Leyes de esfuerzos y funciones de desplazamiento a lo largo de una barra

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se obtendrá la expresión de las leyes de esfuerzos axiles, cortantes y flectores así como de las funciones de desplazamiento por axil y por flector suponiendo un comportamiento elástico y lineal de la estructura.

2 Introducción

Los esfuerzos son fuerzas y momentos internos estáticamente equivalentes a la distribución de tensiones, es decir, se trata de la resultante de las tensiones en la sección de la barra considerada.

Las funciones de desplazamiento definen el movimiento longitudinal, transversal y giro en una sección cualquiera de la barra ya que representan la resultante o acumulación de deformaciones efectivas y de movimientos de sólido rígido hasta la sección considerada.

Mediante las leyes de esfuerzos N(x), V(x) y M(x), (ley de axiles, cortantes y flectores) y las funciones de desplazamientos u(x), v(x) y θ(x) (función de desplazamiento longitudinal, transversal o flecha y giro) se caracteriza estática y cinemáticamente cada una de las secciones de la barra.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- determinar la expresión de las leyes de axiles, cortantes y flectores de una barra, a partir de la carga que esté actuando sobre ella
- relacionar tensiones y solicitaciones
- determinar la expresión de las funciones de desplazamiento longitudinal, transversal y giro de una barra a partir de la deformaciones
- obtener las funciones de desplazamiento a partir de las leyes de esfuerzos cuando la estructura esté resuelta estáticamente

4 Leyes de esfuerzos y funciones de desplazamiento a lo largo de una barra

4.1 Concepto, nomenclatura y criterio de signos

Tanto las leyes de esfuerzos como las funciones de desplazamientos de expresan en ejes locales de la barra.

Las leyes de esfuerzos definen el valor del esfuerzo correspondiente en todas las secciones de la barra en función de la coordenada x (distancia al extremo inicial de la barra), indicando cuánto y cómo está solicitada dicha sección bajo un estado tensional concreto. La representación gráfica de las leyes de esfuerzos son los diagramas.

El criterio de signos según Resistencia de Materiales es el siguiente (Figura 1):

Figura 1. Criterio de signos en la rebanada

Llamamos **N(0)**, **V(0)** y **M(0)** al valor que adopta la ley de axiles, cortantes y flectores al particularizar para x=0 y **N(L)**, **V(L)** y **M(L)**, al particularizar para x=L.

Definidos los ejes de la barra, los esfuerzos en el extremo inicial (i) son **Fx_i, Fy_i y M_i** y en el extremo final (j) son **Fx_j, Fy_j y M_j.**

Todos ellos se representan con signo positivo en la Figura 2, en la que se indica asimismo la correlación entre ambos.

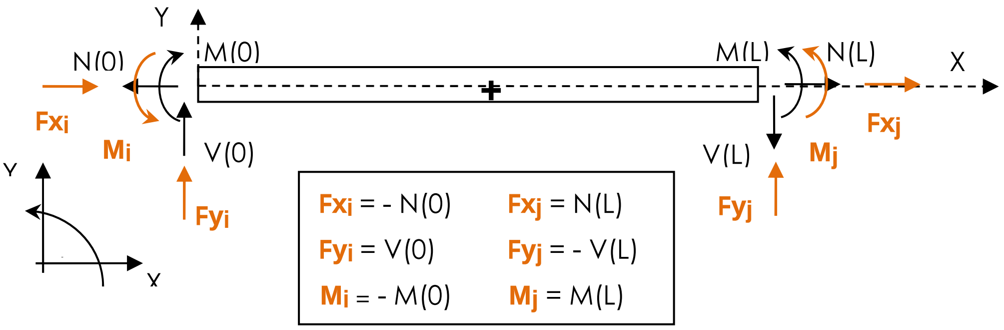

Figura 2. Esfuerzos en la barra

Las funciones de desplazamiento definen el valor del movimiento en todas las secciones de la barra en función de la coordenada x (distancia al extremo inicial de la barra), indicando cuánto y cómo se mueve dicha sección bajo un estado deformacional concreto

Llamamos **u(0)**, **v(0)** y **θ(0)** al valor que adopta la función de desplazamientos longitudinales, transversales y de giros al particularizar para x=0 y **u(L)**, **v(L)** y θ **(L)**, al particularizar para x=L.

Definidos los ejes de la barra, los movimientos en el extremo inicial (i) son **dx_i, dy_i y θ_i** y en el extremo final (j) son **dx_j, dy_j y θ_j**

Todos ellos se representan con signo positivo en la Figura 3, en la que se indica asimismo la correlación entre ambos

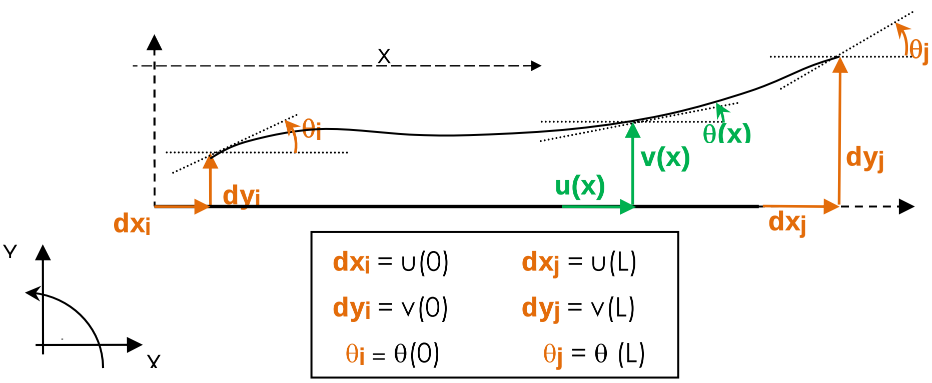

Figura 3. Movimientos en la barra

4.2 Leyes de esfuerzos por axil

Sea una barra (figura 4) sobre la que actúa una carga axial variable $p_a(x)$, siendo L su longitud, A el área de la sección transversal y E el módulo de elasticidad longitudinal.

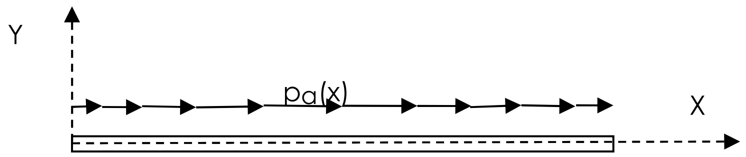

Figura 4. Barra con carga axial variable

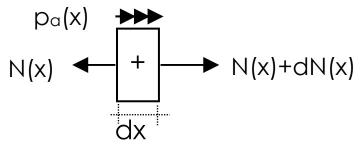

Figura 5. Equilibrio en la rebanada

Planteamos el equilibrio de fuerzas en la rebanada diferencial (figura 5)

$$\sum Fx = 0 \rightarrow -N(x) + p_a(x)dx + N(x) + dN(x) = 0 \rightarrow p_a(x)dx + dN(x) = 0 \rightarrow p_a(x) + \frac{dN(x)}{dx} = 0$$

$$\boxed{-p_a(x) = \frac{dN(x)}{dx} = N'(x)}$$

La carga axial repartida (cambiada de signo) es la derivada del axil

$$\boxed{N(x) = \int -p_a(x)dx}$$

El axil es la integral de las cargas axiales (cambiadas de signo)

Por ser una integral indefinida, al integrar tendremos una constante

$$N(x) = \int_0^x -p_a(x)dx + c_1 \rightarrow x = 0 \quad N(0) = c_1 \quad c_1 = -Fx_i$$

Si no actúa ninguna fuerza axil sobre la barra el esfuerzo axil es constante. Si la fuerza axil es constante, el esfuerzo axil es lineal

El axil es la resultante de las tensiones en la sección

$$\boxed{N(x) = \int_A \sigma(x)dA}$$

Suponiendo la tensión constante (figura 6) obtenemos la expresión de la tensión normal por axil:

$$\boxed{\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}}$$

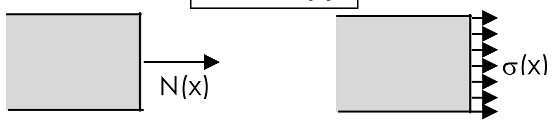

Figura 6. Axil y tensión normal (constante) en la sección

4.3 Funciones de desplazamiento por axil

En la figura 7 se representa la cinemática de la barra con carga axial

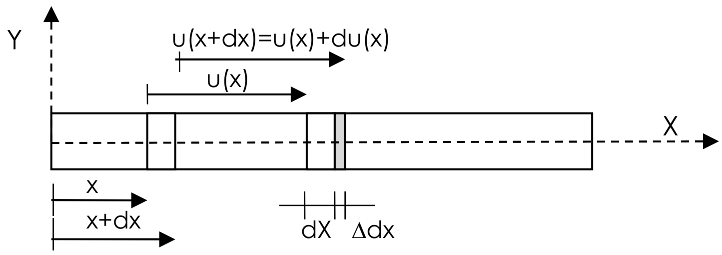

Figura 7. Cinemática de la barra con carga axial

Planteamos la compatibilidad de desplazamientos en la rebanada diferencial

$$\varepsilon(x) = \frac{u(x+dx)-u(x)}{dx} = \frac{u(x)+du(x)-u(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx} = u'(x)$$

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = u'(x)}$$

La deformación axial unitaria es la derivada de la función desplazamiento por axil

$$\boxed{u(x) = \int \varepsilon(x)\,dx}$$

La función desplazamiento por axil es la integral de las deformaciones axiales unitarias

Por ser una integral indefinida, al integrar tendremos una constante

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x)\,dx + c_E \rightarrow x = 0 \quad u(0) = c_E \quad c_E = dx_i$$

Si no actúa ninguna fuerza axil sobre la barra el esfuerzo axil es constante y entonces:

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta L}{L}$$

4.4 Leyes de esfuerzos por flexión

Sea una barra (figura 8) sobre la que actúa una carga normal variable $p_n(x)$, siendo L su longitud, I la inercia de la sección transversal y E el módulo de elasticidad longitudinal.

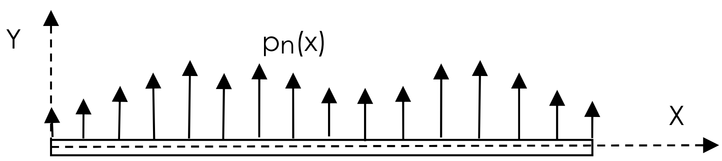

Figura 8. Barra con carga normal variable

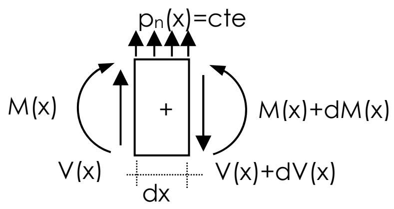

Figura 9. Equilibrio en la rebanada

Planteamos el equilibrio de fuerzas verticales en la rebanada diferencial (figura 9):

$$\sum Fy = 0 \rightarrow V(x) + p_n(x)dx - V(x) - dV(x) = 0 \rightarrow p_n(x)dx - dV(x) = 0 \rightarrow p_n(x) - \frac{dV(x)}{dx} = 0$$

$$\boxed{p_n(x) = \frac{dV(x)}{dx} = V'(x)}$$

La carga normal repartida es la derivada del cortante

$$\boxed{V(x) = \int p_n(x)dx}$$

El cortante es la integral de las cargas normales (perpendiculares al eje barra)

Por ser una integral indefinida, al integrar tendremos una constante

$$V(x) = \int_0^x p_n(x)dx + c_2 \rightarrow x = 0 \quad V(0) = c_2 \quad c_2 = Fy_i$$

Planteamos ahora el equilibrio de momentos:

$$\sum M = 0 \rightarrow -M(x) - V(x)dx - p_n(x)dx\frac{dx}{2} + M(x) + dM(x) = 0 \rightarrow -V(x)dx + dM(x) = 0$$

$$\boxed{V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = M'(x)} \qquad \boxed{M(x) = \int V(x)dx}$$

El cortante es la derivada del momento y el momento es la integral del cortante

Por ser una integral indefinida, al integrar tendremos una constante

$$M(x) = \int_0^x V(x)dx + c_3 = \int_0^x \int p_n(x)dx + c_2x + c_3 \rightarrow x = 0 \quad M(0) = c_3 \quad c_3 = -M_i$$

Si no actúa ninguna fuerza sobre la barra el cortante es constante y el momento es lineal, si la fuerza es constante el cortante es lineal y el momento es de 2º grado, si la fuerza es lineal el cortante es de 2º grado y el momento es de 3er grado.
Si en un tramo la ley de cortantes es nula, la ley de momentos es constante.
Si en una sección el cortante es nulo el momento es máximo (V(X)= dM(x)/dx=0 →M=máximo)

Relacionemos ahora el momento flector y la tensión normal por flexión (figura 10

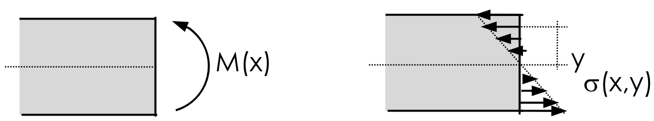

Figura 10. Axil y tensión normal en la sección

El momento es la resultante de las tensiones en la sección:

$$\boxed{M(x) = \int_A \sigma(x,y)\, y\, dA}$$

La expresión de la tensión normal por flexión es:

$$\boxed{\sigma(x,y) = \frac{M(x)}{I} y \qquad \sigma_{max}(x,y) = \frac{M(x)}{I} y_{max} = \frac{M(x)}{W}}$$

4.5 Funciones de desplazamiento por flexión

En la figura 11 se representa la cinemática de la barra y la rebanada a flexión

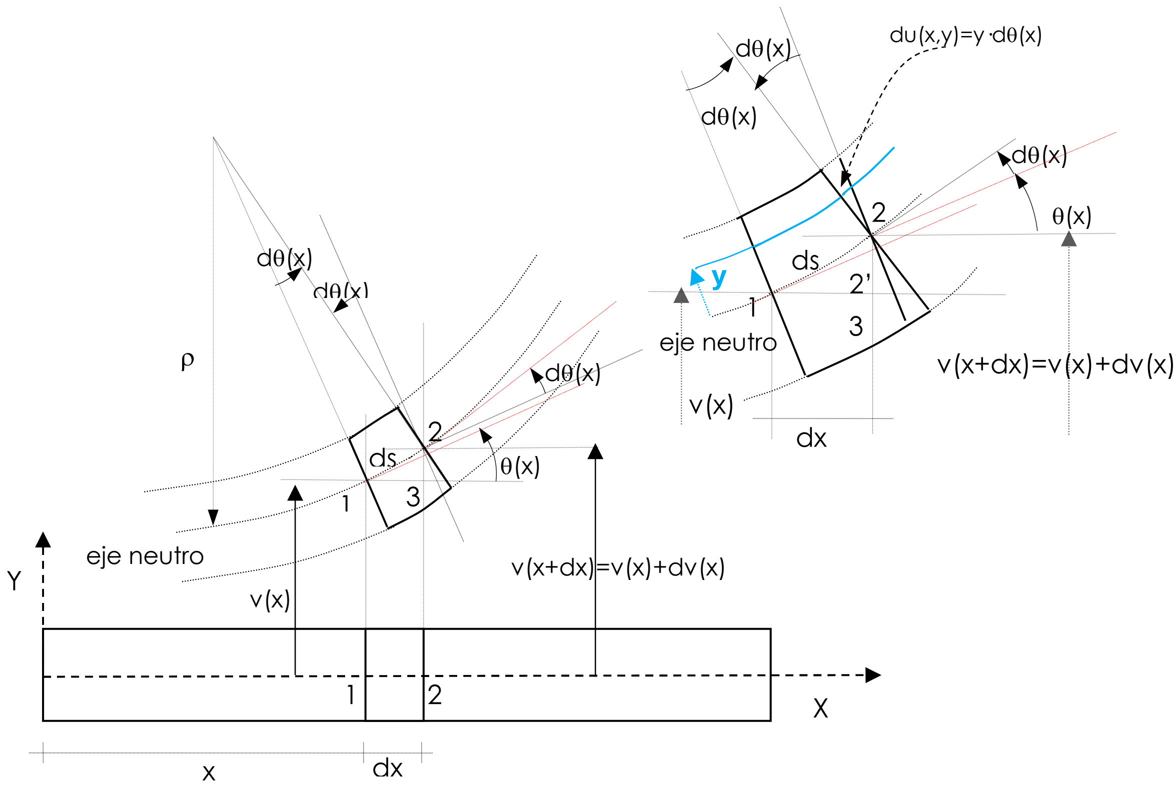

Figura 11. Cinemática de la barra y la rebanada a flexión

Suponiendo que se cumple la hipótesis de pequeños movimientos:

$$ds = dx = \rho \cdot d\theta(x) \rightarrow \rho = \frac{dx}{d\theta(x)} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta(x)}{dx} = \kappa \text{ (curvatura)}$$

Triángulo 123 = triángulo 12'3 (2≈2'):

$$tg\theta(x) = \theta(x) = \frac{v(x)+dv(x)-v(x)}{dx} = \frac{dv(x)}{dx} = v'(x)$$

$$\boxed{\theta(x) = v'(x)}$$

El giro es la derivada del desplazamiento transversal (flecha)

$$\boxed{v(x) = \int \theta(x)\, dx}$$

El desplazamiento transversal es la integral de los giros

Por ser una integral indefinida, al integrar tendremos una constante

$$v(x)=\int_0^x \theta(x)dx+c_F \rightarrow x=0 \quad v(0)=c_F \quad c_F=dy_i$$

Retomando la compatibilidad de deformaciones y desplazamientos en la rebanada diferencial:

$$\kappa=\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{dv(x)}{dx})=\frac{d^2v(x)}{dx^2}=v''(x) \qquad \boxed{\kappa=\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta(x)}{dx}=v''(x)}$$

La curvatura es la derivada del giro (variación del ángulo por unidad de longitud, pendiente ley de giros)

$$\varepsilon(x,y)=\frac{du(x,y)}{dx}=y\frac{d\theta(x)}{dx}=y\,v''(x) \qquad \boxed{\varepsilon(x,y)=y\frac{d\theta(x)}{dx}=y\,v''(x)}$$

La deformación axial unitaria de cada fibra situada a una altura **y** respecto del eje neutro es proporcional a ésta y a la curvatura

La función giro es la integral de las deformaciones axiales unitarias a la altura **y** dividido por **y.**

$$\boxed{\theta(x)=\int\frac{\varepsilon(x,y)}{y}dx}$$

Por ser una integral indefinida, al integrar tendremos una constante

$$\theta(x)=\int_0^x\frac{\varepsilon(x,y)}{y}dx+c_G \rightarrow x=0 \quad \theta(0)=c_G \quad c_G=\theta_i$$

La función desplazamiento transversal es la integral de las deformaciones axiales unitarias

$$\boxed{v(x)=\iint\frac{\varepsilon(x,y)}{y}dx}$$

Por ser una integral indefinida, al integrar tendremos una constante

$$v(x)=\int_0^x\theta(x)dx+c_F=\int_0^x\int\frac{\varepsilon(x,y)}{y}dx+c_Gx+c_F \rightarrow x=0 \quad v(0)=c_F \quad c_F=dy_i$$

5 Cierre

A lo largo de este tema hemos obtenido las leyes de esfuerzos y las funciones de desplazamiento de una barra, relacionándolas, respectivamente con la carga exterior y las tensiones y con las deformaciones. Estas expresiones completan la definición estática y cinemática de la estructura.

Se proponen la siguiente cuestión:

1. Sabiendo la ley que relaciona tensiones y deformaciones cuando el comportamiento es lineal (ley de Hooke), la relación entre tensiones y solicitaciones deducida en los apartados 4.2 y 4.4 y la relación entre deformaciones y desplazamientos deducida en los apartados 4.3 y 4.5 deducir

las expresiones de las funciones de desplazamiento en función de las solicitaciones.

(Solución: $u(x)=\int_0^x \frac{N(x)}{EA}dx+dx_i$ $\qquad v(x)=\int_0^x\int\frac{M(x)}{EI}dx+\phi_i x+dy_i$)

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Abdilla E. "Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1". Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

[2] Gere J.M., Timoshenko S.P. "Mecánica de Materiales" Grupo editorial Iberoamérica. 1984

6.2 Figuras: