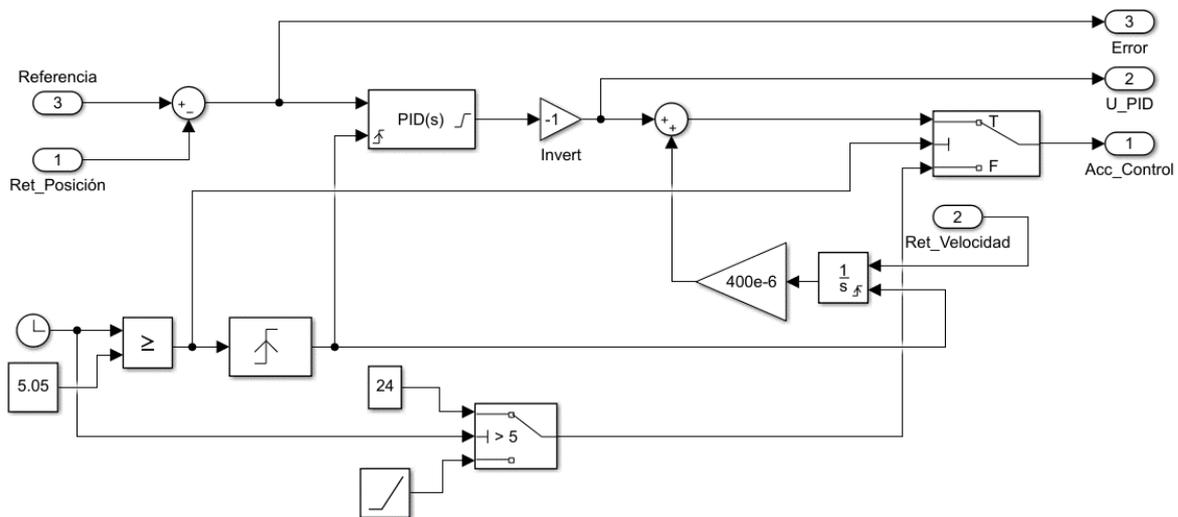


Figura 37 - Bloque de control para el levantamiento

Controlando la amplitud y duración de la rampa se controla que tanto se levanta el péndulo, que depende de la velocidad alcanzada por la rueda y que tan rápido se pueda detener esta. Para acelerar la parada del motor se hace un cambio de tensión al terminar la rampa, pasando entonces a activar el controlador PID.

A diferencia del modelo utilizado en los otros escenarios simulados, en este no se han introducido perturbaciones, ni referencias distintas, quedando simplificado como se muestra en la figura siguiente.

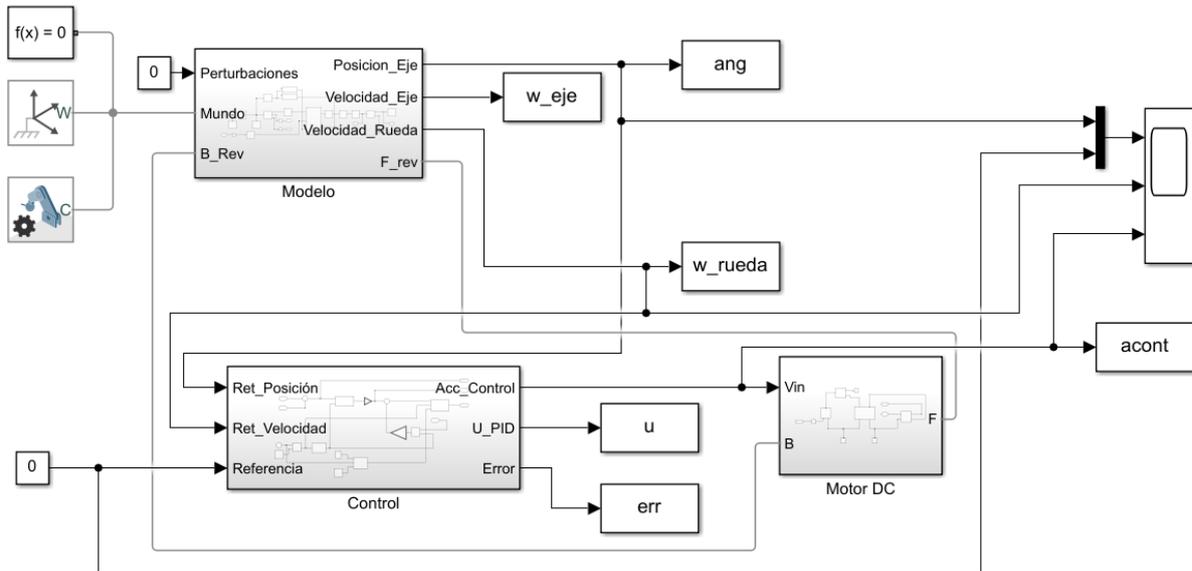


Figura 38 - Modelo de Simulink del escenario de levantamiento

### 3.4 SIMULACIÓN DE DIFERENTES ESCENARIOS Y RESULTADOS

Para probar la respuesta del péndulo y la efectividad del controlador, se han definido varios escenarios de simulación, con el objetivo de ajustar los parámetros del regulador. Los escenarios son los siguientes:

Seguimiento de referencias senoidales con una amplitud de giro del péndulo de  $12^\circ$  respecto a la vertical, a una frecuencia de  $0,2\text{Hz}$ .

Seguimiento de referencias triangulares con una amplitud de giro del péndulo de  $12^\circ$  respecto a la vertical, a una frecuencia de  $0,2\text{Hz}$ .

Aseguramiento de la posición vertical de  $0^\circ$  frente a perturbaciones pulsantes, con dirección y de amplitud aleatorias, las cuales se aplican como un vector de fuerza perpendicular al plano del cuadro, en el extremo superior de este. El objetivo es simular pequeñas perturbaciones por el viento y golpes aplicados al péndulo.

Levantamiento del péndulo desde una posición de caída o tocando el suelo y aseguramiento de la posición vertical luego de alcanzar un ángulo cercano a cero. Este escenario sólo se ha probado con el control PID paralelo de 1GDL, ya que este se necesita luego de levantar el péndulo y únicamente mantiene la posición vertical del mismo.

Se controla el movimiento de la rueda actuando directamente sobre la posición angular de la junta rotatoria que une el bloque del sólido del motor con el de la rueda, por lo que la rueda girará a la misma velocidad que el motor. La retroalimentación de los efectos físicos de la rueda se logran con el bloque de interfaz entre los marcos de referencia de la junta y el bloque del motor DC, asegurando un comportamiento más cercano a la realidad.

### 3.4.1 Seguimiento de referencia senoidal

Se parte de una posición de equilibrio de cero grados e inmediatamente se aplica la referencia senoidal. Ajustando los valores de las constantes del control PID se ha logrado un seguimiento de las referencias con resultados bastante buenos, quedando un error de posición de 8.33% o de 1º de diferencia entre la posición angular del péndulo y la referencia para ambos casos.

Los resultados muestran que no se produce saturación ni de la rueda de reacción ni de la acción de control. Si se observa que, al inicio, partiendo de la posición vertical y con la rueda detenida, se producen unas pequeñas oscilaciones de la acción de control, las cuales no vuelven a presentarse nuevamente en el paso por cero con el ajuste de las constantes realizado.

Se aprecia ligeramente, que, durante el primer y segundo periodo de seguimiento de la referencia, el error de posición es un poco mayor que en los periodos consecutivos, llegando a estabilizarse en el valor antes indicado. Además de esto, la velocidad de la rueda no vuelve al valor inicial de cero después de pasar el primer ciclo, con un mínimo de unas 76rpm.

La velocidad máxima observada para la referencia de 12º es de 6824, con una tensión de 22.97V.

Finalmente, las constantes del regulador PID quedan:  $K_p = 10$ ,  $K_i = 10$  y  $K_d = 0.3$ . Al aumentar los valores de  $K_p$  y  $K_d$  por encima de los mostrados se introducen oscilaciones no deseadas en el sistema.

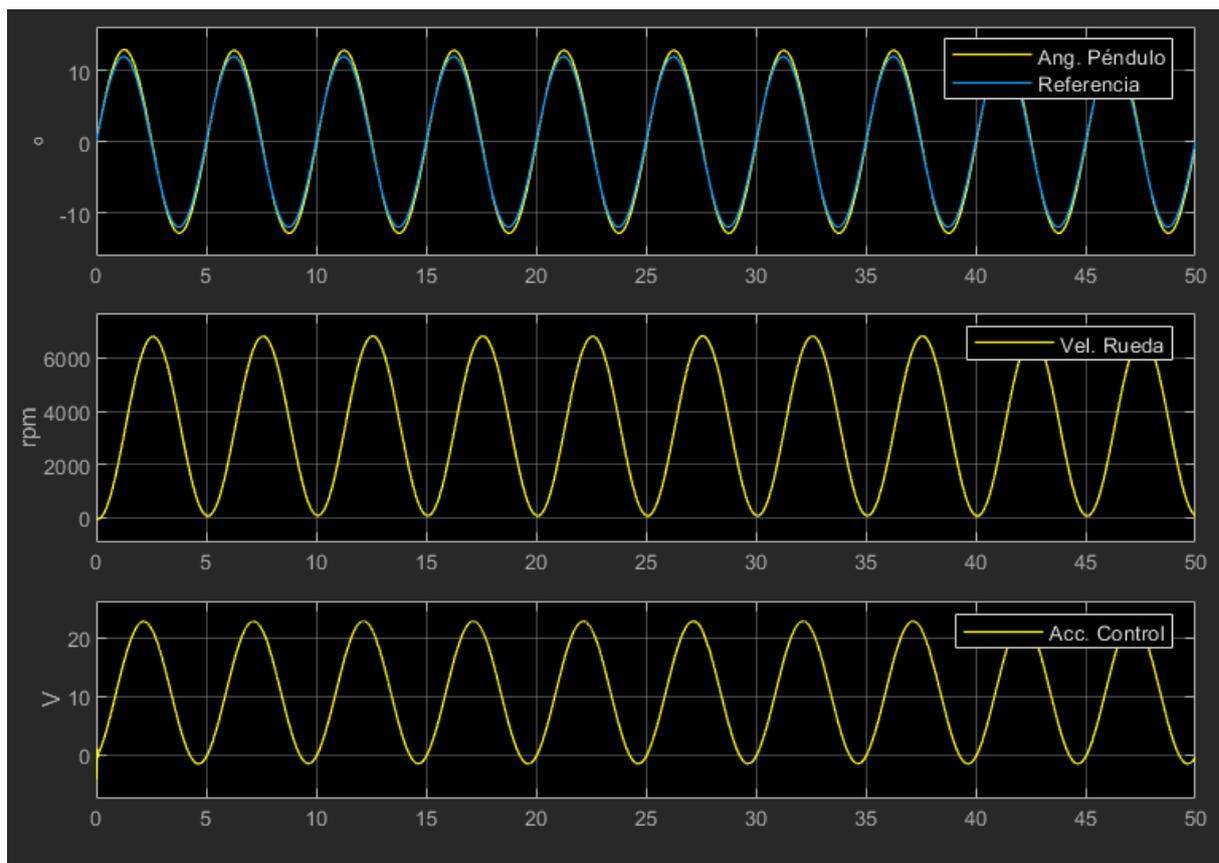


Figura 39 - Seguimiento de referencia senoidal de amplitud de 10º

### 3.4.2 Seguimiento de referencia triangular:

Al igual que con la referencia senoidal, se parte de una posición de equilibrio de cero grados y se aplica la señal triangular de referencia. Se han utilizado los mismos valores de las constantes del regulador PID que en el caso de la referencia senoidal.

Los resultados del seguimiento en este caso son un poco peores que en el de la senoidal, quedando un error de posición de 9.08% o de 1.09°. La señal de referencia no se produce saturación de acción de control o velocidad de giro.

En el inicio de la simulación no se producen oscilaciones, pero se observan pequeños saltos en la acción de control cuando se produce la inversión de la pendiente de la señal triangular. Se aprecia el mismo comportamiento que en la referencia senoidal de mayor error al inicio del seguimiento, así como una velocidad de giro que no retorna a cero.

La velocidad máxima observada para la referencia la referencia de 12° es de 5353, con una tensión de 18.65V.

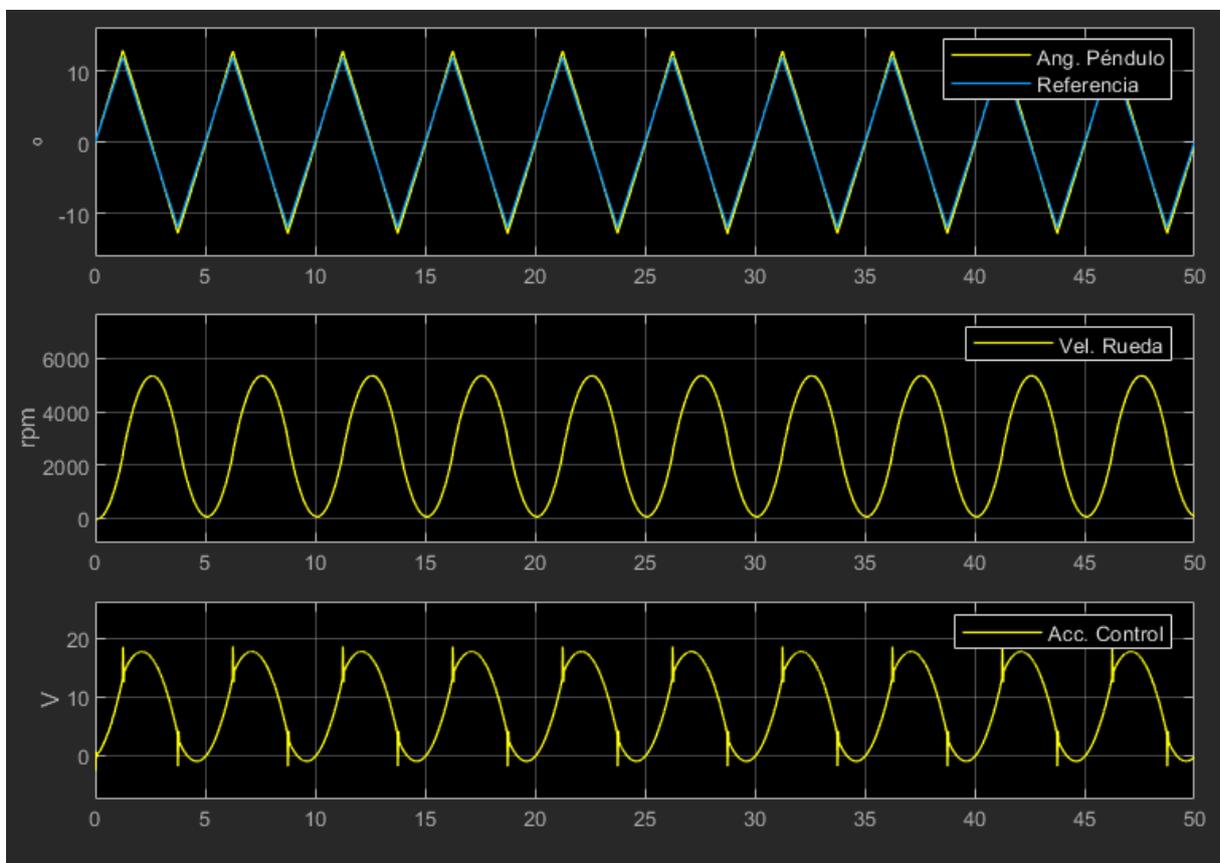


Figura 40 - Seguimiento de referencia triangular de amplitud de 10°

### 3.4.3 Rechazo de perturbaciones en posición vertical:

Siguiendo las mismas condiciones iniciales de los demás experimentos, partimos de cero y aplicamos cada 5 segundos las perturbaciones aleatorias. Debido a que estamos probando un control continuo y no discreto, el rechazo se produce al instante, gracias a la respuesta rápida del motor, y no se le permite al péndulo sobrepasar los  $9.16^\circ$  de desviación de la posición vertical.

Se presentan pequeñas oscilaciones en la posición angular del péndulo al contrarrestar las perturbaciones, producto del efecto rápido de la acción que intenta recuperar la posición y la desaparición súbita de las perturbaciones, ya que estas se introducen.

Se observa como la rueda mantiene su velocidad luego de realizarse la recuperación de la referencia, así como el aumento o reducción de esta, dependiendo de si las perturbaciones que se aplican a continuación son en el mismo sentido o en el opuesto, pudiendo producirse en algún momento la saturación de la rueda y caída del péndulo.

Al aumentar la fuerza aplicada también puede producirse la saturación de la rueda de reacción y caída del péndulo, necesitando realizar un levantamiento para recuperar la posición de referencia de  $0^\circ$ , ya no se puede aumentar más la velocidad para contrarrestar el cambio de posición.

Los valores del regulador se han mantenido como en el escenario del seguimiento de la referencia senoidal. Se cumplen los requisitos planteados inicialmente para el regulador.

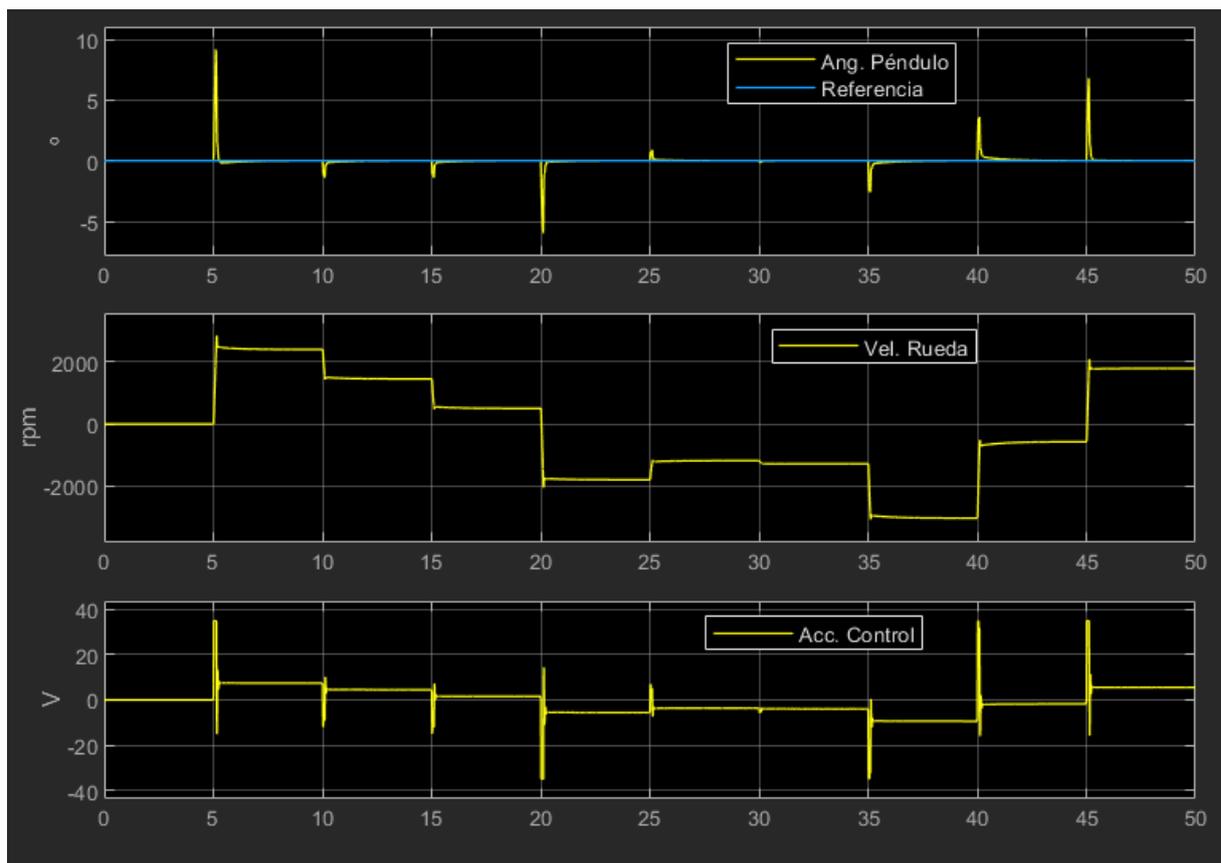


Figura 41 - Rechazo de perturbaciones aleatorias en ambas direcciones

### 3.4.4 Levantamiento del péndulo:

Esta simulación se ha realizado a través de los siguientes pasos:

1. Con una acción de control inicial nula se deja caer el péndulo desde la posición de  $0^\circ$ , quedando en reposo en el suelo virtual a unos  $56^\circ$  respecto a la vertical
2. Utilizando con una rampa de  $-3V$  durante 5 segundos se hace girar la rueda hasta alcanzar  $-5126\text{rpm}$ , con una tensión aplicada al motor de  $-15V$
3. A la marca de los 5 segundos se cambia la tensión aplicada a  $24V$  para forzar una reducción significativa de la velocidad del motor y liberar el momento angular acumulado por la rueda de reacción
4. A la marca de 5.05 segundos se hace el cambio del control en lazo abierto por el de lazo cerrado para realizar el seguimiento de la referencia de  $0^\circ$

Durante la simulación se observó que al aumentar la velocidad por encima de  $5131\text{rpm}$  y detener el motor el péndulo sobrepasaba el punto de funcionamiento de  $0^\circ$  y se cae al otro lado, para terminar en un ángulo de reposo de alrededor de  $-56^\circ$ , por lo que se estableció esta velocidad como el límite a alcanzar con la rampa de tensión aplicada.

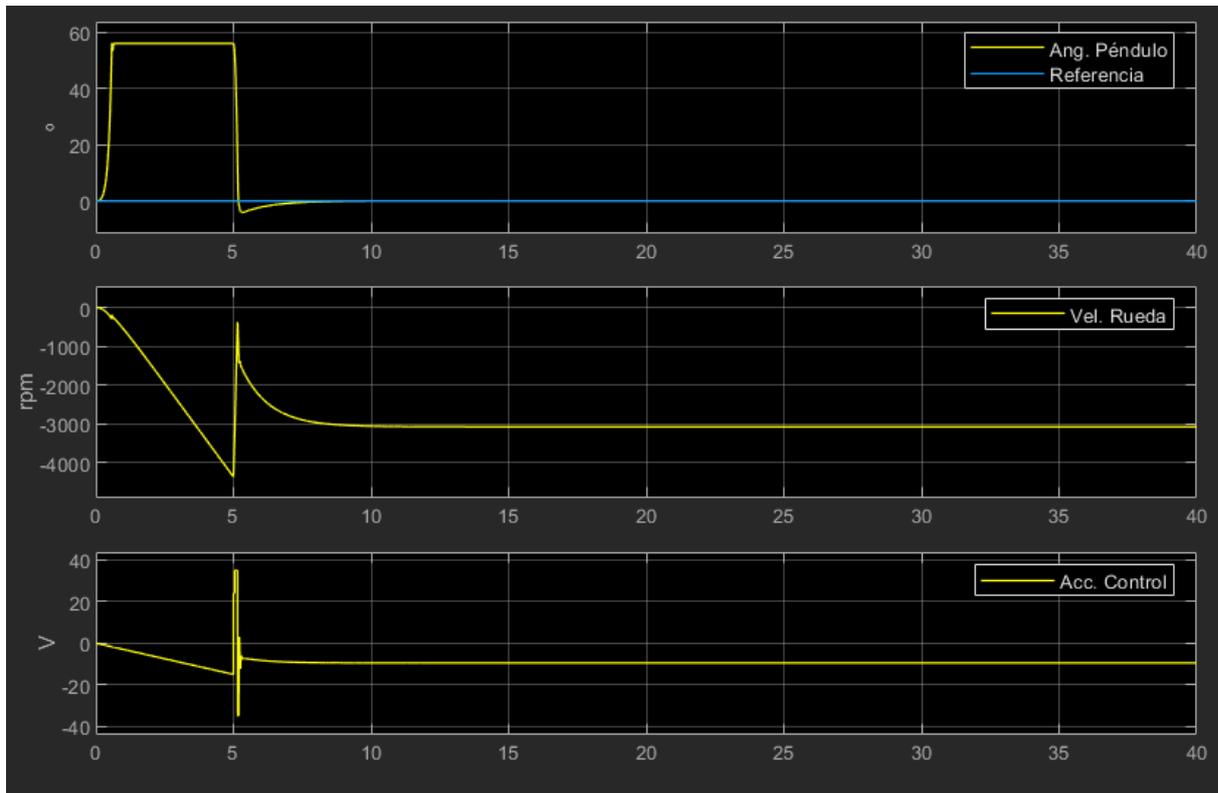


Figura 42 - Levantamiento y seguimiento de la referencia vertical

En la gráfica podemos observar cómo gradualmente sube la velocidad del motor hasta alcanzar la deseada, momento en el cual aplicamos la tensión inversa para desacelerar rápidamente y luego cambiar al control PID para establecer la posición vertical. Se aprecia un comportamiento oscilatorio de la acción de control y un momento de saturación al instante del cambio del control en lazo abierto al de lazo cerrado.

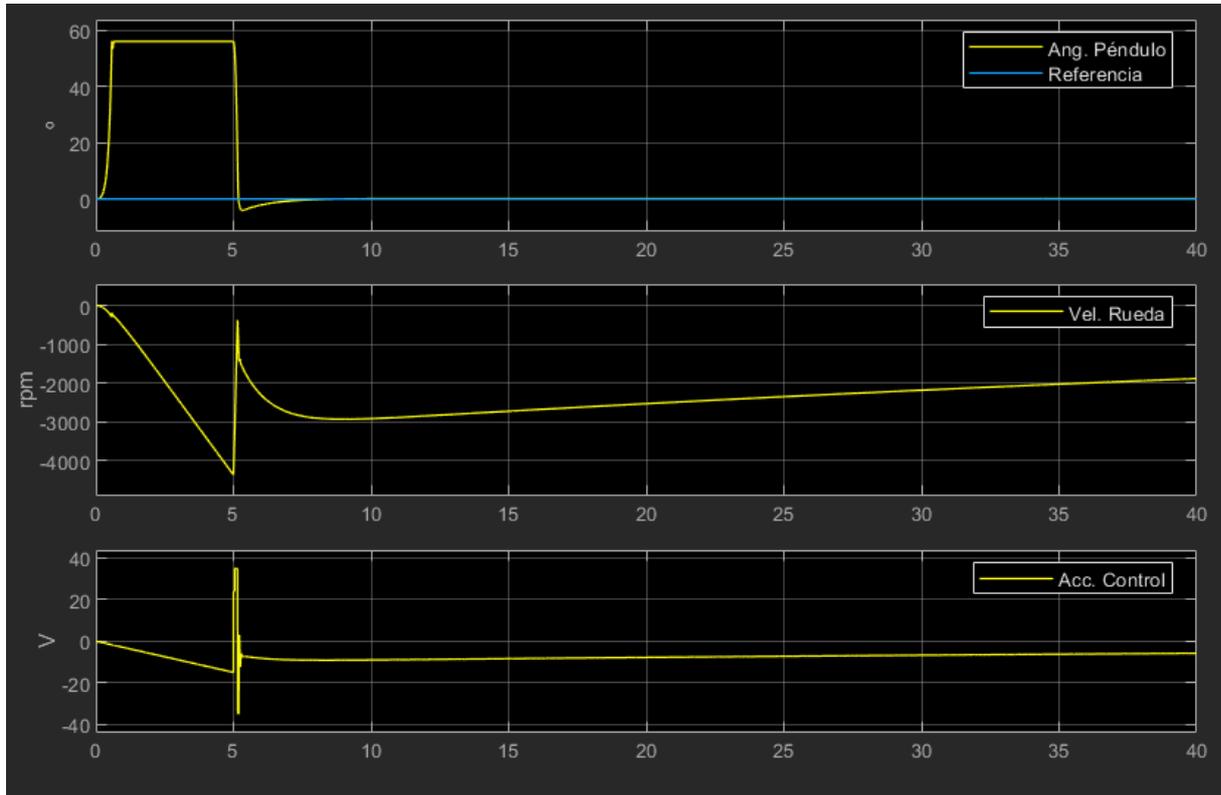


Figura 43 - Levantamiento y seguimiento con corrección de velocidad

Ya establecida la posición de  $0^\circ$ , una reducción gradual de la velocidad de la rueda proporcionada por el integrador retroalimentado con la velocidad de esta se observa, hasta llegar casi a detenerse la rueda, siempre manteniendo la posición deseada y sin provocar inestabilidad del sistema. De esta forma se evita que la rueda se mantenga girando todo el tiempo para mantener la posición.

## 4 IMPLEMENTACIÓN REAL

### 4.1 SELECCIÓN DE COMPONENTES ELÉCTRICOS

#### 4.1.1 Motor eléctrico:

El motor que se ha seleccionado es el motor sin escobillas 24H677 del fabricante NIDEC, el cual incorpora su propio controlador de velocidad, el cual recibe una entrada de PWM (modulación de ancho de pulso) como referencia de velocidad y retroalimenta la lectura de velocidad a través de un tacómetro de drenaje abierto.

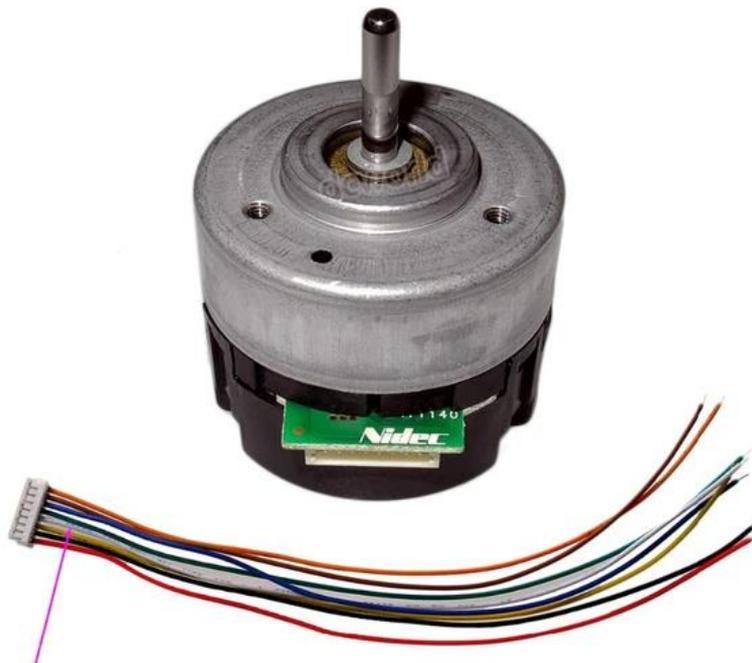


Figura 44 - Motor sin escobillas Nidec 24H677

Las características de este motor son las siguientes:

Tabla 2 - Características del motor NIDEC 24H677

Descripción	Valor
Velocidad máxima	3900 rpm
Potencia nominal	7 W
Tensión de alimentación	12 V
Intensidad máxima	0.9
Par nominal	25 mN*m
Par máximo	50 mN*m
Frecuencia de PWM	20-25 KHz

<b>Retroalimentación de velocidad</b>	6 pulsos/rev
<b>Diámetro del eje</b>	4 mm
<b>Dimensiones</b>	Ø42mm x 54mm
<b>Peso</b>	110 gr

#### 4.1.2 Microcontrolador

Se ha elegido el Arduino DUE para realizar la toma de datos y control sobre el péndulo invertido, tanto por sus capacidades, como por la disponibilidad inmediata del mismo en los laboratorios de la universidad.

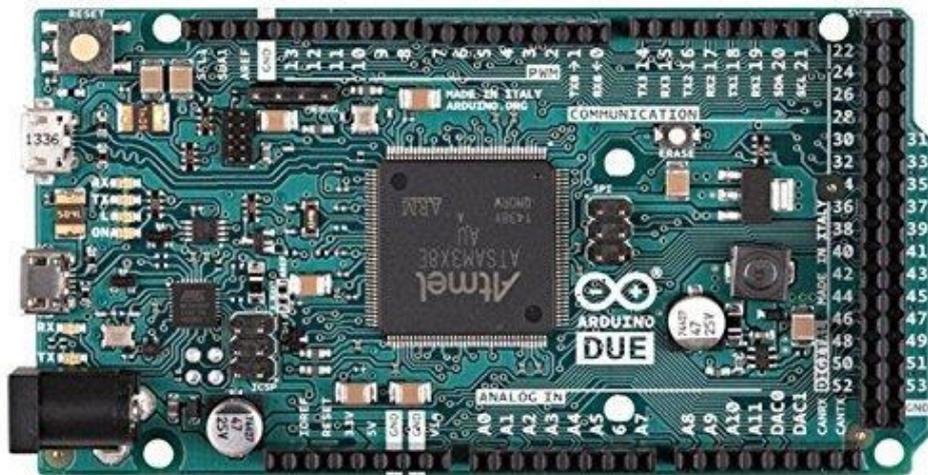


Figura 45 - Vista superior de la placa Arduino DUE

El Arduino DUE es una placa de desarrollo que cuenta con un microcontrolador ATMEL de 32 bits, basado en el procesador Corte M3-de ARM. Este cuenta con la suficiente velocidad de procesamiento y periféricos integrados para lograr realizar el bucle de control en un tiempo bastante reducido, logrando mantenerse por debajo de los 4ms en tiempo de ejecución siempre, lo que permite cumplir con el tiempo de muestreo planteado de 10ms.

Tabla 3 - Características de la placa de Arduino DUE

Descripción	Valor
<b>Microcontrolador</b>	AT91SAM3X8E
<b>Tensión de operación</b>	3.3 V
<b>Tensión de alimentación</b>	7-12 V
<b>Pines de E/S digitales</b>	54
<b>Pines capaces de realizar PWM</b>	12
<b>Entradas analógicas</b>	12
<b>Salidas analógicas</b>	2

<b>Corriente total en las líneas de E/S</b>	130 mA
<b>Memoria FLASH</b>	512 KB
<b>Memoria SRAM</b>	96 KB
<b>Velocidad del reloj</b>	84 MHz
<b>Dimensiones</b>	101.52mmx53.3mm
<b>Peso</b>	36 gr

### 4.1.3 Sensor de inclinación

Entre los componentes que podemos elegir para medir la posición angular del péndulo están:

- **Encoder óptico absoluto:** Funciona a través de sensores ópticos que detectan el paso de unos agujeros o marcas codificadas en un disco unido a un eje, definiendo unas posiciones únicas sobre este. Su resolución indica la cantidad de valores que se pueden tener en el disco, al igual que el costo del dispositivo. Estos requieren un procesado digital y una línea dedicada para cada bit del encoder para determinar la posición.
- **Unidad de medición inercial (IMU):** La IMU tiene la desventaja de poseer un error acumulativo, ya que el sistema va agregando continuamente los cambios de posiciones detectados frente a las posiciones ya calculadas. Esto se resuelve utilizando sistemas adicionales para corregir las imprecisiones. El modelo utilizado posee también un sensor giroscópico y un compás magnético, los cuales han sido utilizados para mejorar las medidas obtenidas.
- **Potenciómetro:** Este funciona mediante un contacto rotacional que va rozando sobre un elemento resistivo, aumentando o disminuyendo la resistencia entre uno de los dos extremos del elemento resistivo y el contacto que roza. Se puede conseguir de diferentes niveles de precisión y resistencia, así como de una o más vueltas. La ventaja es su bajo coste, diversidad de formas y tamaños y simplicidad de implementación y medición.

De estas tres opciones planteadas se ha seleccionado el potenciómetro, debido a su bajo coste, diversidad de rangos de precisión y facilidad de implementar la lectura de posición. En concreto, se ha optado por un potenciómetro magnético de TT Electronics, serie 6120, modelo 6127V2A180, especializado para determinar posiciones angulares entre 0° y 180°.

Este potenciómetro funciona a través de efecto hall, por lo que no posee partes rozando entre sí para determinar la posición, reduciendo la fricción únicamente a la impuesta por el cojinete de bronce que permite que pueda rotar el eje del potenciómetro.



Figura 46 - Potenciómetro serie 6120 de TT Electronics

Tabla 4 - Características del potenciómetro 6127V2A180 de TT Electronics

Descripción	Valor
Tensión de entrada	4.5-5.5 V
Corriente de alimentación	7.5-11mA
Tensión de salida	0.25-4.75 V
Corriente de salida	8mA máximo
Límite de tensión de entrada	-10 V min., 20 V máx.
Linealidad independiente	0.5%
Histéresis	0.2% máximo
Resolución	0.044°
Recorrido mecánico total	360° continuos
Rodamiento	Cojinete de bronce
Peso	17gr

#### 4.1.4 Fuente de alimentación

Una fuente de ordenador de sobremesa se encarga de proporcionar al sistema los 5V para alimentar el microcontrolador Arduino DUE y los 12V para alimentar el motor sin escobillas.

## 4.2 SELECCIÓN DE COMPONENTES MECÁNICOS

La mayoría de los componentes mecánicos del proyecto han sido construidos mediante fabricación aditiva, por impresión 3D proporcionada por la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño. Se detallan las características de estos en los puntos sucesivos.

### 4.2.1 Impresión 3D del cuadro, bases y rueda

Utilizando los dibujos hecho en Solidworks se ha procedido a imprimir los componentes en la ETSID, utilizando como material de construcción el plástico ABS del fabricante Zortrax, específicamente el Z-Ultrat de color azul y blanco. Este posee las siguientes características:

Tabla 5 - Características del material Z-Ultrat de Zortrax

Descripción	Valor
Tensión de rotura	32.60 MPa
Elongación en rotura	4.87 %
Estrés de flexión	54.00 Mpa
Módulo de flexión	1.85 GPa
Densidad	1.179 g/cm <sup>3</sup>
Dureza Shore	73.4
Grosor de capa	0.09/0.14/0.19 mm

El resultado final con una impresión de calidad normal es aceptable, luego de pulir un poco las imperfecciones de los agujeros y reparar algunos de estos se han podido unir las piezas, sin afectar el funcionamiento del prototipo.

### 4.2.2 Eje de la base

Inicialmente se había intentado directamente utilizar el eje del potenciómetro para montar el recuadro del péndulo, ya que este es bastante robusto para la aplicación e incorpora una rosca para montaje y un cojinete, facilitando la tarea del ensamble del prototipo. Debido a que este posee un juego axial se ha terminado descartando la idea, puesto que se producen vibraciones innecesarias cuando el motor gira a altas velocidades.

Se ha optado por utilizar una varilla roscada de 6mm como eje del péndulo, puesto que facilita el ensamblaje y provee una fuerte unión con el cuadro al utilizar dos tuercas para sujetarse a este.

### 4.2.3 Rodamientos

Los rodamientos seleccionados son del tipo 686-ZZ, que tienen un diámetro interior de 6mm, un exterior de 13mm, un grosor de 5mm y son sellados en ambos lados, por lo que no se ven afectados por invasión de partículas. Se han montado dos rodamientos para soportar el eje del péndulo sobre dos puntos de apoyo y evitar la posibilidad de flexión del eje.

#### 4.2.4 Acoples

Para unir el eje del potenciómetro y el del péndulo se requiere de un acople de distintos diámetros. En un extremo cabe el eje de 6.35mm (1/4 de pulgada) del potenciómetro y en el otro el de 6mm del péndulo. El acople además posee cierta flexibilidad, por lo que permite pequeñas desviaciones entre ambos ejes sin afectar la rotación de ambos ni aumentar la fricción del sistema de forma notable.



Figura 47 - Acoplamiento de 6.35mm a 6mm

La rueda de reacción utiliza otro acoplamiento para unirse al eje del motor. Este permite cambiar de motor sin tener que utilizar otra rueda de reacción con un diámetro del agujero central distinto. Este posee cuatro agujeros paralelos al eje del motor que se utilizan para fijarlo a la rueda y uno central de 4mm para sujetarse al eje del motor.

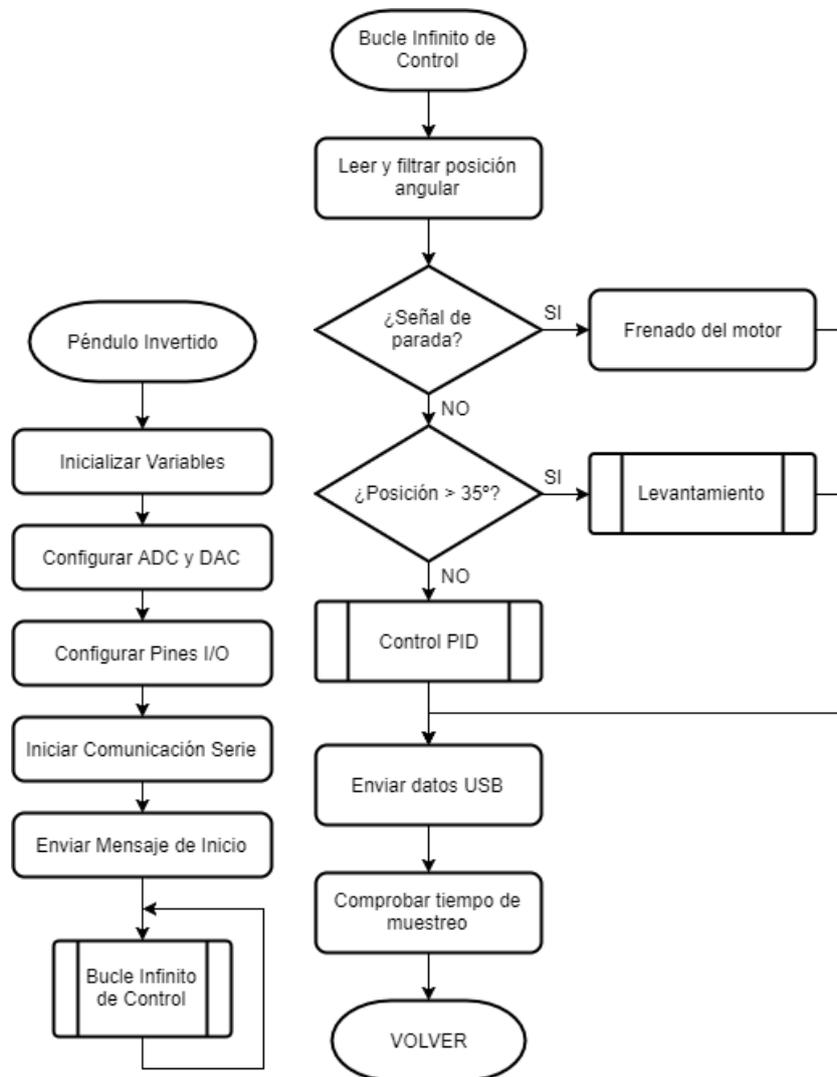


Figura 48 - Acoplamiento de sujeción de la rueda de reacción al motor

### 4.3 PROGRAMACIÓN DEL CONTROLADOR

La estructura seguida para realizar el programa del microcontrolador es la de un bucle infinito que se enfoca en leer la posición del péndulo, tomar la decisión del tipo de control que se debe ejercer, ya sea el de levantamiento o de seguimiento de referencia, la selección de la referencia, el envío de datos al ordenador y la verificación del cumplimiento del tiempo de muestreo. El controlador implementado inicialmente es un PID, aunque finalmente se ha puesto la constante proporcional a cero, resultando en un controlador PI.

Puesto que no se tienen que realizar distintas operaciones durante el funcionamiento, no se ha optado por utilizar una estructura de máquina de estados, pues se complicaría innecesariamente la programación. El diagrama de flujo del código realizado es el siguiente:





## 4.4 INCONVENIENTES ENCONTRADOS Y SOLUCIONES

Se trató de aprovechar el eje del potenciómetro para montar directamente el recuadro sobre este, pero se presentaron dificultades para sujetar dicho eje, ya que es muy corto y encima de unas dimensiones que dificultaban encontrar un rodamiento adecuado, por lo que se tuvo que dejar apoyado sólo con el punto de sujeción de la base roscada del potenciómetro. Además de esto el eje posee un juego axial, que provocaba vibraciones cuando el motor giraba muy rápido, desestabilizando más rápido el sistema.

Con la utilización de un eje apoyado sobre dos rodamientos y un acople impreso en 3D para unir este con el potenciómetro, se eliminó el problema del juego axial y de las dimensiones no adecuadas para montaje de este.

Inicialmente se había probado con un motor con controlador integrado, que, aunque proporcionaba las aceleraciones necesarias para hacer girar el péndulo, no cuenta con función de freno y la respuesta del controlador integrado no era lo suficientemente rápida, por lo que cambios de dirección de giro o desaceleraciones rápidas no eran realizables.

Otro motor que se probó fue uno de vehículos a radio control con un controlador electrónico de velocidad (ESC), pero al no poseer sensores de posición y velocidad no se puede hacer girar a bajas velocidades, además de que no es posible realizar cambios de dirección sin realizar una parada completa del motor, por lo que se intentó hacerlo girar a una velocidad intermedia y acelerarlo y desacelerarlo para estabilizar el péndulo. Esto no dio resultados aceptables, ya que la velocidad de giro del motor no se podía controlar con precisión y el motor se calentaba después de cierto tiempo de funcionamiento, reduciendo sus prestaciones.

Finalmente se optó por utilizar el motor de NIDEC, que cuenta con un controlador integrado, similar al del primero motor, pero con función de frenado y más par, permitiendo realizar cambios rápidos en la velocidad del motor en ambos sentidos de giro. El inconveniente de este motor es que el modelo pedido no posee la opción de encoder, sino de tacómetro, el cual no provee una resolución suficiente para medir la velocidad de forma precisa con el tiempo de muestreo requerido por el control.

Para medir la velocidad de giro de la rueda no se pudo obtener una solución que no requiriese un rediseño del prototipo para acoplar un encoder o tacómetro de precisión, por lo que se ha terminado descartando la lectura de esta variable en el proceso.

Las deformaciones de las piezas impresas en 3D, especialmente la rueda de reacción, provocan perturbaciones al girar el motor, en la forma vibraciones del conjunto completo del péndulo. Añadiendo a esto pequeñas desalineaciones entre las bases que provocan que el eje tenga más resistencia al girar a un lado que a otro, se dificulta el control para el seguimiento de referencias variables en ambos sentidos de giro, así como una introducción de ruido en la lectura de posición angular que varía con la velocidad de giro de la rueda.

Esto no ha podido ser resuelto, debido a la falta de una pieza de acoplamiento que no se recibió a tiempo para instalar otra rueda de reacción sin deformaciones y con mayor concentricidad con el eje del motor. La nueva rueda es más delgada y plana que la instalada, reduciendo en gran medida la posibilidad de presentarse de nuevo las vibraciones.

## 4.5 RESULTADOS DEL PROTOTIPO REAL

Luego de seleccionar y procurar todos los componentes necesarios se ha realizado el montaje y ensamblaje de estos sobre un trozo de madera prensada. El eje utilizado se ha dejado de la longitud que ha sido provista por la tienda y no se ha recortado, puesto que no representa un inconveniente para el montaje y pruebas.

Debajo se observa una fotografía del prototipo ensamblado, alimentado por la fuente del laboratorio de control del DISA, en operación en la posición de equilibrio vertical. Como se aprecia, no hay consumo de corriente porque el motor se encuentra detenido, ya que el error de posición es muy pequeño y el ancho de pulso de la señal PWM enviada al motor muy pequeño.

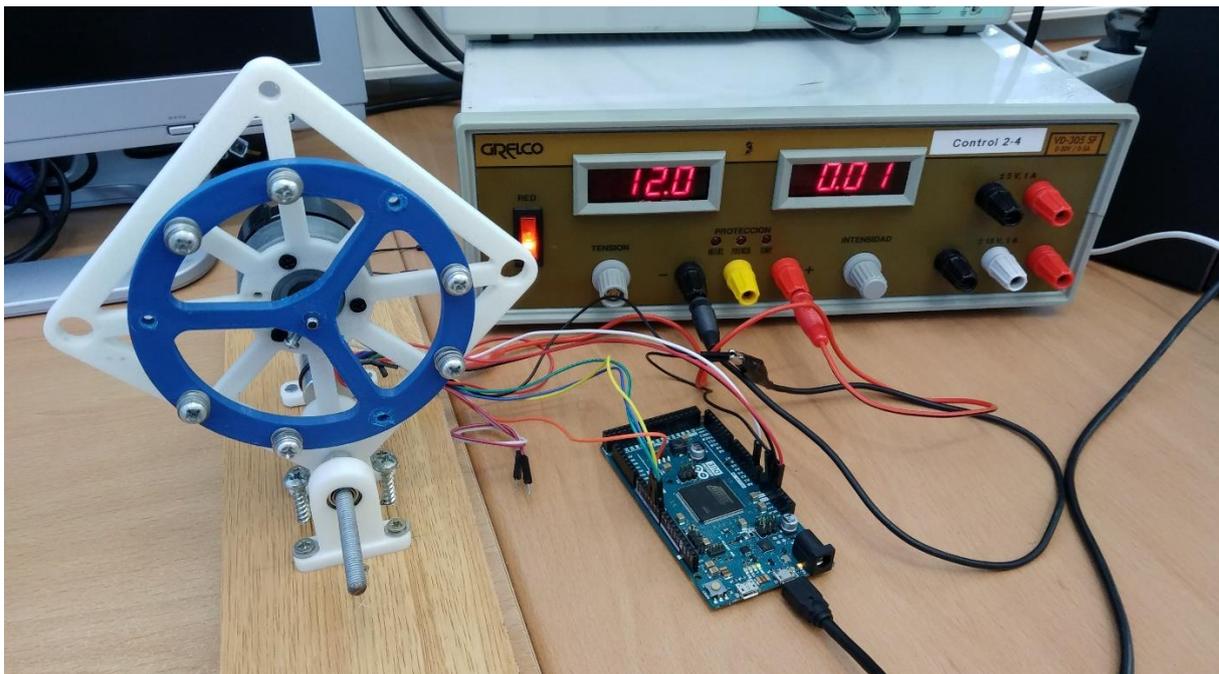


Figura 49 - Implementación del péndulo invertido en el laboratorio

La primera prueba realizada es la del seguimiento de referencia de posición vertical, dictada por un ángulo de cero grados, luego de realizar un levantamiento del péndulo desde la posición de reposo de  $41^\circ$ , la cual se ha forzado con los tornillos colocado sobre la madera al lado del cuadro del péndulo. Se observa una variación rápida del ángulo, producto del error de gran magnitud resultado del movimiento brusco en el levantamiento, seguido de una corrección gradual de la posición.

Las perturbaciones fueron introducidas dando pequeños golpes al cuerpo del péndulo por los laterales, observándose estas entre las marcas de los 15 y 30 segundos, seguido de un periodo de descanso donde el péndulo se mantiene en posición vertical. Nuevamente se introducen perturbaciones entre las marcas de 50 y 70 segundos, con un rechazo de estas de manera satisfactoria, que se puede observar al detalle en las siguientes figuras.

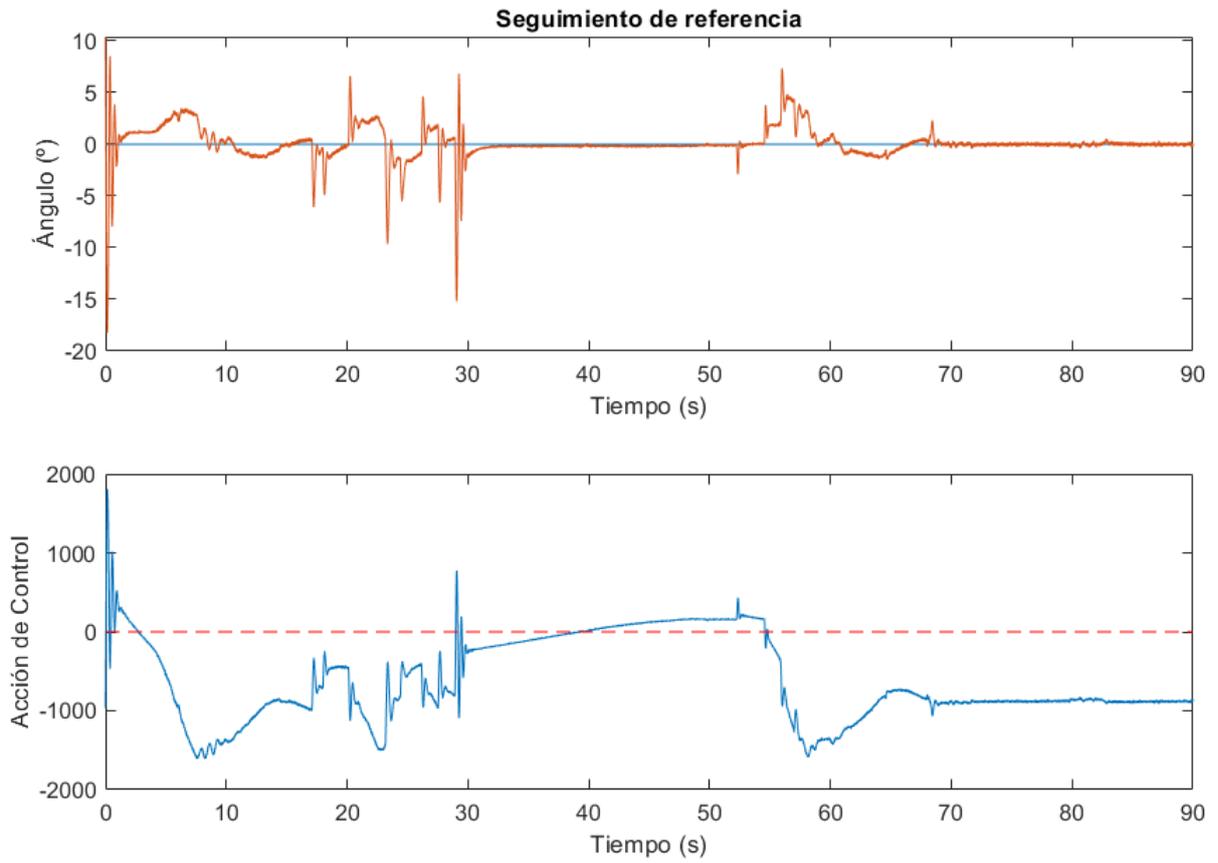


Figura 50 - Resultado del rechazo de perturbaciones en posición vertical

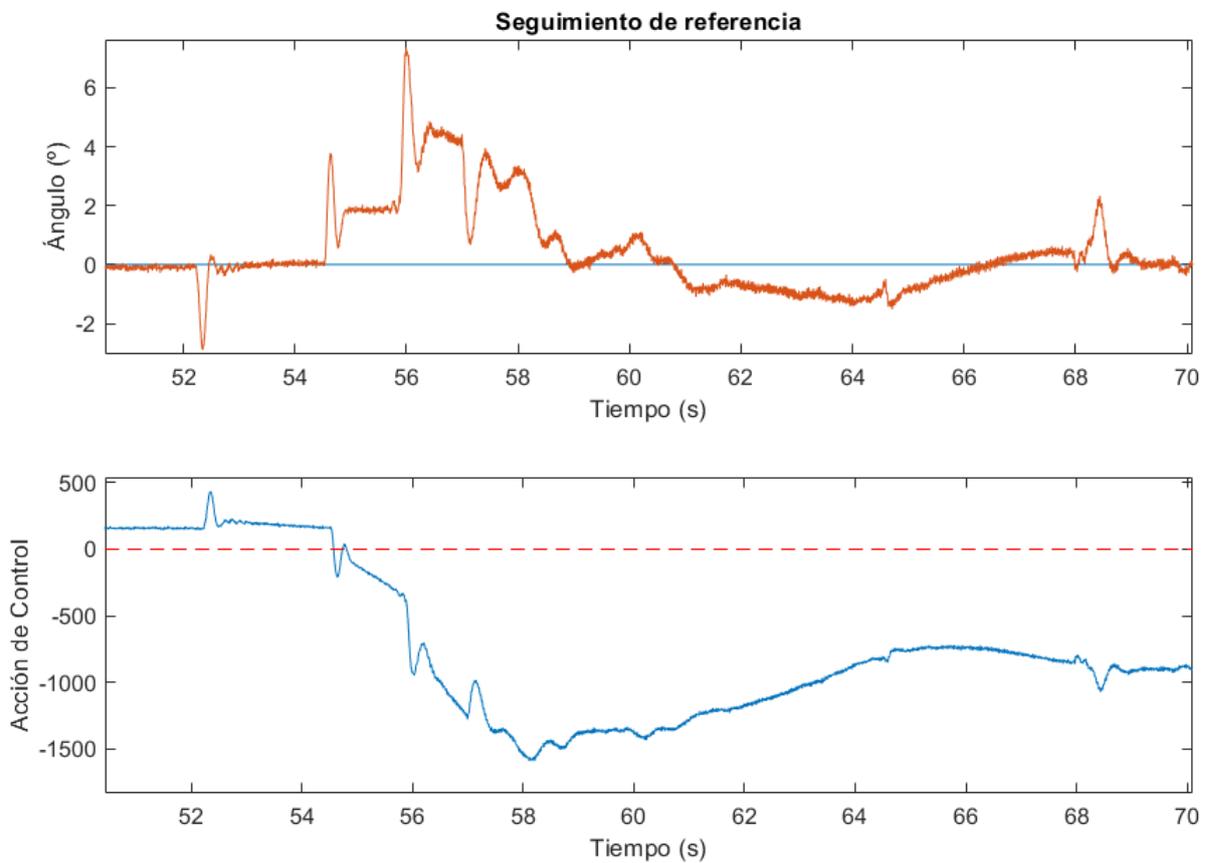


Figura 51 - Detalle del rechazo de perturbaciones

La acción integral adicional en el controlador para reducir la velocidad del motor cuando el péndulo se encuentra cerca de los cero grados se puede observar debajo.

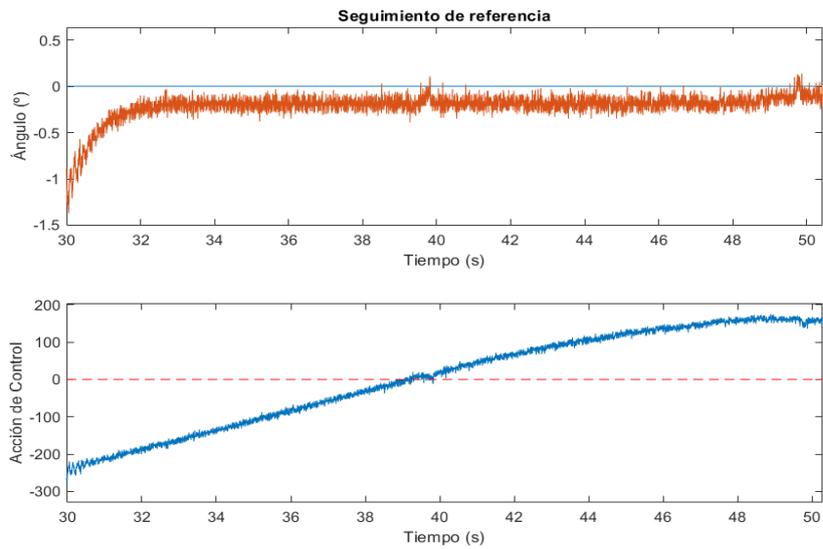


Figura 52 - Detalle de la reducción gradual de velocidad en torno a posición cero

El objetivo de evitar que el motor se mantenga girando de forma indefinida se cumple, aunque debe realizarse muy lentamente para evitar inducir cambios en la posición angular de la rueda y únicamente si la referencia a seguir es la posición vertical. También se debe saturar esta integral o de lo contrario crecería demasiado y al momento de aplicarse perturbaciones afectaría al PID.

Las vibraciones provocadas durante el giro del motor por la deformación de la rueda de reacción se traducen a ruido en la lectura de posición del potenciómetro, puesto que el cuerpo del péndulo y por consecuencia el eje, se mantienen girando de lado a lado con una magnitud de menos de  $0.2^\circ$ . Debajo se muestra una figura con el problema del ruido y el efecto que tiene este sobre la acción de control, cuyos valores máximos son -2400 y 2400.

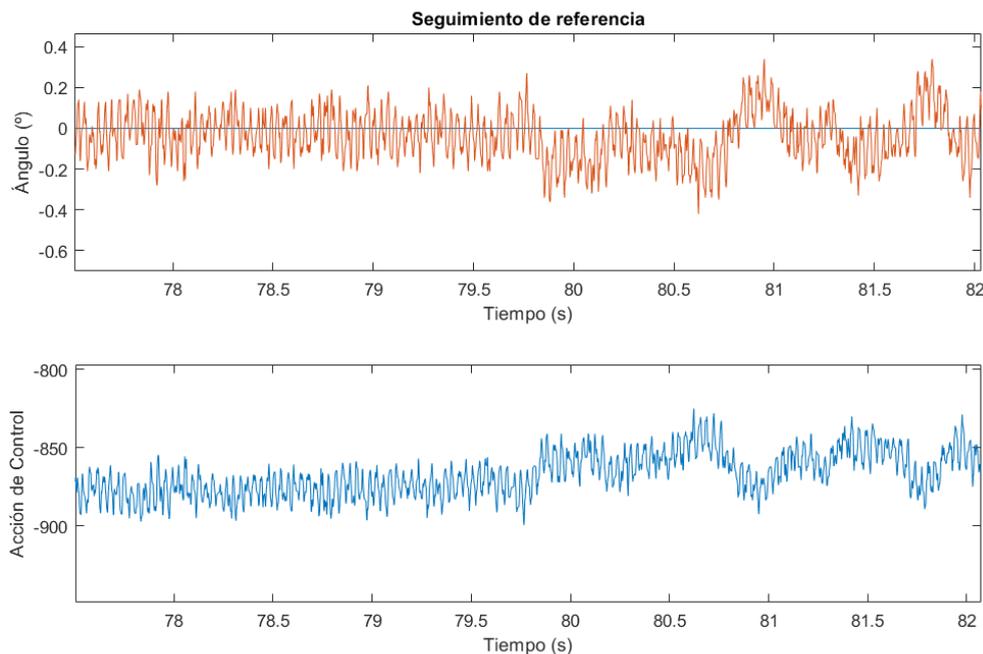


Figura 53 - Acercamiento de la señal mostrando el ruido y efecto de las vibraciones

Debido a este problema y, a que se acentúa más cuando el péndulo gira en sentido del reloj, el seguimiento de referencias senoidales no se ha podido realizar de forma exitosa, pues se consigue que el péndulo las siga correctamente al girar contrario al sentido del reloj, sin embargo, al girar en la otra dirección no es capaz de corregir satisfactoriamente el error para seguir la silueta de la señal de referencia.

Ya que las vibraciones dependen de la velocidad de giro del motor y de la posición del péndulo, no se ha podido implementar un filtro capaz de adaptarse a los cambios de frecuencia de estas. Se ha utilizado un filtro con frecuencia normalizada de 0.25 radianes, que logra reducir el ruido en posición vertical a velocidades bajas y medias.

Se ha intentado seguir una referencia de señal senoidal de  $2^\circ$  de amplitud y periodo de 50 segundos, ya que la velocidad de giro del motor del prototipo es inferior a la del utilizado en la simulación y el ruido dificulta aún más el seguimiento correcto de la referencia cambiante. Debajo se observa una figura con los resultados del seguimiento de la señal:

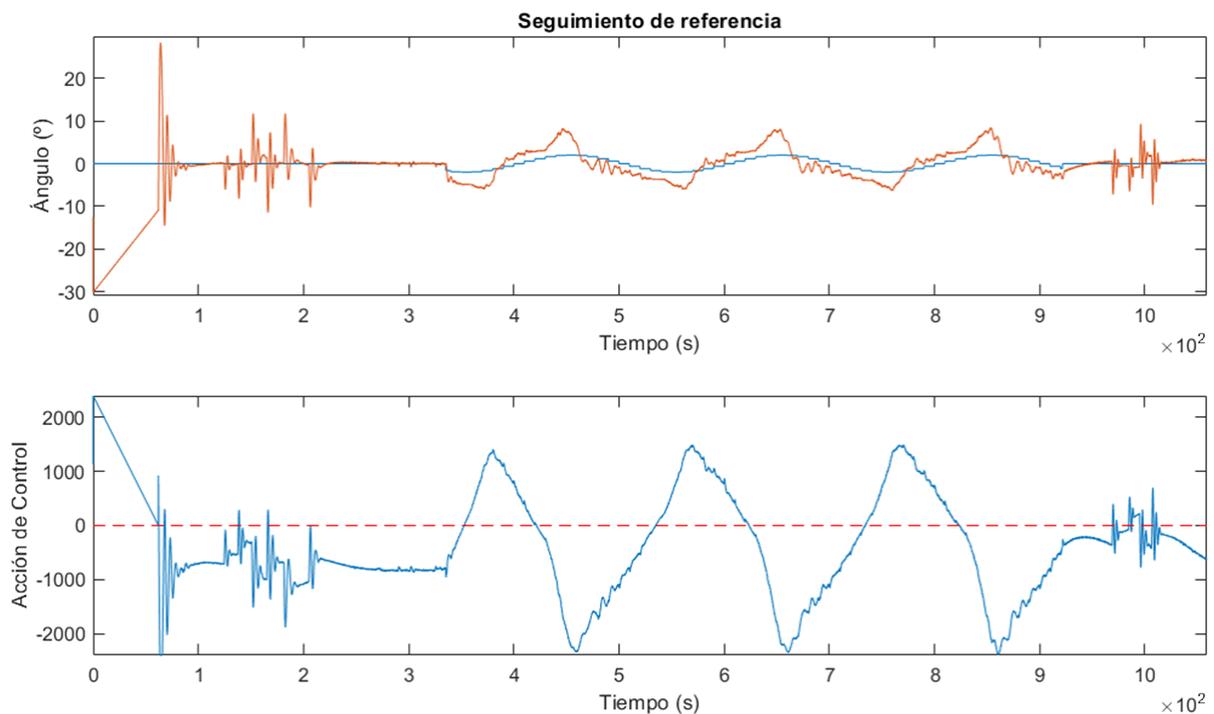


Figura 54 - Levantamiento, seguimiento de referencia vertical y luego senoidal

En otra prueba, se ha realizado el levantamiento del péndulo desde unos  $-42^\circ$ , seguido el seguimiento de la referencia de posición vertical junto con el rechazo de perturbaciones y luego la referencia senoidal de  $2^\circ$  de amplitud y periodo de 20 segundos. Como se puede observar el péndulo intenta seguir la señal, pero debido a las perturbaciones mecánicas se pasa de los máximos de la onda y además oscila de por medio cuando va en bajada.

El péndulo tiene la mayor diferencia de posición cuando la referencia está a  $1.9^\circ$ , siendo esta de  $6.41^\circ$ , mientras que en el punto más bajo de la referencia es de  $3.98^\circ$ . En otros puntos las diferencias son menores, principalmente cuando la señal se encuentra en transición a los máximos y mínimos.

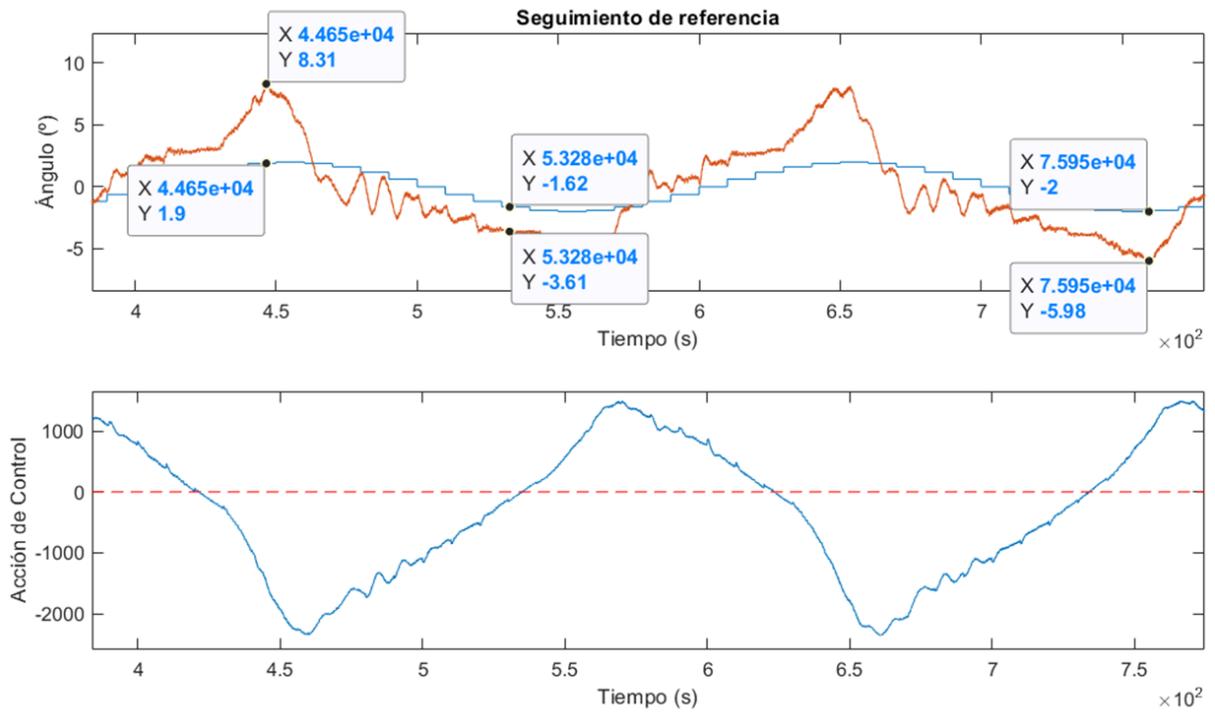


Figura 55 - Detalle del seguimiento de la referencia senoidal

## 5 CONCLUSIONES

---

1. El modelo de simulación realizado con Simscape Multibody se asemeja bastante con los planteamientos matemáticos realizados para el modelo teórico del péndulo, incluyendo además los elementos no lineales que se dejan de lado para simplificar el proceso de resolución del sistema de ecuaciones. Esto sirve de mucho para acelerar el proceso de diseño de prototipos, así como de observar un comportamiento similar al real, siempre que se utilicen los valores y características iguales a los que se desean implementar en la realidad.
2. El diseño tridimensional con el software SolidWorks de Autodesk es de gran utilidad a la hora de detectar posibles problemas en la conceptualización de los prototipos, tanto dimensionalmente, como de ensamble. Esto reduce el número de errores y piezas que se deben de descartar y volver a construir, ahorrando en costos de materiales y el precioso tiempo de repetir trabajos.
3. La impresión 3D con los sólidos generados con SolidWorks se ha realizado correctamente, dejando sólo la necesidad de corregir detalles que son producto de las limitaciones del proceso de impresión, el equipo y los materiales utilizados, y no del programa utilizado para diseñar los componentes.
4. La relación entre los distintos parámetros del péndulo, como lo son la masa del péndulo, la longitud de la barra, o en este caso del cuerpo del péndulo, la inercia de la rueda de reacción y la constante de par del motor, se pueden estudiar a través de las ecuaciones y del mismo modelo de Simscape Multibody para optimizar las características de interés del péndulo, como puede ser el rechazo de perturbaciones grandes y la posibilidad de realizar el levantamiento del mismo desde una posición con la acumulación y liberación adecuada de suficiente momento angular.
5. Aumentar la masa de la rueda de reacción para reducir la aceleración necesaria para provocar cambios angulares en el péndulo, y, por tanto, reducir la velocidad a la que se debe hacer girar el motor, permite aumentar la ventana de operación del motor antes de llegar a la saturación de la rueda de reacción, pero se debe de tomar en cuenta la limitación de parte del motor y la reducción en la capacidad de levantamiento del péndulo invertido.
6. Las perturbaciones inducidas por el giro del motor a altas velocidades y los desalineamientos de los componentes mecánicos influyen en la capacidad de recuperarse del péndulo en ciertas direcciones, así como de realizar el levantamiento por el ruido introducido en la lectura de posición angular. Una buena terminación y el uso de acoples y sujeciones adecuadas entre componentes es de vital importancia para mejorar el rendimiento del sistema sin requerir un motor de altas prestaciones.
7. Las correcciones necesarias para lograr que el motor del péndulo se detenga cuando está en posición vertical se deben de aplicar sólo cuando se esté siguiendo la referencia de posición vertical y, con la suficiente suavidad como para que el motor no reduzca demasiado rápida la velocidad y provoque cambios de posición o hasta la caída del péndulo. Además, si se llega a aplicar cuando se sigue una referencia diferente de cero, estas correcciones influyen en la señal de control y afectan el desempeño del regulador.

## 5.1 TRABAJO FUTURO

- Si bien se ha conseguido que el prototipo cumpla con todos los objetivos planteados, es mejorable la capacidad de seguimiento de referencias alternantes del mismo. Se propone mejorar el diseño de las bases de montaje del eje de rotación del péndulo, el acoplamiento del recuadro a este y el de la rueda de reacción con el motor para reducir las perturbaciones mecánicas auto inducidas.
- Se propone la utilización de otro motor con velocidad máxima más alta para aumentar el margen de saturación de la aceleración de la rueda de reacción y permitir alcanzar ángulos más amplios durante el seguimiento de referencias senoidales. Además, el motor podría tener el controlador separado, para reducir el peso de este y mejorar el desempeño del péndulo.
- Agregar al diseño un soporte para un encoder o tacómetro de precisión para medir la velocidad de giro de la rueda y su aceleración, con el objetivo de implementar controladores más robustos y mejorar la toma de datos del péndulo para su análisis. Esto podría también incluirse con el cambio del motor, al utilizar uno que tenga integrado dichos periféricos.
- Agregar un servo mecanismo de frenado a la rueda de reacción para mejorar la capacidad de levantamiento del péndulo, permitiéndole realizar levantamientos desde ángulos mayores.
- Utilizar un módulo de comunicación inalámbrica con el Arduino para realizar el control y monitoreo a través de un teléfono móvil o tablet, liberando el prototipo de la necesidad de comunicación con el ordenador para la recogida de datos. La comunicación podría realizar a través de Bluetooth o Wifi.
- Agregar 2 ruedas de reacción con sus motores y sustituir el potenciómetro como sensor de posición angular del péndulo por 3 unidades de medición inercial (IMU), transformando la estructura en un cubo para desarrollar un modelo semejante al Cubli y pasando el prototipo de 1 grado de libertad a 3 grados de libertad.

## 6 BIBLIOGRAFÍA

---

1. **Butikov, Eugene I.** *Kapitza Pendulum: A Physically Transparent Simple*. St. Petersburg, Russia : St. Petersburg State University.
2. **The MathWorks, Inc.** Two-Degree-of-Freedom PID Controllers. *Mathworks*. [En línea] 2019. <https://es.mathworks.com/help/control/ug/two-degree-of-freedom-2-dof-pid-controllers.html>.
3. **Oriental Motor U.S.A. Corp.** Brushless DC Motor vs. AC Motor vs. Brushed Motor? *Oriental motor*. [En línea] 2018.
4. **National Instruments Corporation.** PID Theory Explained. *NI*. [En línea] 24 de 5 de 2019. <http://www.ni.com/es-es/innovations/white-papers/o6/pid-theory-explained.html>.
5. **Avery, Paul y Yaskawa Electric America, Inc.** Introduction to PID control. *Machine Design*. [En línea] 1 de 3 de 2009. <https://www.machinedesign.com/sensors/introduction-pid-control>.
6. **Li, Weiwu y Inc., The MathWorks.** Simulation Pacing in Simulink. *Mathworks*. [En línea] 3 de 7 de 2018. <https://es.mathworks.com/videos/simulation-pacing-in-simulink-1521236470960.html>.
7. **Miller, Steve.** Simscape Multibody Contact Forces Librar. *MATLAB Central File Exchange*. [En línea] 31 de 03 de 2019. <https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/47417-simscape-multibody-contact-forces-library>.
8. *Nonlinear Analysis and Control of a Reaction Wheel-based 3D*. **Muehlebach, Michael y D'Andrea, Raffaello**. 2016, IEEE Transactions on Control Systems Technology.
9. **Block, Daniel J., Aström, Karl J. y Spong, Mark W.** *The Reaction Wheel Pendulum*. Illinois : Morgan & Claypool, 2007.

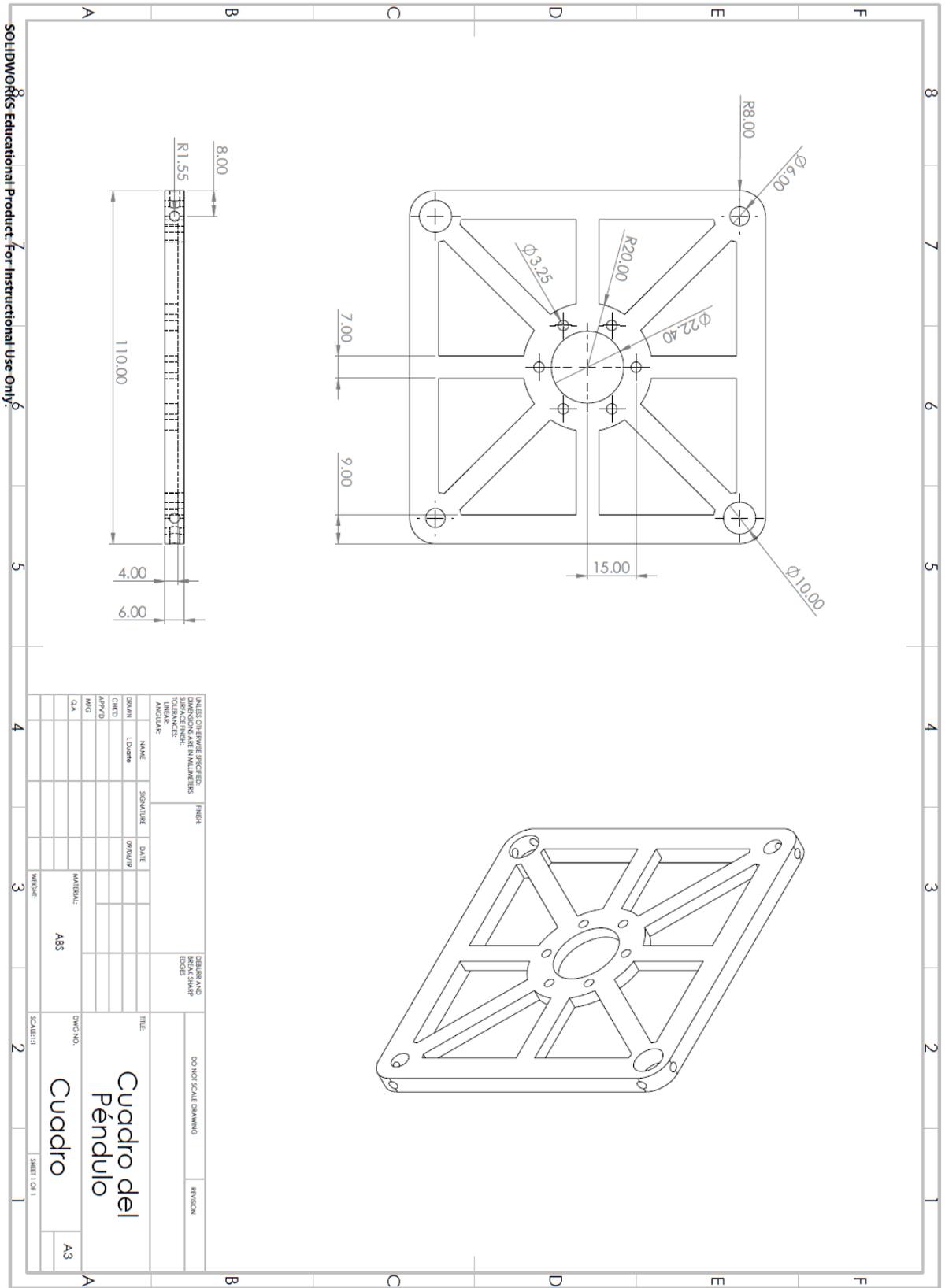


## 7 ANEXOS

### 7.1 PRESUPUESTO

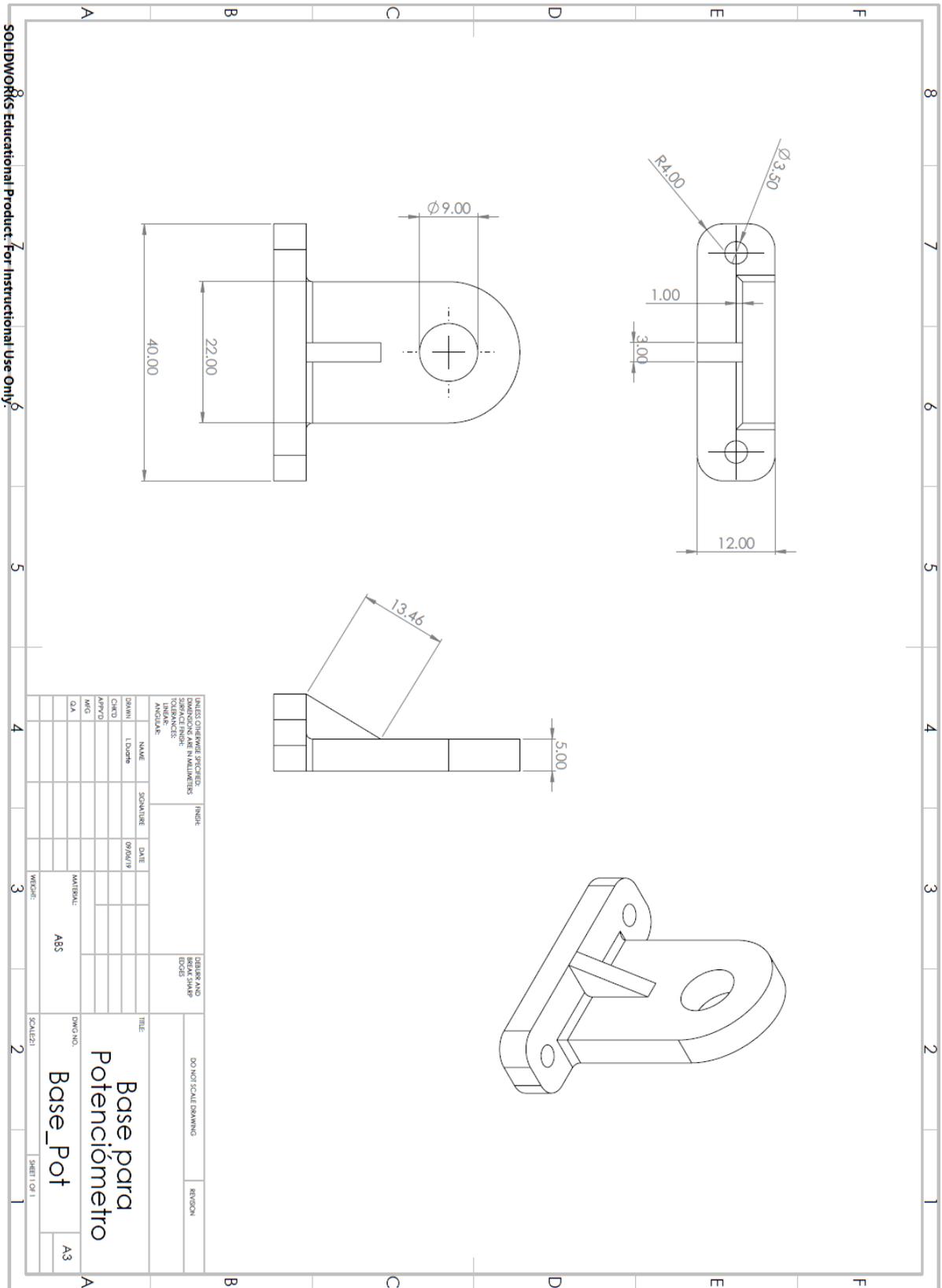
Descripción	Cantidad	Costo unitario	Total
Horas de diseño 3D	40	€20,00	€800,00
Horas de simulación en Matlab	80	€25,00	€2.000,00
Horas de programación del Arduino	16	€25,00	€400,00
Horas de puesta en marcha y ajuste	85	€20,00	€1.700,00
Impresión 3D – Cuadro	1	€10,71	€10,71
Impresión 3D – Rueda de reacción	1	€7,63	€7,63
Impresión 3D – Base de eje	2	€6,54	€13,08
Impresión 3D – Base de potenciómetro	1	€5,45	€5,45
Motor	1	€14,00	€14,00
Rodamientos	2	€1,89	€3,78
Potenciómetro	1	€17,0040	€17,40
Eje roscado	1	€0,60	€0,60
Adaptador Eje – Potenciómetro	1	€4,37	€4,37
Adaptador Motor – Rueda	1	€3,00	€3,00
Tornillería	16	€0,10	€1,60
Cables de conexión	12	€0,25	€3,00
		<b>Total</b>	<b>€3.286,00</b>



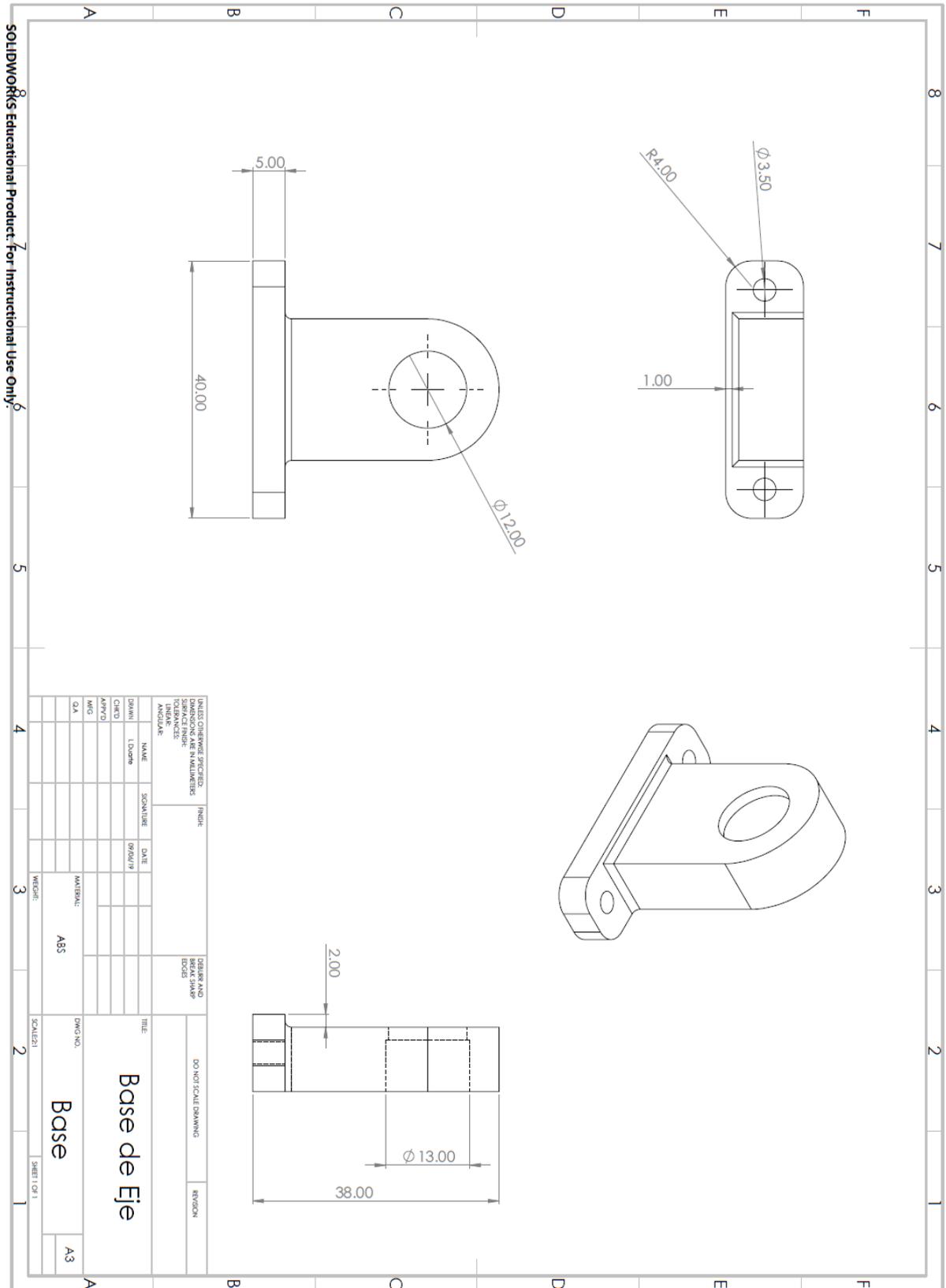


SOLIDWORKS Educational Product. For Instructional Use Only.

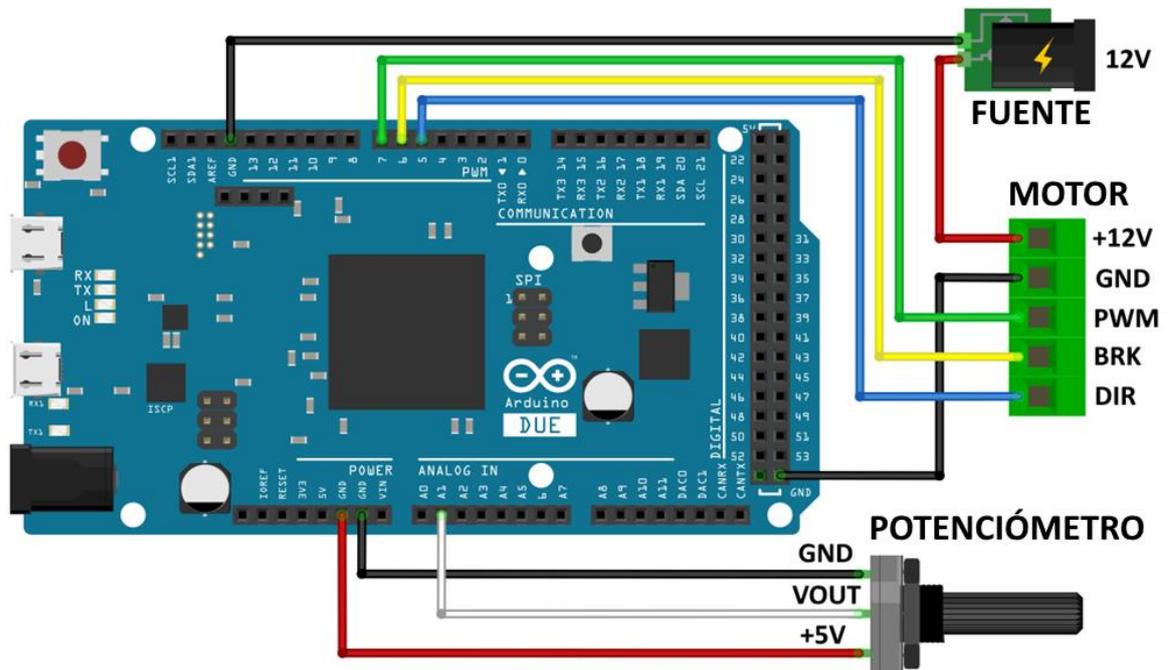
UNITS: CHOOSE SPECIFIC DIMENSION UNIT IN MILLIMETERS		INCH		CENTIMETERS AND BREAK SHARP EDGES		DO NOT SCALE DRAWING		REGION	
NAME	SIGNATURE	DATE	TITLE	DRAWN	LID/DRN	DATE	TITLE	DWG. NO.	SHEET NO.
CHKD			Cuadro del Péndulo						
APP'D									
MFG									
QA									
MATERIAL: ABS		SCALE: 1:1		SHEET 1 OF 1		A3			



SOLIDWORKS Educational Product. For Instructional Use Only.



### 7.3 ESQUEMA DE CONEXIÓN CON EL ARDUINO



fritzing

## 7.4 CÓDIGO FUENTE DE ARDUINO

```
// Control para el motor NIDEC 24H677
#include <math.h>

// Definición de constantes
#define Ts 10 // Tiempo de muestreo para el Arduino
#define Tsc 0.01 // Tiempo de muestreo para el PID
#define Kp 90 // Constante proporcional
#define Ki 35 // Constante integral
#define Kc 0.00001 // Constante de corrección de velocidad en posición 0
#define VMAX 2400 // Máxima salida pwm permisible
#define DATMIN -5.0
#define DATMAX 5.0
#define FREC 0.05

// Definiciones de los pines
#define Pin_pend A1 // POSICION
#define Pin_pwm 7 // LED1+PWM
#define Pin_dir 5 // DIRECCION
#define Pin_brk 6 // FRENO
#define Pin_led 13 // LED2

float ang = 0.0, angf = 0.0 ;
float uk = 0.0, uk1 = 0.0, yk1 = 0.0 ;
float ukr = 0.0, uk1r = 0.0, uk2r = 0.0, yk1r = 0.0, yk2r = 0.0 ;

// Definición de variables
unsigned long antMill = 0; // ms anteriores
unsigned long antMillTX = 0; // ms anteriores
float ref = 0.0; // Valor de referencia -> Posición Vertical de 90°
float u = 0.0; // Entrada/Retroalimentación del controlador
float err = 0.0; // Señal de error
float errant = 0.0; // Memoria de la señal de error anterior
float v = 0; // Salida de control
float integ = 0.0; // Almacenamiento para el integrador
float int_vel = 0.0; // Almacenamiento para el integrador para reducir
velocidad

byte datos[2] = {0, 0};

void setup() {
    analogReadResolution(10); // Resolución del ADC -> 10 bits
    analogWriteResolution(12); // Resolución del DAC -> 12 bits

    pinMode(Pin_pwm, OUTPUT); // Salida -> LED1+PWM
    pinMode(Pin_dir, OUTPUT); // Salida -> DIRECCIÓN
    pinMode(Pin_led, OUTPUT); // Salida -> LED2
    pinMode(Pin_brk, OUTPUT); // Salida -> FRENO

    digitalWrite(Pin_brk, LOW); // Activar freno

    Serial.begin(115200); // Inicializar puerto serie ordenador-Arduino
    SerialUSB.begin(256000); // Inicializar puerto serie ordenador-Simulink

    Serial.println("Inicio del control del péndulo"); // Mensaje inicial
}

```

```

void loop() {
    // Potenciometro 6127V1A180LS -> Salida de 0.2V a 4.8V - 0° a 180°
    lecturaPos();
    // Chequeo de señal de habilitado
    if ((datos[0] == 0)) {
        // Levantamiento del péndulo, a más de 35° se considera que ya ha caído
        if (abs(int(yk1)) > 35) {
            // Reinicio de las variables del proceso
            v = 0.0; integ = 0.0; int_vel = 0.0; err = 0.0;
            // Parada del motor antes de iniciar el levantamiento
            digitalWrite(Pin_brk, LOW); // Freno del motor
            delay(2500); // Espera 2.5s
            // Selección de dirección de giro dependiendo del lado al que se ha
caído
            if (int(u) > 0) {
                digitalWrite(Pin_dir, LOW); // Dirección CW
                analogWrite(Pin_pwm, 0); // Motor a máxima velocidad
                digitalWrite(Pin_brk, HIGH); // Liberación del freno
                delay(3000); //Espera a que el motor esté a máxima velocidad
                digitalWrite(Pin_brk, LOW); // Freno del motor
                analogWrite(Pin_pwm, 2400); // Giro a velocidad reducida
                digitalWrite(Pin_dir, HIGH); // Dirección CCW
                delay(400); //Espera antes de liberar el freno
                digitalWrite(Pin_brk, HIGH); // Liberación del freno
                while (abs(int(yk1)) > 10) {
                    lecturaPos();
                    Serial.print("U_SR=");
                    Serial.println(yk1);
                }
            }
            else {
                digitalWrite(Pin_dir, HIGH); // Dirección CCW
                analogWrite(Pin_pwm, 0); // Motor a máxima velocidad
                digitalWrite(Pin_brk, HIGH); // Liberación del freno
                delay(3000); //Espera a que el motor esté a máxima velocidad
                digitalWrite(Pin_brk, LOW); // Freno del motor
                analogWrite(Pin_pwm, 2300); // Giro a velocidad reducida
                digitalWrite(Pin_dir, LOW); // Dirección CW
                delay(400); //Espera antes de liberar el freno
                digitalWrite(Pin_brk, HIGH); // Liberación del freno
                while (abs(int(yk1)) > 10) {
                    lecturaPos();
                    Serial.print("U_SL=");
                    Serial.println(yk1);
                }
            }
        }
        // Control PID seguimiento de referencia
    else
    {
        if (datos[1] != 0) {
            ref = 2 * float(sin(2 * PI * FREC * (millis() / 1000)));
        }
        else
            ref = 0.0;
        digitalWrite(Pin_brk, HIGH); // Liberación del freno
        // Vertical = 90°
        err = ref - yk1; // Error con referencia filtrada
        integ += err * Tsc; // Cálculo de la acción integral
    }
}

```

```

// Saturación de la acción integral
if (int(integ) > 2400)
    integ = VMAX;
else if (int(integ) < -2400)
    integ = -VMAX;

// Reducción de velocidad en posición vertical
if ((int(datos[1]) == 0) && ((abs(int(err
* 100)) < 70) && (abs(int(v)) > 50)) ) {
    int_vel += v * Kc;
    // Saturación del integrador
    if (int(int_vel) > 3000)
        int_vel = 3000;
    else if (int(int_vel) < -3000)
        int_vel = -3000;
}
else {
    // Reducción del integrador para evitar influencias en el PID
    if (abs(int(int_vel)) > 10)
        int_vel = int_vel * 0.999;
}

v = err * Kp + integ * Ki - int_vel; // Salida
errant = err; // Guardar el error para la próxima iteración

if (int(v) > 2400)
    v = VMAX;
else if (int(v) < -2400)
    v = -VMAX;
// Escritura de acción de control y dirección de giro
analogWrite(Pin_pwm, 4095 - map(abs(int(v)), 0, 2400, 0, 4095));
if (int(v) >= 0)
    digitalWrite(Pin_dir, LOW); // Dirección CW
else
    digitalWrite(Pin_dir, HIGH); // Dirección CCW
}
}
else {
    digitalWrite(Pin_brk, LOW); // Freno del motor
    analogWrite(Pin_pwm, 4095); // Velocidad de motor cero
}
// Envío de datos al ordenador - Arduino (Monitor serie)
serialMon();

// Envío de datos al ordenador - Arduino (Solo serial plotter)
//serialPlot();

// Envío/recepción de datos al ordenador - Simulink cada 100ms
unsigned long actMillTX = millis();
if (actMillTX - antMillTX > 100) {
    simulinkTXRX();
    antMillTX = actMillTX;
}
// Monitorea la duración del control. Si se pasa del Ts enciende LED2
unsigned long actMill = millis(); // Obtiene los ms actuales

if (actMill - antMill > Ts) {
    digitalWrite(Pin_led, HIGH);
}

```

```

        Serial.println("-----Fuera de tiempo!"); // Transmite mensaje de fallo
    }
    else
        digitalWrite(Pin_led, LOW);

    antMill = actMill; // Almacena los ms actuales para la próxima iteración
}

void lecturaPos() {
    u = float(map(analogRead(Pin_pend), 60, 1024, -7000, 7000)) / 100.0; //
    Lectura de posición
    uk1 = uk ; uk = u ;
    angf = 0.2929 * uk + 0.2929 * uk1 + 0.4142 * yk1 ; //wn=0.25 ;
    yk1 = angf ;
}

void serialMon() {
    Serial.print(millis());
    Serial.print(';');
    Serial.print(yk1);
    Serial.print(';');
    Serial.print(ref);
    Serial.print(';');
    Serial.println(v);
}

void serialPlot() {
    Serial.print(ref * 100);
    Serial.print(',');
    Serial.print(yk1 * 100);
    Serial.print(',');
    Serial.print(int_vel);
    Serial.print(',');
    Serial.println(v);
}

void simulinkTXRX() {
    // Envío y recepción de datos de Simulink
    // En este caso sólo se deben recibir 0 y 1
    if (SerialUSB.available() >= 1) {
        int bb = 0;
        while (bb != 255 && bb != -1)
            bb = SerialUSB.read();

        if (SerialUSB.available() >= 2) {
            datos[0] = map(SerialUSB.read(), 0, 254, DATMIN * 100, DATMAX
* 100) / 100.0; // Señal de referencia
            datos[1] = map(SerialUSB.read(), 0, 254, DATMIN * 100, DATMAX
* 100) / 100.0; // Señal de parada del proceso 0-Funcionando / 1-Detenido
        }
        while (bb != -1)
            bb = SerialUSB.read();

        SerialUSB.write(255);
        SerialUSB.write(map(int(yk1 * 10), -700, 700, 0, 254));
        SerialUSB.write(map(int(v), -2400, 2400, 0, 254));
    }
}

```