Análisis y ejemplos de órbitas circulares

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice general

1. Introducción 2

2. Objetivos 3

3. Características de las órbitas circulares ($e = 0$). 3

4. Ejemplos de órbitas que suelen ser circulares 3

4.1. Órbitas LEO 3

4.2. Órbitas GEO 5

4.3. Órbitas Heliosíncronas, SSO 6

4.4. Órbitas MEO 7

5. Cierre 8

1 Introducción

Este artículo presenta y analiza las características de las órbitas Circulares. También se muestran algunos casos del uso de este tipo de órbitas y se incluyen ejemplos de su estudio.

Recordemos que la ecuación orbital de un satélite de masa m que órbita alrededor de un cuerpo central de masa M por atracción gravitatoria es [**Curtis**]:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} \tag{1}$$

donde $h = \|\overrightarrow{h}\| = \|\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}\|$ es el momento angular que es constante, $\mu = G(M+m)$ es el parámetro gravitacional, $e = \|\overrightarrow{C}/\mu\|$ es la excentricidad de la órbita obtenida con el vector de Laplace que también es constante y θ es la anomalía verdadera (ángulo entre $\overrightarrow{e}$ y $\overrightarrow{r}$).

Esta ecuación orbital origina trayectorias que representan curvas cónicas (circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas) según los valores de e. En este documento vamos a conocer las principales características y algunos ejemplos de las **órbitas circulares**.

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a considerar algunas constantes:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante si la comparamos con la del Sol o con la de cualquier planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante

  $$\mu = G(M+m) = GM$$

  y para el caso de la Tierra resulta ser

  $$\mu_T = 398\,600\ km^3/s^2.$$

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considere que tiene esa forma, se utiliza como radio terrestre el radio ecuatorial

  $$R_T = 6378\ km.$$

- La velocidad angular de la Tierra es $2\pi\, rad/diaSid$, donde el día sidéreo es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta respecto de las estrellas ($86164\,s < 86400\,s = 24\,h$). Por tanto

  $$\omega_T = 72.9217 \times 10^{-6}\, rad/s.$$

Además de esas constantes debes recordar algunas relaciones entre parámetros orbitales que pueden consultarse en la bibliografía:

- El momento angular de cualquier órbita verifica $h = r\, v_\perp$.
- La energía específica cumple $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu^2}\left(1 - e^2\right)$
- El área de la superficie curva de un casquete esférico con R el radio de la esfera y a la altura del casquete es $A = 2\pi\, R\, a$.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de obtener**:

- El radio, el momento angular, la velocidad y la energía específica de una órbita circular
- Distinguir algunos tipos de órbitas: LEO, MEO, GEO y SSO, analizando sus características.

3 Características de las órbitas circulares ($e = 0$).

Al considerar en (1) que la excentricidad es nula la ecuación orbital queda reducida a

$$r = \frac{h^2}{\mu} \tag{2}$$

lo que implica que r es constante y que la trayectoria de m alrededor de M es **circular**.

Si r es constante entonces $\dot{r} = 0$ y por tanto $v = v_\perp$ lo que implica que $h = rv_\perp = rv$. Sustituyendo esta igualdad en (2) se obtiene la velocidad circular de la órbita

$$r = \frac{(r\,v)^2}{\mu} \quad \rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \tag{3}$$

El tiempo requerido para recorrer una órbita se llama **periodo** orbital. En órbitas circulares, como la velocidad es constante, podemos calcular el periodo con la expresión

$$T = \frac{circunferencia}{velocidad} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\mu/r}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \tag{4}$$

Por otra parte sabemos que la energía específica de una órbita es $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1-e^2)$ pero como $e = 0$ nos queda

$$\varepsilon_C = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2} \overset{(2)}{=} -\frac{\mu}{2r} \tag{5}$$

Según esa expresión al aumentar la distancia disminuye la fracción que al ser negativa hace que aumente la energía.

4 Ejemplos de órbitas que suelen ser circulares

4.1 Órbitas LEO

Naves tripuladas y una gran cantidad de satélites no tripulados de teledetección utilizan órbitas terrestres bajas (LEOs) circulares. Se consideran órbitas **LEO** (**Low Earth Orbit**) las situadas entre $150\,km$ y $1000\,km$ aproximadamente para estar por encima del *drag* atmosférico y por debajo de los peligrosos *cinturones de radiación* de Van Allen (el más interno empieza alrededor de los $2400\,km$).

Para lanzar un satélite desde la superficie terrestre a una órbita circular necesitamos incrementar la energía específica ε. Este incremento de energía se consigue con los motores cohete del vehículo lanzador. El mismo propulsor que puede poner una masa grande en una órbita baja (LEO) será capaz de situar una pequeña masa en una órbita más alta.

Ejemplo

Construye las gráficas de la velocidad v el periodo T y la energía específica ε de un satélite en una órbita circular LEO en función de la altitud h de la órbita.

Solución:

Utilizando las expresiones (3), (4) y (5) construimos las tres funciones que representamos a continuación (figura 1):

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{398600}{6378 + h}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6378 + h)^3}{398600}}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2r} = -\frac{398600}{2(6378 + h)}$$

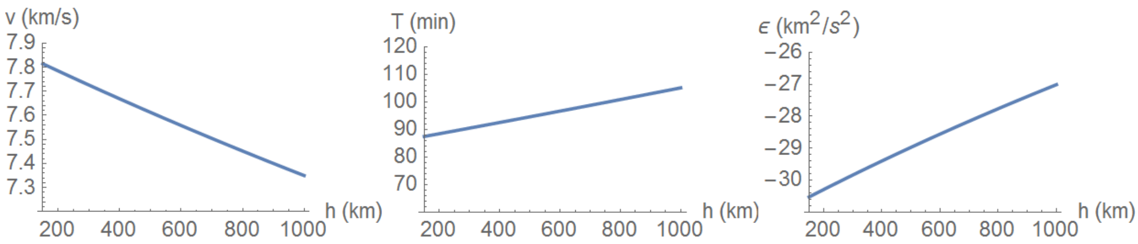

Figura 1: Velocidad, periodo y energía específica de un satélite en órbita LEO según su altura

En figura 1 se puede ver como la velocidad decae al ganar altura. Otro ejemplo de ello es que un satélite en órbita LEO gira en torno a $7.9\,km/s$ de velocidad mientras que la Luna que se encuentra bastante más alejada lo hace a $0.91\,km/s$. En esta figura podemos ver como el periodo aumenta con la altura y como la energía específica también. Destaquemos también que la energía es negativa porque la energía potencial supera a la cinética pero al alejarnos, esta diferencia se va reduciendo.

Ejemplo

¿Cuál es la velocidad y el periodo de la ISS orbitando a $395\,km$ de altura sobre la superficie terrestre en órbita circular?

Solución:

Si aplicamos de nuevo (3), (4) y (5) resulta

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{398600}{6378 + 395}} = 7.67\ km/s$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6378 + 395)^3}{398600}} = 5547\,s \simeq 92\,min$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2(R_T + h)} = -\frac{398600}{2(6378 + 395)} = -29.4\ km^2/s^2$$

4.2 Órbitas GEO

Además de las órbitas LEO hay otras órbitas que suelen ser circulares como las órbitas **GEO** (**Geoestacionary Equatorial Orbit**). En este tipo de órbitas el satélite permanece siempre sobre el mismo punto del ecuador terrestre y para conseguirlo debe ajustar su velocidad angular con la velocidad angular de la Tierra ($\omega_T = 72.9217 \cdot 10^{-6}\ rad/s$).

Los satélites de comunicación y los meteorológicos entres otros suelen estar en órbitas geoestacionarias porque su posición a gran altitud permite observar una amplia superficie terrestre y su posición fija en el cielo permite conexiones desde estaciones terrestres sin necesidad de seguimiento.

Ejemplo

Calcula la velocidad y la altura de un satélite que está en órbita GEO.

Solución:

Al ser órbita GEO debe ser circular por lo que la distancia puede hallarse igualando la expresión de la velocidad (3) con el producto de la velocidad angular de la Tierra por la distancia.

$$v_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}} = \omega_T\, r_{GEO}$$

despejando r_{GEO} y sustituyendo los valores

$$r_{GEO} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\omega_T^2}} = \sqrt[3]{\frac{398600}{(72.9217 \times 10^{-6})^2}} = 42164\, km$$

Para la altitud GEO, basta restar el Radio terrestre

$$\boxed{alt_{GEO}} = r_{GEO} - R_T = 42164 - 6378 = \boxed{35786\, km}.$$

Volviendo a la ecuación de la velocidad (3)

$$\boxed{v_{GEO}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}} = \sqrt{\frac{398600}{42164}} = \boxed{3.075\, km/s}.$$

Ejemplo

Calcula la máxima latitud y el porcentaje de superficie terrestre visible desde un GEO.

Solución:

La latitud máxima visible será la correspondiente al ángulo ϕ de la figura

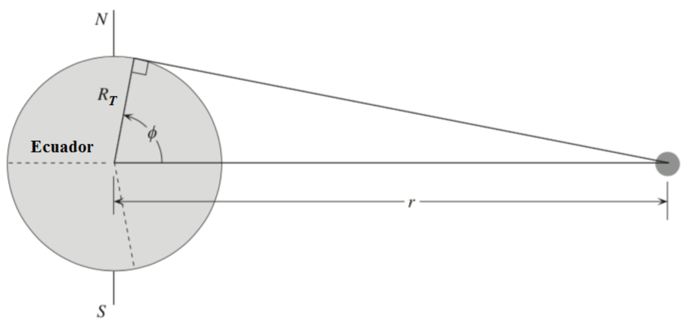

Figura 2: El ángulo ϕ es la latitud visible desde un punto en la órbita GEO.

Según la figura

$$R_T = r_{GEO} \cos \phi$$

y teniendo en cuenta por el ejemplo anterior el valor de r_{GEO}

$$\phi = \arccos\left(\frac{R_T}{r_{GEO}}\right) = \arccos\left(\frac{6378}{42164}\right) = 81.30^{\circ}$$

La superficie visible será el área de un casquete esférico de altura $R_T - R_T \cos \phi)$ por tanto

$$S = 2\pi R_T R_T (1 - \cos \phi) = 2\pi 6378^2 (1 - \cos(81.30^{\circ})) = 2.16932 \times 10^8\, km^2$$

Comparando con la superficie de la esfera terrestre obtenemos el porcentaje de superficie visible desde un satélite en órbita GEO

$$\frac{S}{4\pi R_T^2} \cdot 100 = \frac{2.16932 \times 10^8}{5.11186 \times 10^8} = 42.44\,\%$$

4.3 Órbitas Heliosíncronas, SSO

Otro tipo de órbitas que en ocasiones son circulares (no siempre) son las llamadas **Heliosíncronas** (SSO). Este tipo órbitas tienen la particularidad de mantener constante el ángulo con el Sol (figura 3) para así conseguir las mismas condiciones de luminosidad/oscuridad cada día.

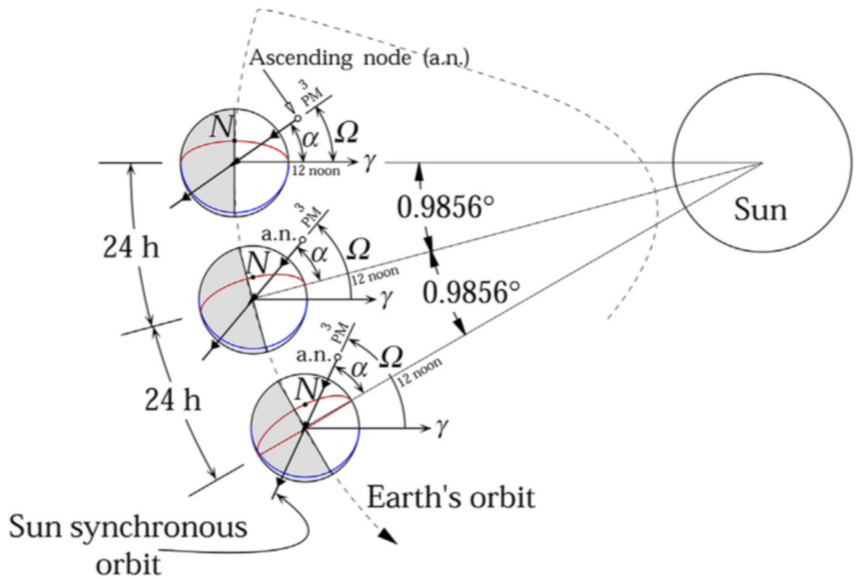

Figura 3: En las órbitas heliosíncronas el ángulo con el Sol α se mantiene constante. Fuente [**Curtis**]

Para conseguir este efecto se sitúan a una inclinación sobre el plano ecuatorial que haga que el giro del plano de la órbita, causado por la perturbación debida al achatamiento terrestre, coincida con el giro de la Tierra alrededor del Sol. El plano orbital gira 360° en 365 días por lo que en 90 días el plano habrá girado 90°. Para ser más precisos:

$$\frac{360^{\circ}}{365.242\, dias} = 0.9856\,^{\circ}/dia$$

Para compensar este giro se aprovecha esta perturbación, llamada regresión de nodos, y que depende de la inclinación de la órbita sobre el ecuador. La perturbación hace retroceder el nodo (avanzar hacia el oeste) si la inclinación es menor de 90^o pero para mantener el ángulo solar el nodo debe avanzar hacia el Este. Por este motivo todas las órbitas SSO tienen una inclinación superior a 90^o siendo por tanto órbitas retrógradas.

La pertubación por el achatamiento depende además de la inclinación, de la altura de la órbita, por lo que para cada inclinación hay que alcanzar una determinada altura ajustando el avance del nodo al valor deseado.

Ejemplos de heliosíncronos son los Polar-Orbiting Environmental Satellites (NOAA/POES) y los Defense Meteorological Satellite Program (DMSP) utilizados para estudios del clima, los LANDSAT y los franceses SPOT que están encargados de observaciones terrestres de alta resolución.

Los satélites de la serie LANDSAT están colocados en una órbita circular a $709\,km$ de altitud con una inclinación de 98.2^o. El periodo es de $99\,min$ aproximadamente con una banda visual de $185\,km$ cubriendo la superficie terrestre en 16 días. El satélite cruza el ecuador a la misma hora local cada día. Esta órbita produce una iluminación constante de la Tierra, condiciones ideales para la captación y comparación de imágenes.

Ejemplo

En 2020 está previsto el lanzamiento del Landsat 9. El propósito es que gire en una órbita circular heliosíncrona a una velocidad de $26972\,km/h$. Calcula la altura que debe tener la órbita y el periodo de cada órbita.

Solución:

Al ser una órbita circular se puede usar la expresión (3) para hallar la altura de la órbita

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \rightarrow r = \frac{\mu}{v^2} = \frac{398600}{\left(\frac{26972}{3600}\right)^2} = 7101\,km \rightarrow \boxed{alt} = r - R_T = 7101 - 6378 = \boxed{723\,km}$$

El periodo se calcula con (4)

$$\boxed{T} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{7101^3}{398600}} = \boxed{5955\,s} \sim 99.25\,min.$$

4.4 Órbitas MEO

Otro tipo de órbitas circulares son las órbitas intermedias, **MEO** (**Medium Earth Orbit**). Son órbitas situadas entre los $2000\,km$ y los $36000\,km$ con periodos de varias horas. Estas órbitas son utilizadas frecuentemente por los satélites de observación, defensa y posicionamiento, como las constelaciones de GPS, GLONASS, Galileo o COMPASS (BeiDou).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

5 Cierre

A lo largo de este artículo se han mostrado cuáles son las características de las órbitas circulares y como se obtienen los parámetros que las definen.

También se han definido algunos casos de órbitas que son de tipo circular señalando en cada una su posible utilidad e indicando algún ejemplo de satélite con esas características orbitales (figura 4).

Cada caso, tipo y ejemplo se ha acompañado de un ejercicio resuelto.

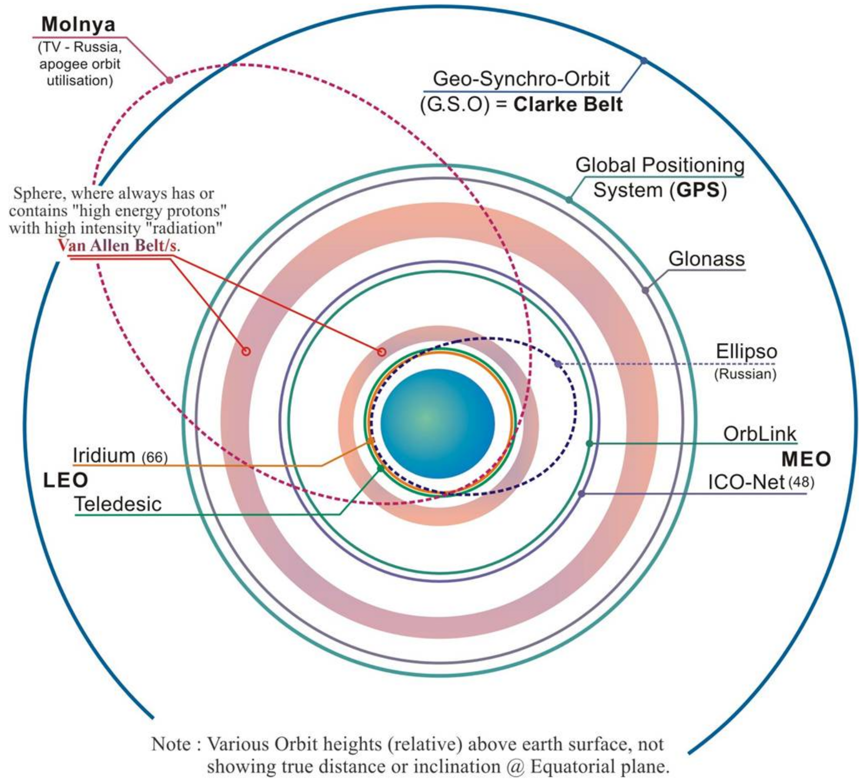

Figura 4: Las órbitas reciben su nombre según su altura desde la superficie terrestre y según su forma. Fuente [http://curioseantes.blogspot.com/2015/10/leo-meo-geo-heo-y-sso.html]

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.