



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Análisis y ejemplos de órbitas elípticas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1. Introducción	2
2. Objetivos	3
3. Características de las órbitas elípticas ($0 < e < 1$).	3
4. Ejemplos de uso de órbitas elípticas	8
4.1. Órbitas Molniya	8
4.2. Órbitas Tundra	10
5. Cierre	10

1 Introducció

Este artículo presenta y analiza las características de las órbitas Elípticas. También se muestran algunos casos del uso de este tipo de órbitas y se incluyen ejemplos de su estudio.

Recordemos que la ecuación orbital de un satélite de masa m que órbita alrededor de un cuerpo central de masa M por atracción gravitatoria es [Curtis]:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \theta} \quad (1)$$

donde $h = \|\vec{h}\| = \|\vec{r} \wedge \vec{v}\|$ es el momento angular que es constante, $\mu = G(M + m)$ es el parámetro gravitacional, $e = \|\vec{C}/\mu\|$ es la excentricidad de la órbita obtenida con el vector de Laplace que también es constante y θ es la anomalía verdadera (ángulo entre \vec{e} y \vec{r}).

Esta ecuación orbital origina trayectorias que representan curvas cónicas (circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas) según los valores de e . En este documento vamos a conocer las principales características y algunos ejemplos de las **órbitas elípticas**.

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a considerar algunas constantes:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante si la comparamos con la del Sol o con la de cualquier planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante

$$\mu = G(M + m) = GM$$

y para el caso de la Tierra resulta ser

$$\mu_T = 398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2.$$

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considere que tiene esa forma, se utiliza como radio terrestre el radio ecuatorial

$$R_T = 6378 \text{ km}.$$

Además de esas constantes debes recordar algunas relaciones entre parámetros orbitales que pueden consultarse en la bibliografía:

- El momento angular de cualquier órbita verifica $h = r v_{\perp}$.
- En el perigeo y apogeo la velocidad solo tiene componente transversal:

$$v_p = v_{\perp_p} \quad \text{y} \quad v_a = v_{\perp_a}.$$

- La energía específica cumple $\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{h^2}{\mu^2} (1 - e^2)$

- El ángulo de vuelo γ viene determinado por la igualdad $\tan \gamma = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de obtener:**

- El semieje mayor, la excentricidad, el momento angular, la velocidad, el periodo y la energía específica de una órbita elíptica
- Los radios del perigeo y apogeo a partir de la excentricidad y el semieje mayor.
- La energía específica a partir del semieje mayor (ε es independiente de la excentricidad).
- La diferencia de velocidad en el apogeo y el perigeo calculando cada una de ellas.
- La velocidad y el ángulo de vuelo en cualquier posición de la órbita.
- El máximo ángulo de vuelo de una órbita y la posición en la que sucede.
- Las características de 1 órbita a partir de dos posiciones y sus alturas.
- Distinguir y reconocer las características de las órbitas de tipo Molniya y Tundra.

3 Características de las órbitas elípticas ($0 < e < 1$).

Si $0 < e < 1$ entonces el denominador de la ecuación orbital (1) varía con la anomalía verdadera θ , pero se mantiene siempre positivo sin llegar nunca a cero. Por tanto, r está acotado alcanzando el mínimo en el periapsis ($\theta = 0^\circ$) y el máximo en el apoapsis ($\theta = 180^\circ$) siendo sus expresiones:

$$r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e} \quad r_a = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1-e} \quad (2)$$

La curva definida en este caso es una elipse.

Si denotamos por a al semieje mayor de la elipse tendremos que el eje mayor es

$$2a = r_p + r_a \stackrel{(2)}{=} \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e} + \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1-e} = \frac{2\frac{h^2}{\mu}}{1-e^2} \rightarrow \boxed{\frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2)} \quad (3)$$

y la ecuación orbital (1) puede reescribirse como

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad (4)$$

Otro resultado interesante es el que se obtiene dividiendo las expresiones (2), del perigeo y apogeo:

$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{1-e}{1+e} \rightarrow \boxed{e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}} \quad (5)$$

Como $r_a - r_p$ es la distancia entre los dos focos y $r_a + r_p$ es la longitud del eje mayor podemos decir que la excentricidad es el cociente entre la distancia focal y el semieje mayor.

La **energía específica de una órbita elíptica** es negativa y viene dada por $\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{h^2} (1 - e^2)$ pero además por (3) podemos sustituir $h^2 = \mu a (1 - e^2)$ quedando

$$\boxed{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\mu a (1 - e^2)} (1 - e^2) = \boxed{-\frac{\mu}{2a}} \quad (6)$$

Por tanto la energía específica de una órbita elíptica no depende de la excentricidad, únicamente del semieje mayor de la órbita y la Ley de Conservación de la Energía para órbitas elípticas puede escribirse como

$$\boxed{\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}} \quad (7)$$

El **periodo de una órbita elíptica** T , puede determinarse aplicando que el semieje menor de la elipse b es (figura 1)

$$b = \sqrt{a^2 - (ae)^2} = a\sqrt{1 - e^2}$$

y que según la segunda Ley de Kepler

$$\Delta A = \frac{h}{2} \Delta t$$

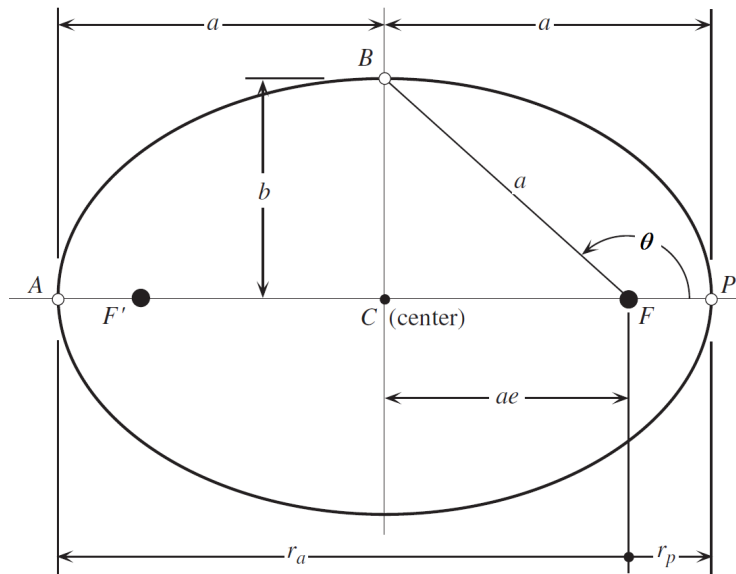


Figura 1: El semieje menor b se puede determinar por Pitágoras

Entonces para una vuelta completa $\Delta A = \pi ab$ siendo $\Delta t = T$ por lo que

$$\pi ab = \frac{h}{2} T \rightarrow T = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi}{h} a^2 \sqrt{1 - e^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{2\pi}{h} \left(\frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2} \right)^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{2\pi}{\mu^2} \left(\frac{h}{\sqrt{1 - e^2}} \right)^3$$

que volviendo a utilizar la ecuación (3), sustituyendo esta vez $h = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$ nos queda

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}} \quad (8)$$

Ejemplo

Un satélite terrestre está en una órbita en la que el perigeo se produce a $h_p = 380 \text{ km}$ de altitud y el apogeo a $h_a = 3800 \text{ km}$ (figura 2).

Encuentra los siguientes cantidades relacionadas con esa órbita:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) Excentricidad, e | g) Anomalía verdadera cuando $r = a$ |
| b) Momento angular, h | h) Velocidad cuando $r = a$ |
| c) Velocidad en el perigeo, v_p | i) Ángulo de vuelo, γ cuando $r = a$ |
| d) Velocidad en el apogeo, v_a | j) Máximo ángulo de vuelo, γ_{max} y la anomalía verdadera a la que ocurre |
| e) Semieje mayor, a | |
| f) Periodo orbital, T | |

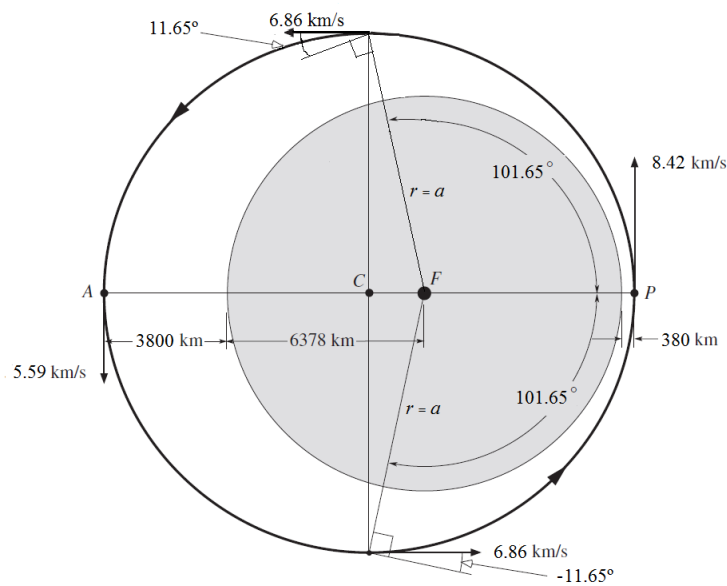


Figura 2: Órbita del satélite

Solución:

a) Para determinar la excentricidad podemos emplear la expresión (5) pero primero vamos a calcular las distancias al apogeo y al perigeo, r_a y r_p .

$$r_a = R_T + h_a = 6378 + 3800 = 10178 \text{ km}$$

$$r_p = R_T + h_p = 6378 + 380 = 6758 \text{ km}$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{3420}{16936} = \boxed{0.201937}$$

b) Para hallar el momento angular h , podemos utilizar la ecuación orbital (4) para $\theta = 0^\circ$ y despejar h

$$r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e}$$

$$\boxed{h} = \sqrt{\mu r_p (1 + e)} = \sqrt{398600 \cdot 6758 (1 + 0.201937)} = \boxed{56900.8 \text{ km}^2/\text{s}}$$

c) La velocidad en el perigeo v_p , coincide con la velocidad transversal en ese punto y por tanto

$$\boxed{v_p}_{(per)} = v_{\perp p} \stackrel{(h=r v_{\perp})}{=} \frac{h}{r_p} = \frac{56900.8}{6758} = \boxed{8.41977 \text{ km/s}}$$

d) Del mismo modo se calcula la velocidad en el apogeo v_a

$$\boxed{v_a}_{(apo)} = v_{\perp a} = \frac{h}{r_a} = \frac{56900.8}{10178} = \boxed{5.59057 \text{ km/s}}$$

e) El semieje mayor a , lo podemos calcular sabiendo que $r_a + r_p = 2a$

$$\boxed{a} = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{6758 + 10178}{2} = \boxed{8468 \text{ km}}$$

f) El periodo orbital T , se puede hallar con ayuda de la igualdad (8)

$$\boxed{T} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{8468^3}{398600}} = \boxed{7755 \text{ s}} \sim 2.154 \text{ h}$$

g) Para hallar la anomalía verdadera cuando $r = a$, $\theta_{r=a}$ podemos utilizar de nuevo la ecuación orbital (1) y despejar θ

$$a = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \theta} \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{e} \left(\frac{h^2}{\mu a} - 1 \right) = \frac{1}{0.201937} \left(\frac{56900.8^2}{398600 \cdot 8468} - 1 \right) = -0.201935$$

$$\theta_{r=a} = \arccos(-0.201935) = \pm 101.65^\circ$$

Esto significa que la anomalía verdadera cuando $r = a$ ocurre en dos ocasiones, una cuando el satélite se está alejando del perigeo $\theta_{r=a} = 101.65^\circ$ y otra cuando se encuentra en el camino de regreso, $\theta_{r=a} = 258.35^\circ$.

h) Para hallar la velocidad cuando $r = a$ la forma más simple es utilizar la ecuación de la energía para una elipse (7) y aplicar que $r = a$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow \frac{v_{r=a}^2}{2} - \frac{\mu}{a} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\boxed{v_{r=a}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{398600}{8468}} = \boxed{6.86085 \text{ km/s}}$$

i) El ángulo de vuelo, γ cuando $r = a$ se calcula con la expresión que nos da la tangente en función de la anomalía verdadera. Consideremos los dos casos obtenidos anteriormente: Alejándose del perigeo

$$\tan \gamma = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{0.201937 \sin(101.65^\circ)}{1 + 0.201937 \cos(101.65^\circ)} = 0.206185$$

$$\boxed{\gamma} = \arctan(0.206185) = \boxed{11.6503^\circ}$$

Acercándose al perigeo

$$\tan \gamma = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{0.201937 \sin(258.35^\circ)}{1 + 0.201937 \cos(258.35^\circ)} = -0.206185$$

$$\boxed{\gamma} = \arctan(-0.206185) = \boxed{-11.6503^\circ}$$

j) Para hallar el máximo ángulo de vuelo γ_{max} debemos estudiar en que punto θ_m se anula la derivada de γ respecto de θ .

$$\gamma = \arctan\left(\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta}\right)$$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta}\right)^2} \frac{e^2 + e \cos \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{e(e + \cos \theta)}{(1 + e \cos \theta)^2 + e^2 \sin^2 \theta}$$

Para $e < 1$ el denominador no se anula en ningún valor de θ por lo que $\frac{d\gamma}{d\theta} = 0$ si se anula el numerador:

$$e(e + \cos \theta) = 0 \rightarrow \theta = \arccos(-e)$$

$$\theta = \arccos(-0.201937) = \pm 101.65^\circ$$

Como buscamos el mayor γ y al regreso hacia el perigeo $\gamma < 0$ nos quedamos con $\boxed{\theta = 101.65^\circ}$ que coincide con la anomalía verdadera cuando $r = a$. Por tanto el máximo ángulo de vuelo se alcanza cuando el satélite cruza el semieje menor de la elipse de la órbita ($r = a$) y su valor está calculado en apartado anterior, $\boxed{\gamma_{max} = 11.6502^\circ}$.

Ejemplo

Un satélite en órbita geocéntrica alcanza una altitud de $h_1 = 1622 \text{ km}$ cuando forma un ángulo con el perigeo de $\theta_1 = 121^\circ$ y en otro instante la altitud es de $h_2 = 862 \text{ km}$ para una anomalía verdadera de $\theta_2 = 62^\circ$. Determina la excentricidad, la altura del perigeo, el semieje mayor y el periodo de la órbita de este satélite.

Solución:

Los elementos principales (permiten hallar todos los demás) son la excentricidad e , y el momento angular h , por eso son los que se intentan conseguir en primer lugar.

Partiendo de las alturas h_1 y h_2 podemos obtener los radios r_1 y r_2 :

$$r_1 = R_T + h_1 = 6378 + 1622 = 8000 \text{ km}$$

$$r_2 = R_T + h_2 = 6378 + 862 = 7240 \text{ km}$$

La ecuación orbital (1) relaciona h , r , θ y e por lo que vamos a utilizarla para hallar h y e .

Para $i = 1, 2$

$$r_i = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \theta_i}$$

entonces podemos plantear un sistema de dos ecuaciones con las incógnitas h y e :

$$\left\{ \begin{array}{l} 8000 = \frac{\frac{h^2}{398600}}{1 + e \cos(121^\circ)}, \quad 7240 = \frac{\frac{h^2}{398600}}{1 + e \cos(62^\circ)} \end{array} \right\}$$

que al resolverlo se obtiene

$$h = 54980 \text{ km}^2/s$$

$$e = 0.101074$$

Entonces el radio del perigeo y por tanto su altura será:

$$r_p = \frac{\frac{54980^2}{398600}}{1 + 0.101074 \cos(0^\circ)} = 6887.4 \text{ km} \rightarrow alt_p = 6887.4 - 6378 = 509.4 \text{ km}$$

Para el apogeo se sigue el mismo proceso

$$r_a = \frac{\frac{54980^2}{398600}}{1 + 0.101074 \cos(180^\circ)} = 8436.2 \text{ km} \rightarrow alt_a = 8436.2 - 6378 = 2058.2 \text{ km}$$

Finalmente con estos valores se podrá hallar el semieje mayor a , y por (8) el periodo T

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{8436.2 + 6887.4}{2} = 7661.8 \text{ km}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{7661.8^3}{398600}} = 6674.4 \text{ s}$$

4 Ejemplos de uso de órbitas elípticas

4.1 Órbitas Molniya

Todos los lugares de lanzamiento rusos están por encima de los 45° de latitud norte (Plesetsk está a 62.8°N) y las maniobras de cambio de plano en el espacio son muy costosas por lo que para los rusos poner en órbita geoestacionaria un satélite lleva un elevado gasto. Además, los satélites en órbitas GEO tienen dificultades de cobertura para latitudes muy altas siendo Rusia un país con una gran superficie en esa zona tan septentrional.

Por esas razones los rusos no suelen utilizar los satélites de telecomunicación en órbitas geoestacionarias, ellos prefieren unas órbitas fuera del plano del ecuador terrestre y con elevada excentricidad (elípticas). Estas órbitas denominadas **MOLNIYA** tienen dos características importantes (figura 3):

- Tienen una inclinación sobre el ecuador terrestre de 63.4° para que la perturbación que provoca el achatamiento de la Tierra no modifique la orientación de la línea de ápsides (perigeo-apogeo). Además esa inclinación permite, como hemos comentado antes, que los lanzamientos desde Plesetsk necesiten una maniobra de cambio de plano muy reducida.
- Tienen mucha excentricidad situando el apogeo en latitudes norte para dar cobertura a esas zonas (approx 40000 km altitud >GEO) mientras que el perigeo lo tienen en el hemisferio sur, zona sin interés para los rusos (approx 500 km de altitud). De este modo tienen mucho más tiempo el satélite con cobertura que sin ella (paso sobre las antípodas). Esta diferencia de tiempo ocurre porque la velocidad en el apogeo es muy inferior que en el perigeo y por tanto el tiempo de posible cobertura se incrementa notablemente.

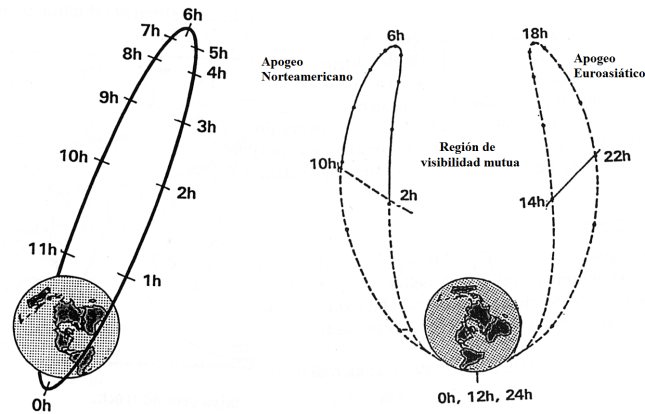


Figura 3: El período de una órbita Molniya es de 12 h lo que permite visitar el norte de América y de Asia alternativamente todos los días. Además el apogeo tan lejano permite dar una amplia cobertura a zonas de latitud elevada.

Una constelación de tres satélites daría cobertura en cualquier momento. Molniya consta de 8 satélites en planos separados 45° y cada uno de ellos está por encima de los 30°N de latitud durante más de 8 horas. Además para poner en órbita un satélite en este tipo de órbita bastan dos impulsos: Lanzamiento a órbita de parking y un ΔV en el perigeo para establecer la elipse.

Ejemplo

Halla las velocidades en el perigeo v_p y en el apogeo v_a de un satélite en órbita Molniya de altura en el perigeo $h_p = 500 \text{ km}$.

Solución:

Para tener órbita Molniya el periodo debe ser de medio día sidéreo ($T = \frac{86164}{2} = 43082 \text{ s}$) y por la igualdad (8) podremos obtener el semieje a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{398600 \cdot 43082^2}{4\pi^2}} = 26561.7 \text{ km}$$

El radio en el perigeo r_p se obtiene a partir de la altura en el perigeo sumando el radio terrestre

$$r_p = R_T + h_p = 6378 + 500 = 6878 \text{ km}$$

y aplicando la igualdad (4) en el perigeo se podrá hallar la excentricidad

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \rightarrow r_p = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(0^\circ)} = a(1-e)$$

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 1 - \frac{6878}{26561.7} = 0.741056$$

Con la misma igualdad pero aplicada en el apogeo y conociendo la excentricidad se puede hallar el radio del apogeo r_a

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \rightarrow r_a = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(180^\circ)} = a(1 + e) = 26561.7(1 + 0.741056) = 46245.5 \text{ km}$$

Para hallar las velocidades es necesario conocer el momento angular h para lo que se puede utilizar la ecuación orbital (1) aplicada en el perigeo

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \theta} \rightarrow r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos(0^\circ)}$$

$$h = \sqrt{\mu r_p (1 + e)} = \sqrt{398600 \cdot 6878 (1 + 0.741056)} = 69088.6 \text{ km}^2/\text{s}$$

Tanto en el perigeo como en el apogeo la velocidad coincide con la velocidad transversal, por tanto

$$\boxed{v_p} = v_{\perp p} = \frac{h}{r_p} = \frac{69088.6}{6878} = \boxed{10.045 \text{ km/s}}$$

$$\boxed{v_a} = v_{\perp a} = \frac{h}{r_a} = \frac{69088.6}{46245.5} = \boxed{1.494 \text{ km/s}}$$

4.2 Órbitas Tundra

Las órbitas tipo **Tundra** tienen la misma inclinación sobre el ecuador que los de tipo Molniya pero su periodo es de un día sidéreo (86164 s) en vez de medio día sidéreo.

5 Cierre

A lo largo de este artículo se han mostrado cuáles son las características de las órbitas elípticas y como se obtienen los parámetros que las definen.

También se han definido algunos casos de órbitas que son de tipo elíptico señalando sus ventajas y aplicaciones.

En cada sección se han mostrado ejemplos de cálculo y aplicación.

Referencias

- [1] CURTIS, HOWARD D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.
- [2] BATE, ROGER R. ET AL., *Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.
- [3] BROWN, CHARLES D., *Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.