



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Miguel Martínez Valero

TRABAJO FINAL DE GRADO

**DESARROLLO DE UN SISTEMA
AUTOMÁTICO PARA EL
SEGUIMIENTO DEL VUELO DE UN
DRON**

Ingeniería Aeroespacial

Tutor: Prof. D. Jaime Riera Guasp

Cotutor: D. Damián Ginestar Peiró

Septiembre 2019

Para mi familia

Quisiera agradecer a todas las personas que me han acompañado durante estos cuatro años de carrera, me han apoyado, y me han ayudado a levantarme tras cada caída.

Doy las gracias a mi familia, por haberme aguantado en mis peores momentos y por tener siempre un valioso consejo que darme.

A mi tío Miguelo, que siempre me preguntaba por mis intentos infructuosos de hacer volar el dron.

Y, por supuesto, agradecer a Jaime Riera y Damián Ginestar, mis tutores del trabajo, que me han ofrecido su ayuda incondicional en cada paso de este estudio.

RESUMEN

La industria de las aeronaves pilotadas por control remoto (RPAs) y, en concreto, la de los drones, se encuentra en su apogeo. Por ello, surge la necesidad de descubrir modelos matemáticos capaces de definir la trayectoria de estos vehículos aéreos. El presente Trabajo de Fin de Grado (TFG) desarrolla un procedimiento analítico para predecir el itinerario de un cuadricóptero en función de los parámetros geométricos y las actuaciones de sus rotores. Con este fin, se explican los fenómenos presentes en la intervención de un dron, se estudia el comportamiento del aire alrededor de las hélices para definir la tracción generada por estas y se caracterizan los motores del modelo *Cheerwing Syma XS5W-V3*. A partir de la grabación de dos despegues realizados por este cuadricóptero, se comprueba que es posible pronosticar con un programa de simulación la trayectoria ejecutada. Para acabar, se definen los costes del proyecto y la normativa a tener en cuenta durante su realización.

Palabras clave: dron, cuadricóptero, despegue, trayectoria

RESUM

La indústria de les aeronaus pilotades per mitjà del control remot (RPAs) i, concretament, la dels drons, es troba en el seu apogeu. Per això, apareix la necessitat de descobrir nous models matemàtics capaços de definir la trajectòria d'aquests vehicles aeris. El present Treball de Fi de Grau (TFG) desenvolupa un procediment analític per predir l'itinerari d'un quadricòpter en funció dels paràmetres geomètrics i les actuacions dels seus rotors. Amb aquesta finalitat, s'expliquen els fenòmens presents en la intervenció d'un dron, s'estudia el comportament de l'aire al voltant de les hèlixs per definir la tracció generada per aquestes i es caracteritzen els motors del model *Cheerwing Syma XS5W-V3*. A partir de l'enregistrament de dos enlairaments realitzats per aquest quadricòpter, es comprova que és possible pronosticar amb un programa de simulació la trajectòria executada. Per acabar, es defineixen els costos del projecte i la normativa a tenir en compte durant la seua realització.

Paraules clau: dron, quadricòpter, enlairament, trajectòria

ABSTRACT

The industry of remotely piloted aircraft (RPAs) and, specifically, the one that investigates drones, is in full swing. Therefore, there is a need to discover mathematical models capable of defining the trajectory of these aerial vehicles. This Final Degree Project (TFG) develops an analytical procedure to predict the itinerary of a quadcopter based on the geometric parameters and the actions of its rotors. To achieve this, the phenomena present in the intervention of a drone are explained, the behavior of the air around the propellers is studied to define the traction generated by them and the engines of the *Cheerwing Syma XS5W-V3* model are characterized. From the recording of two take-offs carried out by this quadcopter, it is verified that it is possible to predict with a simulation program the trajectory executed. Finally, the costs of the project and the regulations to be considered during its implementation are commented.

Key words: drone, quadcopter, take-off, trajectory

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: estructura del cuadricóptero y esquema de fuerzas.....	7
Figura 2: marcos de referencia.....	8
Figura 3: velocidades angulares en ejes cuerpo.....	11
Figura 4: efecto Coriolis.....	12
Figura 5: aproximación del cuadricóptero como un disco.....	15
Figura 6: efecto giroscópico.....	17
Figura 7: parámetros geométricos de la pala.....	18
Figura 8: sistema en ejes pala F^P	21
Figura 9: grados de libertad de una aeronave de ala rotatoria.....	22
Figura 10: esquema del paso del flujo a través de un rotor.....	24
Figura 11: batería 4S con una tensión o diferencia de potencial $v_b = 14,8 V$	29
Figura 12: circuito eléctrico de un motor DC.....	30
Figura 13: paso ϑ_G de la hélice de un dron.....	32
Figura 14: dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	34
Figura 15: batería 1S con tensión nominal $v_b = 3,7 V$	35
Figura 16: circuito electrónico del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	36
Figura 17: placa controladora del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	37
Figura 18: mando de control remoto del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	37
Figura 19: posiciones utilizadas para la cuantificación de la potencia en el dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	38
Figura 20: motores del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	39
Figura 21: hélices del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	39
Figura 22: montaje del circuito eléctrico para la medición de la potencia P_i	41
Figura 23: circuito eléctrico con el amperímetro, el voltímetro y el generador de corriente.....	41
Figura 24: curva de potencia con carga de un motor del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	42
Figura 25: fotograma de una hélice girando con una velocidad angular Ω_i	43

Figura 26: fotograma de una hélice girando con una velocidad angular $\Omega_{rpm}^i = 2333,33 \text{ rpm}$ (izquierda) y $\Omega_{rpm}^i = 5316,46 \text{ rpm}$ (derecha)	44
Figura 27: relación entre el voltaje del motor v_m y las revoluciones a las que gira el motor en vacío $\Omega_{rpm}^{vacío}$	45
Figura 28: montaje para la medición de la tracción f	47
Figura 29: equilibrio de fuerzas con la incorporación del dinamómetro	47
Figura 30: dinamómetro digital <i>FL5</i>	48
Figura 31: representación de las mediciones de un dinamómetro en <i>AFH-FAST/FD</i>	48
Figura 32: mediciones del dinamómetro para las once posiciones del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	49
Figura 33: preparación del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> para un despegue vertical	51
Figura 34: funcionamiento del <i>Tracker</i> en el establecimiento de la trayectoria seguida por el modelo <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	52
Figura 35: trayectoria del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en el primer despegue	52
Figura 36: trayectoria del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en el segundo despegue	53
Figura 37: trayectoria del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en el tercer despegue.	53
Figura 38: tracción f y momentos τ_ϕ, τ_θ y τ_ψ del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> para unas condiciones de vuelo	59
Figura 39: posición ξ y orientación η del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> para unas condiciones de vuelo	59
Figura 40: velocidad (V^E y Ω^E) del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> para unas condiciones de vuelo	60
Figura 41: aceleración (\dot{V}^E y $\dot{\Omega}^E$) del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> para unas condiciones de vuelo	60
Figura 42: posición Z^E , velocidad \dot{Z} y aceleración \ddot{Z} del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en un despegue vertical.....	61
Figura 43: ajuste de la posición Z^E y de la velocidad Z del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en un despegue vertical.....	62

Figura 44: Z^E experimental (curva roja) y Z^E analítica reproduciendo los datos del despegue (curva verde)	63
Figura 45: curva de potencia del despegue vertical (tendencia naranja) y la obtenida de manera genérica midiendo directamente del motor (tendencia azul) 63	
Figura 46: ejes horizonte F^E y ejes viento F^B del cuadricóptero en el momento justo de los despegues	64
Figura 47: posición Z^E , velocidad \dot{Z} y aceleración \ddot{Z} del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en un despegue vertical mediante las ecuaciones matemáticas	65
Figura 48: posición ξ y orientación η del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en un despegue no vertical mediante las ecuaciones matemáticas	66
Figura 49: simulación de la trayectoria del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en un despegue no vertical mediante las ecuaciones matemáticas	67
Figura 50: esquema representativo del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en el despegue no vertical	68
Figura 51: volumen de control de un rotor en un vuelo ascendente axial	102
Figura 52: esquema de fuerzas en vuelo a punto fijo	104
Figura 53: autorrotación ideal	106
Figura 54: volumen de control para el vuelo descendente en molinete frenante	107

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: parámetros geométricos del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	35
Tabla 2: mediciones realizadas en un motor del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> .	40
Tabla 3: mediciones realizadas en un motor en condiciones en vacío del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i>	45
Tabla 4: comparación de la tracción f estimada para las once posiciones del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> por el dinamómetro y matemáticamente	50
Tabla 5: velocidades de rotación Ω_{rpm}^i en los tres despegues realizados	54
Tabla 6: ejemplo de condiciones iniciales para introducir en la simulación	57
Tabla 7: parámetros de los motores para el modelo <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> ...	58
Tabla 8: tracción de los cuatro rotores del dron <i>Cheerwing Syma XS5W-V3</i> en un despegue no vertical	67
Tabla 9: costes específicos del proyecto	76
Tabla 10: costes globales del proyecto	77

ÍNDICE DE CONTENIDOS

NOMENCLATURA xxi

PARTE I: MEMORIA

1. INTRODUCCIÓN.....	3
1.1. MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL TEMA.....	3
1.2. ESTADO DE LA CUESTIÓN	3
1.3. OBJETIVOS Y ESTRUCTURA	4
2. ECUACIONES DE LA TRAYECTORIA	6
2.1. MARCO TEÓRICO	6
2.2. MODELADO MATEMÁTICO.....	7
2.2.1. Cinemática del cuadricóptero	9
2.2.2. Dinámica del cuadricóptero	12
3. MODELADO DE LA TRACCIÓN	20
3.1. DIFERENCIA ENTRE UN DRON Y UNA AERONAVE DE ALA ROTATORIA	20
3.2. CASO GENERAL	23
3.3. ADIMENSIONALIZACIÓN	27
4. CARACTERIZACIÓN DE UN DRON	28
4.1. BATERÍA	28
4.2. COCIENTE TRACCIÓN/PESO	29
4.3. MOTORES Y K_v	29
4.4. HÉLICES	31
5. CARACTERIZACIÓN DEL DRON <i>CHEERWING SYMA XS5W-V3</i>	34
5.1. CUADRICÓPTERO UTILIZADO PARA EL PROYECTO	34
5.2. CIRCUITO ELECTRÓNICO DEL DRON	35
5.3. CURVA DE POTENCIA.....	38
5.3.1. Estimación de las revoluciones Ω_{rpm}^i de manera directa	42
5.3.2. Estimación de las revoluciones Ω_{rpm}^i a través del parámetro K_v	44
5.4. ESTIMACIÓN DE LA TRACCIÓN	46

6. TRAYECTORIA DEL DESPEGUE DE UN DRON	51
7. SIMULACIÓN EN <i>MATLAB</i>	55
7.1. RESUMEN DE LAS ECUACIONES MATEMÁTICAS	55
7.2. SIMULACIÓN DEL DESPEGUE VERTICAL	61
7.3. SIMULACIÓN DEL DESPEGUE NO VERTICAL	65
8. CONCLUSIONES	69
8.1. FUTUROS TRABAJOS	69

PARTE II: PRESUPUESTO

1. CÁLCULO DE PRESUPUESTOS	73
1.1. DESGLOSE DE COSTES UNITARIOS.....	73
1.2. CÁLCULO DE PRESUPUESTOS.....	75

PARTE III: PLIEGO DE CONDICIONES

1. NORMATIVA DE USO DE DRONES	81
1.1. VUELOS RECREATIVOS.....	81
1.2. VUELOS PROFESIONALES O COMERCIALES	82
2. NORMATIVA DE PROYECTOS EXPERIMENTALES	83
 BIBLIOGRAFÍA	 85

ANEXOS

A. TRATAMIENTO DE INCERTIDUMBRES	87
B. PROGRAMAS DE <i>MATLAB</i>.....	89
B.1. ECUACIONES EN <i>MATLAB</i>	89
B.2. PROGRAMA PRINCIPAL	90
B.3. AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS.....	99
C. VUELO AXIAL.....	101

C.1. VUELO ASCENDENTE	101
C.2. VUELO A PUNTO FIJO	104
C.3. VUELO DESCENDENTE	106

NOMENCLATURA

a	coste de amortización
a_∞	velocidad del sonido a nivel del mar
APC	constante de la hélice
b	factor de empuje
β	ángulo de batimiento de una pala
\bar{c}	cuerda media de la pala
χ	ángulo de arrastre de una pala
c_r	cuerda en la raíz de la pala
c_t	cuerda en la punta de la pala
C_p	coeficiente de potencia adimensional
C_T	coeficiente de tracción adimensional
d	coeficiente de resistencia
d_i	número de celdas que conforman una batería
δ	radio de la hélice
din	medición del dinamómetro
η	vector orientación
F_a	fuerza que ejerce el rotor sobre el fluido
F^B	sistema en ejes viento
F^E	sistema en ejes horizonte
F^P	sistema en ejes pala
f	empuje total del cuadricóptero
f_i	empuje generado por el rotor i
φ	frecuencia de giro
fot	número de fotogramas necesarios para definir la vuelta de una pala
g	constante de gravitación terrestre
$G^B(\eta)$	peso del cuadricóptero
h	horas de trabajo al año
i_m	intensidad que llega al motor
I_{rr}	momento de inercia de los rotores
I_{xx}	momento de inercia en la dirección X^B
I_{yy}	momento de inercia en la dirección Y^B
I_{zz}	momento de inercia en la dirección Z^B
K_v	constante de proporcionalidad entre la tensión v_m y la velocidad $\Omega_{rpm}^{vacío}$
l	distancia entre el centro de gravedad del dron y el eje de los rotores
m	masa del cuadricóptero

\dot{m}	gasto másico
M	factor para minimizar en el ajuste por mínimos cuadrados
m_b	masa de una pala
m_H	masa de una hélice
M_∞	número de Mach
n_a	periodo de amortización
n_b	número de palas que constituyen la hélice
n_{fot}	número de fotogramas presentes en una grabación
Ω^B	vector velocidad angular en ejes viento
Ω^E	vector velocidad angular en ejes horizonte
Ω_i	velocidad angular del rotor i en rad/s
Ω_{rpm}^i	velocidad angular del rotor i en rpm
$\Omega_{rpm}^{vacío}$	velocidad angular de un rotor en condiciones de vacío
p	velocidad angular alrededor de X^B
PF	factor de potencia adimensional
P, P_i	potencia inducida
p_∞	presión a nivel del mar (atmósfera ISA)
P_O	potencia parásita
p_z	presión del fluido alrededor del rotor
ϕ	ángulo de alabeo
Ψ	posición de X^P respecto a X^B
ψ	ángulo de guiñada
q	velocidad angular alrededor de Y^B
r	velocidad angular alrededor de Z^B
Re	número de Reynolds
ρ_∞	densidad a nivel del mar (atmósfera ISA)
R_m	resistencia del motor
S	superficie del disco del rotor
S_n	superficie de la pala
t	tiempo
T	tiempo que tarda una pala en realizar una vuelta
T/W	cociente tracción/peso
τ_i	par del rotor i
τ_ϕ	par de alabeo
τ_ψ	par de guiñada
τ_θ	par de cabeceo
t_h	tasa horaria
T_∞	temperatura a nivel del mar (atmósfera ISA)

T_m	tiempo de muestreo
θ	ángulo de cabeceo
u	componente de la velocidad en dirección X^B
u	incertidumbre de una medida
ϑ	ángulo de paso de una pala
ϑ_0	ángulo de paso colectivo de una pala
ϑ_c	ángulo de paso cíclico de una pala
ϑ_G	ángulo de paso geométrico de una pala
v	componente de la velocidad en dirección Y^B
v_0	tensión en bornes del motor
v_b	tensión abastecida por la batería
V^B	vector velocidad lineal en ejes viento
V_C	valor de compra
V^E	vector velocidad lineal en ejes horizonte
V_{fot}	velocidad de grabación de la cámara lenta
v_i	velocidad inducida en el plano del rotor
v_{i2}	velocidad inducida en la estela lejana corriente abajo
V_∞	módulo de la velocidad del aire en F^B
v_m	tensión que llega al motor
V_R	valor residual
v_s	tensión de la celda de una batería
w	componente de la velocidad en dirección Z^B
ξ	vector posición en ejes horizonte
ζ	plano de punta de palas



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

PARTE I: MEMORIA

1. INTRODUCCIÓN

1.1. MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL TEMA

Los drones son una herramienta cada vez más importante en nuestra sociedad para resolver problemas: recogen información en espacios abiertos difíciles de llegar para las personas, participan en la búsqueda de individuos u objetos en los que la minimización del tiempo es fundamental en la resolución de los problemas e incluso son capaces de transportar objetos de un lugar a otro. Por ejemplo, a fecha de abril de 2019, uno de estos vehículos no tripulados entrega un órgano para un trasplante con éxito por primera vez. Todo esto pone el foco en los drones, que son contemplados como artefactos indispensables para el futuro.

Por todo esto, parece interesante centrarse en la comprensión de estos vehículos, estudiando los factores que permiten una optimización en su funcionamiento. Todos los elementos que constituyen el dron afectan en su comportamiento y, por eso, estos son alterados de una u otra forma según el objetivo que se les pretende otorgar. Un dron de carreras no presenta las mismas características que uno con funciones de vigilancia.

Además, desde el punto de vista ingenieril, resulta apropiado el aprendizaje de los vehículos no tripulados. El grado de Ingeniería Aeroespacial no hace mucho hincapié en la comprensión de estos mecanismos, centrándose en otros campos como el de la aviónica. No obstante, en España actualmente existen muchas empresas (*AEDRON, Drone Spain...*) que se focalizan en la investigación de los drones.

1.2. ESTADO DE LA CUESTIÓN

Durante los siglos XX y XXI, con el nacimiento del campo de la aviación, se abren nuevas rutas de investigación. El estudio de los vehículos aéreos no tripulados (VANT) surge por sus aplicaciones militares, tanto en misiones de reconocimiento como en ataque. Inicialmente, presentaban numerosas formas, configuraciones y características; pero la

particularidad en todos ellos era la capacidad de realizar un vuelo autónomo a partir de un vuelo preprogramado a través de automatización dinámica.

Sin embargo, ya en la segunda mitad del siglo XX, con el comienzo del uso de los VANT en el ámbito civil, se comprueba que los modelos más eficientes en sus actuaciones son los cuadricópteros, es decir, modelos con cuatro motores. Estos drones funcionan por control desde una ubicación remota. Debido a este cambio en su funcionalidad, con la incorporación de cámaras para seguir su trayectoria en lugares de difícil acceso o donde no existe visibilidad por parte del controlador externo, surge la necesidad de prever el desplazamiento a realizar por el dron según las actuaciones de sus motores.

Existen muchos estudios realizados recientemente sobre el comportamiento, estabilidad y eficiencia de los cuadricópteros. Precisamente, en base a todas estas investigaciones parte nuestro trabajo, cuya finalidad consiste en la explicación de la trayectoria de un vehículo desde un punto de vista analítico.

1.3. OBJETIVOS Y ESTRUCTURA

El principal objetivo consiste en el desarrollo de un modelo matemático de un VANT con cuatro rotores que permita predecir su posición como función del tiempo, comprobando la validez de la configuración desarrollada midiendo la trayectoria del despegue vertical de un dron a partir de la grabación de la misma. El modelo matemático debe ser capaz de reproducir cualquier trayectoria, siempre y cuando las hélices mantengan constante su velocidad de rotación y generen la misma tracción en todo su desplazamiento. Para llevar a cabo esto, debemos cumplir unos objetivos secundarios, que se encuentran definidos a continuación.

- Estudiar la dinámica de un cuadricóptero para implementar un modelo matemático.
- Establecer un método para el cálculo de la tracción generada por los rotores presentes en el dron.

- Caracterizar los parámetros de los motores, relacionando la potencia eléctrica proporcionada al motor con la velocidad de giro de las hélices.
- Determinar una forma de seguimiento de la trayectoria del despegue vertical realizada.
- Implementar el modelo matemático en un lenguaje de programación (*Matlab*).
- Comparar los resultados de la simulación con las medidas experimentales.
- Explicar de manera cualitativa otro tipo de despegues (no verticales).

El proyecto se encuentra dividido en capítulos para facilitar su presentación. En el Capítulo 2 se precisa el modelo analítico tomado para predecir la trayectoria de un dron. En el Capítulo 3 se desarrollan las hipótesis asumidas para la determinación de los parámetros del modelo que dependen de los motores, como el empuje o tracción. Posteriormente, se describen los factores del cuadricóptero que afectan en el desplazamiento del vehículo no tripulado y los procedimientos llevados a cabo para su determinación (Capítulos 4 y 5). A continuación, en el Capítulo 6, se detallan los despegues verticales experimentales realizados y, en el Capítulo 7, se procede a validar el modelo matemático. Por último, en el Capítulo 8 aparecen las conclusiones del estudio.

2. ECUACIONES DE LA TRAYECTORIA

2.1. MARCO TEÓRICO

En un cuadricóptero existen seis grados de libertad¹ correspondientes a la traslación y a la rotación en sus tres ejes de coordenadas² (X^B , Y^B y Z^B), mientras que el número de variables controlables se reduce a cuatro (concernientes a las velocidades angulares Ω_i de las cuatro hélices). Este hecho provoca que el sistema con el que se está tratando presente acoplamientos en sus actuaciones, ya que no se puede llevar a cabo un movimiento traslacional (movimiento en los ejes X^E y Y^E) sin realizar una rotación respecto a uno de los ejes. La inclinación del cuadricóptero se consigue a través del cambio del par τ —y, *por ende*, del empuje— de los rotores y puede llevar a una inestabilidad del sistema según la magnitud de la variación de estos parámetros en alguno de los rotores. Por tanto, existen limitaciones en las maniobras a realizar por este vehículo aéreo no tripulado (Zoran, Petar, & Denis, 2016).

Los drones se encuentran dentro del grupo de aeronaves de ala rotatoria, puesto que, a diferencia de las aeronaves de ala fija, sus superficies sustentadoras —las hélices— giran alrededor de un eje (en este caso, alrededor de los ejes de los rotores, que son paralelos entre sí). El cuadricóptero es simétrico y, con la rotación de sus hélices, se crea un flujo de aire en la dirección negativa del eje Z^B que resulta en una fuerza de empuje o tracción f en su dirección positiva. Asumiendo que se trata de un cuerpo rígido, la velocidad angular Ω_i de cada rotor es lo único determinante en su movimiento. Los parámetros más importantes con los que se estudia el modelado aparecen representados en *Figura 1*.

Por tanto, haciendo un resumen de las principales hipótesis consideradas, se encuentran:

¹ Tal y como aparece mencionado explícitamente más tarde, este hecho se debe a la consideración del dron como un cuerpo rígido.

² Los sistemas de referencia se encuentran descritos en la Sección 2 de este capítulo.

- Aceptación del dron como un cuerpo rígido, por lo que no existe movimiento relativo de algunas zonas del cuadricóptero respecto a otras.
- Asunción de una atmósfera ideal, por lo que fenómenos como ráfagas de viento, cambios de temperatura... no son tenidos en cuenta.
- Uso de la atmósfera ISA (*International Standard Atmosphere*), que establece al nivel del mar una densidad $\rho_\infty = 1,225 \text{ kg/m}^3$, una presión $p_\infty = 101325 \text{ Pa}$ y una temperatura $T_\infty = 15 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Contención en el cuadricóptero de tres ejes de simetría, correspondientes a los ejes X^B, Y^B y Z^B .

2.2. MODELADO MATEMÁTICO

Con la finalidad de conocer la posición ξ y la orientación η del cuadricóptero, es posible llevar a cabo una simulación por ordenador que, simple y rápidamente, determine la trayectoria del vehículo con bastante precisión. Para ello, es necesario definir dos sistemas de coordenadas distintos.

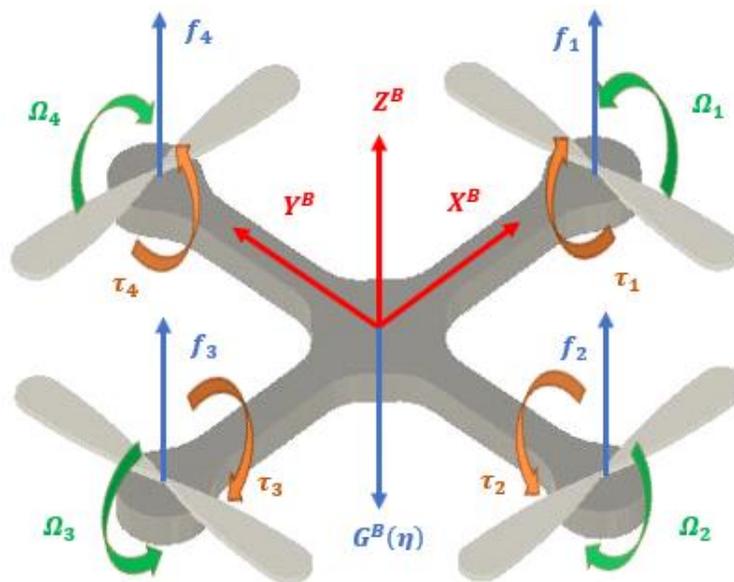


Figura 1. Estructura del cuadricóptero y esquema de fuerzas

En primer lugar, se encuentra el sistema de referencia local o ejes horizonte (F^E). Este es el sistema de coordenadas utilizado para determinar el movimiento del dron respecto de un observador externo fijo situado en la Tierra. Se considera inercial, es decir, en una posición fija absoluta (debido a que el dron no está pensado para recorrer grandes distancias, se pueden considerar despreciables los movimientos de rotación y traslación de la Tierra). Tanto la posición ξ como la orientación η —definida mediante los ángulos de Euler (ϕ , θ y ψ)— se establecen en este marco de referencia.

En segundo lugar, se define el sistema en ejes cuerpo (F^B). Sus ejes se muestran en *Figura 1* y su origen coincide con el centro de gravedad del cuadricóptero. Las velocidades lineales V^B , las velocidades angulares Ω^B , las fuerzas f y los pares τ son determinados en este marco de coordenadas. El hecho de utilizar las ecuaciones en ejes cuerpo se debe a una cuestión de simplicidad. Así, entre otros, se evita la dependencia con respecto al tiempo de la matriz de inercia I^B y se aprovechan los ejes de simetría presentes en el cuadricóptero correspondientes a los tres ejes de coordenadas en F^B .

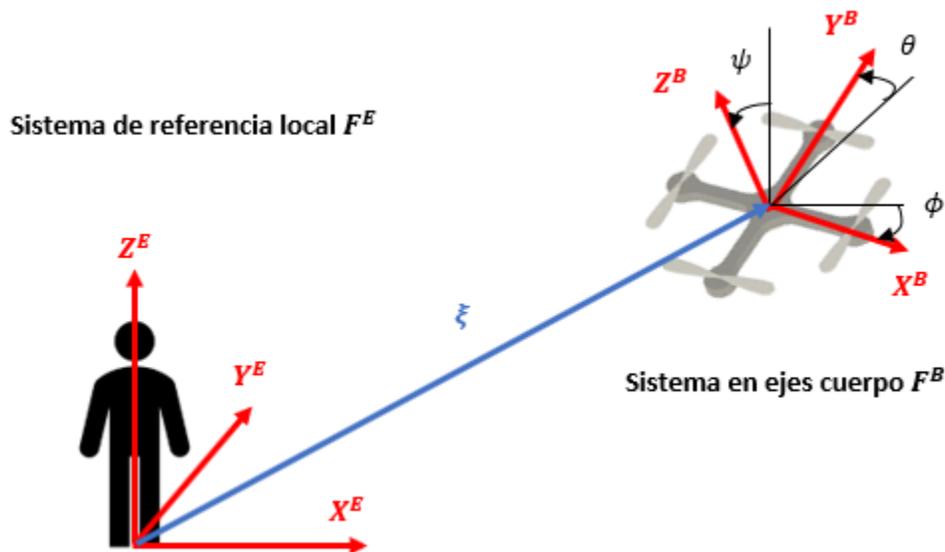


Figura 2. Marcos de referencia

Además, también se debe tener en cuenta que el vector ξ representa la distancia entre los orígenes de F^E y F^B , mientras que el vector η muestra la orientación de F^B con respecto a F^E . Ambos vectores se muestran en *Figura 2*. Las tres rotaciones se realizan con

el siguiente orden de los ángulos de Euler alrededor del sistema de coordenadas inercial: alabeo (ϕ)/ cabeceo (θ)/ guiñada (ψ). Los ángulos se consideran positivos con giros antihorarios (sentido contrario al de las agujas del reloj) y negativos con movimiento horario (igual al de las agujas del reloj).

$$\xi = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2)$$

Para que el dron realice un movimiento vertical será necesario, por tanto, que las Ω_i presenten la misma medida y que estas giren en el mismo sentido en los rotores opuestos y en sentido contrario a los adyacentes. Es decir, para llevar a cabo un movimiento exclusivamente en el eje Z^B , se debe cumplir que $\Omega_1 = \Omega_3 = -\Omega_2 = -\Omega_4$. De esta forma, el par resultante τ es nulo, el cuadricóptero no sufre una rotación y todos los rotores generan la misma tracción f_i .

2.2.1. Cinemática del cuadricóptero

Tal y como se ha comentado anteriormente, las velocidades lineales y angulares se expresan en F^B . Sin embargo, es posible indicar las primeras en F^E por medio de una matriz de rotación de la forma R^{ij} donde el superíndice i denota el marco de coordenadas al cual se va a transformar el parámetro y el superíndice j establece el sistema de procedencia en el que este se encuentra. Partiendo de una posición inicial expresada en F^E , utilizando el orden de ángulos ya mencionado, es posible expresar esta localización a F^B a través de la matriz de transformación R^{BE} .

$$R^{BE} = R_1^{BE}(\phi) R_2^{BE}(\theta) R_3^{BE}(\psi)$$

$$R^{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$R^{BE} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}$$

Al tratarse R^{BE} de una matriz ortogonal, se puede realizar el cambio de coordenadas contrario por medio de la matriz traspuesta, ya que coincide con la matriz inversa (Paley, 1933).

$$R^{EB} = (R^{BE})^T = (R^{BE})^{-1} \quad (4)$$

$$R^{EB} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

Por tanto, definiendo las velocidades lineales en ejes cuerpo V^B y en ejes locales V^E es posible determinar una relación entre ambas.

$$V^E = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$V^B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$V^E = R^{EB} V^B \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta u + (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) v + (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) w \\ \sin \psi \cos \theta u + (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi) v + (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) w \\ -\sin \theta u + \cos \theta \sin \phi v + \cos \theta \cos \phi w \end{pmatrix}$$

Las velocidades angulares se definen en el sistema de referencia local por medio de la matriz de variación de los ángulos de Euler (Diebel, 2006). Representando esta de la forma T^{ij} tal y como se hiciera para las velocidades lineales, es posible pasar de F^E a F^B a través de la transformación T^{BE} .

$$T^{BE} = (\hat{e}_i \quad R_1^{BE}(\phi) \hat{e}_j \quad R_1^{BE}(\phi) R_2^{BE}(\theta) \hat{e}_k) \quad (8)$$

$$T^{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

Los vectores \hat{e}_i , \hat{e}_j y \hat{e}_k son, respectivamente, los vectores unitarios en las tres direcciones de las coordenadas de F^E . La matriz T^{BE} no es ortogonal, así que su matriz inversa T^{EB} no coincide con la traspuesta y es calculada para convertir las velocidades angulares en ejes cuerpo Ω^B , representadas en *Figura 3*, a ejes horizonte Ω^E .

$$\Omega^E = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Omega^B = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (10)$$

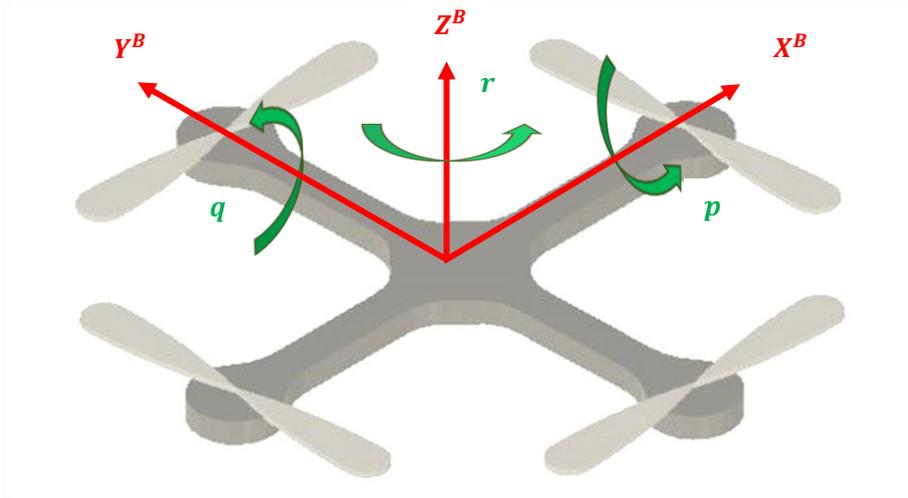


Figura 3. Velocidades en ejes cuerpo

$$T^{EB} = (T^{BE})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\Omega^E = T^{EB} \Omega^B$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \sin \phi \tan \theta q + \cos \phi \tan \theta r \\ \cos \phi q - \sin \phi r \\ \sin \phi \sec \theta q + \cos \phi \sec \theta r \end{pmatrix} \quad (12)$$

En base a las expresiones de las velocidades en F^E conseguidas, se puede también determinar una relación para las aceleraciones \dot{V}^E y $\dot{\Omega}^E$ en este marco de referencia. No obstante, para utilizar estas ecuaciones se debe establecer la dinámica del cuadricóptero. Hay que tener en cuenta que los tres ángulos de Euler dependen del tiempo y varían cuando el dron realiza un movimiento de rotación.

$$\dot{V}^E = \dot{R}^{EB} V^B + R^{EB} \dot{V}^B \quad (13)$$

$$\dot{\Omega}^E = \dot{T}^{EB} \Omega^B + T^{EB} \dot{\Omega}^B \quad (14)$$

2.2.2. Dinámica del cuadricóptero

La dinámica de un sólido rígido con seis grados de libertad se puede describir a partir de las ecuaciones de Newton-Euler (Zoran, Petar, & Denis, 2016). Con el objetivo de facilitar su comprensión, se expresan estas ecuaciones diferenciales para fuerzas y para pares (o momentos) por separado. En el caso de las primeras se obtiene la siguiente relación:

$$m \dot{V}^B + C^B(V, \Omega) = G^B(\eta) + U^B(\Omega) \quad (15)$$

La m representa la masa del cuadricóptero, mientras que los vectores $G^B(\eta)$ y

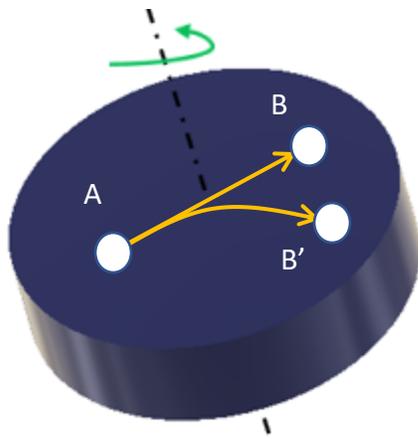


Figura 4. Aceleración de Coriolis

$U^B(\Omega)$ hacen referencia al vector gravitacional y al vector movimiento causado por la tracción de los rotors f_i , respectivamente (este esquema de fuerzas se encuentra representado en *Figura 1*). Además, se ha incluido la fuerza de Coriolis $C^B(V, \Omega)$, que afecta a cuerpos que se mueven en un sistema no inercial (toda la dinámica se expresa

en ejes cuerpo F^B). La variable a calcular es la aceleración lineal \dot{V}^B . A continuación, se desglosa cada uno de los términos.

$$\dot{V}^E = \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\dot{V}^B = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad (17)$$

- Fuerza de Coriolis: este fenómeno se observa en un sistema de referencia en rotación cuando un cuerpo se mueve respecto de dicho marco de referencia debido a la aparición de una aceleración relativa del cuerpo que es perpendicular al eje de rotación del sistema y a la velocidad del cuerpo. En *Figura 4* se representa el ejemplo de un móvil situado en el punto A de un disco giratorio que, al tratar de desplazarse hacia el punto B, acaba en el punto B'.

$$C^B(V, \Omega) = \Omega^B \times (m V^B) = \begin{pmatrix} m (q w - r v) \\ m (r u - p w) \\ m (p v - q u) \end{pmatrix} \quad (18)$$

- Vector gravitacional:

$$G^B(\eta) = R^{BE} m g = \begin{pmatrix} m g \sin \theta \\ -m g \cos \theta \sin \phi \\ -m g \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (19)$$

La g es la constante de gravitación universal, que toma como valor $9,8067 \text{ m/s}^2$ para todas las trayectorias debido a que estas se asumen cercanas a la superficie de la Tierra.

- Vector movimiento:

$$U^B(\Omega) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 f_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Las fuerzas f_i cuantifican la tracción del dron, que únicamente se produce en la dirección del eje Z^B . Por tanto, el parámetro b —medido en Ns^2 y llamado comúnmente *factor de empuje*— se puede definir mediante el coeficiente de tracción adimensional³ C_T y la superficie del disco del rotor S que, al presentar forma circular, se cumple que $S = \pi \delta^2$.

$$b = C_T \rho S \delta^2 = C_T \rho \pi \delta^4 \quad (21)$$

donde la δ representa el radio de la hélice, mientras que ρ es la densidad del aire. Al considerar trayectorias cercanas a la superficie de la Tierra su valor es constante y se asume $\rho = \rho_\infty$ (modelo ISA).

Una vez caracterizados estos términos se pueden obtener las componentes de la aceleración lineal \dot{V}^B . Por tanto:

$$\dot{V}^B = \frac{1}{m} (-C^B(V, \Omega) + G^B(\eta) + U^B(\Omega)) \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(q w - r v) + g \sin \theta \\ -(r u - p w) - g \cos \theta \sin \phi \\ -(p v - q u) - g \cos \theta \cos \phi + \frac{b}{m} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{pmatrix}$$

Las aceleraciones lineales en ejes horizonte \dot{V}^E se consiguen por medio de la matriz de rotación R^{EB} y aplicando (13). Se expresan las diferentes componentes por separado debido a su extensión.

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -(\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta) u \\ &+ [\dot{\phi} (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) + \dot{\theta} \cos \psi \cos \theta \sin \phi - \dot{\psi} (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi)] v \\ &+ [\dot{\phi} (-\cos \psi \sin \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi) + \dot{\theta} \cos \psi \cos \theta \cos \phi + \dot{\psi} (\sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi)] w \\ &+ \cos \psi \cos \theta \dot{u} + (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) \dot{v} + (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \dot{w} \\ \ddot{Y} &= (-\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \cos \psi \cos \theta) u \\ &+ [\dot{\phi} (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) + \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta \sin \phi + \dot{\psi} (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi)] v \\ &+ [-\dot{\phi} (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi) + \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta \cos \phi + \dot{\psi} (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi)] w \\ &+ \sin \psi \cos \theta \dot{u} + (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi) \dot{v} + (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) \dot{w} \\ \ddot{Z} &= -\dot{\theta} \cos \theta u + (\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi) v - (\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi) w - \sin \theta \dot{u} \\ &+ \cos \theta \sin \phi \dot{v} + \cos \theta \cos \phi \dot{w} \end{aligned} \quad (23)$$

³ El modelado de la tracción se trata en el Capítulo 3.

Es posible observar que, en el caso de que no se produzca rotación en ninguno de los ejes de F^B , las aceleraciones lineales serán nulas en los ejes X^B e Y^B puesto que la tracción sería la única componente que produciría una aceleración (constante) al sistema.

En el caso de los pares, se deben tener en cuenta otros vectores para determinar la dinámica del cuadricóptero. Así, aparece el vector giroscópico $O^B(\Omega)$ presente en los cuerpos de rotación que giran en torno al eje de simetría, y la matriz de inercia I^B . Además, las expresiones de la aceleración de Coriolis $C^B(\Omega)$ y del vector movimiento $U^B(\Omega)$ son adaptadas para los momentos.

$$I^B \dot{\Omega}^B + C^B(\Omega) = O^B(\Omega) + U^B(\Omega) \quad (24)$$

Tal y como se hiciera para el caso de las fuerzas, se desglosa cada uno de los términos tomando en consideración que la variable que se desea calcular es la aceleración angular $\dot{\Omega}^B$.

$$\dot{\Omega}^E = \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\dot{\Omega}^B = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \quad (26)$$

- Matriz de inercia:

$$I^B = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Para estimar los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} se hace la aproximación de considerar el cuadricóptero como un disco (véase *Figura 5*). Por ello, I_{zz} (que se obtiene con respecto al eje Z^B) se puede conseguir por medio de la expresión de la inercia de un disco respecto de un eje perpendicular que pasa

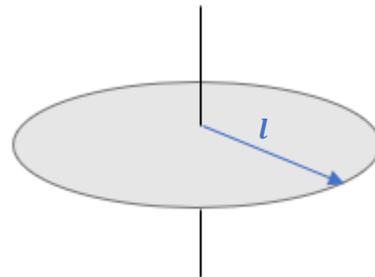


Figura 5. Aproximación del cuadricóptero como un disco

por su centro. Los valores de I_{xx} e I_{yy} , que se toman con respecto a los ejes X^B e Y^B , se asumen como los momentos de inercia respecto de su diámetro. Estos son iguales debido a la condición de simetría impuesta (Franco, 2008).

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m l^2 \quad (28)$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m l^2 = \frac{I_{zz}}{2} \quad (29)$$

donde la l representa la distancia entre el centro de gravedad del dron y el eje de los rotores.

Además, debido a que los ejes de simetría del cuadricóptero corresponden a X^B , Y^B y Z^B (véase *Figura 3*), los productos de inercia (I_{xy} , I_{xz} , I_{yx} , I_{yz} , I_{zx} y I_{zy}) resultan nulos. Así, aplicando estas condiciones, la matriz de inercia I^B en un dron puede ser expresada como:

$$I^B = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (30)$$

- Aceleración de Coriolis:

$$C^B(\Omega) = \Omega^B \times (I^B \Omega^B) = \begin{pmatrix} q r (I_{zz} - I_{yy}) \\ p r (I_{xx} - I_{zz}) \\ p q (I_{yy} - I_{xx}) \end{pmatrix} \quad (31)$$

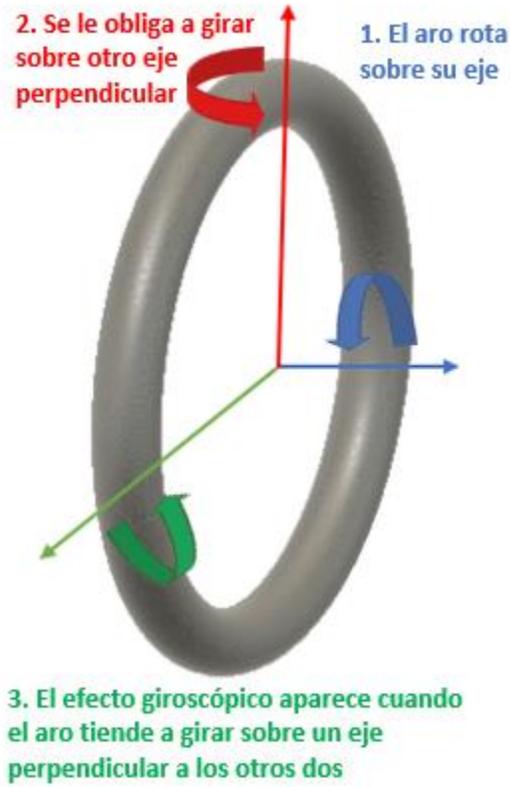


Figura 6. Efecto giroscópico

- Vector giroscópico: este efecto aparece en cuerpos que presentan una rotación inicial en torno a un eje de simetría; posteriormente, se les obliga a los cuerpos a rotar sobre otro eje perpendicular y, para acabar, tienden a girar sobre otro normal a los anteriores. Esto ocurre, tal y como se muestra en *Figura 6*, en un aro que rueda y empieza a voltear sobre un eje perpendicular al suelo y termina doblándose y chocando con el suelo (Carman, 2015). De acuerdo con *Luukkonen*, en su publicación *Modeling and control of quadcopter* (2011), puede ser expresado como:

$$O^B(\Omega) = - \sum_{k=1}^4 I_{rr} \left[\Omega^B \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] (-1)^k \Omega_k = \begin{pmatrix} I_{rr} q (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \\ -I_{rr} p (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

donde I_{rr} representa el momento de inercia de los rotores, que se asumen iguales. Considerando la forma de una pala similar a la de un paralelepípedo (tal y como se muestra en *Figura 7*), se puede modelizar I_{rr} como el momento de inercia de este cuerpo geométrico respecto de un eje perpendicular a una de sus caras (Franco, 2008). Tomando n_b como el número de palas que constituyen la hélice:

$$I_{rr} = \frac{n_b}{12} m_b (\delta^2 + \bar{c}^2) = \frac{1}{12} m_H (\delta^2 + \bar{c}^2) \quad (33)$$

La nomenclatura m_b simboliza la masa de una pala (considerando que todas ellas son iguales) y m_H la masa de una de las hélices, mientras que \bar{c} hace referencia a la cuerda

media. Denominamos cuerda media a la anchura de una pala rectangular equivalente con la misma superficie; por tanto, es un parámetro puramente geométrico que no tiene en cuenta efectos aerodinámicos.

Llamando S_n a la superficie de la pala y definiendo c_t y c_r como las cuerdas en la punta y raíz, respectivamente, asumiendo que la forma es muy similar a la de un trapecio se puede obtener una sencilla expresión para \bar{c} .

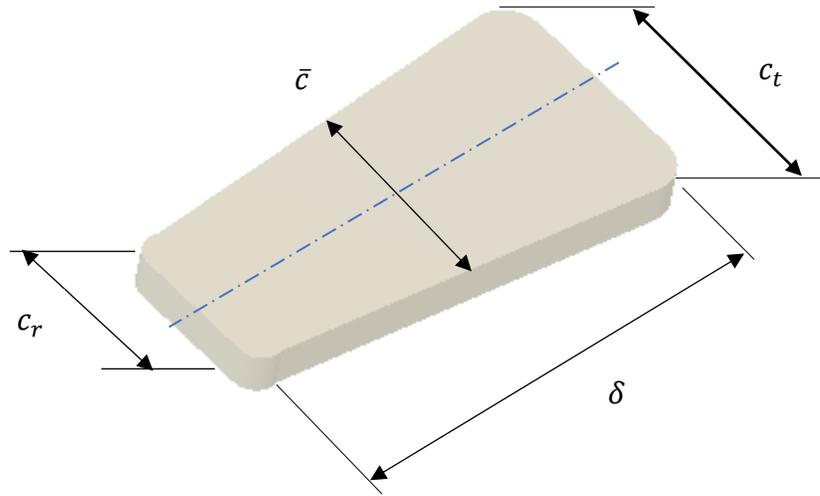


Figura 7. Parámetros geométricos de la pala

$$\begin{aligned}
 S_n &= \delta \bar{c} \\
 S_n &= \frac{\delta}{2} (c_t + c_r)
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \bar{c} = \frac{1}{2} (c_t + c_r) \quad (34)$$

- Vector movimiento:

$$U^B(\Omega) = \begin{pmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b l (\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ b l (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d (-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{pmatrix} \quad (35)$$

Al parámetro d se le conoce como *coeficiente de resistencia*, y se mide en Nms^2 . Su expresión viene relacionada con el coeficiente de potencia C_p (adimensional) del cuadricóptero, determinado a partir de los motores.

$$d = C_p \rho S \delta^3 = C_p \rho \pi \delta^5 \quad (36)$$

Habiendo definido cada uno de los términos que componen la ecuación diferencial, se puede establecer una expresión para la aceleración angular $\dot{\Omega}^B$.

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}^B &= (I^B)^{-1} [-C^B(\Omega) + O^B(\Omega) + U^B(\Omega)] \\ \begin{pmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{q} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{xx}} [-q r (I_{zz} - I_{yy}) + I_{rr} q (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) + b l (\Omega_4^2 - \Omega_2^2)] \\ \frac{1}{I_{yy}} [-p r (I_{xx} - I_{zz}) - I_{rr} p (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) + b l (\Omega_3^2 - \Omega_1^2)] \\ \frac{1}{I_{zz}} [-p q (I_{yy} - I_{xx}) + d (-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2)] \end{pmatrix} \quad (37) \end{aligned}$$

Las aceleraciones angulares en ejes horizonte $\dot{\Omega}^E$ se consiguen por medio de la matriz de rotación T^{EB} y aplicando (14). Al igual que se hiciese para las aceleraciones lineales, estas componentes se expresan por separado debido a su magnitud.

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= (\dot{\phi} \tan \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sec^2 \theta \sin \phi) q + (-\dot{\phi} \tan \theta \sin \phi + \dot{\theta} \sec^2 \theta \cos \phi) r + \ddot{p} \\ &\quad + \tan \theta \sin \phi \dot{q} + \tan \theta \cos \phi \dot{r} \\ \ddot{\theta} &= -\dot{\phi} \sin \phi q - \dot{\phi} \cos \phi r + \cos \phi \dot{q} - \sin \phi \dot{r} \quad (38) \\ \ddot{\psi} &= (\dot{\phi} \cos \phi + \dot{\theta} \tan \theta \sin \phi) \sec \theta q + (-\dot{\phi} \sin \phi + \dot{\theta} \tan \theta \cos \phi) \sec \theta r \\ &\quad + \sec \theta \sin \phi \dot{q} + \sec \theta \cos \phi \dot{r} \end{aligned}$$

Cabe mencionar que todo el procedimiento descrito anteriormente formula las ecuaciones en unidades del Sistema Internacional (SI), a menos que estas aparezcan especificadas en alguno de los desarrollos matemáticos.

3. MODELADO DE LA TRACCIÓN

3.1. DIFERENCIA ENTRE UN DRON Y UNA AERONAVE DE ALA ROTATORIA

En toda aeronave de ala rotatoria un rotor es el sistema giratorio empleado para generar sustentación o tracción —también se le denomina *empuje*—. En un helicóptero, por ejemplo, existe un rotor principal situado en la parte superior de la aeronave y un rotor de cola utilizado para contrarrestar el par motor creado por el otro; así, el vehículo se mantiene estable en el aire. En un dron podemos encontrar diferentes combinaciones, aunque la más usual es la que presentan los cuadricópteros, compuestos por cuatro rotores que simplifican el manejo de su movimiento. Cada uno de ellos dispone de un motor eléctrico que sirve como planta de potencia.

A la hora de estudiar un rotor, lo primero que se debe considerar es su tipología. Existen diferentes tipos⁴ según el número de grados de libertad que se permitan controlar. Estos vienen determinados por los giros que se pueden llevar a cabo alrededor de cada uno de los ejes en un nuevo sistema de referencia: el sistema en ejes pala (F^P). Este marco, representado en *Figura 8*, se encuentra definido por su origen en el centro del rotor, el eje X^P en la dirección del radio de la pala, el eje Z^P perpendicular al plano de punta de palas ζ (plano que se forma uniendo la punta de todas las palas que constituyen la hélice) y considerado positivo hacia arriba e Y^P normal a los otros dos formando un triedro de derechas.

En un dron el ángulo Ψ define la posición de X^P respecto a X^B . En un helicóptero, este ángulo sería el equivalente al azimut (ángulo que forma el eje X^P de una pala con la cola del vehículo). Se considera positivo en sentido antihorario y negativo en sentido horario. Por tanto, para cada rotor i se cumple que:

⁴ En aeronaves de ala giratoria, como los helicópteros, existen los rotores articulados (permiten controlar el paso ϑ , el batimiento β y el arrastre χ), los rotores semirrígidos que controlan ϑ y uno de los otros dos ángulos (β o χ), y los rotores rígidos que únicamente permiten el manejo del paso ϑ .

$$\dot{\Psi}_i = \Omega_i \quad (39)$$

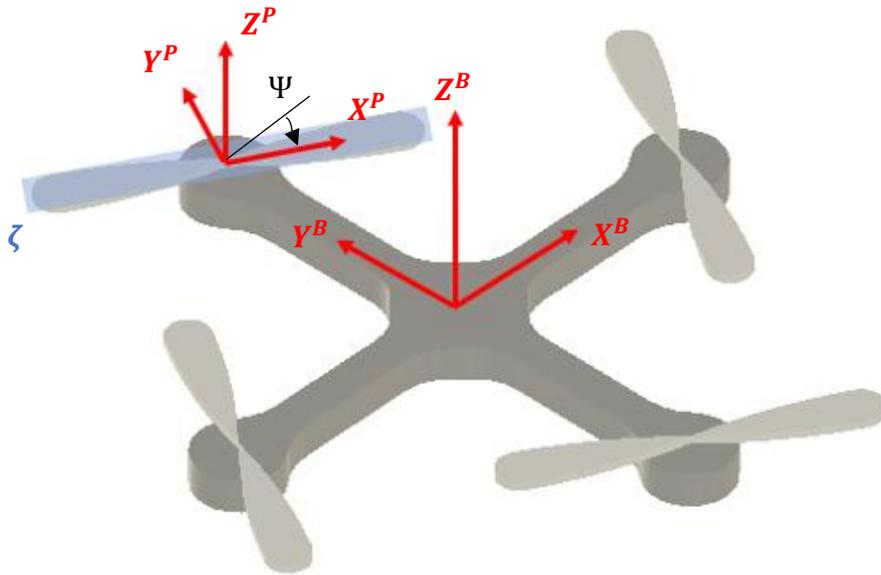


Figura 8. Sistema en ejes pala F^P

En un dron los giros y movimientos se manejan a través de la supervisión de la potencia que se otorga a los motores eléctricos mediante un mando de control remoto. Por tanto, los tres ángulos formados en una superficie sustentadora rotatoria según la Aeromecánica —representados en *Figura 9*— resultan incontrolables. Esto impide variaciones en los ángulos alrededor de los ejes Y^P y Z^P y, por tanto, que no exista batimiento β ni arrastre χ . Por el contrario, habrá un ángulo de paso ϑ definido exclusivamente por su geometría. Esto coincide con la hipótesis asumida al principio del estudio de considerar el dron como cuerpo rígido.

Entonces, el ángulo de paso ϑ en un helicóptero (u otra aeronave de ala rotatoria) está compuesto por tres términos: dos de ellos, el ángulo de paso cíclico⁵ $\vartheta_c(\Psi)$ y el ángulo

⁵ El ángulo de paso cíclico $\vartheta_c(\Psi)$ posibilita el control del paso de una pala de acuerdo con su posición en el disco del rotor. Esto se consigue con la presencia de un plato cíclico en el rotor que, al inclinarse, causa un ladeo en las palas. Así, se produce una distribución asimétrica de la sustentación en las hélices que permite el movimiento de traslación.

de paso colectivo⁶ ϑ_0 son controles del vehículo, mientras que el restante depende de su forma y varía según la posición δ de la pala.

$$\vartheta = \vartheta_G(\delta) + \vartheta_c(\Psi) + \vartheta_0$$

Simplificación para un dron $\rightarrow \vartheta = \vartheta_G(\delta)$ (40)

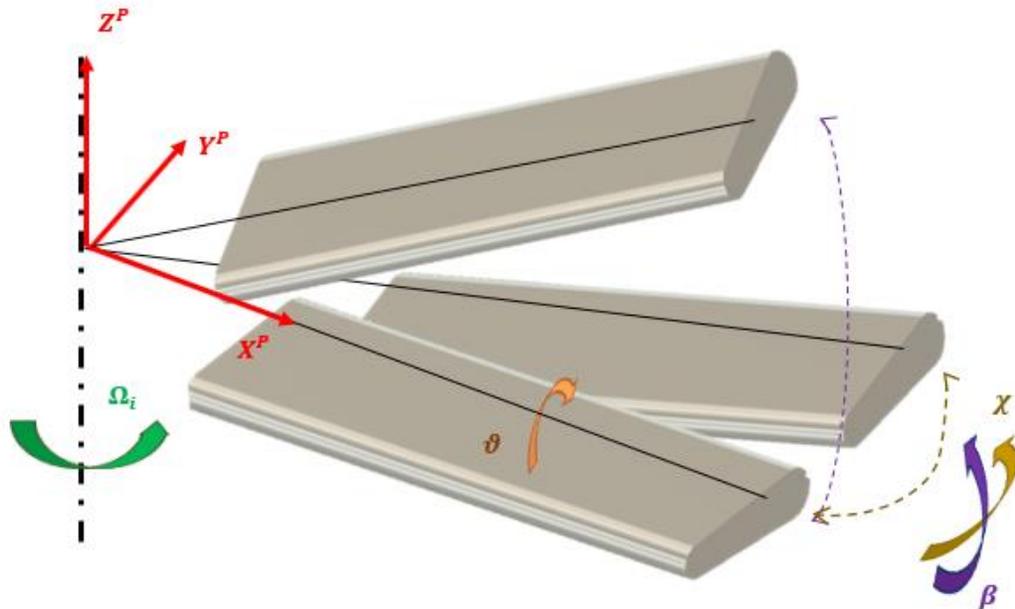


Figura 9. Grados de libertad de una aeronave de ala rotatoria

Sin embargo, en un dron el parámetro $\vartheta_G(\delta)$ se determina como la distancia que avanzaría la hélice en un medio sólido con un giro completo y se expresa en unidades de longitud⁷. Por tanto, se trata de un valor numérico que se puede simbolizar como ϑ_G sin incluir la dependencia de la posición de la pala δ .

No obstante, lo realmente importante de esta parte es que, al no poder controlar el ϑ de las palas en un dron, se comprueba que los ejes Z^B y Z^P son paralelos para cualquier trayectoria descrita por este vehículo no tripulado y, por tanto, se pueden emplear teorías

⁶ El ángulo de paso colectivo ϑ_0 se consigue al elevar o descender el plato cíclico, lo que provoca el mismo aumento o decrecimiento del ángulo de paso en todas las palas. Con ello, se genera una mayor o menor distribución simétrica de sustentación en el plano del rotor.

⁷ Los parámetros de caracterización de un dron se tratan más exhaustivamente en el Capítulo 4.

como el *Teorema de Cantidad de Movimiento* que, de manera muy simple, permiten cuantificar el flujo situado en las inmediaciones de las hélices.

3.2. CASO GENERAL

Para la obtención de la tracción nos basamos en el *Teorema de Cantidad de Movimiento*, también empleado en otras aeronaves de ala rotatoria. En el caso de un dron únicamente necesitamos relacionar el flujo que se encuentra antes del paso por el rotor y después del mismo. Para ello, se deben tomar unas consideraciones adicionales:

- El rotor actúa como un disco actuador, es decir, como una superficie de discontinuidad en la que la presión del fluido p_z experimenta un salto.
- El flujo es incompresible⁸ y cuasi-estacionario.
- Se desprecian los términos viscosos en comparación con los inerciales (el número de Reynolds Re es suficientemente elevado).
- La presión del fluido lejos del rotor (tanto corriente arriba como corriente abajo) es igual a la presión atmosférica ($p_z = p_\infty$).

Por tanto, se puede considerar el esquema representado en *Figura 10*, en el que encontramos dos situaciones: en la primera, el flujo está justo antes de pasar por la hélice mientras que la segunda representa el momento en el que ya lo ha hecho. A partir de esto, aplicamos los teoremas de conservación: *conservación de la masa, conservación del movimiento y conservación de la energía*.

Únicamente actúa una fuerza sobre el fluido F_a de la misma magnitud y sentido opuesto a la tracción f_i producida por el rotor (aplicación de la tercera Ley de Newton: ley de acción y reacción). Esto provoca que la corriente experimente una aceleración en sentido

⁸ En mecánica de fluidos se considera que el flujo es incompresible con un número de Mach $M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} \leq 0,3$; donde $V_\infty = \|\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\|$ (módulo de la velocidad en F^B) y a_∞ es la velocidad del sonido a nivel del mar y que, según la atmósfera ISA, su valor es igual a $340,294 \text{ m/s}$. Esto implica que el dron debe cumplir que $V_\infty \leq 102,0882 \text{ m/s}$.

descendente, siendo el valor de las velocidades $V_\infty + v_i$ en el plano del rotor y $V_\infty + v_{i2}$ en la estela lejana corriente abajo. Las velocidades v_i y v_{i2} son las velocidades inducidas⁹ en cada una de las secciones mencionadas antes, respectivamente (Cuerva, Espino, López, Meseguer, & Sanz, 2012). Teniendo en cuenta la representación en *Figura 10*, procedemos a obtener las diferentes expresiones.

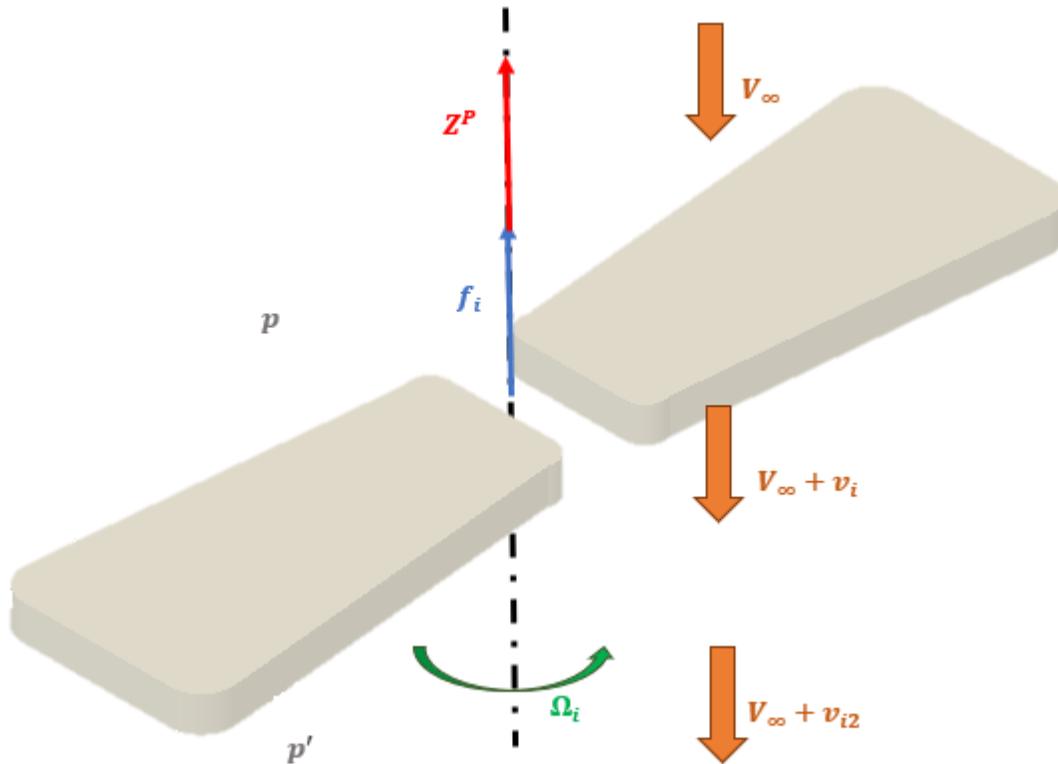


Figura 10. Esquema del paso del flujo a través de un rotor

- Conservación de la masa: aplicando la definición del gasto másico es fácil comprobar que existe una variación de flujo másico \dot{m} entre las dos situaciones, ya que la superficie S del disco del rotor es invariable y al asumirse el aire incompresible, no se considera un salto de densidades al pasar el flujo a través de él ($\rho = cte$).

$$\begin{aligned} \text{Situación 1} &\rightarrow \dot{m}_1 = \rho S V_\infty \\ \text{Situación 2} &\rightarrow \dot{m}_2 = \rho S (V_\infty + v_{i2}) \end{aligned} \quad (41)$$

⁹ Las velocidades inducidas v_i y v_{i2} se producen siempre en sentido descendente, sin importar el régimen de vuelo (ascendente o descendente), por lo que son negativas de acuerdo con el marco de coordenadas en ejes pala F^P .

Es evidente que debe existir una variación del gasto másico \dot{m} al pasar el flujo a través de la hélice, y que su valor se puede cuantificar como:

$$\dot{m} = \rho S v_{i2} \quad (42)$$

- Conservación de la cantidad de movimiento: ya anteriormente se ha comentado que únicamente se toma en consideración una fuerza F_a sobre el flujo. Esta actúa en sentido opuesto a la tracción f_i producida por el fluido en su actuación sobre el rotor, por lo que:

$$f_i - F_a = 0 \rightarrow f_i = F_a \quad (43)$$

Basándonos en el disco del rotor de un helicóptero, en el que la única acción de presión es la causada por el disco actuador¹⁰ —la resultante axial de las fuerzas de presión que actúan sobre la superficie exterior, las caras superior e inferior y la superficie lateral, es nula en primera aproximación (Durand, 1963)— y las contribuciones de velocidad se reducen a las caras superior e inferior (Huang Shen, Albert, Ang, Teck, & Chan, 2017):

$$f_i = \rho S (V_\infty + v_i) v_{i2} = \dot{m} (V_\infty + v_i) \quad (44)$$

- Conservación de la energía: la energía que proporciona el rotor al flujo mientras gira se convierte en una fuerza contraria a la gravedad que genera la tracción (no se producen pérdidas durante este intercambio de energía). Matemáticamente, suponiendo que la velocidad del rotor se mantiene para una velocidad del aire específica acelerada, esto se convierte en:

$$\begin{aligned} f_i v_{i2} &= \frac{1}{2} \dot{m} (V_\infty + v_i)^2 \\ (V_\infty + v_i) &= 2 v_{i2} \end{aligned} \quad (45)$$

Además, hay que tener en cuenta que la potencia del motor transmitida a la hélice P_i (potencia inducida) se puede definir a partir de la aceleración del flujo en el volumen de

¹⁰ Para más información sobre la teoría del disco actuador para el caso específico del vuelo axial consúltese el Anexo C.

control v_{i2} . La potencia parásita P_0 se asume despreciable frente a la potencia inducida, por lo que se considera que $P = P_i$.

$$P_i = f_i v_{i2} \quad (46)$$

Recordando que la superficie del rotor es como la de un disco, y tomando todas las consideraciones anteriores, ahora la tracción (44) se puede expresar más fácilmente:

$$f_i = (2 \pi \delta^2 \rho P_i^2)^{\frac{1}{3}} \quad (47)$$

Para calcular la potencia P_i se puede hacer uso de (48), donde Ω_{rpm}^i es la velocidad a la que gira el rotor en revoluciones por minuto, APC es una constante de la hélice que depende del cociente entre su paso y su dimensión, ϑ_G se mide en unidades de longitud y PF es el *factor de potencia* —también adimensional— que supone el cociente entre la potencia mecánica del dron y su potencia eléctrica (Huang Shen, Albert, Ang, Teck, & Chan, 2017).

$$APC \propto \frac{\vartheta_G}{2 \delta} \quad (48)$$

$$P_i = APC (\Omega_{rpm}^i)^{PF}$$

Aunque la potencia P_i se calcula con las revoluciones del rotor en situación de carga, es decir, con hélices, normalmente las especificaciones del fabricante se tienen en vacío. Aquí se propone que, en caso de no disponer la velocidad angular de los rotores con las hélices Ω_{rpm}^i , se considere que su valor es un 75% del valor de estas en vacío $\Omega_{rpm}^{vacío}$, que normalmente se pueden obtener con los datos del fabricante. Las revoluciones en vacío $\Omega_{rpm}^{vacío}$ se obtienen por medio de la K_v , que es un parámetro propio de cada motor y que sirve como constante de proporcionalidad entre la tensión que llega al motor v_m y su velocidad de giro.

$$\Omega_{rpm}^{vacío} = K_v v_m \quad (49)$$

Consecuentemente, introduciendo estas últimas expresiones, la ecuación de la tracción queda (según los parámetros de los que se disponga) de la forma:

$$f_i = \left(2 \pi \delta^2 \rho \left[APC (\Omega_{rpm}^i)^{PF} \right]^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (50)$$

$$f_i = (2 \pi \delta^2 \rho [APC (0,75 K_v v_m)^{PF}]^2)^{\frac{1}{3}}$$

3.3. ADIMENSIONALIZACIÓN

Tal y como se viese en el Capítulo 2, el objetivo de este apartado es el de hallar los coeficientes de tracción C_T y de potencia C_P adimensionales para calcular el *factor de empuje* b y el *coeficiente de resistencia* d . Teniendo en cuenta que estamos tratando con un cuadricóptero, es decir, con cuatro motores distintos, una vez obtenidas las expresiones de la tracción f y de la potencia P estos se pueden adimensionalizar como:

$$C_{T_i} = \frac{f_i}{\rho S \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2 \delta^2} = \frac{f_i}{\rho \pi (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \delta^4} \quad (51)$$

$$C_T = \sum_{i=1}^4 C_{T_i}$$

$$C_{P_i} = \frac{P_i}{\rho S \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2 \delta^3} = \frac{\sum_{i=1}^4 P_i}{\rho \pi (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \delta^5} \quad (52)$$

$$C_P = \sum_{i=1}^4 C_{P_i}$$

4. CARACTERIZACIÓN DE UN DRON

Tal y como ya se ha comentado en el Capítulo 3, existen una serie de parámetros en el cuadricóptero que son los responsables de su funcionamiento, provocando que el comportamiento del dron varíe. Esto es debido al tipo de uso que se le pretende otorgar, puesto que, evidentemente, un vehículo destinado a competir en carreras no presenta las mismas propiedades que uno determinado para inspeccionar un terreno o para volar en interiores. En esta sección se van a tratar las principales características que se deben tomar en consideración para modelizar la trayectoria.

4.1. BATERÍA

Las baterías son los componentes responsables en lograr un equilibrio entre la actuación del dron y su tiempo de vuelo. Las más comunes en este tipo de vehículos no tripulados son las constituidas por litio (LiPO), puesto que presentan una descarga sosegada que permite un aterrizaje más suave en caso de emergencia. La celda de una batería de este tipo presenta una tensión v_s con un valor nominal de $3,7 V$.

Sin embargo, es posible proveer más potencia¹¹ al cuadricóptero sin necesidad de incrementar la intensidad de corriente. Esto se consigue mediante el uso de más celdas —conectadas en serie— en una misma batería. Así, se presentan configuraciones de la forma 1S, 2S, 3S, 4S, 5S o 6S, donde el dígito d_i seguido por la S indica el número de celdas que la forman. En *Figura 11* se presenta el circuito eléctrico de la batería de un dron de carreras.

Llamando v_b a la tensión abastecida por la batería, es posible comprobar que, al encontrarnos con un circuito eléctrico en serie, se cumple que:

$$v_b = d_i v_s \quad (53)$$

¹¹ Cuanta mayor potencia suministre la batería al cuadricóptero, más tracción f_i generan los rotores, por lo que se puede prescindir de la eficiencia de los motores y utilizar unos con valores de K_v más pequeños.

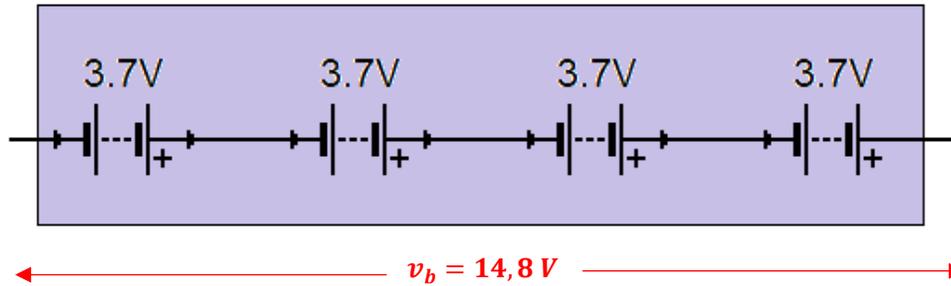


Figura 11. Batería 4S con una tensión o diferencial de potencial $V_b = 14,8 V$

Existen otros parámetros en relación con las baterías, como pueden ser el *C-rating* o su capacidad. El primero expresa la cantidad de corriente que esta puede proporcionar para un ciclo de carga de manera continua, mientras que el segundo se encuentra expresado en miliamperios por hora (*mAh*) y hace referencia a la cantidad de corriente que es capaz de suministrar por un periodo de tiempo. No obstante, estos valores solo serán importantes para la ejecución de grandes trayectorias que requieran un elevado tiempo de vuelo (mayores de 10 minutos).

4.2. COCIENTE TRACCIÓN/PESO

Un dron debe ser capaz (a máxima potencia) de generar una tracción f que duplique su propio peso $G^B(\eta)$ para garantizar que es manejable y que puede despegar. Esto implica que en el caso de un cuadricóptero con $G^B(\eta) = 1 N$, cada rotor debe ser capaz de producir, al menos, una tracción $f_i \geq 0,5 N$. Por tanto, llamando al cociente entre la tracción y el peso T/W , se debe cumplir para cualquier despegue que:

$$T/W \geq 2 \quad (54)$$

4.3. MOTORES Y K_v

Los motores son los componentes de un dron que, conectados a las hélices, provocan su giro y generan la tracción necesaria para permitir que este vehículo vuele. Son eléctricos y de corriente continua¹² (DC), por lo que no hay que considerar corriente

¹² En contraposición a los motores de corriente alterna (AC).

reactiva. Además, estos a su vez se pueden clasificar en motores *brushed* (con escobillas) o *brushless* (sin escobillas) según la manera en que estos transmiten la potencia al eje, aunque para las competencias de este estudio no es importante.

Sin embargo, lo que sí debe tenerse presente es que el comportamiento de un motor eléctrico de corriente continua DC viene caracterizado por el circuito eléctrico equivalente representado en *Figura 12*. Además, se determina como un motor DC de primer orden, considerando que no hay pérdidas en el intercambio de potencia eléctrica a potencia mecánica (su relación es el *factor de potencia PF*).

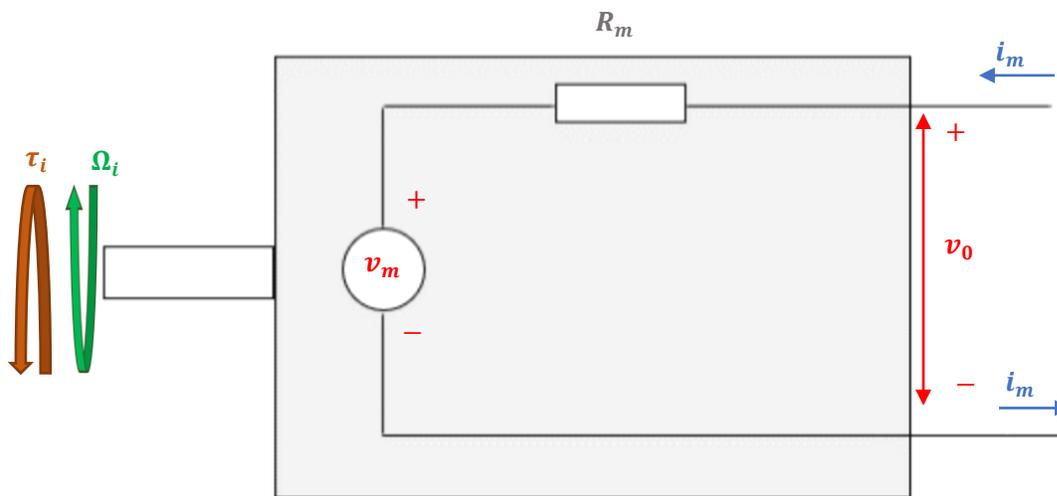


Figura 12. Circuito eléctrico de un motor DC

Entre las principales características de un motor DC de primer orden se encuentran: la resistencia R_m del motor se asume constante (Drela, 2007), existe una relación de proporcionalidad (K_v) entre el v_m y el Ω_i —determinada por (49)— y, utilizando la Ley de Ohm, es posible establecer la siguiente expresión:

$$R_m = \frac{v_0 - v_m}{i_m} \rightarrow v_m = v_0 - R_m i_m \quad (55)$$

donde i_m es la intensidad de corriente que llega al motor, mientras que v_0 es la tensión en bornes del motor. A la hora de caracterizar este parámetro se debe ir con cierta precaución, puesto que no necesariamente este voltaje es el suministrado por la batería v_b . Por

ejemplo, una parte de esta tensión v_b quizás es reducida mediante el uso de una resistencia en la placa controladora de vuelo.

La constante de proporcionalidad K_v expresa el incremento teórico de las revoluciones por minuto $\Omega_{rpm}^{vacío}$ cuando la tensión aumenta en $1 V$ en una situación sin carga (sin hélice). Una vez la hélice es añadida al motor, la velocidad angular del rotor Ω_{rpm}^i disminuye por la resistencia adicional. Los motores con elevada K_v producen mayores Ω_{rpm}^i y permiten que la hélice gire más rápido. No obstante, los motores con valores bajos de K_v generan un menor par motor τ_i .

Este τ_i representa el momento que el motor ejerce sobre la hélice para hacerla rotar alrededor de su eje. En la práctica es necesario encontrar un equilibrio entre Ω_{rpm}^i y el τ_i , puesto que altos valores de K_v provocan que la hélice rote demasiado rápido, causando una atracción considerable de corriente eléctrica capaz de producir un sobrecalentamiento en el sistema que puede ocasionar un cortocircuito (AA.VV, 2016).

Los motores son identificados por cuatro números: $AABB$. “ AA ” representa la anchura (en mm) del estátor (parte del motor inmóvil en contraposición con el rotor), mientras que “ BB ” indica su altura (también en mm). Por lo general, cuanto más grandes son estos valores, un mayor par τ_i logran producir. Por tanto, los drones que presenten motores de elevado tamaño suelen emplear una K_v pequeña.

4.4. HÉLICES

Las hélices son las responsables de generar la tracción rotando y moviendo el aire que se encuentra en sus inmediaciones. Cuanta más perturbación creen en el aire, más tracción se origina. En un cuadricóptero las hélices opuestas giran en el mismo sentido y las adyacentes en sentido opuesto para compensar el par τ_i producido por ellas.

Estas pueden venir en diferentes tamaños e inclinaciones. La nomenclatura tradicional de estos componentes es $CC \times DD$. “ CC ” identifica la longitud de la hélice (en pulgadas), es decir, el diámetro del disco del rotor (representado como 2δ siguiendo la

escritura de los Capítulos 2 y 3); “ DD ” simboliza el paso (también en pulgadas). Tal y como ya se dijo anteriormente, representa la distancia longitudinal que recorrería una hélice en el aire en una rotación y se caracteriza como ϑ_G . Así, por ejemplo, una hélice con una nomenclatura de 9×4.7 presenta un diámetro de 9 pulgadas y un paso de $4,7$ pulgadas.

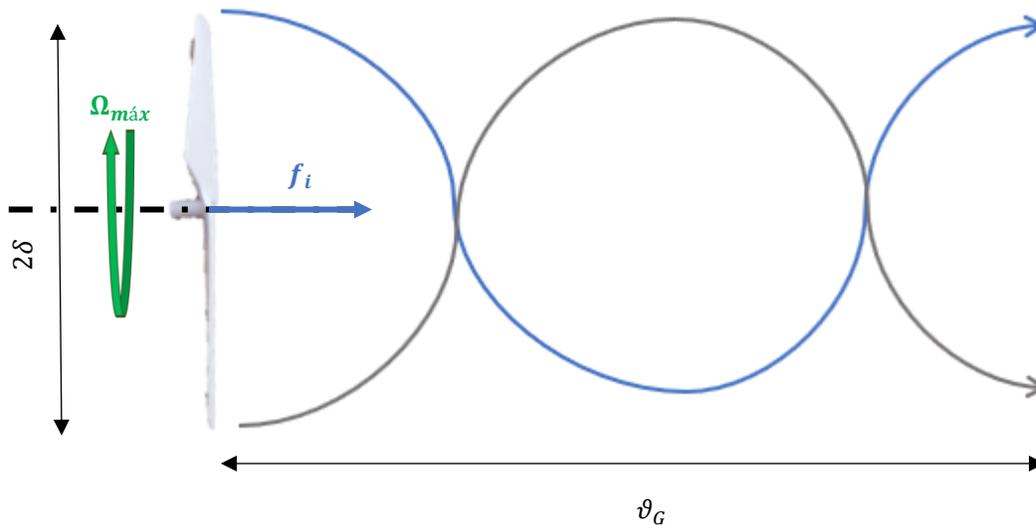


Figura 13. Paso ϑ_G de la hélice de un dron

En Figura 13 aparece un esquema ilustrativo del paso longitudinal ϑ_G . Las líneas que aparecen son las posiciones que seguirían las puntas de las palas mientras la hélice realiza una rotación a su máxima velocidad angular $\Omega_{máx}^i$. Tal y como se observa, es la equivalente a la longitud de onda λ en un movimiento oscilatorio o el periodo T en un movimiento armónico simple.

El tamaño 2δ incide en la cantidad de f_i que la hélice puede generar. Cuanto más elevado sea, mayor tracción ejercerá para una misma velocidad rotacional, aunque a costa de un considerable par motor τ_i . Un paso ϑ_G grande sí supone una rotación más rápida. No obstante, para producir la f_i requerida se debe utilizar un rango concreto de valores, puesto que una hélice con un paso muy pronunciado puede ser igual de mala que una plana debido al elevado τ_i necesitado.

Los drones no usados en el ámbito profesional son equipados con motores de baja potencia. Estos rotores giran más rápido para crear tracción, pero al presentar un tamaño tan pequeño, se compensa el par motor τ_i creado en beneficio de conseguir unas muy altas velocidades de rotación Ω_i (AA.VV, 2018). Esto, como se ve en el Capítulo 5, es lo que nos encontraremos con el dron estudiado.

Existen otros parámetros como el número de palas n_b que conforman una hélice, el material con el que estas han sido fabricadas, la eficiencia en el intercambio de energía eléctrica/mecánica, el número de electroimanes presentes en el motor sin escobillas... que pueden condicionar favorable o negativamente a la tracción. A la hora de elegir un dron o montar uno por piezas se deben tener en cuenta para conseguir que presente las características deseadas. Sin embargo, el propósito de este trabajo es establecer la trayectoria de un dron desde un punto de vista matemático, por lo que estas componentes ya se encuentran incluidas en nuestro dron de estudio.

5. CARACTERIZACIÓN DEL DRON *CHEERWING SYMA XS5W-V3*

En este capítulo se engloban todas las tareas realizadas para calcular con precisión los parámetros de los motores tratados anteriormente (Capítulo 4) y las asunciones consideradas para estos. Para ello, entre otros, es necesario conocer la electrónica y geometría del cuadricóptero.

5.1. CUADRICÓPTERO UTILIZADO PARA EL PROYECTO

Para este estudio se ha hecho uso del dron no profesional *Cheerwing Syma XS5W-V3*, representado en *Figura 14*, que resulta apropiado para los principiantes en el manejo

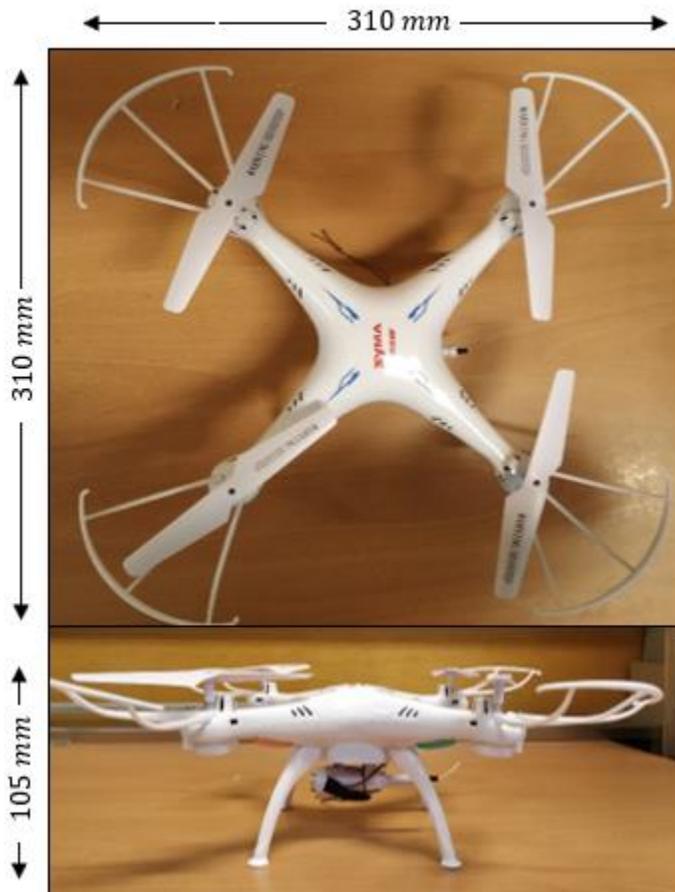


Figura 14. Dron Cheerwing Syma XS5W-V3

de este vehículo no tripulado. Permite un tiempo de vuelo de 6 a 8 minutos sin la inclusión de las protecciones para las hélices ni la cámara, que disminuye a 4 minutos cuando se encuentran incluidas. Admite la posibilidad de ser dirigido por un mando de control remoto situado a una distancia de hasta 50 metros (las medidas representadas tienen en consideración las protecciones para las hélices).

Tal y como se observa, el cuadricóptero es simétrico en sus tres ejes en el marco de referencia F^B , por lo que las hipótesis asumidas

previamente son aceptables. Además, los parámetros geométricos más importantes (de los

que se dispone datos del fabricante o se pueden medir con facilidad) se recogen en *Tabla 1*, los cuales influyen en la trayectoria a realizar por el dron.

Tabla 1. Parámetros geométricos del dron Cheerwing Syma XS5W-V3

Masa del cuadricóptero m incluyendo la batería, protecciones de las hélices y la cámara	120 g
Distancia entre el centro de gravedad del dron y el eje de los rotores l	230 mm
Radio de los rotores δ	67 mm
Cuerda media de la hélice \bar{c}	18 mm
Masa de una hélice m_H	1,7 g
Momento de inercia respecto al eje X I_{xx}	$1,587 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Momento de inercia respecto al eje Y I_{yy}	$1,587 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Momento de inercia respecto al eje Z I_{zz}	$3,174 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Momento de inercia de los rotores I_{rr}	$1,8181 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$

5.2. CIRCUITO ELECTRÓNICO DEL DRON

Tal y como ya se comentó en la Sección 4.1, la batería tiene la función de proporcionar la potencia al cuadricóptero, por lo que es necesario caracterizarla para entender cómo se distribuyen la tensión v_m y la intensidad i_m en los distintos motores. En *Figura 15* se presenta la batería utilizada para nuestro estudio. Consta de una única celda y, por tanto, presenta un valor nominal $v_b = 3,7 \text{ V}$. Aunque esto no necesariamente significa que la batería proporciona esta tensión (un voltaje nominal v_b de este valor suele implicar que la batería puede llegar a suministrar una tensión máxima $v_{b_{m\acute{a}x}} = 4,2 \text{ V}$), asumimos que la referencia del fabricante es aceptable.



Figura 15. Batería 1S con tensión nominal $v_b = 3,7 \text{ V}$

Se observa que en la batería se incluye también su capacidad (500 mAh), que nos informa de la cantidad de corriente que es capaz de suministrar en un periodo de tiempo. Este parámetro únicamente interesa en el caso de trayectorias largas en las que el dron deba estar volando por una gran duración, por lo que no es competencia de este estudio trabajar con él.

Tomando en consideración que $v_b = 3,7\text{ V}$, parece asumible que el voltaje del motor v_m debe ser nulo cuando no llega corriente eléctrica ($i_m = 0$). Sin embargo, experimentalmente se ha comprobado que la tensión a la que se encuentran los bornes de los motores en estas condiciones es $v_0 = 2,4\text{ V}$.

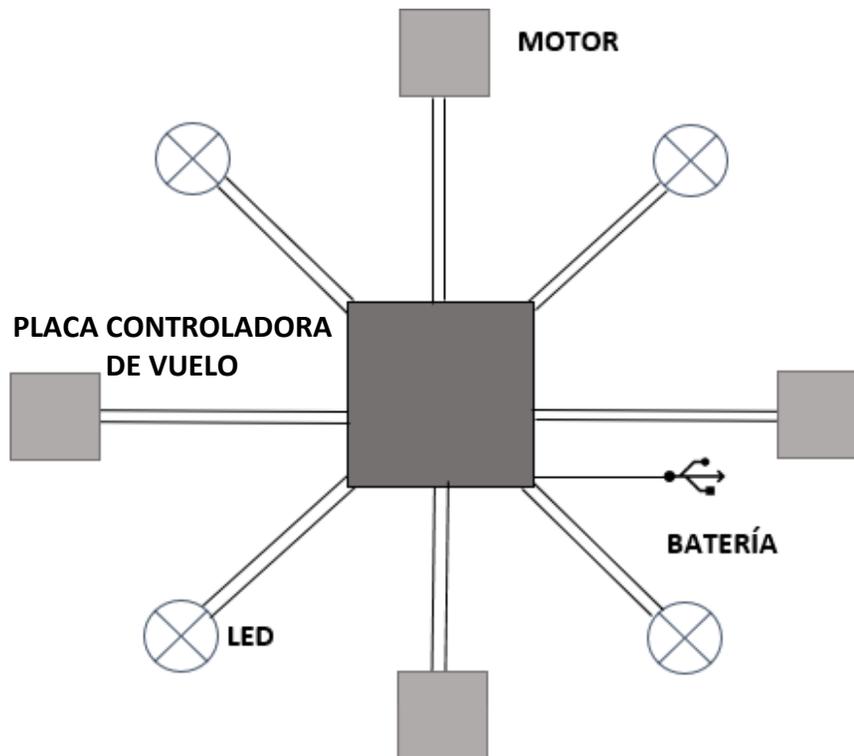


Figura 16. Circuito electrónico del dron Cheerwing Syma XS5W-V3

Esto implica, siguiendo el esquema representado en *Figura 16*, que la placa controladora de vuelo —computadora que lleva a cabo todos los movimientos del dron y regula la potencia eléctrica P que llega a los motores— presenta una resistencia o un regulador de tensión. Además, tal y como se observa, parte de la corriente eléctrica introducida por la batería se destina a la alimentación de diodos electroluminiscentes

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

(LEDs), que se encuentran en estado intermitente antes del vuelo del cuadricóptero y con luz fija una vez se ha proporcionado el voltaje v_m necesario para despegar. En *Figura 17* se muestra la placa controladora del vehículo manipulado.



*Figura 17. Placa controladora del dron
Cheerwing Syma XS5W-V3*

La dirección de vuelo se determina a partir de un mando de control remoto con frecuencia $2,4\text{ GHz}$, que transmite las órdenes del piloto desde tierra. Este puede controlar tanto el movimiento traslacional (en dirección de X^B o Y^B) como el rotacional (variando los ángulos ϕ , θ o ψ), o simplemente llevar a cabo un despegue o aterrizaje vertical (en dirección de Z^B cuando este es igual a Z^E).

Para ello, tal y como aparece en *Figura 18*, el mando dispone de dos *joysticks* que, conjuntamente, permiten regular la potencia P_i de los motores (y, *por ende*, de las revoluciones Ω_i de los rotores) tanto a nivel equitativo para que por los cuatro motores circule la misma intensidad de corriente i_m —provocando un vuelo vertical— como desiguando las potencias para causar otro tipo de movimientos. La palanca de mando izquierda permite, con su accionamiento hacia arriba o abajo, el control ecuánime de la potencia P_i en sus cuatro motores. Esto deja la posibilidad de regular la tracción f_i de los rotores para manejar trayectorias verticales. El problema reside en que el *joystick* se mueve en un rango continuo de valores, lo que dificulta la medición de posiciones fijas.



*Figura 18. Mando de control remoto del dron
Cheerwing Syma XS5W-V3*

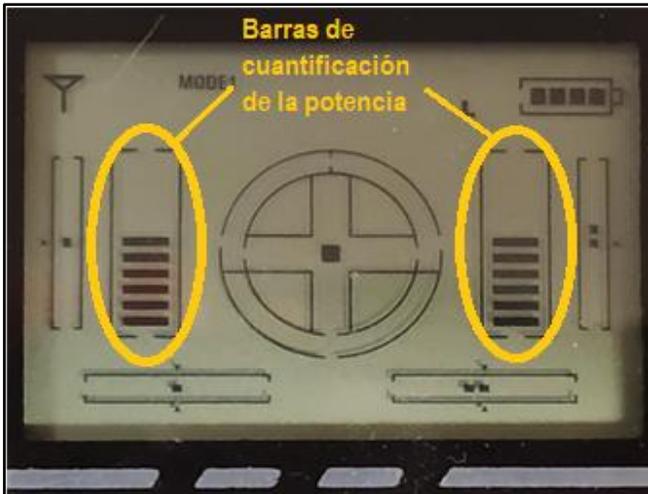


Figura 19. Posiciones utilizadas para la cuantificación de la potencia en el dron Cheerwing Syma XS5W-V3

Con tal de obtener un intervalo de posiciones medibles, se hace uso de la pantalla que incorpora el mando a control remoto, la cual cuantifica de forma discreta la potencia P_i de sus motores. En *Figura 19* se presentan las barras empleadas para determinarlas que, en este caso, muestran la sexta posición. Existen once niveles diferentes especificados por las rayas (las dos barras siempre indican la

misma posición). De esta forma, el espectro continuo de valores puede ser discretizado y utilizado para nuestro estudio. A continuación, se muestra la interpretación de estos niveles para la obtención de las magnitudes deseadas.

5.3. CURVA DE POTENCIA

Rescatando la expresión desarrollada por *Huang Shen, Albert, Ang, Teck, & Chan* en el Capítulo 3, la potencia P_i puede ser determinada en base a una constante adimensional (APC) y la relación entre la energía eléctrica y mecánica (PF):

$$P_i = APC (\Omega_{rpm}^i)^{PF} \quad (48)$$

Los motores y las hélices son las componentes del cuadricóptero relacionados con estos parámetros. En *Figura 20* se encuentra representado el estátor y el rotor de un motor usado en el dron *Cheerwing Syma XS5W-V3*. Tal y como se observa, se trata de un motor sin escobillas del tipo 0820, es decir, el estátor (sin contar con la protección) mide 8 mm de anchura y 20 mm de altura. Las pequeñas dimensiones anticipan bajos valores de potencia¹³ P_i . Además, las revoluciones del rotor Ω_{rot} están relacionadas con las

¹³ Consúltense la Sección 4.4 para más información.

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

revoluciones de la hélice¹⁴ Ω_i por medio de engranajes que giran. El mecanismo del motor contiene 9 dientes, mientras que el que provoca la rotación de las palas está constituido por 54 dientes. Por tanto, se cumple que:

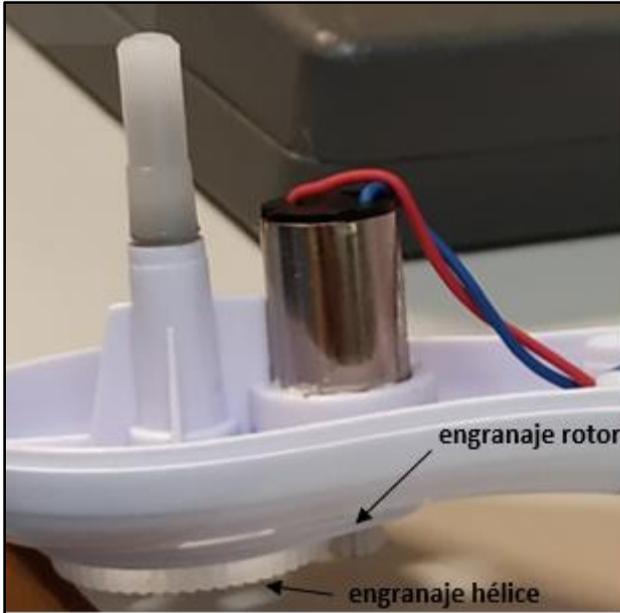


Figura 20. Motores del dron Cheerwing Syma XS5W-V3

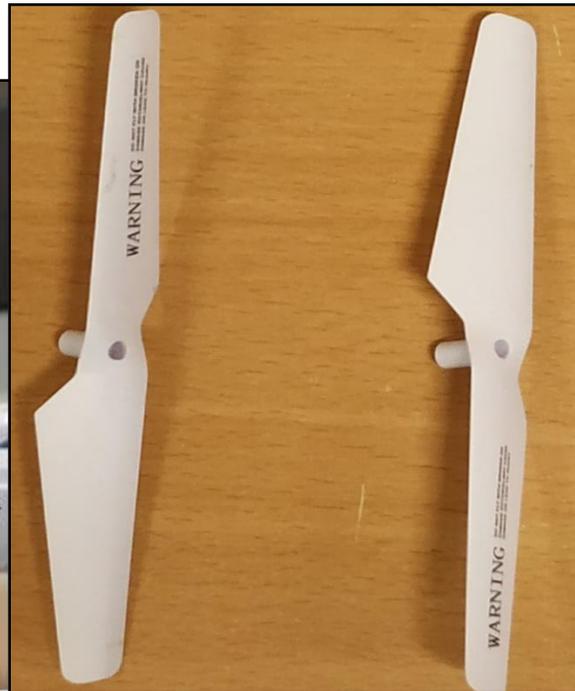


Figura 21. Hélices del dron Cheerwing Syma XS5W-V3

$$\Omega_{rot} = 6 \Omega_i \quad (56)$$

No obstante, no se dispone información sobre el *factor de potencia* PF ni sobre la relación K_v de proporcionalidad entre el voltaje del motor v_m y la velocidad angular Ω_i . En el caso de las hélices únicamente se conoce su diámetro 2δ y que dos de ellas presentan una denominación CW (*clockwise*) porque giran en el sentido de las agujas del reloj, y las otras dos son del tipo CCW (*counterclockwise*) por su rotación en el sentido contrario de estas (en *Figura 21* se muestra la diferencia en la forma de las hélices del tipo CW y CCW). Sin embargo, cabe recordar que el dato a usar como entrada del programa de simulación es la constante APC .

¹⁴ En la estimación de las velocidades angulares durante todo el proyecto (Ω_i y Ω_{rpm}^i) nos referimos siempre al giro del engranaje que contiene la hélice.

Con tal de estimar estos datos, que emplearemos como entradas del programa de simulación, tenemos en cuenta que la potencia de los motores P_i viene especificada por el voltaje v_m y la intensidad de corriente i_m , de la siguiente forma:

$$P_i = v_m i_m \quad (57)$$

Por tanto, midiendo el voltaje de los motores v_m , la intensidad de corriente i_m que llega a cada uno de ellos y las revoluciones Ω_{rpm}^i a las que giran los rotores, es posible ajustar la curva de potencia P_i para las distintas posiciones del mando de control remoto.

Tabla 2. Mediciones realizadas en un motor del dron Cheerwing Syma XS5W-V3

	Voltaje v_m (V)		Intensidad i_m (mA)		Potencia P_i (W)		Velocidad angular Ω_{rpm}^i (rpm)	
	u	u	u	u	u	u	u	u
Posición 1	0,220	(0,006)	500,0	(0,6)	0,110	(0,003)	2610	(110)
Posición 2	0,320	(0,006)	770,0	(0,6)	0,246	(0,004)	3531	(210)
Posición 3	0,370	(0,006)	850,0	(0,6)	0,315	(0,005)	3752	(230)
Posición 4	0,420	(0,006)	970,0	(0,6)	0,407	(0,006)	4002	(300)
Posición 5	0,430	(0,006)	980,0	(0,6)	0,421	(0,006)	4002	(300)
Posición 6	0,450	(0,006)	1002,0	(0,6)	0,451	(0,006)	4140	(300)
Posición 7	0,480	(0,006)	1010,0	(0,6)	0,485	(0,006)	4288	(300)
Posiciones 8 y 9	0,510	(0,006)	1160,0	(0,6)	0,592	(0,007)	4446	(300)
Posición 10	0,520	(0,006)	1200,0	(0,6)	0,624	(0,007)	4530	(300)
Posición 11	0,520	(0,006)	1180,0	(0,6)	0,614	(0,007)	4513	(300)

Para llevar a cabo estas mediciones se desmonta el dron (véase *Figura 22*) y se le conecta a uno de sus motores un amperímetro en serie, un voltímetro en paralelo y un generador de corriente eléctrica —representados en *Figura 23*— para forzar que la tensión de entrada $v_b = 3,7 V$ y no se produzca ninguna fluctuación de este valor (como sucedería si se conectara una batería en su lugar). Estos datos calculados¹⁵ aparecen en *Tabla 2*. Se observa que las posiciones 8 y 9 se caracterizan juntas para evitar intervalos muy pequeños.

¹⁵ Para más información sobre la estimación de errores e incertidumbres acúdase al Anexo A.

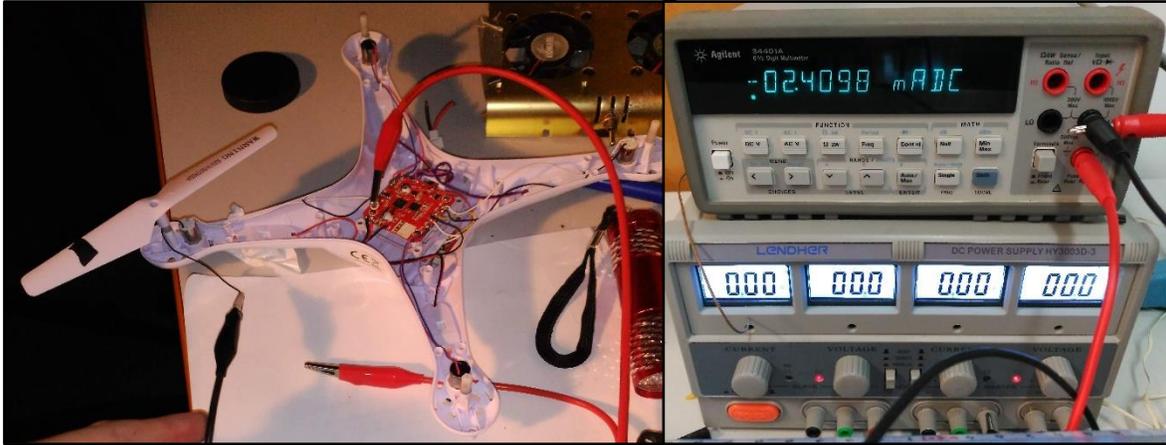


Figura 22. Montaje del circuito eléctrico para la medición de la potencia P_i

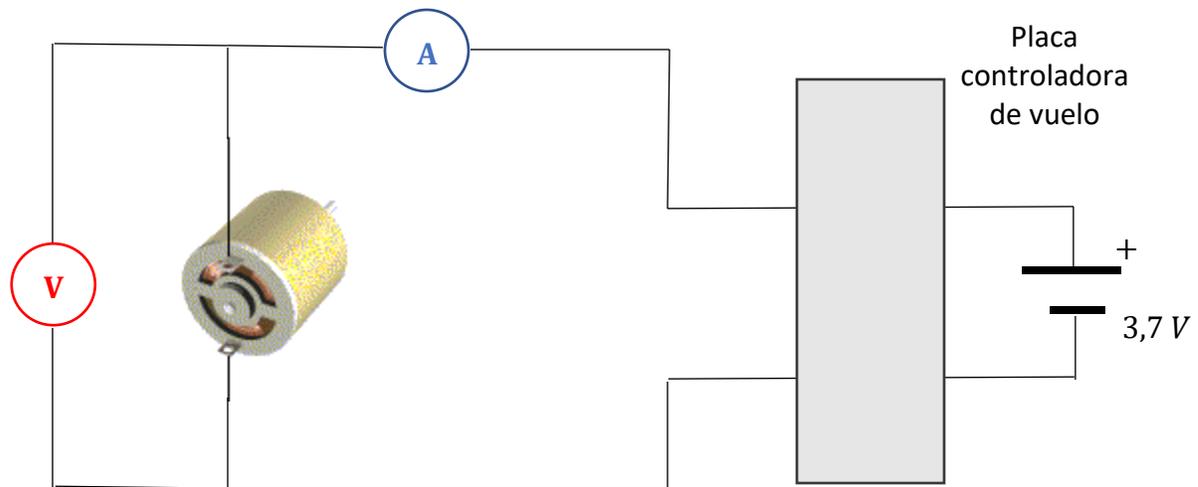


Figura 23. Circuito eléctrico con el amperímetro, el voltímetro y el generador de corriente

A partir de (48), se representa la curva de potencia P_i a escala logarítmica para ajustarla a una recta, tal y como se muestra en *Figura 24*. Esto permite la caracterización de los parámetros desconocidos del motor, cuyos valores son: $PF = 3,1905$ y $APC = 1,3062 \cdot 10^{-12}$. Sin embargo, existe una incertidumbre importante, por lo que estos valores deben tomarse como orientativos, ya que la curva de potencia puede variar entre los extremos de las barras de error consideradas.

$$\log P_i = PF \log \Omega_{rpm}^i + \log APC \quad (58)$$

Sin embargo, para representar esta curva, en primer lugar, debemos hallar alguna forma para estimar Ω_{rpm}^i . La mayoría de los fabricantes utilizan datos en condiciones sin

carga o *en vacío*, es decir, sin hélices unidas al rotor ($\Omega_{rpm}^{vacío}$). Por tanto, resulta interesante calcular la constante de proporcionalidad K_v para establecerla como entrada del programa de simulación y, así, tener la posibilidad de caracterizar la trayectoria de un dron distinto al empleado en este estudio a partir de los datos especificados en su adquisición y utilizando (49). A continuación, se describen las dos formas diferentes para la obtención de las velocidades angulares Ω_{rpm}^i .

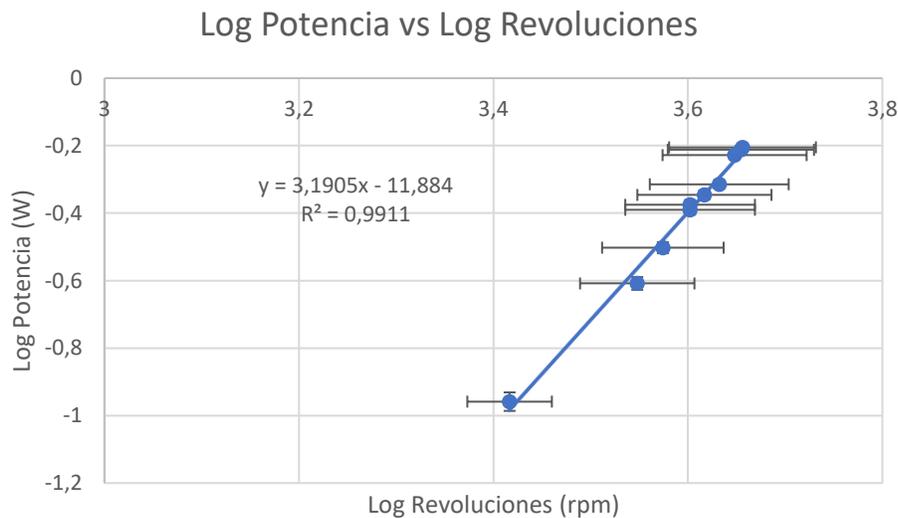


Figura 24. Curva de potencia con carga de un motor del dron Cheerwing Syma XS5W-V3

5.3.1. Estimación de las revoluciones Ω_{rpm}^i de manera directa

Por medio de la grabación de la hélice mientras esta rota a las once diferentes posiciones establecidas, a través del uso de una cámara de alta velocidad con rapidez $V_{fot} = 1000,46$ *fotogramas/segundo*, es posible hallar la frecuencia a la que gira sabiendo el periodo T ; es decir, el tiempo necesario para que una pala realice una vuelta. Llamando fot al número de fotogramas necesarios para definir la vuelta de una pala:

$$T = \frac{fot}{V_{fot}} \quad (59)$$

Aplicando la definición de la velocidad angular Ω_i , es posible ya calcular las revoluciones a las que gira una hélice.

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

$$\Omega_i = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \Omega_{rpm}^i = \frac{60}{T} \quad (60)$$



Figura 25. Fotografía de una hélice girando con una velocidad angular

Los valores estimados de Ω_{rpm}^i para las distintas posiciones aparecen recogidos en *Tabla 2*. En *Figura 25* se muestra una reproducción abierta con el *Reproductor de Windows Media*, que permite la opción de reproducir una grabación fotograma a fotograma.

Con *Matlab* también se puede llevar a cabo un tratamiento de las imágenes digitales utilizando la transformada de Fourier discreta y métodos de resolución de flujo óptico (Departamento de Matemática Aplicada, 2019). Denominando n_{fot} al número de fotogramas presentes en una grabación y suponiendo que el periodo de muestreo T_m entre los fotogramas se mantiene constante, el programa devuelve los armónicos φ modelizando una función continua. En nuestro caso, estos φ corresponden a las frecuencias o velocidades angulares deseadas.

$$T_m = \frac{1}{V_{fot}} \approx 10^{-3} \text{ segundos/fotograma} \quad (61)$$

En *Figura 26* se muestra en el eje de las abscisas los armónicos φ obtenidos por el programa para dos posiciones del mando de control remoto, representados por medio de picos. Tal y como se observa, estos son las velocidades angulares a las que gira el rotor que contiene la hélice en *vueltas/segundo*. Por tanto, se cumple que:

$$\Omega_{rpm}^i = 60 \varphi \quad (62)$$

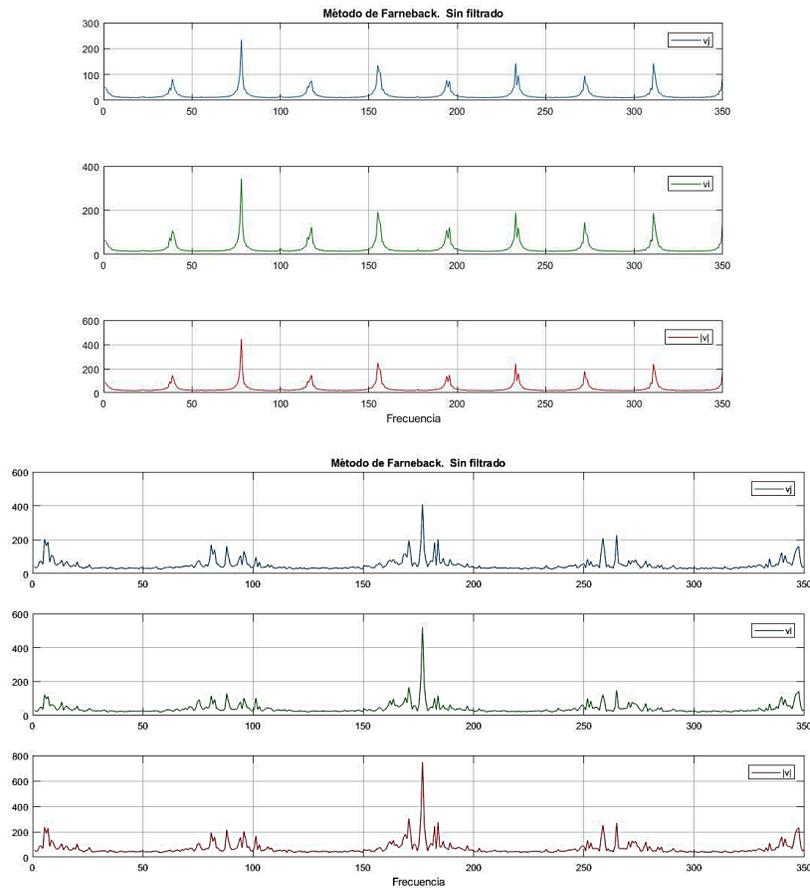


Figura 26. Fotograma de una hélice girando con una velocidad angular $\Omega_{rpm}^i = 2333,33 \text{ rpm}$ (arriba) y $\Omega_{rpm}^i = 5316,46 \text{ rpm}$ (abajo)

5.3.2. Estimación de las revoluciones Ω_{rpm}^i a través del parámetro K_v

Tal y como ya se ha comentado, aunque la obtención de Ω_{rpm}^i de manera directa supone una gran ventaja, puesto que las mediciones conseguidas presentan un alto grado de fiabilidad (son datos experimentales y no teóricos), los fabricantes acostumbran a especificar sus motores para condiciones en vacío (sin hélices). Por tanto, resulta útil el cálculo de la constante de proporcionalidad K_v común a todos los motores DC de primer orden tanto para introducirla de entrada del programa de simulación en caso de querer caracterizar la trayectoria de un cuadricóptero sin necesidad de desmontarlo como para utilizar una cámara de alta velocidad. Se recuerda del Capítulo 3 que:

$$\Omega_{rpm}^{vacío} = K_v v_m \tag{49}$$

Tabla 3. Mediciones realizadas en un motor en condiciones en vacío del dron Cheerwing Syma XS5W-V3

	Voltaje v_m (V)		Velocidad angular en vacío $\Omega_{rpm}^{vacío}$ (rpm)	
	v	u	v	u
Posición 1	0,460	(0,006)	7368	(140)
Posición 2	0,540	(0,006)	9231	(210)
Posición 3	0,550	(0,006)	9231	(210)
Posición 4	0,560	(0,006)	9438	(210)
Posiciones 5 y 6	0,560	(0,006)	9655	(230)
Posición 7	0,570	(0,006)	9655	(230)
Posición 8	0,570	(0,006)	9655	(230)
Posición 9	0,550	(0,006)	9767	(240)
Posición 10	0,580	(0,006)	9767	(240)
Posición 11	0,570	(0,006)	9767	(240)

Realizando un montaje similar al presentado en *Figura 22* (aunque sin ninguna de las hélices), es posible estimar la tensión v_m en el motor y las revoluciones $\Omega_{rpm}^{vacío}$ a las que gira el engranaje que contendría la hélice en estas condiciones —para este caso la cámara toma $V_{fot} = 700,32$ fotogramas/segundo—. Estas mediciones se reúnen en *Tabla 3*.

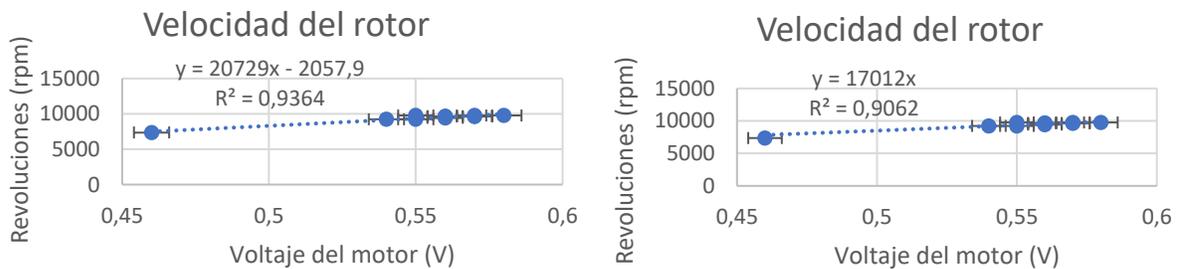


Figura 27. Relación entre el voltaje del motor v_m y las revoluciones a las que gira el motor en vacío $\Omega_{rpm}^{vacío}$

Al mostrar estos datos en una gráfica se observa una tendencia lineal, en la que la pendiente conseguida se trata de la constante de proporcionalidad K_v buscada. Aunque resulta obvio deducir que debe existir un voltaje umbral v_{umbral} a partir del cual los rotores comienzan a girar (en nuestro caso, $v_{umbral} = 0,0993$ V según la tendencia de la gráfica izquierda de *Figura 27*), para poder emplear la expresión (49) se ha de considerar que el motor inicia su rotación justo tras la inducción de corriente eléctrica. Por tanto, el ajuste

preferible a considerar es el de la representación de la derecha, que asume un $v_{umbral} = 0 V$ y se obtiene un $K_v = 17012 \text{ rpm}/V$.

De acuerdo con *Huang Shen, Albert, Ang, Teck, & Chan* en el Capítulo 3, la velocidad de rotación del rotor Ω_{rpm}^i con la hélice incluida es, aproximadamente, el 75% de la velocidad alcanzada en condiciones de vacío $\Omega_{rpm}^{vacío}$. De esta forma, se consigue que:

$$\Omega_{rpm}^i \approx 0,75 K_v v_m \quad (63)$$

Sin embargo, esta expresión resulta realmente imprecisa. Conviene solamente usarla en caso de no disponer ningún medio asequible para el cálculo de las revoluciones Ω_{rpm}^i del cuadricóptero. Por ejemplo, para el dron *Cheerwing Syma XS5W-V3*, si comparamos las Ω_{rpm}^i y las $\Omega_{rpm}^{vacío}$ para las posiciones 1 y 11, es fácil observar que, en el primer caso, $\Omega_{rpm}^i \approx 0,35 \Omega_{rpm}^{vacío}$ y, en el último nivel, $\Omega_{rpm}^i \approx 0,46 \Omega_{rpm}^{vacío}$. Ambos resultados se alejan enormemente de la suposición de los autores mencionados anteriormente.

Otras posibles causas que podrían explicar la gran diferencia de los resultados experimentales frente a las asunciones tomadas en el Capítulo 3 son: la poca robustez de los motores —al trabajar con un vehículo no profesional el dron presenta grandes incertidumbres en cuanto a la corriente eléctrica que circula por los motores en las diferentes posiciones del mando— o el mismo proceso de discretización de las Ω_{rpm}^i de once posiciones definidas artificialmente para la palanca de mando.

5.4. MEDICIÓN DE LA TRACCIÓN

Con tal de asegurar que existe un grado de robustez de los motores admisible (capaz de garantizar que las mediciones experimentales realizadas con ellos son fiables), se utiliza un dinamómetro que permite cuantificar la tracción f producida por el dron para las diferentes posiciones definidas. Para ello, se realiza el montaje representado en *Figura 28*. Cuando el dron es puesto en marcha, el dinamómetro se acopla al sistema formando una fuerza en sentido opuesto a la tracción (véase *Figura 29*), similar a la fuerza de elasticidad

presente en los muelles cuando estos se estiran. Así, se origina un sistema en equilibrio estático.



Figura 28. Montaje para la medición de la tracción f

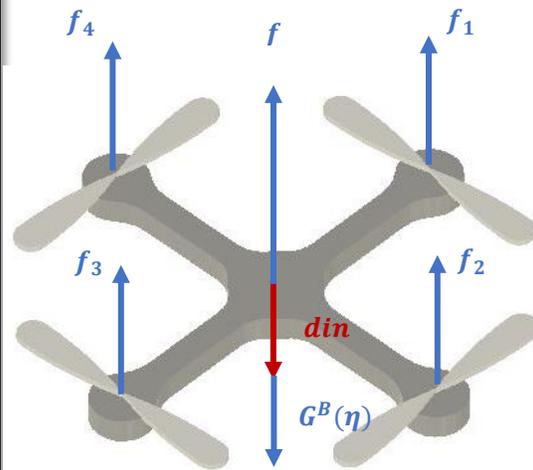


Figura 29. Equilibrio de fuerzas con la incorporación del dinamómetro

La tracción medida f se obtiene para un vuelo axial, es decir, para la condición de vuelo en la que los cuatro rotores giran a la misma velocidad Ω_i y, por tanto, generan la misma tracción f_i ($f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \frac{f}{4}$). Por consiguiente, llamando din a la medición realizada por el dinamómetro, es posible obtener la tracción total¹⁶ f como:

$$\begin{aligned} f - din - G^B(\eta) &= 0 \\ f &= din + m g \end{aligned} \quad (64)$$

El dinamómetro utilizado, representado en *Figura 30*, es capaz de realizar mediciones por un tiempo determinado con un periodo de muestreo $T_m = 0,02$ s con la

¹⁶ El esquema de fuerzas es realizado en ejes cuerpo F^B .

ayuda del *software* no comercial *AFH-FAST/FD*. Este programa esboza gráficos de la fuerza *din* llevada a cabo (para impedir el despegue del cuadricóptero) frente al tiempo de medida. En *Figura 31* aparece un ejemplo de exhibición de datos aleatorios mediante el uso del programa.

Para cada una de las posiciones del modelo *Cheerwing Syma XS5W-V3* se reproducen las mediciones tomadas por el dinamómetro en un periodo de tiempo determinado. El objetivo es asegurar que los datos obtenidos experimentalmente sobre los motores resultan fiables, a pesar de la aparente

falta de robustez de estos. Para ello, en primer lugar, se interpreta la información especificada por el programa. Las mediciones de los distintos niveles de nuestro dron de

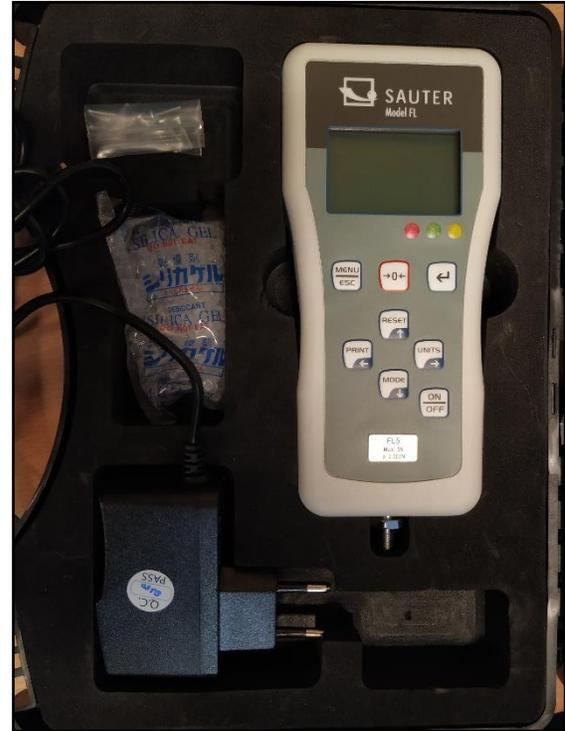


Figura 30. Dinamómetro digital FL5

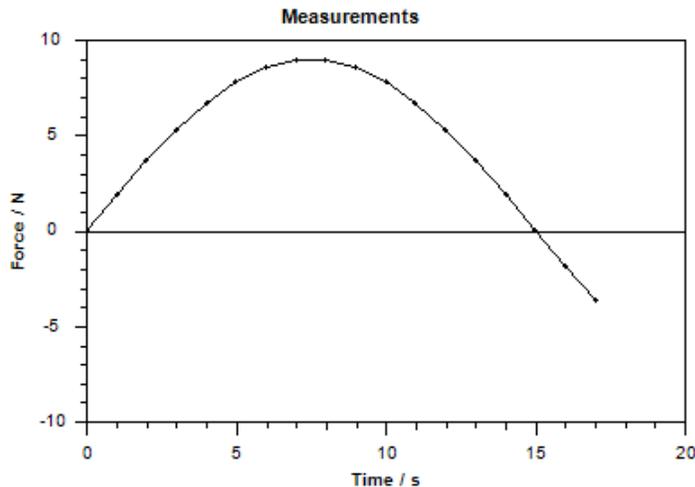


Figura 31. Representación de las mediciones de un dinamómetro en AFH-FAST/FD

estudio se encuentran esbozados en *Figura 32*. Tal y como se contempla, se determina la tracción en las posiciones de manera gradual (no se parte de los motores en estado de reposo). Además, se considera que la placa controladora del cuadricóptero establece la potencia P_i que llega a los diferentes motores siguiendo

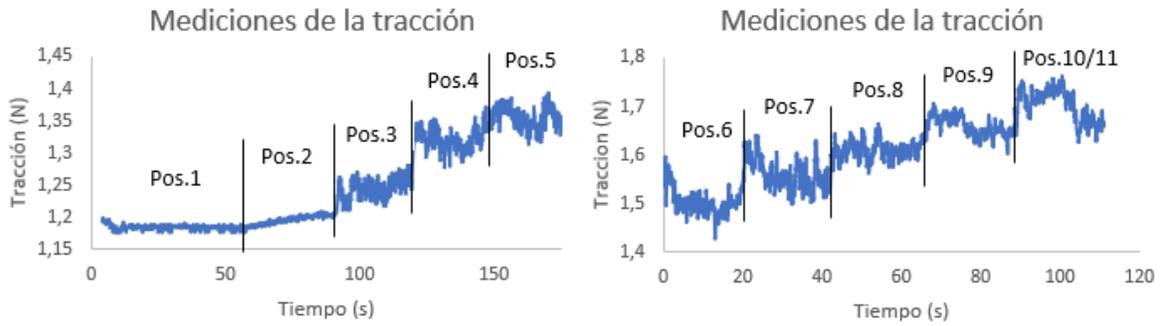


Figura 32. Mediciones del dinamómetro para las once posiciones del dron Cheerwing Syma XS5W-V3

una función escalón, es decir, adquiriendo de manera inmediata el valor nominal de la potencia P_i correspondiente a la posición alcanzada.

Calculando el valor medio de la tracción f de todas las posiciones del dron, comprobamos que el error entre las mediciones del dinamómetro y los resultados obtenidos desarrollando la expresión (50) del Capítulo 3 es asumible. Matemáticamente la tracción f (cuando todos los motores de un cuadricóptero generan la misma fuerza f_i) se expresa como:

$$f = 4 \left(2 \pi \delta^2 \rho \left[APC \left(\Omega_{rpm}^i \right)^{PF} \right]^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (65)$$

Tomando los valores de APC y PF estimados en la Sección 5.3, así como las revoluciones Ω_{rpm}^i medidas, se reúnen los datos obtenidos en *Tabla 4*. Comparamos los resultados logrados por ambos métodos. Se observa que existe una gran diferencia entre los resultados obtenidos por el dinamómetro y los valores obtenidos con (65). Sin embargo, la dispersión¹⁷ σ de los datos estimados por ambos procedimientos no aparece demasiado elevada como para rechazar alguna de las tácticas seguidas.

Esto implica que el dron de estudio no permite una definición obvia de las posiciones, es decir, cada vez que tratamos de reproducir una de estas, el vehículo no tripulado se comporta de manera distinta. Aparentemente, los resultados estimados mediante el dinamómetro parecen más fiables, ya que alcanza una $T/W = 1,46$, que se acerca mucho

¹⁷ Para más información sobre la estimación de errores e incertidumbres acúdase al Anexo A.

más al cociente de tracción/peso T/W supuesto en la Sección 4.2. No obstante, estos no son fidedignos tampoco¹⁸. La falta de robustez en los motores posiblemente se debe al uso de un dron no profesional en nuestro estudio¹⁹.

Tabla 4. Comparación de la tracción f estimada para las once posiciones del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 por el dinamómetro y matemáticamente

	Tracción \bar{f} medida con el dinamómetro (N)		Tracción f obtenida matemáticamente (N)		Error absoluto $ f - \bar{f} $ (N)
		u		u	
Posición 1	1,185	(0,004)	0,29	(0,03)	0,895
Posición 2	1,194	(0,005)	0,55	(0,07)	0,644
Posición 3	1,245	(0,012)	0,62	(0,08)	0,625
Posición 4	1,315	(0,014)	0,71	(0,10)	0,605
Posición 5	1,354	(0,016)	0,71	(0,10)	0,644
Posición 6	1,50	(0,03)	0,77	(0,11)	0,73
Posición 7	1,552	(0,021)	0,83	(0,13)	0,722
Posición 8	1,615	(0,021)	0,89	(0,14)	0,725
Posición 9	1,665	(0,021)	0,89	(0,14)	0,775
Posición 10	1,723	(0,017)	0,93	(0,15)	0,793
Posición 11	1,723	(0,017)	0,92	(0,15)	0,803

Por tanto, para los despegues que se lleven a cabo mediremos las velocidades angulares Ω_{rpm}^i de los rotores con tal de asegurarnos que la tracción f calculada es bastante precisa. La tendencia de la curva de potencia representada en la sección 5.3 (véase *Figura 24*), en principio, puede ser utilizada, aunque teniendo en cuenta que las posiciones no necesariamente son las mostradas en el gráfico. Por ejemplo, de acuerdo con las mediciones tomadas, en la posición 5 en un despegue vertical los rotores del dron giran con una $\Omega_{rpm}^i = 4004 \text{ rpm}$. Sin embargo, para conseguir la tracción \bar{f} alcanzada con el dinamómetro, su velocidad de rotación debe ser $\Omega_{rpm}^i = 5403,48 \text{ rpm}$.

¹⁸ Tal y como se muestra en la expresión (50), la tracción debe ser, al menos, el doble que el peso ($T/W \geq 2$) para garantizar la manejabilidad del vehículo.

¹⁹ El hecho de utilizar un dron no profesional en el estudio se debe a su coste de adquisición (para más información consúltese la Parte II del estudio: *Presupuesto*).

6. TRATAMIENTO EXPERIMENTAL DEL DESPEGUE

En este capítulo se detallan todos los procedimientos llevados a cabo para el seguimiento de la trayectoria del dron *Cheerwing Syma XS5W-V3* durante su despegue. Para ello, se hace uso del programa *Tracker* que, a partir de la grabación del movimiento de un cuerpo, es capaz de determinar matemáticamente su desplazamiento.

Para empezar, con tal de garantizar la máxima precisión posible, se utiliza una cámara lenta de $V_{fot} = 500,23 \text{ fotogramas/segundo}$. Con ella, se sigue la trayectoria realizada por el dron.

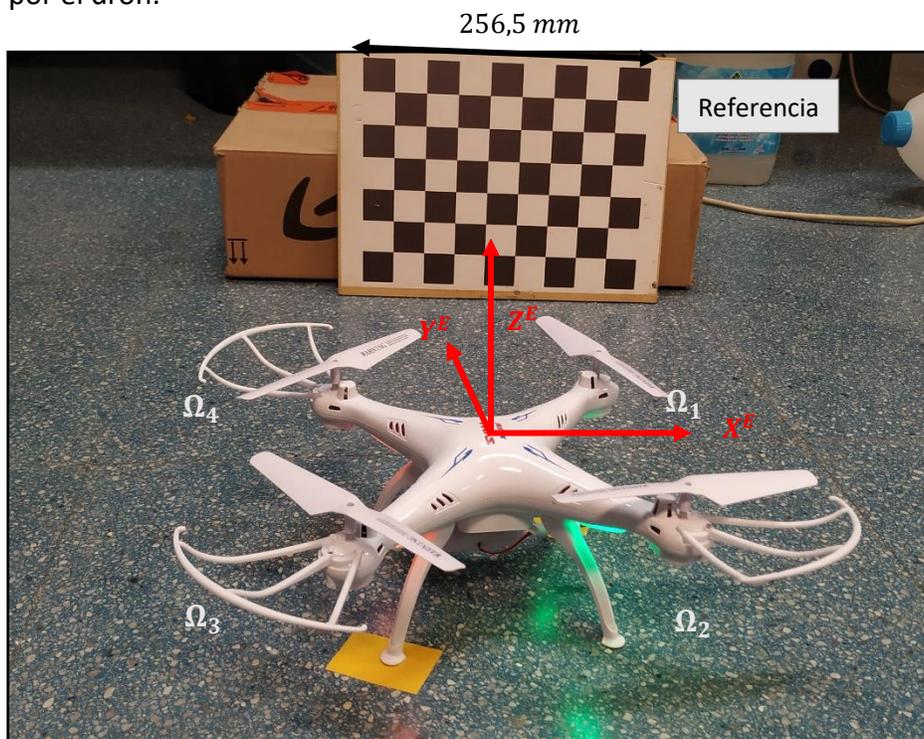


Figura 33. Preparación del dron *Cheerwing Syma XS5W-V3* para un despegue vertical

En *Figura 33* se presenta el montaje del dron para la grabación de un despegue, así como las asunciones tomadas para que el *Tracker* sea capaz de interpretarla. Tal y como se observa, se toma una referencia con una medida conocida para que el programa pueda realizar una transformación de *píxeles* a una unidad de longitud. Además, los resultados se determinan directamente en ejes horizonte F^E , con el centro de coordenadas en el centro de gravedad del cuadricóptero en su posición inicial (sus direcciones son las especificadas en *Figura 33*). Al tratarse de una grabación bidimensional, el *software* únicamente establece

la trayectoria en las direcciones de X^E y Z^E , que resulta suficiente en el caso de un despegue vertical (para otro tipo de trayectorias habría que considerar el problema tridimensional).

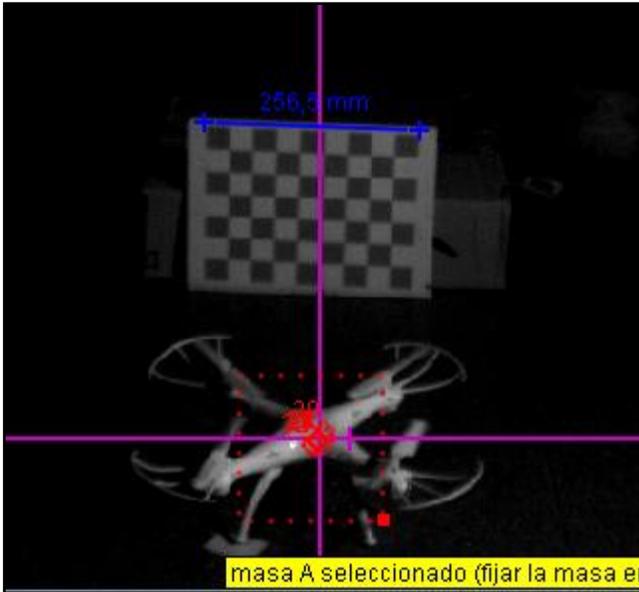


Figura 34. Funcionamiento del Tracker en el establecimiento de la trayectoria seguida por el modelo Cheerwing Syma

Llevamos a cabo tres despegues, en los que el programa analiza la posición del dron en cada fotograma (véase Figura 34), estableciendo así una nube de puntos. Estos resultados se muestran mediante gráficos en Figura 35, Figura 36 y Figura 37. Tal y como se observa, existe una tendencia cercana a la cuadrática en el caso de la dirección Z^E y unos valores muy pequeños de X^E inintencionados,

pero que aparecen por la presencia de alguna asimetría, perturbaciones en el aire o la existencia de una minúscula pendiente en el suelo. Para todas las trayectorias se ha establecido con el mando de control remoto la posición 8 de referencia.

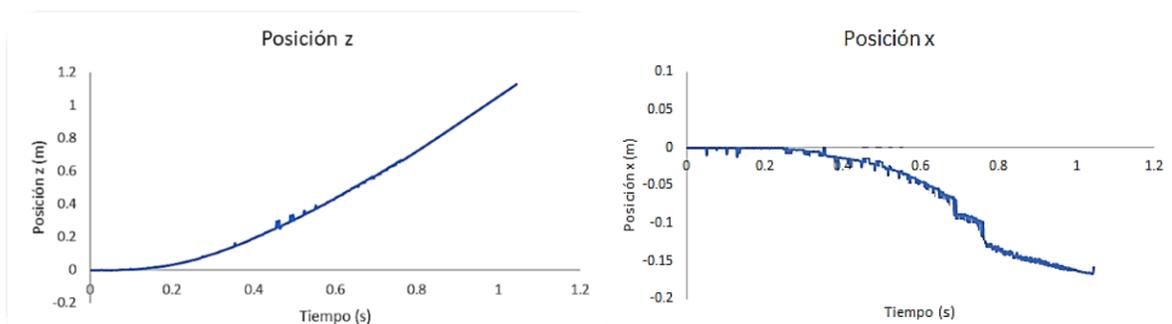


Figura 35. Trayectoria del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en el primer despegue

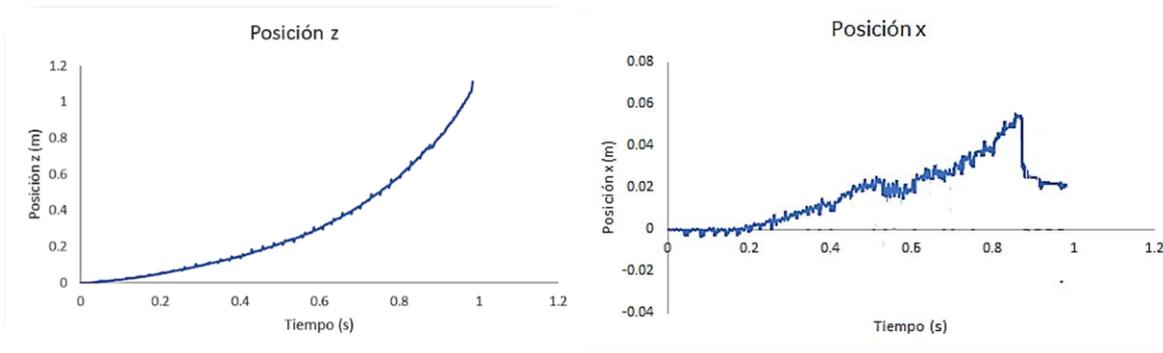


Figura 36. Trayectoria del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en el segundo despegue

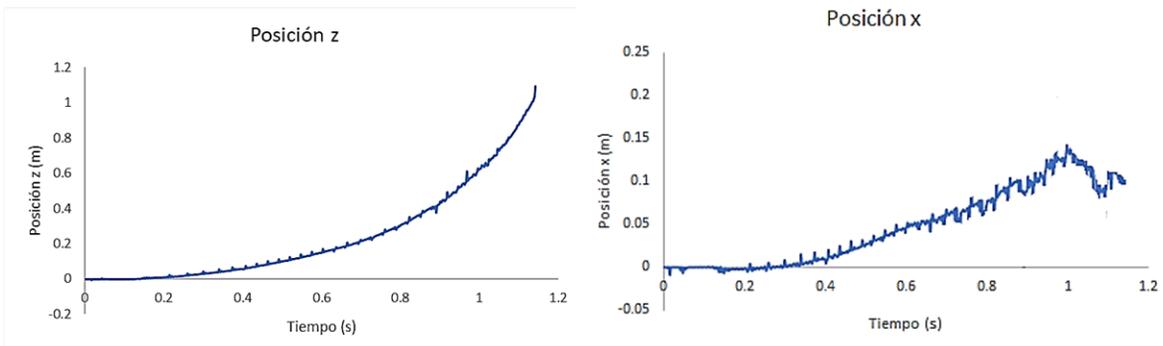


Figura 37. Trayectoria del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en el tercer despegue

La intención del primer despegue es que fuera completamente vertical, mientras que en los dos últimos casos (los dos despegues recrean la misma trayectoria) se crea intencionadamente un desplazamiento en la dirección de Y^E que, aunque no se visualice mediante el *Tracker* (programa bidimensional), sí puede ser simulada en algún programa a partir de la velocidad de rotación²⁰ Ω_{rpm}^i de sus rotores. Por ello, reunimos esta información sobre los tres despegues en *Tabla 5*, que será utilizada en el próximo capítulo cuando empleemos las ecuaciones matemáticas.

La incertidumbre en todas las medidas es $u = 500 \text{ revoluciones/segundo}$. Sin embargo, el interés de los datos reside en la comprobación de que las velocidades de rotación Ω_{rpm}^i son diferentes en el caso de los despegues no verticales. Por eso, estas no se presentan con los redondeos determinados durante toda la memoria.

²⁰ Debido a la falta de robustez de los motores, se prefiere medir los Ω_{rpm}^i en vez de tomar directamente los datos medidos en el Capítulo 5.

Tabla 5. Velocidades de rotación Ω_{rpm}^i en los tres despegues realizados

	Rotación del rotor 1 Ω_{rpm}^1 (rpm)	Rotación del rotor 2 Ω_{rpm}^2 (rpm)	Rotación del rotor 3 Ω_{rpm}^3 (rpm)	Rotación del rotor 4 Ω_{rpm}^4 (rpm)
Despegue 1	5359,6	5359,6	5359,6	5359,6
Despegue 2	5361,4	5349,6	5354,4	5362,6
Despegue 3	5354,7	5349,6	5352,3	5359,6

7. SIMULACIONES EN *MATLAB*

7.1. RESUMEN DE LAS ECUACIONES MATEMÁTICAS

Todo el procedimiento descrito en los Capítulos 2 y 3 se ha trasladado a un programa de *Matlab* que simula cualquier trayectoria para las condiciones iniciales especificadas. Una vez tenemos modelizados los motores con bastante precisión, podemos hacer uso de la función *ode23*, que permite resolver las ecuaciones diferenciales²¹ (desarrolladas en el Capítulo 2). Haciendo un resumen de las ecuaciones planteadas, se encuentran las desarrolladas a continuación.

$$\begin{aligned} \ddot{X} = & -(\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta) u \\ & + [\dot{\phi} (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) + \dot{\theta} \cos \psi \cos \theta \sin \phi - \dot{\psi} (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi)] v \\ & + [\dot{\phi} (-\cos \psi \sin \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi) + \dot{\theta} \cos \psi \cos \theta \cos \phi + \dot{\psi} (\sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi)] w \\ & + \cos \psi \cos \theta \dot{u} + (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) \dot{v} + (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \dot{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y} = & (-\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \cos \psi \cos \theta) u \\ & + [\dot{\phi} (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) + \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta \sin \phi + \dot{\psi} (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi)] v \\ & + [-\dot{\phi} (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi) + \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta \cos \phi + \dot{\psi} (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi)] w \\ & + \sin \psi \cos \theta \dot{u} + (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi) \dot{v} + (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) \dot{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z} = & -\dot{\theta} \cos \theta u + (\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi) v - (\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi) w - \sin \theta \dot{u} \\ & + \cos \theta \sin \phi \dot{v} + \cos \theta \cos \phi \dot{w} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & (\dot{\phi} \tan \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sec^2 \theta \sin \phi) q + (-\dot{\phi} \tan \theta \sin \phi + \dot{\theta} \sec^2 \theta \cos \phi) r + \dot{p} + \tan \theta \sin \phi \dot{q} \\ & + \tan \theta \cos \phi \dot{r} \end{aligned}$$

$$\ddot{\theta} = -\dot{\phi} \sin \phi q - \dot{\phi} \cos \phi r + \cos \phi \dot{q} - \sin \phi \dot{r} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & (\dot{\phi} \cos \phi + \dot{\theta} \tan \theta \sin \phi) \sec \theta q + (-\dot{\phi} \sin \phi + \dot{\theta} \tan \theta \cos \phi) \sec \theta r + \sec \theta \sin \phi \dot{q} \\ & + \sec \theta \cos \phi \dot{r} \end{aligned}$$

donde las velocidades y aceleraciones en ejes cuerpo F^B (V^B, \dot{V}^B, Ω^B y $\dot{\Omega}^B$) vienen determinadas por las siguientes expresiones:

²¹ Para más información consúltese el programa completo *ecuaciones.m* en el Anexo B.1.

$$\begin{aligned}
u &= \cos \theta \cos \psi \dot{X} + \cos \theta \sin \psi \dot{Y} - \sin \theta \dot{Z} \\
v &= (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \dot{X} + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi) \dot{Y} + \sin \phi \cos \theta \dot{Z} \\
w &= (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \dot{X} + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \dot{Y} + \cos \phi \cos \theta \dot{Z}
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -(q w - r v) + g \sin \theta \\
\dot{v} &= -(r u - p w) - g \cos \theta \sin \phi \\
\dot{w} &= -(p v - q u) - g \cos \theta \cos \phi + \frac{b}{m} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\
q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\
r &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{1}{I_{xx}} [-q r (I_{zz} - I_{yy}) + I_{rr} q (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) + b l (\Omega_4^2 - \Omega_2^2)] \\
\dot{q} &= \frac{1}{I_{yy}} [-p r (I_{xx} - I_{zz}) - I_{rr} p (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) + b l (\Omega_3^2 - \Omega_1^2)] \\
\dot{r} &= \frac{1}{I_{zz}} [-p q (I_{yy} - I_{xx}) + d (-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2)]
\end{aligned} \tag{37}$$

Se recuerda que los parámetros b y d dependen de las especificaciones de los motores (véase *Tabla 7* para el dron *Cheerwing Syma XS5W-V3* en una trayectoria particular). Estas expresiones se definen de la siguiente manera:

$$b = \sum_{i=1}^4 \frac{f_i}{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)} = \sum_{i=1}^4 \frac{\left(2 \pi \delta^2 \rho [APC (\Omega_{rpm}^i)^{PF}]^2\right)^{\frac{1}{3}}}{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)} \tag{68}$$

$$d = \sum_{i=1}^4 \frac{P_i}{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)} = \sum_{i=1}^4 \frac{APC (\Omega_{rpm}^i)^{PF}}{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)} \tag{69}$$

Se debe tener en cuenta que las velocidades de giro Ω_{rpm}^i de los rotores son distintas. No obstante, cabe recordar que una de las grabaciones se ha realizado para una trayectoria vertical en Z^E . De esta forma, conviene expresar las ecuaciones anteriores para este caso específico tomando en consideración diversas simplificaciones:

- Todas las hélices del cuadricóptero giran a la misma velocidad angular Ω_i . Por tanto, no se crean pares $(\tau_\phi, \tau_\theta$ y $\tau_\psi)$ alrededor de sus ejes (X^B, Y^B, Z^B) .

- Los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) son nulos, puesto que el dron no rota alrededor de ninguno de sus ejes. Consecuentemente, las velocidades angulares —tanto en F^E como en F^B — son iguales a cero.
- Únicamente existe la componente w del vector velocidad lineal en ejes cuerpo V^B , puesto que asumimos una trayectoria completamente vertical.
- Las aceleraciones $\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}, \dot{u}, \dot{v}, \dot{p}, \dot{q}$ y \dot{r} son nulas debido a que sus primitivas también lo son.

Por tanto, las ecuaciones generales se sintetizan en gran medida, pudiéndose formular de la manera presentada a continuación. Es evidente que, según las relaciones obtenidas, la aceleración lineal \ddot{Z} es constante, así que la velocidad lineal \dot{Z} y la posición Z presentan, respectivamente, una tendencia lineal y cuadrática.

$$\ddot{Z} = \dot{w} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} w &= \dot{Z} \\ \dot{w} &= -g + \frac{b}{m} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{aligned} \quad (70)$$

El parámetro b se define ahora teniendo en cuenta que los cuatro rotores producen la misma fuerza de tracción y giran a la misma velocidad angular Ω_{rpm}^i , por lo que:

$$b = \frac{4 \left(2 \pi \delta^2 \rho \left[APC (\Omega_{rpm}^i)^{PF} \right]^2 \right)^{\frac{1}{3}}}{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)} \quad (71)$$

Tabla 6. Ejemplo de condiciones iniciales para introducir en la simulación

Condiciones iniciales			
Posición X (m)	10	Velocidad \dot{X} (m/s)	0
Posición Y (m)	0	Velocidad \dot{Y} (m/s)	0,01
Posición Z (m)	0	Velocidad \dot{Z} (m/s)	0,05
Alabeo Φ (rad)	0,05	Velocidad $\dot{\Phi}$ (rad/s)	0
Cabeceo θ (rad)	-0,05	Velocidad $\dot{\theta}$ (rad/s)	0
Guiñada ψ (rad)	$\pi/20$	Velocidad $\dot{\psi}$ (rad/s)	0

La función *ode23* requiere de un intervalo de integración —comúnmente conocido como *tspan*— entre el tiempo inicial y el tiempo final que, en nuestro caso, constituye una

serie de puntos separados entre sí por una distancia o $tspan = 0,1$ s. Además, se deben especificar unas condiciones iniciales, que las constituyen los vectores ξ , η , V^E y Ω^E (véase *Tabla 6* para unas condiciones particulares). Todo esto, junto con los parámetros geométricos del dron *Cheerwing Syma XS5W-V3* establecidos en *Tabla 1*) y los parámetros de los motores —consúltese *Tabla 7*— se coloca en una hoja de *Excel* con la finalidad de facilitar los oportunos cambios sin necesidad de modificar el programa de *Matlab*.

Tabla 7. Parámetros de los motores para el modelo Cheerwing Syma XS5W-V3

Parámetros del motor ²²	
Constante de la hélice APC	$1,3062 \cdot 10^{-12} (-)$
Constante de proporcionalidad del motor K_v (en caso de no disponer Ω_{rpm}^i)	17012 rpm/V
Factor de potencia PF	$3,1905 (-)$
Voltaje del motor 1 v_{m1} (en caso de no disponer Ω_{rpm}^1)	$0,1 \leq v_{m1} \leq 2,4 \text{ V}$
Voltaje del motor 2 v_{m2} (en caso de no disponer Ω_{rpm}^2)	$0,1 \leq v_{m2} \leq 2,4 \text{ V}$
Voltaje del motor 3 v_{m3} (en caso de no disponer Ω_{rpm}^3)	$0,1 \leq v_{m3} \leq 2,4 \text{ V}$
Voltaje del motor 4 v_{m4} (en caso de no disponer Ω_{rpm}^4)	$0,1 \leq v_{m4} \leq 2,4 \text{ V}$
Velocidad del rotor 1 Ω_{rpm}^1	$2500 \leq \Omega_{rpm}^1 \leq 7500 \text{ rpm}$
Velocidad del rotor 2 Ω_{rpm}^2	$2500 \leq \Omega_{rpm}^2 \leq 7500 \text{ rpm}$
Velocidad del rotor 3 Ω_{rpm}^3	$2500 \leq \Omega_{rpm}^3 \leq 7500 \text{ rpm}$
Velocidad del rotor 4 Ω_{rpm}^4	$2500 \leq \Omega_{rpm}^4 \leq 7500 \text{ rpm}$

El programa²³ retorna la tracción f , los momentos τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ y la evolución de la posición ξ , la orientación η , las velocidades en ejes horizonte F^E (V^E y Ω^E) y sus aceleraciones (\dot{V}^E y $\dot{\Omega}^E$). Los resultados de estos parámetros se trasladan a otra hoja de cálculo para trabajar con ellos. Además, se debe tener en cuenta que, a pesar de que experimentalmente las trayectorias estudiadas corresponden a tipos de vuelo ascendente

²² Debido a la poca robustez de los motores, el valor máximo de Ω_{rpm}^i especificado en *Tabla 7* debe tomarse como algo orientativo.

²³ El programa principal, denominado *Dinamica_Cuadricoptero.m*, puede ser consultado en el Anexo B.2.

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

específicos, el programa permite simular cualquier tipo de trayectoria. Por ejemplo, para las condiciones iniciales especificadas en *Tabla 6* y los datos del motor resumidos en *Tabla 7*, para las velocidades angulares $\Omega_{rpm}^1 = 5500 \text{ rpm}$, $\Omega_{rpm}^2 = 5530 \text{ rpm}$, $\Omega_{rpm}^3 = 5520 \text{ rpm}$ y $\Omega_{rpm}^4 = 5510 \text{ rpm}$, se obtienen los resultados expresados en *Figura 38*, *Figura 39*, *Figura 40* y *Figura 41*.

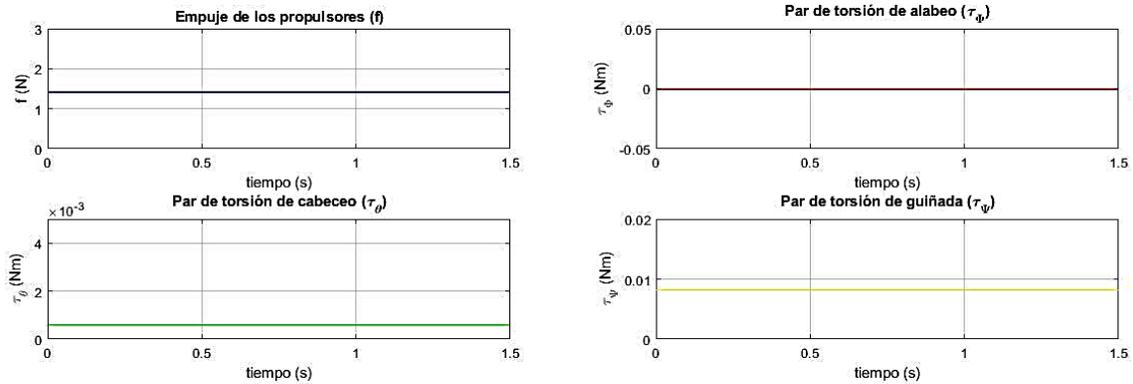


Figura 38. Tracción f y momentos τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 para unas condiciones de vuelo

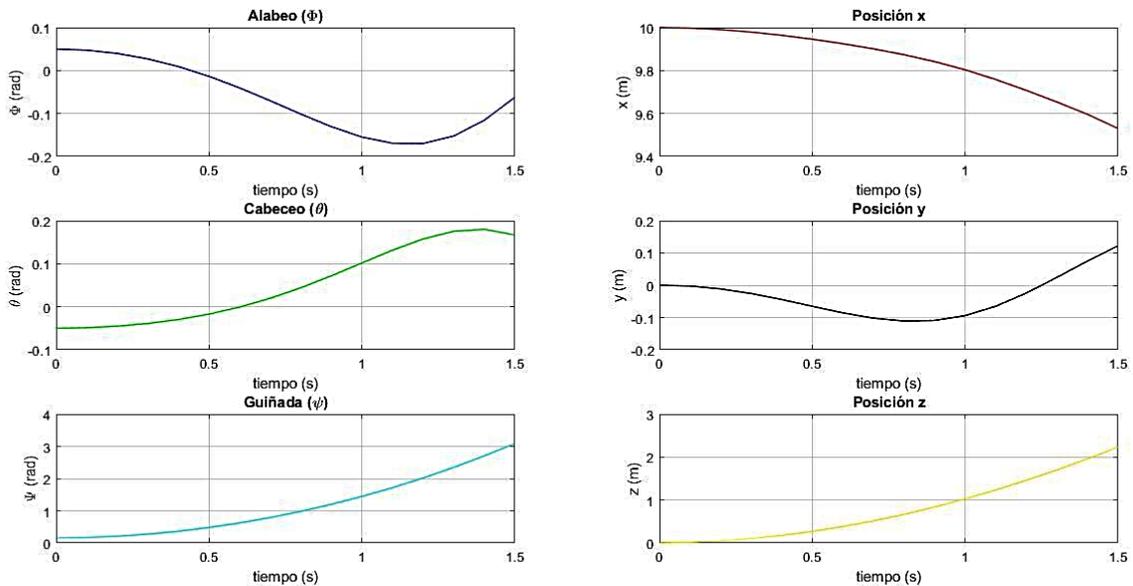


Figura 39. Posición ξ y orientación η del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 para unas condiciones de vuelo

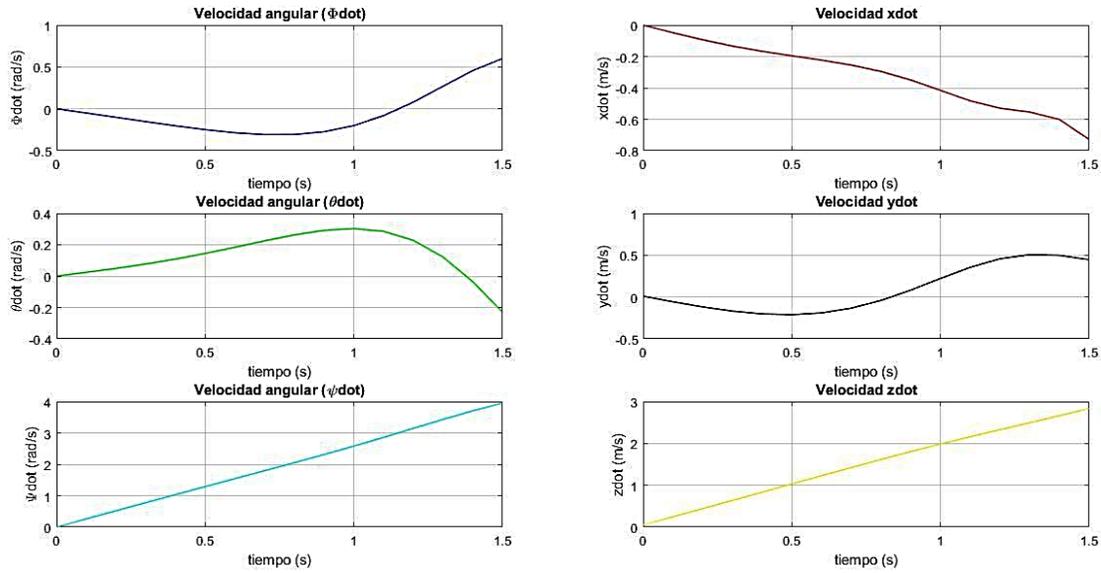


Figura 40. Velocidad (V^E y Ω^E) del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 para unas condiciones de vuelo

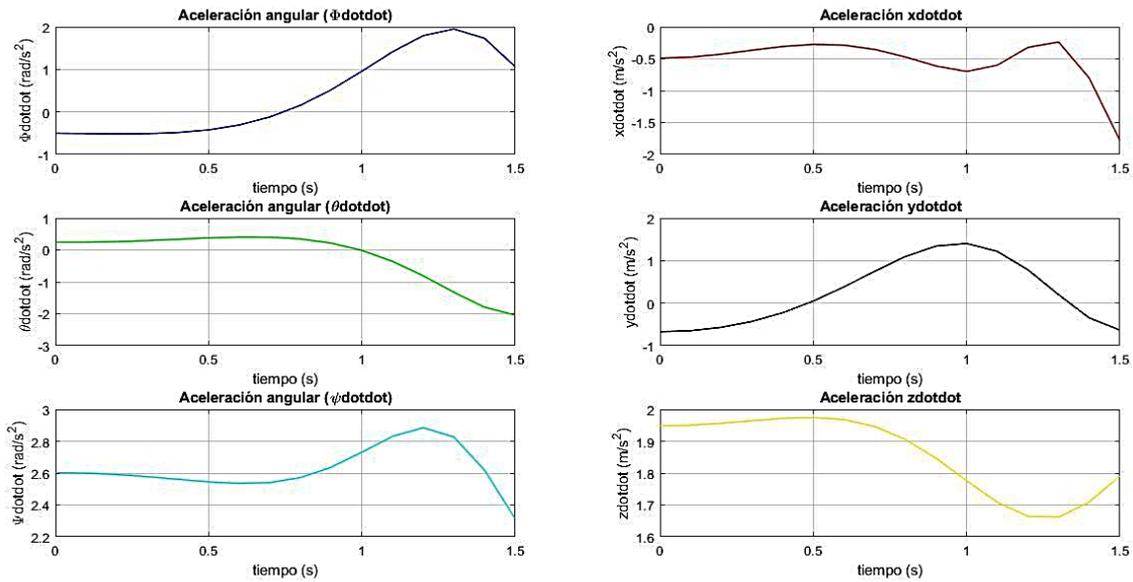


Figura 41. Aceleración (\dot{V}^E y $\dot{\Omega}^E$) del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 para unas condiciones de vuelo

Tal y como se observa en *Figura 38*, se trabaja con trayectorias en las que la tracción f y los momentos τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ se mantienen constantes, debido a que los rotores también giran siempre con la misma velocidad de rotación Ω_i . Esto implica, por simplicidad, que para cualquier desplazamiento consideramos una función escalón en la determinación de estos parámetros y obviamos el tiempo de establecimiento que presenten. Por ejemplo, en un despegue, asumimos que el giro inicial de las hélices ocurre a la misma velocidad que

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

transcurrido un tiempo de 10 s (si no cambiamos la posición por medio del mando de control remoto).

A continuación, mediante el programa creado, tratamos de visualizar las semejanzas entre los resultados obtenidos a partir de la grabación experimental y mediante las ecuaciones matemáticas.

7.2. SIMULACIÓN DEL DESPEGUE VERTICAL

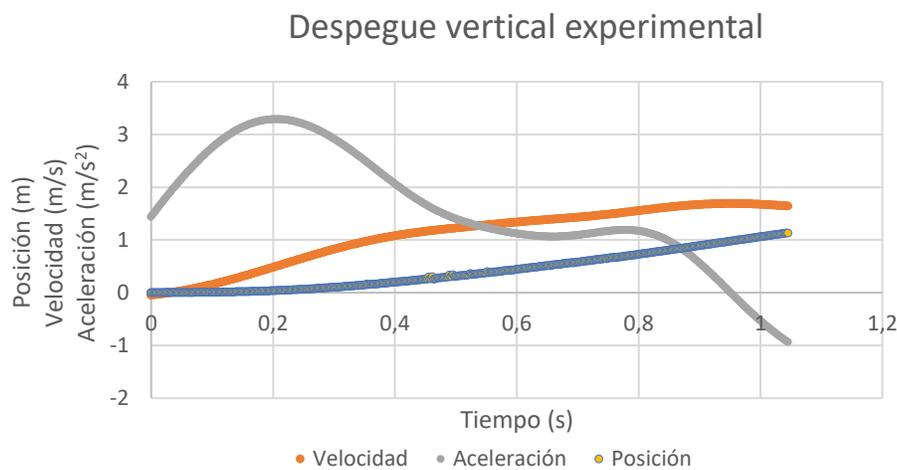


Figura 42. Posición Z^E , velocidad \dot{Z} y aceleración \ddot{Z} del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en un despegue vertical

Llevando a cabo un ajuste suave de la posición Z^E , de la velocidad \dot{Z} y de la aceleración \ddot{Z} obtenidas experimentalmente en el despegue vertical realizado (véase Figura 42), nos damos cuenta de que, aparentemente, se produce un estancamiento en la posición Z^E y en la velocidad \dot{Z} . En la aceleración \ddot{Z} esto se traduce como una situación progresiva en la que el dron reduce su velocidad tras haber alcanzado una aceleración superior a los 3 m/s^2 (es más, justo antes de llegar a $t = 1 \text{ s}$ el cuadricóptero comienza a frenar). Esto se debe a la resistencia del aire, no tomada en cuenta en el modelo matemático utilizado. Además, en el periodo de tiempo del despegue anterior a $t = 0,2 \text{ s}$, se observa un ascenso considerable de \dot{Z} y, en menor medida, de Z^E .

Aquí se pone de manifiesto que, a pesar de haber considerado nosotros una función escalón para nuestro modelo por cuestión de simplicidad, la placa controladora de vuelo transmite la potencia P_i (señalada por el mando de control remoto a través de la regulación de sus palancas de control) paulatinamente; es decir, tras haber transcurrido un tiempo determinado.

En *Figura 43* se aprecia que es posible una representación de Z^E y \dot{Z} por medio de tendencias cuadráticas y lineales, respectivamente (tal y

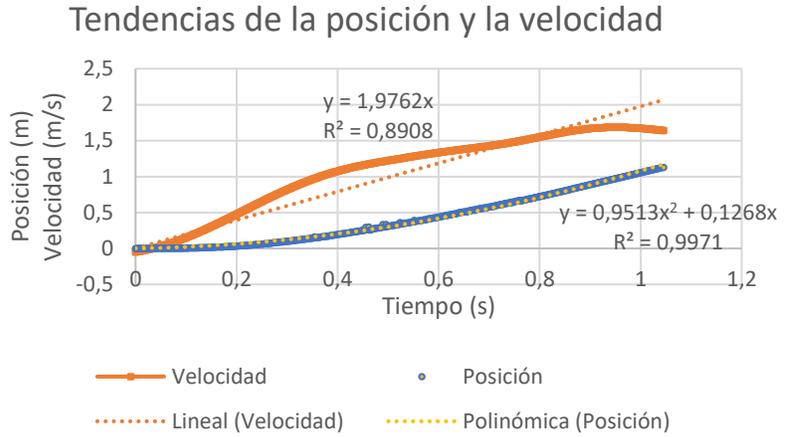


Figura 43. Ajuste de la posición Z^E y velocidad \dot{Z} del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en un despegue vertical

como ya se comentó en la anterior sección). Sin embargo, debemos comprobar que, además de cumplirse las propensiones esperadas, el modelo matemático devuelve valores de estos parámetros dentro de un rango de error asumible. Considerando que $\Omega_{rpm}^i = 5359,6 \text{ rpm}$ (según los datos reunidos en *Tabla 5*) y, teniendo en cuenta (70) y (71):

$$\dot{Z} = \int_0^t \ddot{Z} dt \rightarrow Z^E = \int_0^t \dot{Z} dt \tag{72}$$

$$Z^E = \frac{-g t^2}{2} + \frac{2 t^2 \left(2 \pi \delta^2 \rho \left[APC \left(\Omega_{rpm}^i \right)^{PF} \right]^2 \right)^{\frac{1}{3}}}{m}$$

A partir de (72) se lleva a cabo un ajuste por mínimos cuadrados²⁴ tratando de minimizar los datos obtenidos experimental Z_{Exp}^E y analíticamente Z_{Teor}^E (este valor a minimizar lo denominamos M). Llamando k al número de valores que conforman la nube de puntos para formar una trayectoria, *Matlab* es capaz de hallar el valor de M .

²⁴ Los programas de *Matlab* usados para reproducir este ajuste por mínimos cuadrados se encuentran en el *Anexo B.3*.

$$M = \sum_1^k \left| \sqrt{(Z_{Exp}^E - Z_{Teor}^E)^2} \right| \quad (73)$$

Se toman como variables los parámetros del motor *APC* y *PF*. El objetivo consiste en revisar que, reproduciendo a través de las ecuaciones matemáticas condiciones similares a las estimadas en el primer despegue, la curva de potencia conseguida se encuentra dentro de los márgenes de error supuestos (véase *Figura 24*).

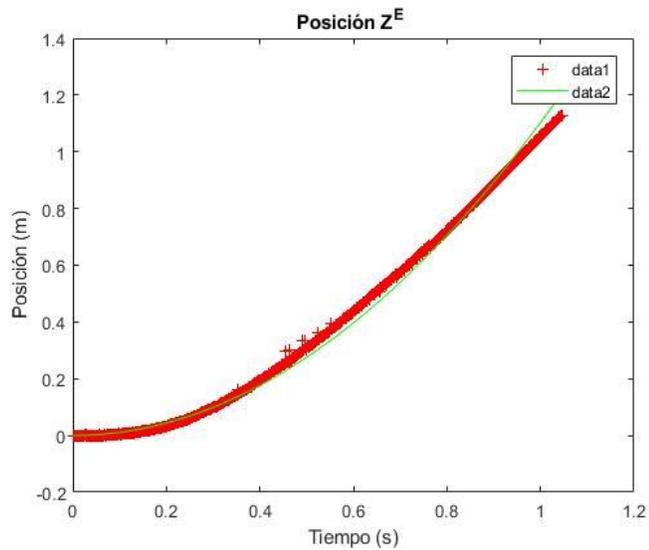


Figura 44. Z^E experimental (curva roja) y Z^E analítica reproduciendo los datos del despegue (curva verde)

Tal y como se contempla en *Figura 44*, el programa *Matlab* simula los datos experimentales con un gran grado de precisión. Con una $M = 0,3846$ se alcanzan unos valores de $APC = 3,2031 \cdot 10^{-12}$ y $PF = 3,1$. Estos datos, que son los que mejor reproducen el despegue vertical realizado con el dron *Cheerwing Syma XS5W-V3*, se comparan con la curva de potencia con el propósito de probar su validez (consúltese *Figura 45*).

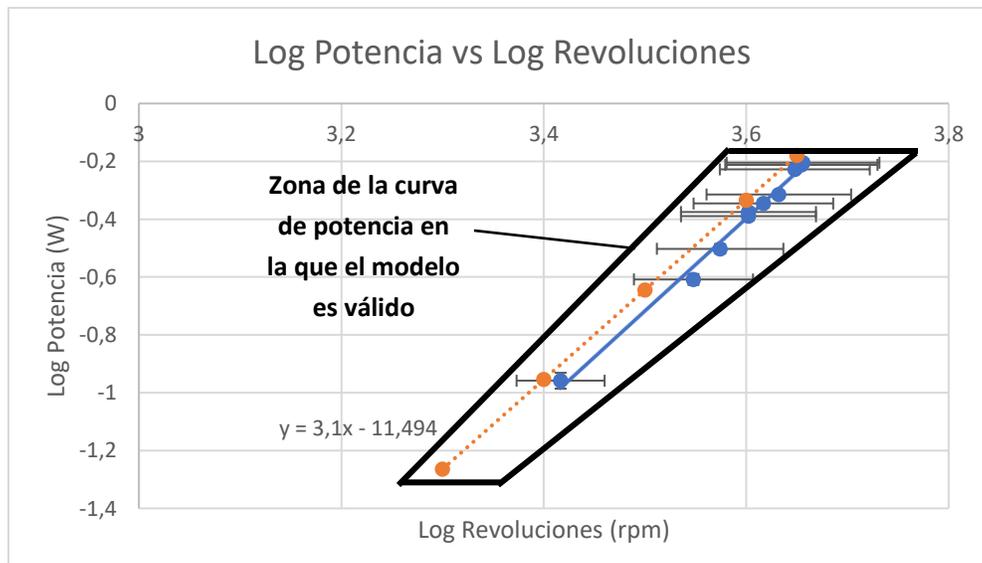


Figura 45. Curva de potencia del despegue vertical (tendencia naranja) y la obtenida de manera genérica midiendo directamente del motor (tendencia azul)

Se visualiza que los parámetros del motor estimados para el caso del despegue vertical forman una tendencia lineal que se sitúa dentro de los márgenes de incertidumbre calculados. Esto indica que el ascenso vertical de nuestro cuadricóptero de estudio puede ser explicado mediante el procedimiento matemático desarrollado a lo largo del proyecto. No obstante, se debe tener en cuenta que existe una incertidumbre en los parámetros del motor APC y PF estimados en el Capítulo 5. Por ello, para cada trayectoria tenemos que mejorar la aproximación de estos datos medidos inicialmente antes de comprobar la validez del modelo matemático.

Finalmente, se simula la trayectoria en *Matlab* con las correcciones realizadas y tomando que todos los valores iniciales son nulos a excepción de la guiñada $\psi = 0,61 \text{ rad}$ ($\psi = 35^\circ$), debido a que existe un ángulo (siempre constante) entre $X^B - X^E$ y entre $Y^B - Y^E$ (véase *Figura 33* para la situación inicial del dron antes del despegue). En *Figura 46* se representa de manera esquematizada el cuadricóptero con las direcciones en F^E y F^B consideradas.

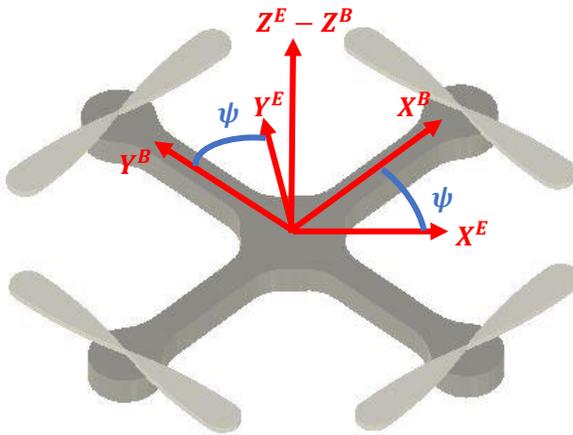


Figura 46. Ejes horizonte F^E y ejes viento F^B del cuadricóptero en el momento justo de los despegues

Los resultados de la simulación se representan en *Figura 47*. A pesar de no haberse considerado la resistencia del aire, los resultados de la posición Z^E y de la velocidad \dot{Z} son muy similares a los obtenidos experimentalmente. La aceleración \ddot{Z} es la magnitud que presenta cambios más importantes, puesto que esta resistencia no tenida en cuenta provoca que la tendencia constante obtenida por medio de los desarrollos matemáticos vaya menguando progresivamente.

Sin embargo, comparando la aceleración media obtenida experimentalmente ($\ddot{Z}_{MExp} = 1,97 \text{ m/s}^2$) y la aceleración media analítica ($\ddot{Z}_{MTeor} = 2,21 \text{ m/s}^2$), se

comprueba que, en un principio, la resistencia del aire tampoco provoca grandes cambios en la aceleración, puesto que su diferencia es de solo $|\ddot{Z}_{MExp} - \ddot{Z}_{MTeor}| = 0,24 \text{ m/s}^2$.

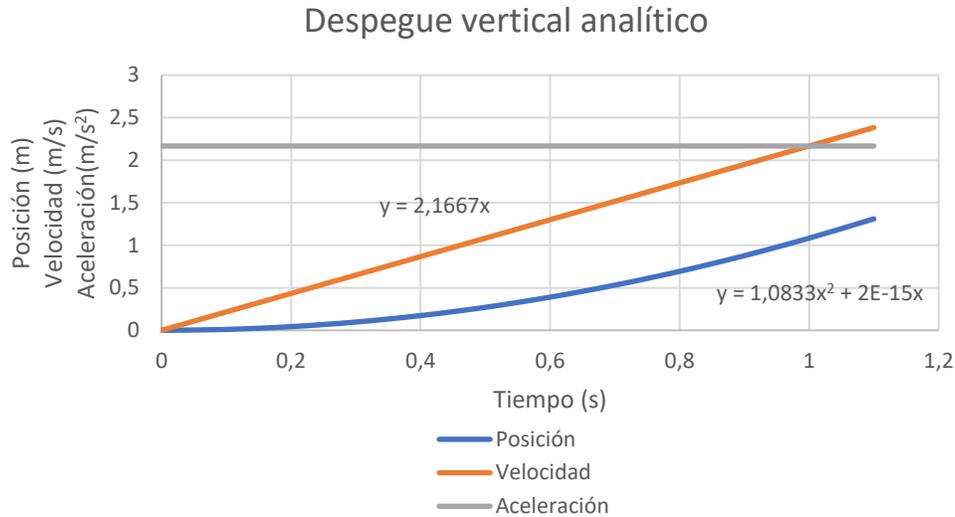


Figura 47. Posición Z^E , velocidad \dot{Z} y aceleración \ddot{Z} del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en un despegue vertical mediante las ecuaciones matemáticas

7.3. SIMULACIÓN DEL DESPEGUE NO VERTICAL

Para el estudio de este caso se toma uno de los dos despegues no-verticales llevados a cabo experimentalmente, en los que las condiciones iniciales continúan siendo nulas a excepción del ángulo de guiñada ψ . La maniobra es ahora tridimensional, por lo que se debe utilizar el modelo matemático completo para poder describirla. Para que exista un desplazamiento en Y^E se debe producir una asimetría en las revoluciones Ω_i de los rotores, por lo que estas no tienen el mismo valor.

Debido a la complejidad del problema tridimensional, resulta inviable reproducir el ajuste por mínimos cuadrados. No obstante, utilizando los datos de Ω_i recogidos en *Tabla 5* podemos tratar de explicar la trayectoria desde un punto de vista físico y cualitativo. Por ejemplo, reproduciendo en *Matlab* las condiciones del despegue 2 (usamos los valores de *APC* y *PF* estimados en la anterior sección), conseguimos una simulación del desplazamiento como el recogido en *Figura 48*.

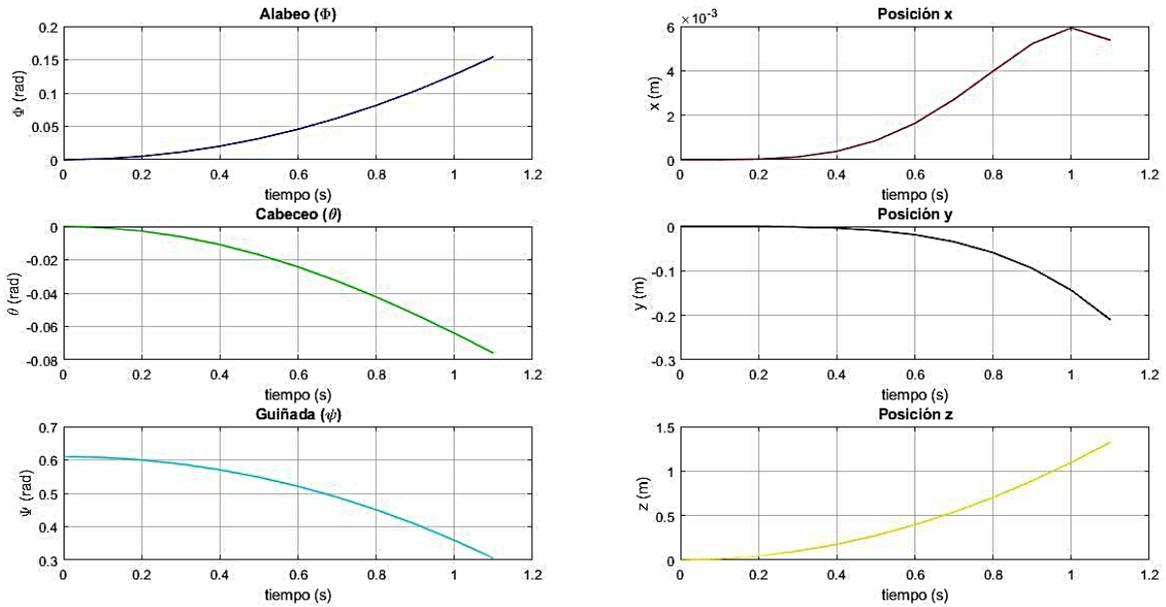


Figura 48. Posición ξ y orientación η del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en un despegue no vertical mediante las ecuaciones matemáticas

A partir de estos resultados se realizan diversas suposiciones. En primer lugar, se indica un desplazamiento en dirección X^E cuya aparición, en el anterior capítulo, no se había podido argumentar. Además, la tendencia resulta muy similar a la obtenida experimentalmente (consúltese *Figura 37*). Sin embargo, comparando esta dirección con las otras dos (Y^E y Z^E), según los gráficos obtenidos, los datos de X^E se encuentran dos órdenes de magnitud por debajo de Y^E y tres órdenes de magnitud por debajo de Z^E . Por tanto, el desplazamiento en esta dirección se puede considerar despreciable. Así, se representa esta trayectoria como el gráfico presentado en *Figura 49*.

$$\begin{aligned} X^E &= O(10^{-3} \text{ m}) \\ Y^E &= O(10^{-1} \text{ m}) \\ Z^E &= O(10^0 \text{ m}) \end{aligned} \quad (74)$$

No obstante, a pesar de ser capaces de simular vuelos no axiales, es muy posible que, transcurrido un periodo de tiempo, este tipo de trayectorias se tornen inestables. En *Figura 48* se visualiza un aumento progresivo de los ángulos de alabeo ϕ y cabeceo θ (el giro en sentido horario hace que estos ángulos sean positivos, mientras que en sentido

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

antihorario provoca que los ángulos de Euler sean negativos) que, tras alcanzar valores elevados, podrían provocar un descenso forzado del vehículo no tripulado.

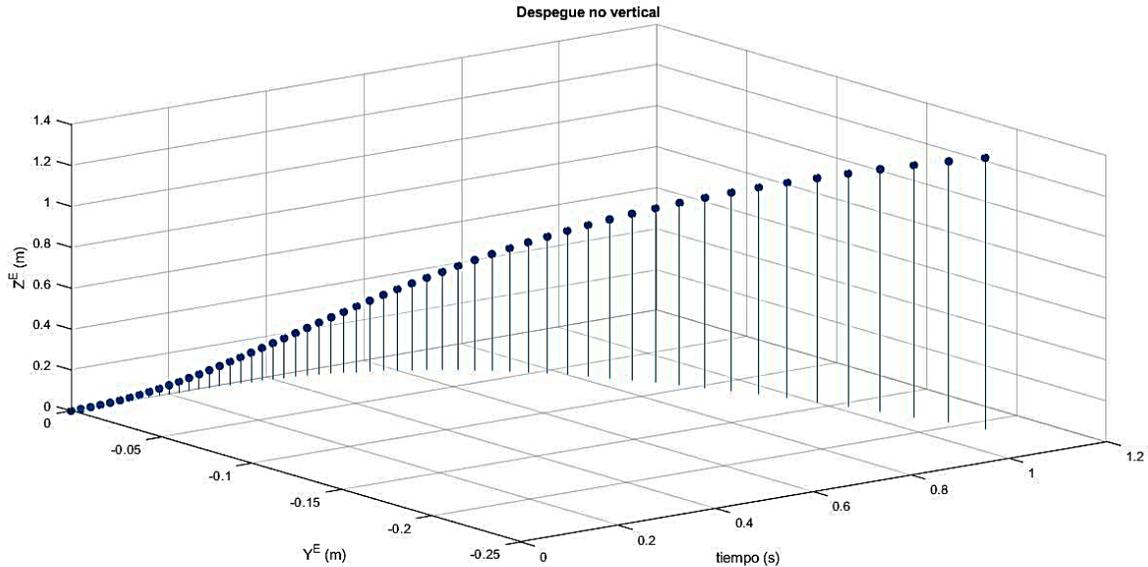


Figura 49. Simulación de la trayectoria del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en un despegue no vertical mediante las ecuaciones matemáticas

Por último, evaluando las velocidades de rotación Ω_i del dron durante este segundo despegue, evaluamos cualitativamente la cantidad de tracción f_i generada por cada uno de los rotores para conseguir la trayectoria conseguida. Rescatando la expresión (50) formulada en el Capítulo 3, reunimos los valores de f_i en *Tabla 8*.

$$f_i = \left(2 \pi \delta^2 \rho \left[APC (\Omega_{rpm}^i)^{PF} \right]^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (50)$$

Tabla 8. Tracción de los cuatro rotores del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en un despegue no vertical

Tracción del primer rotor	Tracción del segundo rotor	Tracción del tercer rotor	Tracción del cuarto rotor
$f_1 (N)$	$f_2 (N)$	$f_3 (N)$	$f_4 (N)$
0,3608	0,3592	0,3599	0,3610

Al igual que con las revoluciones Ω_{rpm}^i , se presentan los datos de f_i sin tener en cuenta la aproximación de los errores (en todos ellos, $u = 0,07 N$) para una mayor ilustración de las asimetrías en los rotores durante un vuelo no vertical.

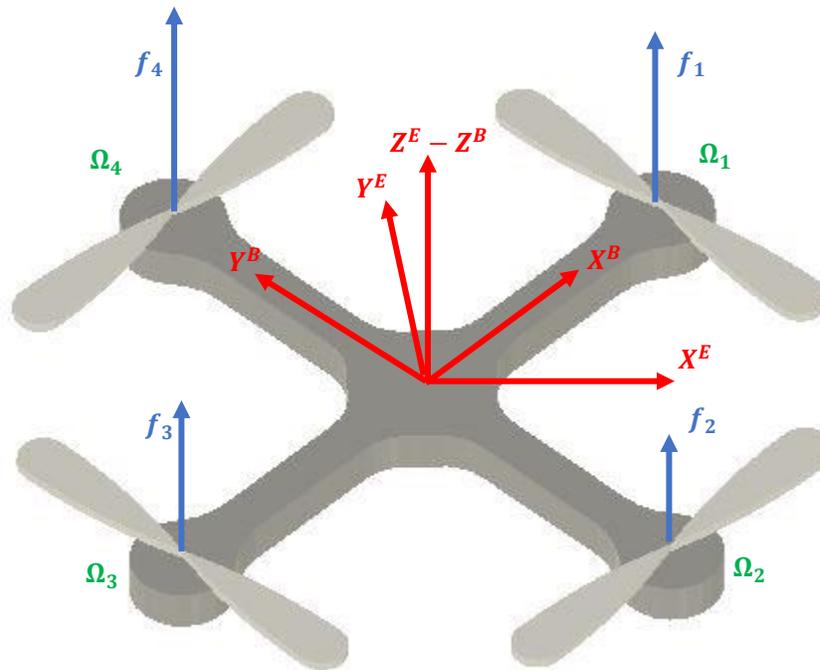


Figura 50. Esquema representativo del dron Cheerwing Syma XS5W-V3 en el despegue no vertical

La situación de este despegue la encontramos esquematizada en *Figura 50*, donde es posible observar que el dron tiende a desplazarse hacia donde los rotores generan menos tracción f_i . Esto es debido a que los pares generados ($\tau_\phi = 4,02 \cdot 10^{-4} Nm$, $\tau_\theta = -2,17 \cdot 10^{-4} Nm$, $\tau_\psi = -1,6 \cdot 10^{-3} Nm$), provocan que el cuadricóptero gire y, por tanto, que la tracción global generada f no se encuentre en la dirección de Z^E . En definitiva, lo que se concluye de esta trayectoria es la justificación de por qué un vehículo de estas características no puede efectuar un movimiento de traslación sin producir simultáneamente uno de rotación.

No obstante, de acuerdo con la metodología empleada, no se puede argumentar de manera cuantitativa el desplazamiento del vehículo según los valores numéricos de la tracción f_i (véase *Tabla 8*), ya que estos presentan un grado de incertidumbre demasiado elevado —la incertidumbre u presenta un orden de magnitud de 10^{-2} mientras que las diferencias de los rotores en la generación de empuje son del orden de 10^{-3} .

8. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo nos hemos propuesto demostrar que es factible el desarrollo de un modelo matemático para un cuadricóptero de forma que este sea capaz de predecir su posición en función del tiempo. Para el caso de un despegue vertical es posible verificar que las ecuaciones matemáticas determinan, con un grado de precisión bastante notable, el comportamiento del dron. Para cualquier otro tipo de trayectoria también se comprueba que el modelo es capaz de aproximarla.

Consecuentemente, se demuestra que es factible el estudio de la dinámica presente en un cuadricóptero desde un punto de vista analítico, describiendo todos los fenómenos presentes mediante ecuaciones matemáticas. También se prueba que la tracción generada por los rotores puede ser estimada mediante la *Teoría de Cantidad de Movimiento*.

Se consigue caracterizar los parámetros de los motores de nuestro dron de estudio, pese a la falta de robustez de estos y el hecho de que el vehículo utilizado no es profesional. Con respecto a la implementación del modelo analítico en un lenguaje de programación, se comprueba que se ha logrado introducir todo el desarrollo matemático en *Matlab*. Además, el procedimiento matemático se valida por medio de la comparación entre los resultados obtenidos con el programa y la trayectoria llevada a cabo (cuya estimación se realiza a partir del seguimiento del vehículo con una cámara de alta velocidad y el uso del programa *Tracker*).

Finalmente, se observa que en un despegue no vertical el modelo matemático sigue las tendencias esperadas. A nivel cualitativo se consigue explicar el proceso físico que determina los movimientos de rotación y traslación en un cuadricóptero, pero es necesario buscar diferentes procedimientos para analizarlos a nivel cuantitativo.

8.1. TRABAJOS FUTUROS

El proyecto estudiado consiste en una toma de contacto con el mundo de los drones. Por ello, existen numerosas opciones de investigación a partir de este trabajo. Debido a que

se ha comprobado la validez del modelo matemático desarrollado, futuras indagaciones podrían centrarse en el estudio de trayectorias particulares de vuelo, tales como giros, aterrizajes, vuelos en crucero... Adicionalmente, tal y como se ha comentado en el anterior capítulo, sería conveniente incrementar el grado de fiabilidad del procedimiento analítico buscando una forma de cuantificar la resistencia del aire.

Con el objetivo de mejorar el desarrollo analítico llevado a cabo, se podrían implementar, como entradas del programa de simulación, funciones rampa u otro tipo de funciones dependientes del tiempo. Así, se describiría de manera más precisa el comportamiento del dron al implementar con el *joystick* del mando de control remoto una potencia determinada.

Otros estudios en relación con los drones pueden centrarse en el control y la predicción de la estabilidad del vehículo al desempeñar trayectorias, con el propósito de programar de antemano maniobras específicas y comprobar si sus actuaciones resultan factibles.

Por último, en relación con la caracterización de los motores, sería apropiado llevar a cabo todas las mediciones de este estudio en un cuadricóptero profesional. De esta forma, nos encontraríamos con motores más robustos que permitirían mejorar las estimaciones del empuje y la potencia inducida. Del mismo modo, un seguimiento de las trayectorias realizadas a nivel experimental con flujo óptico acrecentaría la precisión en el tratamiento de estos datos.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

PARTE II: PRESUPUESTO

1. CÁLCULO DE PRESUPUESTOS

En el siguiente capítulo se presentan los costes asociados a la realización del estudio, incluyendo tanto el tiempo de uso del material informático (programas utilizados); el material de laboratorio (modelo *Cheerwing Syma XS5W-V3*, instrumentos para mediciones...) y las horas utilizadas por el personal universitario, ingenieros y técnicos informáticos.

1.1. DESGLOSE DE COSTES UNITARIOS

Se considera la depreciación que, con el paso del tiempo, experimentan los activos físicos. Por ello, llamando V_C y V_R al valor de compra y al valor residual al cabo del periodo de amortización n_a en años, respectivamente, (estableciendo todos los valores monetarios en €) se define el coste de amortización a (€/año) como:

$$a = \frac{V_C - V_R}{n_a} \quad (75)$$

Sin embargo, nos interesa trabajar con la *hora* como unidad temporal. Denominando t_h a la tasa horaria, siendo h el tiempo de trabajo al año (en *horas/año*), podemos hacer la correspondencia a partir de:

$$t_h = \frac{a}{h} \quad (76)$$

Para calcular la tasa horaria t_h , se asumen 35 horas de trabajo semanales durante las semanas lectivas de cada año. Sabiendo que hay 46 semanas no festivas, se considera que $h = 1610$ *horas/año*. A partir de estas asunciones, se estiman los gastos de cada uno de los recursos utilizados.

- **Equipo informático**

La computadora personal empleada presenta las siguientes características:

- Modelo: PC Packard Bell EasyNote ENT71BM

- Procesador: Intel® Celeron® N2830 (hasta 2,41 GHz)
- RAM: 4 GB
- HDD: 320 GB

Considerando un $V_C = 300$ € con un $n_a = 5$ años y un valor residual $V_R = 0,2 V_C$, obtenemos una tasa horaria $t_h = 0,03$ €/hora. Además, se han utilizado otros dos equipos del laboratorio en los que asumimos un $V_C = 4500$ €, $V_R = 0,2 V_C$ y $n_a = 8$ años. Además, se calcula que estos se encuentran el mismo tiempo operativos que la computadora personal ($h = 1610$ horas/año). Así, estimamos un $t_h = 0,28$ €/hora.

- **Software**

Para este trabajo se han empleado diversos programas, algunos de los cuales son comerciales y, por su instalación, se consiguen a un coste determinado. En primer lugar, la licencia de *Matlab* para instituciones universitarias se tasa en 500 €/año. Contabilizando varias *toolbox* (por ejemplo, la *symbolic toolbox*) cuyo precio de adquisición es, aproximadamente, 200 €, estimamos un $t_h = 0,68$ €/hora.

A continuación, se sitúa el paquete *Microsoft Office*, cuya autorización anual cuesta 69 €/año y, por tanto, se consigue un $t_h = 0,04$ €/hora. La licencia del *Mathematica* se tasa, para la universidad, en 160 €/año, lo que supone un $t_h = 0,10$ €/hora. El precio del *software AFH-FD*, usado para realizar las mediciones digitales con el dinamómetro, se estima en 773,50 €. Esto implica un $t_h = 0,48$ €/hora. En cuanto al programa manipulado para el diseño de los dibujos, el *Fusion 360* perteneciente a *Autodesk*, presenta un permiso de 495 €/año, que conlleva un $t_h = 0,31$ €/hora. Los demás *softwares* empleados (*Adobe*, *Crocodile*, *Tracker...*) son de licencia gratuita y se adquieren sin ningún coste.

- **Equipo necesario y material del laboratorio**

Para empezar, para desarrollar este proyecto, se requiere la compra de un dron. En nuestro caso, la adquisición del modelo *Cheerwing Syma XS5W-V3* se estima en 42 €. No obstante, hay que tener en cuenta que se ha necesitado un segundo artefacto para ser desmontado y poder llevar a cabo todas las mediciones. Además, la compra de baterías

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

para el vehículo es de 14 €. El uso de un dron no profesional se ha debido, principalmente, a su coste; los drones profesionales se obtienen por un precio superior a 500 € (lo que encarecería enormemente el estudio).

En cuanto al material de laboratorio, debemos considerar el voltímetro y el amperímetro, así como el generador de corriente. Los dos primeros pueden ser adquiridos por un precio de 30 € cada uno, mientras que el coste del generador de corriente eléctrica asciende a 4500 €. Se asume el uso de un rollo de cable de longitud 100 *metros* para realizar todas las conexiones, con un coste de 15,50 €. El empleo de la cámara de alta velocidad *Mikrotron Eo Sens MC 1362* y la cámara profesional, usadas para medir la trayectoria del despegue y el cómputo de revoluciones por minuto de las hélices, se estima, respectivamente, en 9735 €/año ($t_h = 6,05$ €/hora) y 24750 €/año ($t_h = 15,37$ €/hora). El modelo del dinamómetro utilizado (*Sauter FH5*) se compra por 460 €.

- **Lugar de trabajo**

Se contempla el alquiler de una oficina compartida en la ciudad de Valencia, que cuesta aproximadamente 300 €/mes. Al ser el despacho compartido entre tres personas (el estudiante universitario y los dos tutores del proyecto), individualmente supone 100 €/mes. Asumiendo una duración del proyecto equivalente a 9 meses, el coste total asciende a las 2700 €.

- **Recursos humanos o coste de personal**

En el desarrollo del proyecto se han involucrado tres identidades: el estudiante universitario (cuya participación, al no ser beneficiario de ninguna beca ni ha sido contratado, presenta un coste horario nulo) y los dos tutores. Estos, al tratarse de profesores doctorados, son estimados con un $t_h = 47$ €/hora.

1.2. PRESUPUESTO TOTAL

Reuniendo toda la información contenida (véase *Tabla 9*) y, suponiendo que a lo largo del curso vigente se han empleado 450 horas en el desarrollo del trabajo, es posible

llevar a cabo una estimación razonable del presupuesto total del proyecto. El IVA se considera del 21%.

Tabla 9. Costes específicos del proyecto

Concepto	Periodo (horas)	Tasa horaria t_h (€/hora)	Importe bruto (€)	IVA al 21% (€)	Importe (€)
Equipos y software					
Ordenador personal	450	0,03	13,50	2,84	16,34
Ordenador laboratorio	450	0,28	126,00	26,46	152,46
<i>Matlab</i>	450	0,68	306,00	64,26	370,26
<i>Microsoft office</i>	450	0,04	18,00	3,78	21,78
<i>AFH-FD</i>	10	0,48	4,80	1,01	5,81
<i>Mathematica</i>	50	0,10	5,00	1,05	6,05
<i>Fusion 360</i>	50	0,31	15,50	3,26	18,76
Material					
Dron SYMA			84,00	17,64	101,64
Baterías			13,50	2,84	16,34
Generador corriente eléctrica			4500,00	945,00	5445,00
Medida circuito eléctrico			75,50	15,86	91,36
<i>Mikrotron</i>	10	15,37	153,70	32,28	185,98
Cámara profesional	10	6,05	60,50	12,71	73,21
<i>FH5</i>			460,00	96,00	556,60
Oficina y personal					
Oficina			2700,00	567,00	3267,00
Personal	100	47,00	9400,00	1974,00	11374,00

Sumando los gastos de cada uno de los apartados se estiman los costes globales, que permiten, de manera sencilla, un cálculo del presupuesto del proyecto (consúltese *Tabla 10*).

Tabla 10. Costes globales del proyecto

	Importe bruto (€)	IVA al 21% (€)	Importe (€)
Equipos y software	480,80	110,66	591,46
Material	5347,20	1122,93	6470,13
Oficina y personal	12100,00	2541,00	14641,00
TOTAL	17928,00	3774,59	21702,59

El presupuesto total del trabajo asciende a la cantidad de:

VEINTIÚN MIL SETECIENTOS DOS EUROS CON CINCUENTA Y NUEVE CÉNTIMOS



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

PARTE III: PLIEGO DE CONDICIONES

1. NORMATIVA DE USO DE DRONES

El proyecto llevado a cabo exige trabajar con un dron. Tanto si el objetivo de uso es a nivel recreativo como a nivel profesional, existe una normativa vigente sobre su empleo. Aquí se comenta la legislación propia de España, puesto que el estudio se ha llevado a cabo en este país. No obstante, esta industria no ha hecho nada más que comenzar y, por tanto, su legislación es distinta en cada nación, estando en constante evolución y mejora. La normativa actual española para las RPAs (aeronaves pilotadas por control remoto) viene representada por el Real Decreto 1036/2017.

1.1. VUELOS RECREATIVOS

- El dron no puede ser perdido de vista, es decir, no debe ser volado a una distancia que no permita su contacto visual ni detrás de obstáculos que dificulten su localización exacta.
- No se pueden efectuar vuelos a una altura superior a 120 metros.
- Según la normativa, a pesar de no estar obligados a poseer una licencia de piloto, el vehículo debe ser volado en condiciones de seguridad.
- Los drones solo pueden ser volados en zonas adecuadas para ello (lugares de vuelo de aerodelismo, áreas despobladas, periferia de la ciudad...).
- En cualquier daño personal o material causado, el responsable es el controlador del vehículo aéreo.
- Está prohibido volar en zonas urbanas, a menos que la aeronave pese menos de 250 gramos y llevemos a cabo trayectorias a menos de 20 metros de altura.
- Debido al existente peligro de un dron si este cae sobre persona, no se permite el vuelo encima de aglomeraciones o en lugares donde hay algún grupo de gente reunidos.
- Está prohibido su empleo de noche, por la reducción de la visibilidad y el aumento de peligro. Asimismo, tampoco se debe manejar un RPA en

condiciones meteorológicas desfavorables; es decir, sin mucho viento, niebla o lluvia.

- No se puede volar cerca de aeródromos o aeropuertos o en zonas donde otras aeronaves lleven a cabo maniobras a poca altura (zonas de parapente, paracaidismo, helipuertos...). La última actualización, de acuerdo con AESA (*Agencia Estatal de Seguridad Aérea*), obliga a pilotar a más de 8 kilómetros de cualquier aeropuerto.
- No se tiene que poner en peligro a terceros; siempre debemos prestar atención a las personas que se encuentren a nuestro alrededor cuando pilotemos un RPA.

1.2. VUELOS PROFESIONALES O COMERCIALES

- Para volar drones con este fin, se requiere un permiso de piloto o acudir a un centro acreditado para la obtención de una licencia. Además, para el uso de ciertas tareas (fumigación, riego, detección de incendios forestales, fotografía aérea...) se obliga a asistir a un centro reconocido que habilite la realización de estas funciones.
- Hay que tener los 18 años cumplidos y, adicionalmente, se debe presentar un certificado médico (el dron debe pesar, como máximo, 25 kilogramos).
- Con el requisito de garantizar la seguridad, las empresas habilitadas para ello pueden pilotar estos vehículos aéreos en diversos escenarios: vigilancia de costas, inspección de monumentos, limpieza de rascacielos... pudiendo ser usados en vuelos nocturnos. Para ello, se pedirá un estudio de seguridad de la operación a realizar y una autorización de la AESA.
- Las empresas acreditadas pueden volar en zonas urbanas si el dron pesa menos de 10 kilogramos, no sobrepasa los 120 metros de altura, se encuentra dentro del alcance visual del piloto y lleva una placa identificativa con el nombre del operador, el tipo, número de serie y nombre y modelo del fabricante.

2. NORMATIVA DE PROYECTOS EXPERIMENTALES

En el trabajo se han llevado a cabo ensayos y mediciones para la caracterización de los motores. La normativa aplicable sobre el uso de los laboratorios e instalaciones científicas para el desarrollo de proyectos relacionados con la ciencia, la tecnología y la investigación se explicita en el Real Decreto 14/2011. Los aspectos que trata se encuentran definidos a continuación.

- Fiabilidad: en la construcción de una instalación destinada a la investigación, es necesario un funcionamiento correcto de la misma. En caso contrario, aparecen una serie de incertidumbres y errores que impiden una interpretación razonable de los resultados. Para garantizar un grado elevado de fiabilidad, se deben cuidar los materiales empleados, así como los procedimientos de montaje y mecanizado de todos los elementos que constituyen la instalación para ensayos.
- Precisión: se debe tener especial cuidado en el montaje y calibración de los elementos de la instalación. Además, en la obtención de medidas es necesario ser extremadamente riguroso en la elección de variables, parámetros e instrumentación.
- Seguridad: el monitorizado de las variables se tiene que realizar de un modo totalmente externo (sala de control); es decir, evitando entrar en contacto con la instalación durante su funcionamiento. La preservación de la integridad física de las personas que participan diariamente en la realización de los ensayos es una prioridad a tener siempre en cuenta.
- Repetitividad: es imprescindible mantener un riguroso control de las condiciones en las que los ensayos se realizan. Así, ante pruebas con las mismas características, los resultados obtenidos serán idénticos.
- Controlabilidad: se debe tener un control elevado de los parámetros que intervienen en los ensayos. La correcta obtención de medidas es posible por

la automatización y regulación de los procedimientos y elementos de medida.

- Accesibilidad de los elementos: es necesario garantizar la accesibilidad a los distintos elementos de la instalación. Así, a pesar de la gran variedad de ensayos que se efectúen, se asegura una rápida actuación y una fácil sustitución de los dispositivos.
- Mantenibilidad: las operaciones de mantenimiento deben ser eficaces. El descuido de este aspecto produce un deterioro rápido de la instalación. Esto puede provocar una pérdida de precisión y fiabilidad en las mediciones o, en el peor de los casos, el cierre del taller.
- Desarrollo de los ensayos experimentales: es obligatorio tener presente unas condiciones de seguridad e higiene en la ejecución de los ensayos. Por ejemplo, en caso de derrame de fluidos (agua, aceite...) se requiere su limpieza inmediata. Además, las mediciones se deben realizar de forma que nadie tenga acceso a la sala de pruebas durante el funcionamiento de alguno de los dispositivos. Las operaciones de riesgo deben ser llevadas a cabo por personal cualificado y protegido con los medios adecuados y homologados. Por último, ante cualquier tipo de lesión, es necesario avisar y acudir a los servicios sanitarios.

BIBLIOGRAFÍA

AA.VV. (24 de Marzo de 2016). *How to choose motor and propeller for quadcopter*. Obtenido de <https://top-10-drones.com/blog/choose-motor-propeller-quadcopter/> «[Consultado el 16 de junio de 2019]»

AA.VV. (7 de Noviembre de 2018). *Quadcopter Propeller Basics for Drone Pilots*. Obtenido de <https://www.droneomega.com/quadcopter-propeller/> «[Consultado el 27 de mayo de 2019]»

Carman, G. (15 de Enero de 2015). *Efecto Giroscópico*. Obtenido de <https://grupocarman.com/blog/efecto-giroscopio/> «[Consultado el 2 de junio de 2019]»

Cuerva, Á., Espino, J. L., López, Ó., Meseguer, J., & Sanz, Á. (2012). *Teoría de los Helicópteros*. Madrid: IBERGACETA PUBLICACIONES, S.L.

Departamento de Matemática Aplicada, E. (2019). *Introducción al manejo de imágenes y vídeos con Matlab*. Universitat Politècnica de València.

Diebel, J. (2006). *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*. Stanford: Stanford University.

Drela, M. (2007). *First-Order DC Electric Motor Model*. MIT Aero & Astro.

Durand, W. F. (1963). *Aerodynamic Theory: a General Review of Progress Vol. 4*. New York: Dover Publications, Inc.

Franco, Á. (5 de Mayo de 2008). *Cálculo de momentos de inercia*. Obtenido de http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/inercia/inercia.htm «[Consultado el 9 de junio de 2019]»

- Huang Shen, C., Albert, F., Ang, C., Teck, D. J., & Chan, K. (2017). Theoretical Development and Study of Takeoff Constraint Thrust Equation for a Drone. *IEEE 15th Student Conference on Research and Development (SCORED)*, 18-22.
- Luukkonen, T. (2011). *Modelling and control of quadcopter*. Espoo: School of Science.
- Metrología, C. E. (2012). *Evaluación de Datos de Medición: el papel de la incertidumbre de medida en la evaluación de conformidad*. Madrid: Gobierno de España.
- Paley, R. E. (1933). On orthogonal matrices. *Studies in applied Mathematics*, 311-320.
- Tokaty, G. (1971). *General Potential Theory of Arbitrary Wind Sections*. Nueva York: NACA-TC-452.
- Zoran, B., Petar, P., & Denis, K. (2016). Mathematical modelling of unmanned aerial vehicles with four rotors. *Interdisciplinary Description of Complex Systems*, 88-100.

A.ANEXO: TRATAMIENTO DE INCERTIDUMBRES

Para el tratamiento de las incertidumbres experimentales del trabajo se han seguido las normas establecidas por *Documento elaborado por el Grupo de Trabajo 1 del Comité Conjunto de Guías en Metrología (JCGM / WG 1)*, disponibles de manera gratuita para cualquier usuario en www.cem.es.

Partiendo de (57), donde se especifica que la potencia P_i depende del voltaje v_m y la intensidad i_m que llega al motor, al tratarse de una medida indirecta, su error $u(P_i)$ puede ser determinado en función de las incertidumbres del voltímetro $u(v_m)$ y del amperímetro $u(i_m)$.

$$P_i = v_m i_m \rightarrow u(P_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial P_i}{\partial i_m} u(i_m)\right)^2 + \left(\frac{\partial P_i}{\partial v_m} u(v_m)\right)^2} \quad (77)$$

Llamando Δv_m y Δi_m a los intervalos de medida del voltímetro y del amperímetro, respectivamente, sus incertidumbres se toman como:

$$u(v_m) = \frac{\Delta v_m}{\sqrt{12}} \quad (78)$$

$$u(i_m) = \frac{\Delta i_m}{\sqrt{12}} \quad (79)$$

En cuanto a la velocidad angular Ω_{rpm}^i , para definir su incertidumbre debemos considerar las expresiones (59) y (60). En ellas el periodo T es estimado en base a la velocidad de grabación de la hélice V_{fot} — $u(V_{fot}) = 0,01 \text{ fotogramas/segundo}$ en todo el proyecto — y el número de fotogramas fot que conforman una vuelta. Así, obtenemos:

$$\Omega_{rpm}^i = \frac{60}{T} \rightarrow u(\Omega_{rpm}^i) = \frac{60 \text{ fot}}{(T V_{fot})^2} u(V_{fot}) \quad (80)$$

En la determinación de la incertidumbre de la tracción f se deben considerar dos casos: el tratamiento de esta magnitud como medida del dinamómetro y su obtención a

partir de la expresión (65). En ambas situaciones el error determinado es para el dron *Cheerwing Syma XS5W-V3* cuando realiza un despegue vertical.

Para el tratamiento experimental, denominando f_j a una medida individual de la tracción y N al número de medidas tomadas en cada posición, se define la tracción media \bar{f} tomada en cada nivel como:

$$\bar{f} = \frac{\sum_{j=1}^N f_j}{N} \quad (81)$$

Para la determinación de su incertidumbre $u(\bar{f})$ se emplea la desviación típica del valor medio:

$$u(\bar{f}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (\bar{f} - f_j)^2}{N(N-1)}} \quad (82)$$

En el caso del tratamiento analítico, el error $u(f)$ se calcula mediante diferenciales, por lo que obtenemos la siguiente expresión:

$$f = 4 \left(2 \pi \delta^2 \rho \left[APC (\Omega_{rpm}^i)^{PF} \right]^2 \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow u(f) = \frac{\partial f}{\partial \Omega_{rpm}^i} u(\Omega_{rpm}^i) \quad (83)$$

B. ANEXO: PROGRAMAS DE *MATLAB*

B.1. ECUACIONES EN *MATLAB*

```
function dydt = ecuaciones (t,y)
% Esta función resuelve el ODE23 y plantea las ecuaciones necesarias

dydt = zeros(12,1);

load parameters
m = double(parameters(1));
l = double(parameters(2));
delta = double(parameters(3));
Ixx = double(parameters(4));
Iyy = double(parameters(5));
Izz = double(parameters(6));
Irr = double(parameters(7));
w1 = double(parameters(8));
w2 = double(parameters(9));
w3 = double(parameters(10));
w4 = double(parameters(11));
b = double(parameters(12));
d = double(parameters(13));
g = double(parameters(14));

X = y(1); Y = y(2); Z = y(3);
phi = y(4); theta = y(5); psi = y(6);
Xdot = y(7); Ydot = y(8); Zdot = y(9);
phidot = y(10); thetadot = y(11); psidot = y(12);

REB = [cos(psi)*cos(theta), cos(psi)*sin(theta)*sin(phi) -
sin(psi)*cos(phi), cos(psi)*sin(theta)*cos(phi) + sin(psi)*sin(phi);
sin(psi)*cos(theta), sin(psi)*sin(theta)*sin(phi) + cos(psi)*cos(phi),
sin(psi)*sin(theta)*cos(phi) - cos(psi)*sin(phi); -sin(theta),
cos(theta)*sin(psi), cos(theta)*cos(phi)];

TEB = [1, sin(phi)*tan(theta), cos(phi)*tan(theta); 0, cos(phi), sin(phi);
0, sin(phi)/cos(theta), cos(phi)/cos(theta)];

J = [REB zeros(3, 3); zeros(3, 3) TEB];
epsdot = [Xdot; Ydot; Zdot; phidot; thetadot; psidot];
nu = J\epsdot;
u = nu( 1,1 ); v = nu( 2,1 ); w = nu( 3,1 );
p = nu( 4,1 ); q = nu( 5,1 ); r = nu( 6,1 );

dydt(1) = Xdot;
dydt(2) = Ydot;
dydt(3) = Zdot;
dydt(4) = phidot;
dydt(5) = thetadot;
dydt(6) = psidot;

udot = -(q*w - r*v) + g*sin(theta);
```

```

vdot = -(r*u - p*w) - g*cos(theta)*sin(phi);
wdot = -(p*v - q*u) - g*cos(theta)*cos(phi) + b/m*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2);
pdot = 1/Ixx*(-q*r*(Izz - Iyy) + Irr*q*(w1-w2+w3-w4) + b*l*(w4^2-w2^2));
qdot = 1/Iyy*(-p*r*(Ixx - Izz) - Irr*p*(w1-w2+w3-w4) + b*l*(w3^2-w1^2));
rdot = 1/Izz*(-p*q*(Iyy - Ixx) + d*(-w1^2+w2^2-w3^2+w4^2));

dydt(7) = -(thetadot*cos(psi)*sin(theta) + psidot*sin(psi)*cos(theta))*u +
    (phidot*(cos(psi)*sin(theta)*cos(phi) + sin(psi)*sin(phi)) +
    thetadot*cos(psi)*cos(theta)*sin(phi) -
    psidot*(sin(psi)*sin(theta)*sin(phi) + cos(psi)*cos(phi)))*v +
    (phidot*(-cos(psi)*sin(theta)*sin(phi) + sin(psi)*cos(phi)) +
    thetadot*cos(psi)*cos(theta)*cos(phi) +
    psidot*(sin(psi)*sin(theta)*cos(phi) + cos(psi)*sin(phi)))*w +
    cos(psi)*cos(theta)*udot + (cos(psi)*sin(theta)*sin(phi) -
    sin(psi)*cos(phi))*vdot + (cos(psi)*sin(theta)*cos(phi) +
    sin(psi)*sin(phi))*wdot;

dydt(8) = (-thetadot*sin(psi)*sin(theta) + psidot*cos(psi)*cos(theta))*u +
    (phidot*(sin(psi)*sin(theta)*cos(phi) - cos(psi)*sin(phi)) +
    thetadot*sin(psi)*cos(theta)*sin(phi) +
    psidot*(cos(psi)*sin(theta)*sin(phi) - sin(psi)*cos(phi)))*v +
    (-phidot*(sin(psi)*sin(theta)*sin(phi) + cos(psi)*cos(phi)) +
    thetadot*sin(psi)*cos(theta)*cos(phi) +
    psidot*(cos(psi)*sin(theta)*cos(phi) + sin(psi)*sin(phi)))*w +
    sin(psi)*cos(theta)*udot + (sin(psi)*sin(theta)*sin(phi) +
    cos(psi)*cos(theta))*vdot + (sin(psi)*sin(theta)*cos(phi) -
    cos(psi)*sin(phi))*wdot;

dydt(9) = -thetadot*cos(theta)*u + (phidot*cos(theta)*cos(phi) -
    thetadot*sin(theta)*sin(phi))*v - (phidot*cos(theta)*sin(phi) +
    thetadot*sin(theta)*cos(phi))*w - sin(theta)*udot +
    cos(theta)*sin(phi)*vdot + cos(theta)*cos(phi)*wdot;

dydt(10) = (phidot*tan(theta)*cos(phi) +
    thetadot*(sec(theta))^2*sin(phi))*q + (-phidot*tan(theta)*sin(phi) +
    thetadot*(sec(theta))^2*cos(phi))*r + pdot +
    tan(theta)*sin(phi)*qdot + tan(theta)*cos(phi)*rdot;

dydt(11) = -phidot*sin(phi)*q - phidot*cos(phi)*r + cos(phi)*qdot -
    sin(phi)*rdot;

dydt(12) = (phidot*cos(phi) + thetadot*tan(theta)*sin(phi))*sec(theta)*q +
    (-phidot*sin(phi) + thetadot*tan(theta)*cos(phi))*sec(theta)*r +
    sec(theta)*sin(phi)*qdot + sec(theta)*cos(phi)*rdot;

end

```

B.2. PROGRAMA PRINCIPAL

```

%%%%% DINÁMICA DEL CUADRICÓPTERO con ODE23 %%%%%

clear all
close all

```

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

```
filename1 = 'Datos Cuadricóptero.xlsx';
tiempo_inicial = 0;
tiempo_final = xlsread(filename1,1,'B26'); % tiempo de la simulación (en
s)
dt = xlsread(filename1,1,'B27'); % intervalo de tiempo entre cada pto
simulado (en s)
tspan = tiempo_inicial:dt:tiempo_final; % vector tiempo

%% CONDICIONES INICIALES

eps0 = xlsread(filename1,1,'E7:E12');
epsdot0 = xlsread(filename1,1,'E13:E18');
nu0 = epsdot_nu(eps0, epsdot0);

phi0 = eps0( 4,1 );
theta0 = eps0( 5,1 );
psi0 = eps0( 6,1 );
p0 = nu0( 4,1 );
q0 = nu0( 5,1 );
r0 = nu0( 6,1 );

%% VELOCIDADES ANGULARES DE LOS ROTORES

KV = xlsread(filename1,1,'B13'); % RPM/V de los rotores
Vm1 = xlsread(filename1,1,'B15'); % Tensión rotor 1
Vm2 = xlsread(filename1,1,'B16'); % Tensión rotor 2
Vm3 = xlsread(filename1,1,'B17'); % Tensión rotor 3
Vm4 = xlsread(filename1,1,'B18'); % Tensión rotor 4

n1_noload = KV*Vm1; % en rpm (sin carga)
n2_noload = KV*Vm2; % en rpm (sin carga)
n3_noload = KV*Vm3; % en rpm (sin carga)
n4_noload = KV*Vm4; % en rpm (sin carga)

w1_noload = n1_noload*2*pi/60; % en rad/s
w2_noload = n2_noload*2*pi/60; % en rad/s
w3_noload = n3_noload*2*pi/60; % en rad/s
w4_noload = n4_noload*2*pi/60; % en rad/s

%% DATOS A INTRODUCIR DEL CUADRICÓPTERO

m = xlsread(filename1,1,'B2'); % masa en kg
l = xlsread(filename1,1,'B3'); % distancia entre el CoG y el eje de los
rotores (en m)
delta = xlsread(filename1,1,'B4'); % radio de los rotores (en m)
g = 9.8067; % constante de gravitación (en m/s^2)
rho = 1.225; % densidad del aire (en kg/m^3)
S = pi*delta^2; % área de los rotores
Ixx = xlsread(filename1,1,'B7'); % inercia respecto al eje X (en kgm^2)
Iyy = xlsread(filename1,1,'B8'); % inercia respecto al eje Y (en kgm^2)
Izz = xlsread(filename1,1,'B9'); % inercia respecto al eje Z (en kgm^2)

%% DATOS A INTRODUCIR DEL MOTOR Y ROTORES

Irr = xlsread(filename1,1,'B10'); % inercia de los rotores (en kgm^2)
```

```

APC = xlsread(filename1,1,'B14'); % Constante de la hélice (-)
n1 = xlsread(filename1,1,'B20'); % velocidad angular del rotor 1 (RPM)
n2 = xlsread(filename1,1,'B21'); % velocidad angular del rotor 2 (RPM)
n3 = xlsread(filename1,1,'B22'); % velocidad angular del rotor 3 (RPM)
n4 = xlsread(filename1,1,'B23'); % velocidad angular del rotor 4 (RPM)
powerfactor = xlsread(filename1,1,'B19'); % Factor de potencia (-)

w1 = n1*2*pi/60; % en rad/s
w2 = n2*2*pi/60; % en rad/s
w3 = n3*2*pi/60; % en rad/s
w4 = n4*2*pi/60; % en rad/s

if w1 && w2 && w3 && w4 == 0
    w1 = 0.75*w1_noload;
    w2 = 0.75*w2_noload;
    w3 = 0.75*w3_noload;
    w4 = 0.75*w4_noload;

else
    w1;
    w2;
    w3;
    w4;
end

P1 = APC*n1^powerfactor; % Potencia transmitida a las hélices (en W)
P2 = APC*n2^powerfactor; % Potencia transmitida a las hélices (en W)
P3 = APC*n3^powerfactor; % Potencia transmitida a las hélices (en W)
P4 = APC*n4^powerfactor; % Potencia transmitida a las hélices (en W)
P = P1 + P2 + P3 + P4; % potencia total (en W)

CP1 = P1/(rho*S*delta^3*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2));
CP2 = P2/(rho*S*delta^3*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2));
CP3 = P3/(rho*S*delta^3*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2));
CP4 = P4/(rho*S*delta^3*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2));
CP = CP1 + CP2 + CP3 + CP4; % coeficiente de potencia (-)

T1 = (2*pi*delta^2*rho*P1^2)^(1/3); % empuje del 1° rotor (en N)
T2 = (2*pi*delta^2*rho*P2^2)^(1/3); % empuje del 2° rotor (en N)
T3 = (2*pi*delta^2*rho*P3^2)^(1/3); % empuje del 3° rotor (en N)
T4 = (2*pi*delta^2*rho*P4^2)^(1/3); % empuje del 4° rotor (en N)
T = T1 + T2 + T3 + T4; % empuje total del cuadricóptero (en N)

CT1 = T1/(rho*S*delta^2*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2)); % thrust factor del 1°
rotor (-)
CT2 = T2/(rho*S*delta^2*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2)); % thrust factor del 2°
rotor (-)
CT3 = T3/(rho*S*delta^2*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2)); % thrust factor del 3°
rotor (-)
CT4 = T4/(rho*S*delta^2*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2)); % thrust factor del c4°
rotor (-)
CT = CT1 + CT2 + CT3 + CT4; % empuje total del cuadricóptero
adimensionalizado

b = CT*rho*S*delta^2; % thrust coefficient (en Ns^2)

```

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

```
d = CP*rho*S*delta^3; % drag coefficient (en Nms^2)

%% GUARDAR VARIABLES Y PARÁMETROS

parameters = [m, l, delta, Ixx, Iyy, Izz, Irr, w1, w2, w3, w4, b, d, g];
save('parameters')

%% EJECUCIÓN DEL ODE23

y0 = [eps0; epsdot0];
[t,y] = ode23(@(t,y)ecuaciones(t,y),tspan, y0);

X = y(:,1); Y = y(:,2); Z = y(:,3);
phi = y(:,4); theta = y(:,5); psi = y(:,6);
Xdot = y(:,7); Ydot = y(:,8); Zdot = y(:,9);
phidot = y(:,10); thetadot = y(:,11); psidot = y(:,12);

for i = 1:length(phi)
REB = [cos(psi(i))*cos(theta(i)), cos(psi(i))*sin(theta(i))*sin(phi(i)) -
      sin(psi(i))*cos(phi(i)), cos(psi(i))*sin(theta(i))*cos(phi(i)) +
      sin(psi(i))*sin(phi(i)); sin(psi(i))*cos(theta(i)),
      sin(psi(i))*sin(theta(i))*sin(phi(i)) + cos(psi(i))*cos(phi(i)),
      sin(psi(i))*sin(theta(i))*cos(phi(i)) - cos(psi(i))*sin(phi(i));
      -sin(theta(i)), cos(theta(i))*sin(psi(i)),
      cos(theta(i))*cos(phi(i))];

TEB = [1, sin(phi(i))*tan(theta(i)), cos(phi(i))*tan(theta(i)); 0,
      cos(phi(i)), -sin(phi(i)); 0, sin(phi(i))/cos(theta(i)),
      cos(phi(i))/cos(theta(i))];

J = [REB zeros(3, 3); zeros(3, 3) TEB];
epsdot = [Xdot(i); Ydot(i); Zdot(i); phidot(i); thetadot(i); psidot(i)];
nu = J\epsdot;
u = nu( 1,1 ); v = nu( 2,1 ); w = nu( 3,1 );
p = nu( 4,1 ); q = nu( 5,1 ); r = nu( 6,1 );

udot = -(q*w - r*v) + g*sin(theta(i));
vdot = -(r*u - p*w) - g*cos(theta(i))*sin(phi(i));
wdot = -(p*v - q*u) - g*cos(theta(i))*cos(phi(i)) +
b/m*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2);
pdot = 1/Ixx*(-q*r*(Izz - Iyy) + Irr*q*(w1-w2+w3-w4) + b*1*(w4^2-w2^2));
qdot = 1/Iyy*(-p*r*(Ixx - Izz) - Irr*p*(w1-w2+w3-w4) + b*1*(w3^2-w1^2));
rdot = 1/Izz*(-p*q*(Iyy - Ixx) + d*(-w1^2+w2^2-w3^2+w4^2));

Xdotdot(i) = -(thetadot(i)*cos(psi(i))*sin(theta(i)) +
psidot(i)*sin(psi(i))*cos(theta(i)))*u +
(phidot(i)*(cos(psi(i))*sin(theta(i))*cos(phi(i)) +
sin(psi(i))*sin(phi(i))) +
thetadot(i)*cos(psi(i))*cos(theta(i))*sin(phi(i)) -
psidot(i)*(sin(psi(i))*sin(theta(i))*sin(phi(i)) +
cos(psi(i))*cos(phi(i))))*v +
(phidot(i)*(-cos(psi(i))*sin(theta(i))*sin(phi(i)) +
sin(psi(i))*cos(phi(i))) +
thetadot(i)*cos(psi(i))*cos(theta(i))*cos(phi(i)) +
```

```

psidot(i)*(sin(psi(i))*sin(theta(i))*cos(phi(i)) +
cos(psi(i))*sin(phi(i)))*w +
cos(psi(i))*cos(theta(i))*udot +
(cos(psi(i))*sin(theta(i))*sin(phi(i)) -
sin(psi(i))*cos(phi(i)))*vdot +
(cos(psi(i))*sin(theta(i))*cos(phi(i)) +
sin(psi(i))*sin(phi(i)))*wdot;

Ydotdot(i) = (-thetadot(i)*sin(psi(i))*sin(theta(i)) +
psidot(i)*cos(psi(i))*cos(theta(i)))*u +
(phidot(i)*(sin(psi(i))*sin(theta(i))*cos(phi(i)) -
cos(psi(i))*sin(phi(i))) +
thetadot(i)*sin(psi(i))*cos(theta(i))*sin(phi(i)) +
psidot(i)*(cos(psi(i))*sin(theta(i))*sin(phi(i)) -
sin(psi(i))*cos(phi(i)))*v +
(-phidot(i)*(sin(psi(i))*sin(theta(i))*sin(phi(i)) +
cos(psi(i))*cos(phi(i))) +
thetadot(i)*sin(psi(i))*cos(theta(i))*cos(phi(i)) +
psidot(i)*(cos(psi(i))*sin(theta(i))*cos(phi(i)) +
sin(psi(i))*sin(phi(i)))*w + sin(psi(i))*cos(theta(i))*udot +
(sin(psi(i))*sin(theta(i))*sin(phi(i)) +
cos(psi(i))*cos(theta(i)))*vdot +
(sin(psi(i))*sin(theta(i))*cos(phi(i)) -
cos(psi(i))*sin(phi(i)))*wdot;

Zdotdot(i) = -thetadot(i)*cos(theta(i))*u +
(phidot(i)*cos(theta(i))*cos(phi(i)) -
thetadot(i)*sin(theta(i))*sin(phi(i)))*v -
(phidot(i)*cos(theta(i))*sin(phi(i)) +
thetadot(i)*sin(theta(i))*cos(phi(i)))*w - sin(theta(i))*udot +
cos(theta(i))*sin(phi(i))*vdot + cos(theta(i))*cos(phi(i))*wdot;

phidotdot(i) = (phidot(i)*tan(theta(i))*cos(phi(i)) +
thetadot(i)*(sec(theta(i)))^2*sin(phi(i)))*q +
(-phidot(i)*tan(theta(i))*sin(phi(i)) +
thetadot(i)*(sec(theta(i)))^2*cos(phi(i)))*r + pdot +
tan(theta(i))*sin(phi(i))*qdot + tan(theta(i))*cos(phi(i))*rdot;

thetadotdot(i) = -phidot(i)*sin(phi(i))*q - phidot(i)*cos(phi(i))*r +
cos(phi(i))*qdot - sin(phi(i))*rdot;

psidotdot(i) = (phidot(i)*cos(phi(i)) +
thetadot(i)*tan(theta(i))*sin(phi(i)))*sec(theta(i))*q +
(-phidot(i)*sin(phi(i)) +
thetadot(i)*tan(theta(i))*cos(phi(i)))*sec(theta(i))*r +
sec(theta(i))*sin(phi(i))*qdot + sec(theta(i))*cos(phi(i))*rdot;

% MOVIMIENTO DEL CUADRICÓPTERO
f(i) = b*(w1^2+w2^2+w3^2+w4^2); % empuje (en N)
tau1(i) = b*1*(w4^2-w2^2); % par de alabeo (en Nm)
tau2(i) = b*1*(w3^2-w1^2); % par de cabeceo (en Nm)
tau3(i) = d*(-w1^2+w2^2-w3^2+w4^2); % par de guiñada (en Nm)
end

%% PLOTEAMOS LOS RESULTADOS OBTENIDOS

```

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

```
% Posiciones y orientaciones
figure(1)
subplot(3,2,1)
plot(tspan, phi, 'b', 'LineWidth', 1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\Phi (rad)')
grid on
title('Alabeo (\Phi)')

subplot(3,2,2)
plot(tspan, X, 'r', 'LineWidth', 1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('x (m)')
grid on
title('Posición x')

subplot(3,2,3)
plot(tspan, theta, 'g', 'LineWidth', 1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\theta (rad)')
grid on
title('Cabeceo (\theta)')

subplot(3,2,4)
plot(tspan, Y, 'k', 'LineWidth', 1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('y (m)')
grid on
title('Posición y')

subplot(3,2,5)
plot(tspan, psi, 'c', 'LineWidth', 1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\Psi (rad)')
grid on
title('Guiñada (\psi)')

subplot(3,2,6)
plot(tspan, Z, 'y', 'LineWidth', 1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('z (m)')
grid on
title('Posición z')

% Velocidades lineales y angulares
figure(2)
subplot(3,2,1)
plot(tspan, phidot, 'b', 'LineWidth', 1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\Phidot (rad/s)')
grid on
title('Velocidad angular (\Phidot)')

subplot(3,2,2)
```

```

plot(tspan, Xdot, 'r', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('xdot (m/s)')
grid on
title('Velocidad xdot')

subplot(3,2,3)
plot(tspan, thetadot, 'g', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\thetadot (rad/s)')
grid on
title('Velocidad angular (\thetadot)')

subplot(3,2,4)
plot(tspan, Ydot, 'k', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('ydot (m/s)')
grid on
title('Velocidad ydot')

subplot(3,2,5)
plot(tspan, psidot, 'c', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\Psiidot (rad/s)')
grid on
title('Velocidad angular (\psidot)')

subplot(3,2,6)
plot(tspan, Zdot, 'y', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('zdot (m/s)')
grid on
title('Velocidad zdot')

% Aceleraciones lineales y angulares
figure(3)
subplot(3,2,1)
plot(tspan, phidotdot, 'b', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\Phidotdot (rad/s^2)')
grid on
title('Aceleración angular (\Phidotdot)')

subplot(3,2,2)
plot(tspan, Xdotdot, 'r', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('xdotdot (m/s^2)')
grid on
title('Aceleración xdotdot')

subplot(3,2,3)
plot(tspan, thetadotdot, 'g', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\thetadotdot (rad/s^2)')
grid on
title('Aceleración angular (\thetadotdot)')

```

Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento del vuelo de un dron

```
subplot(3,2,4)
plot(tspan, Ydotdot, 'k', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('ydotdot (m/s^2)')
grid on
title('Aceleración ydotdot')

subplot(3,2,5)
plot(tspan, psidotdot, 'c', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\psidotdot (rad/s^2)')
grid on
title('Aceleración angular (\psidotdot)')

subplot(3,2,6)
plot(tspan, Zdotdot, 'y', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('zdotdot (m/s^2)')
grid on
title('Aceleración zdotdot')

% Movimientos del cuadricóptero
figure(4)
subplot(2,2,1)
plot(tspan, f, 'b', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('f (N)')
grid on
title('Empuje de los propulsores (f)')

subplot(2,2,2)
plot(tspan, tau1, 'r', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\tau_\Phi (Nm)')
grid on
title('Par de torsión de alabeo (\tau_\Phi)')

subplot(2,2,3)
plot(tspan, tau2, 'g', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\tau_\theta (Nm)')
grid on
title('Par de torsión de cabeceo (\tau_\theta)')

subplot(2,2,4)
plot(tspan, tau3, 'y', 'LineWidth',1)
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\tau_\Psi (Nm)')
grid on
title('Par de torsión de guiñada (\tau_\Psi)')

%% PLOTEAR UNA TRAYECTORIA EN 3D

figure(5)
```

```

stem3( tspan, Y, Z, 'fill')
grid on
xlabel('tiempo (s)'); ylabel('Y^E (m)'); zlabel('Z^E (m)')
title('Despegue no vertical')

%% EXPORTAR LOS DATOS A UNA HOJA "EXCEL"

delete('Trayectoria Cuadricóptero.xlsx');
filename2 = 'Trayectoria Cuadricóptero.xlsx';

xlswrite(filename2,tspan',1,'A1')
xlswrite(filename2,X',1,'B1')
xlswrite(filename2,Y',1,'C1')
xlswrite(filename2,Z',1,'D1')
xlswrite(filename2,Xdot',1,'E1')
xlswrite(filename2,Ydot',1,'F1')
xlswrite(filename2,Zdot',1,'G1')
xlswrite(filename2,phi',1,'H1')
xlswrite(filename2,theta',1,'I1')
xlswrite(filename2,psi',1,'J1')
xlswrite(filename2,phidot',1,'K1')
xlswrite(filename2,thetadot',1,'L1')
xlswrite(filename2,psidot',1,'M1')
xlswrite(filename2,Xdotdot',1,'N1')
xlswrite(filename2,Ydotdot',1,'O1')
xlswrite(filename2,Zdotdot',1,'P1')
xlswrite(filename2,phidotdot',1,'Q1')
xlswrite(filename2,thetadotdot',1,'R1')
xlswrite(filename2,psidotdot',1,'S1')

function [nu] = epsdot_nu( eps, epsdot)
% Esta función transforma de epsdot a nu

phi = eps( 4,1 );
theta = eps( 5,1 );
psi = eps( 6,1 );

TEB = [1 sin(phi)*tan(theta) cos(phi)*tan(theta); 0 cos(phi) -sin(phi);
0 sin(phi)/cos(theta) cos(phi)/cos(theta)];
REB = [cos(psi)*cos(theta) cos(psi)*sin(theta)*sin(phi)-sin(psi)*cos(phi)
cos(psi)*sin(theta)*cos(phi)+sin(psi)*sin(phi); sin(psi)*cos(theta)
sin(psi)*sin(theta)*sin(phi)+cos(psi)*cos(phi)
sin(psi)*sin(theta)*cos(phi)-cos(psi)*sin(phi); -sin(theta)
cos(theta)*sin(phi) cos(theta)*cos(phi)];
J = [REB zeros(3, 3); zeros(3, 3) TEB];

nu = J\epsdot;

```

B.3. AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS

```
%%%% OPTIMIZACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS %%%
```

```
s=0;p=0;j=0;h=0;k=0;m=0;a=0;b=0;
nai=3;naf=3.2;nap=0.0001;
nbi=3.20;nbf=3.21;nbp=0.0001;

filename = 'Posición experimental.xlsx';
prompt = 'Caso a estudiar (1, 2 o 3): ';
c = input(prompt);

if c == 1
    line = 'A203';
    np = 524;
    int = 'A3:E526';
elseif c == 2
    line = 'A495';
    np = 493;
    int = 'A3:E495';
elseif c == 3
    line = 'A575';
    np = 573;
    int = 'A3:E575';
end

[AA,Atex]=xlsread(filename,1,int);
tD=[AA(:,1)];
YD=[AA(:,3)];
na=(naf-nai)/nap+1;
nb=(nbf-nbi)/nbp+1;
h=na*nb;
D=0;MM=0;

for a=nai:nap:naf
    for b=nbi:nbp:nbf
        m=m+1;
        aa(m)=a;
        bb(m)=b;
        [D(m),aa(m),bb(m)]=dif_v2(YD,tD,aa(m),bb(m));
        MM(m,1)=D(m);
        MM(m,2)=aa(m);
        MM(m,3)=bb(m);
    End
end

R=min(MM)
[Y,I]=min(MM)
z=0;

aa=MM(I(1,1),2)
bb=MM(I(1,1),3)

g = 9.8067;
m = 0.120;
```

```

delta = 0.067;
rho = 1.225;
rpm = 5359.6071; % posición 8

simul=-g/2*tD.^2 +
2/m*tD.^2*(2*pi*delta^2*rho*(bb*10^12*rpm^aa)^2)^(1/3);

'Res'
MM(I(1,1),1)
plot(tD,YD,'r+',tD,simul,'g-');

function[D,aa,bb]=dif_v2(YD,tD,aa,bb);

g = 9.8067;
m = 0.120;
delta = 0.067;
rho = 1.225;
rpm = 5359.6071; % posición 8

CTD=-g/2*tD.^2 + 2/m*tD.^2*(2*pi*delta^2*rho*(bb*10^-12*rpm^aa)^2)^(1/3);
D=sum((YD-CTD).^2);
end

```

C.ANEXO: VUELO AXIAL

Al estar interesados en este estudio en el seguimiento de un despegue vertical, creemos conveniente mencionar que existen otros procedimientos, además del desarrollado en el Capítulo 3, que permiten una interpretación de los resultados realmente fiable para el caso en el que únicamente encontramos movimiento en la dirección de Z^E . Para ello, analizamos las teorías existentes en el cálculo de actuaciones de los helicópteros.

Aprovechando que en el vuelo axial existen varios regímenes de vuelo para los que existe una estela bien definida (que se puede considerar como un volumen de control) en los que se permite calcular la potencia inducida P_i únicamente a partir de la velocidad de vuelo axial²⁵ V_z , es posible determinar la potencia por el método genérico y por el volumen de control, obteniendo resultados similares.

C.1. VUELO ASCENDENTE

Debido al paralelismo de los ejes Z^E , Z^B y Z^P , cada rotor presente en el dron se puede modelizar como un volumen de control con una estela bien definida que no afecta al flujo de los demás rotores. Para ello, se toma el esquema representado en *Figura 51*, que toma unas hipótesis adicionales a las ya utilizadas en el caso general.

- El movimiento se considera estrictamente unidimensional (en la dirección de Z^P), por lo que no existen componentes de la velocidad azimutales ni radiales, solo se asume V_z .
- El volumen de control se achata desde su entrada hasta su salida.

Tal y como se hiciera para el caso anterior, planteamos las leyes de *conservación de la masa, conservación del movimiento y conservación de la energía*. Se puede observar que la presión en la superficie lateral del volumen de control varía con la coordenada Z^P . Las

²⁵ En el vuelo axial las componentes u y v de V^B son nulas. Por tanto, el módulo de la velocidad lo expresamos como V_z .

ecuaciones se formulan teniendo en cuenta que V_z , v_i y v_{i2} son negativas debido al marco de referencia en ejes pala F^P .

- Conservación de la masa: el gasto másico \dot{m} es constante a través de cualquier sección $S(z)$ paralela al rotor.

$$\dot{m} = \iint_{S(z)} \rho V \cdot n \, d\gamma \quad (84)$$

$$\dot{m} = -\rho S(V_z + v_i) = -\rho S_2(V_z + v_{i2}) = -\rho S_0 V_z$$

donde V es la velocidad del fluido, n es el vector normal a la sección tomada y $d\gamma$ representa el diferencial de área.

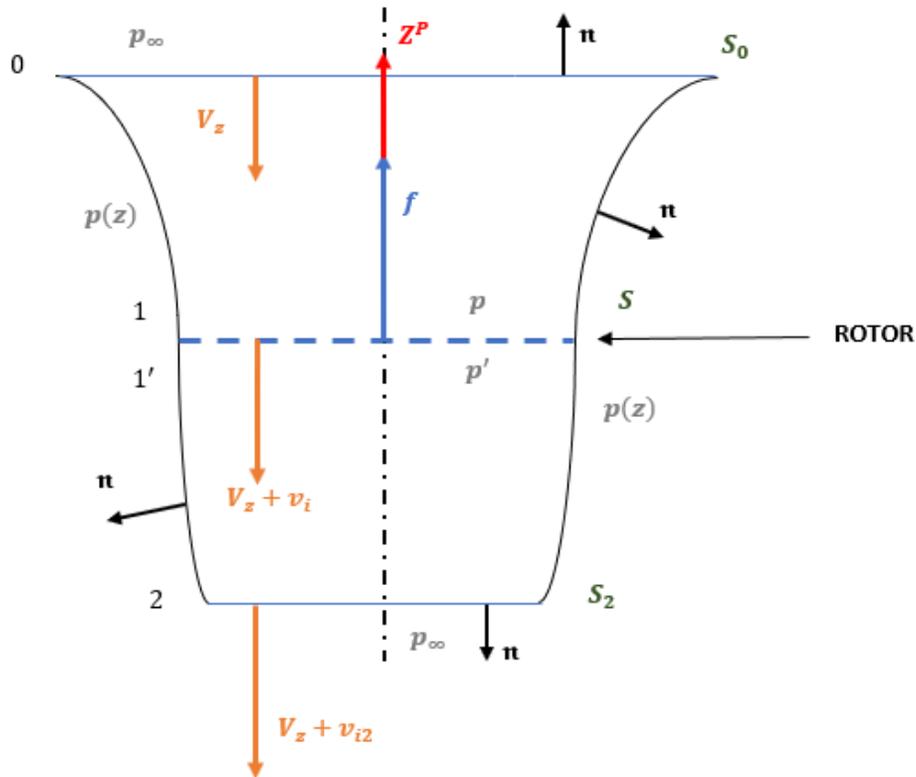


Figura 51. Volumen de control de un rotor en un vuelo ascendente axial

- Conservación de la cantidad de movimiento: se vuelve a considerar la acción de una única fuerza F_a sobre el flujo.

$$\iint \rho V_z (V \cdot n) \, d\gamma + \iint \rho (V_z + v_{i2})(V \cdot n) \, d\gamma = - \iint p n \, d\gamma - \iint p' n \, d\gamma \quad (85)$$

$$F_a = -\rho S_2 (V_z + v_{i2})^2 + \rho S_0 V_z^2$$

Operando, es posible obtener una expresión más sencilla para la tracción f_i , que resulta la misma que la usada para el caso general.

$$f_i = -\dot{m} (V_z - V_0) = -\dot{m} v_{i2} = \rho S (V_z + v_i) v_{i2} \quad (86)$$

- Conservación de la energía: se asume que la potencia consumida por el rotor (potencia inducida P_i) es utilizada para producir un incremento en la energía cinética del fluido ΔE_c . Al igual que en el caso anterior se asume que no existen pérdidas. Así, se consigue la siguiente relación:

$$P_i = \Delta E_c = \frac{1}{2} \dot{m} [(V_z + v_{i2})^2 - V_z^2] = \frac{1}{2} \rho S_2 (V_z + v_{i2})^3 - \frac{1}{2} \rho S_0 V_z^3 \quad (87)$$

Si además se considera que la P_i es el trabajo de la tracción f_i sobre el fluido, encontramos otra expresión:

$$P_i = -f_i (V_z + v_i) \quad (88)$$

Igualando los términos de (87) y (88), se obtiene el conocido *Teorema de Froude-Finsterwalder* (Tokaty, 1971), según el cual el flujo se acelera el doble en la estela lejana en comparación con la aceleración que experimenta en el plano del rotor.

$$v_{i2} = 2 v_i \quad (89)$$

Gracias a esta expresión es posible relacionar f_i y P_i ²⁶ por medio de la velocidad de ascenso V_z y la velocidad inducida del rotor v_i .

$$f_i = 2 \rho S v_i (V_z + v_i) \quad (90)$$

$$P_i = -2 \rho S v_i (V_z + v_i)^2 \quad (91)$$

No obstante, para poder utilizar estas expresiones se debe calcular v_i . Para ello, haremos uso de los parámetros de vuelo a punto fijo (v_{i0} y P_{i0}). Además, aunque la teoría avale el uso de una estela bien definida para todos los rotores en todo el rango de

²⁶ La tracción f es siempre positiva mientras que el signo de la potencia P depende del régimen de vuelo: en vuelo ascendente será positiva y en el descendente, negativa.

velocidades, es posible que estas estelas interfieran entre sí para un intervalo de velocidades inducidas v_i pequeño.

C.2. VUELO A PUNTO FIJO

En el vuelo a punto fijo, los ejes Z^E y Z^B son paralelos —tal y como se representa en *Figura 52*— por lo que no existen ángulos de alabeo ϕ ni de cabeceo θ . Además, como el dron se encuentra volando en una posición fija ($V_z = 0$), la resultante de las fuerzas debe ser nula. Esto se traduce en que la tracción f debe compensar la fuerza gravitatoria $G^B(\eta)$.

$$f - G^B(\eta) = 0 \rightarrow f = mg \quad (92)$$

La tracción f_i que ejerce cada uno de los rotores debe ser la misma para que el vuelo sea totalmente equilibrado, es decir, se debe cumplir que:

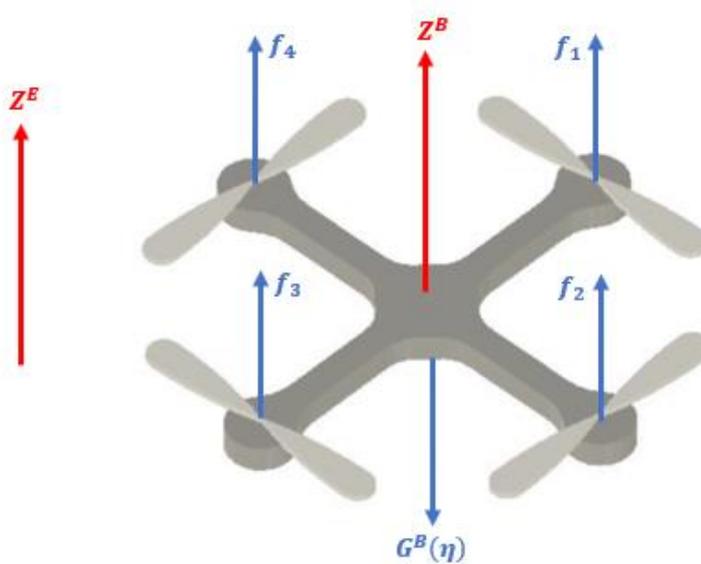


Figura 52. Esquema de fuerzas en vuelo a punto fijo

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \frac{f}{4} \quad (93)$$

A partir de esto, de (90) y (91) se pueden concluir las expresiones de v_{io} y P_{io} para cada uno de los rotores.

$$v_{io} = -\sqrt{\frac{f_i}{2\rho S}} \quad (94)$$

$$P_{io} = -2 \rho S v_{io}^3 = f_i \sqrt{\frac{f_i}{2 \rho S}} \quad (95)$$

Adimensionalizando, es posible obtener unas relaciones para la velocidad inducida v_i y la potencia inducida P_i sin necesidad de utilizar los parámetros de los motores otorgados por el fabricante. Esto es de gran utilidad puesto que estos datos suelen aparecer redondeados o incluso, en el caso de nuestro dron de estudio, ni se encuentran especificados. Hay que tener en cuenta que en las ecuaciones que se presentan a continuación, los signos de las velocidades están especificados para un régimen de vuelo ascendente.

$$\frac{v_i}{v_{io}} \left(\frac{V_z}{v_{io}} + \frac{v_i}{v_{io}} \right) = -1 \quad (96)$$

$$\frac{P_i}{P_{io}} = -\frac{v_i}{v_{io}} \left(\frac{V_z}{v_{io}} + \frac{v_i}{v_{io}} \right)^2 \quad (97)$$

Una vez obtenidas la tracción f_i y la potencia inducida P_i de cada rotor, el proceso para calcular el coeficiente de tracción C_T y el coeficiente de potencia C_P es el mismo que el ya mencionado en la Sección 3.3. Aunque existen otros métodos como la *Teoría de elemento de pala* que permiten obtener resultados de los parámetros para toda la distribución de las palas, las bajas velocidades del dron dificultan la aparición de fenómenos no lineales como la pérdida de sustentación²⁷ o la entrada en régimen de vuelo transónico y, por consiguiente, consideraremos que la velocidad inducida v_i permanece constante en todo el plano del rotor para cualquier posición δ de la hélice a una velocidad de vuelo V_z determinada.

²⁷ A diferencia de las aeronaves de ala fija en las que los fenómenos de pérdida se producen a bajas velocidades ($V < V_{pérdida}$), en las aeronaves de ala rotatoria estos son causados por altas velocidades al alcanzar las palas en su fase de avance regímenes transónicos ($0.8 \leq M_\infty \leq 1$) y supersónicos ($M_\infty > 1$).

C.3. VUELO DESCENDENTE

Aunque el procedimiento a llevar a cabo en un aterrizaje o descenso para la modelización de la tracción f_i puede parecer el mismo que el llevado a cabo en un vuelo ascendente, según nuestra velocidad inducida v_i el volumen de control representado en *Figura 51* no tiene validez y el flujo no puede ser considerado unidimensional ($V_\infty \neq V_z$). Por tanto, es necesario clasificar las distintas trayectorias que el dron puede desempeñar de acuerdo con la relación existente entre v_i y V_z .

- Anillos turbillonarios ($-v_i < V_z < 0$): existen torbellinos de punta de pala muy cercanos al plano del rotor que producen una situación altamente no estacionaria que afecta considerablemente a la estela. Consecuentemente, no se puede emplear el volumen de control utilizado para el vuelo ascendente.

- Autorrotación ideal ($v_i + V_z = 0$): el rotor se modela como un disco plano resistente (véase *Figura 53*) y la potencia inducida P_i que se le aplica es nula, ya que la potencia necesitada para que el rotor genere tracción se consigue de la disminución de la energía potencial asociada al descenso del dron. Mediante un equilibrio de fuerzas,

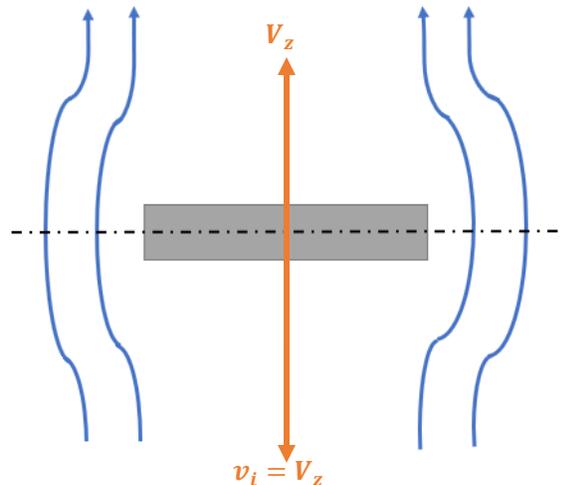


Figura 53. Autorrotación ideal

en el que la resistencia de vuelo D y la tracción f_i —expresión que se obtiene de la ecuación (94)— deben ser iguales:

$$D = G^B(\eta) = \frac{1}{2} \rho S V_z^2 C_D \quad (98)$$

Tomando el coeficiente de resistencia de un disco circular plano que se mueve perpendicularmente a sí mismo, con un valor aproximado de $C_D \approx 1,28$:

$$\frac{V_z}{v_{io}} = \sqrt{\frac{4}{C_D}} \approx -1,732 \quad (99)$$

- Estela turbulenta ($-2v_i < V_z < v_i$): tal y como su nombre indica produce una situación no estacionaria y una estela aperiódica que impide la utilización del volumen de control definido para el vuelo ascendente.
- Molinete frenante ($V_z < -2v_i$): la estela se encuentra ya otra vez bien definida y se puede volver a emplear el mismo volumen de control. Este esquema se encuentra representado en *Figura 54*, en el que es posible observar que se pueden utilizar otra vez las leyes de conservación de la masa, del movimiento y de la energía. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, al moverse el dron en sentido opuesto, la velocidad V_z cambia de signo y, siguiendo el criterio de signos expresado con los ejes

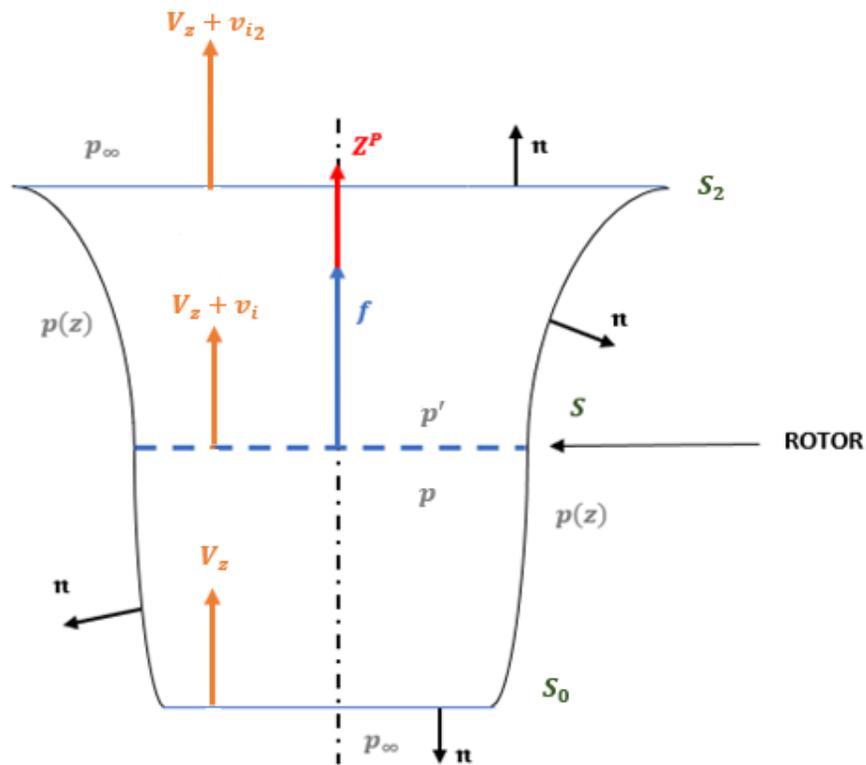


Figura 54. Volumen de control para el régimen de vuelo descendente en molinete frenante

pala F^P , será positiva ($V_z > 0$). Por el contrario, la velocidad inducida v_i mantiene el signo usado en el vuelo axial ascendente²⁸ ($v_i < 0$).

En definitiva, para todos los regímenes de vuelo en los que se genere una estela turbulenta, únicamente puede emplearse el caso genérico, puesto que el volumen de control no se encuentra bien definido. No obstante, tanto para el vuelo axial ascendente como para el caso del molinete frenante, la tracción f y la potencia inducida P_i también pueden ser calculadas a través de este último método.

²⁸ La velocidad inducida v_i siempre se considera hacia abajo, puesto que las hélices al rotar deben provocar que esta sea opuesta al eje Z^B o Z^P para poder generar una fuerza de tracción f_i hacia arriba (véase la sección 2.1).