La ecuación orbital y valores comunes de órbitas keplerianas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta la ecuación orbital en coordenadas polares junto con algunas consecuencias de esa notación.

Posteriormente se presentan los tipos de cónicas que pueden darse según la excentricidad.

También se presentan como consecuencias la definición de algunos elementos geométricos que son comunes a todas las órbitas keplerianas.

Otra consecuencia es la expresión de otros parámetros como las componentes de la velocidad, el ángulo de vuelo o la energía específica en función de la anomalía verdadera, la excentricidad o el semieje mayor.

Se finaliza con un ejemplo de aplicación haciendo el estudio de una órbita.

Para poder entender este artículo necesitas tener claros algunos conceptos que pueden consultarse en las referencias:

- En cada órbita el vector de Laplace $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{h} - \mu \frac{\overrightarrow{r}}{r}$ es constante.
- $\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}\right) = \left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{C}$
- Representar curvas en coordenadas polares $\rho = \rho(\alpha)$
- $h = r\, v_\perp$ y $tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$
- La ecuación Vis-viva de la energía $\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$ es constante.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de obtener**:

- La ecuación orbital en coordenadas polares a partir del vector estado en un instante, $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{v})$.
- El tamaño (a) y la forma (e) de la órbita y algunas distancias importantes en la órbita (r_p, r_a).
- La anomalía verdadera (θ), las componentes transversal y radial de la velocidad $(v_\perp, v_r)$ y el ángulo de vuelo (γ) en el instante de los datos.
- La energía específica (ε) de la órbita.

3 La ecuación del movimiento

Sabemos que en cualquier órbita kepleriana hay parámetros que se mantienen constantes. Uno de ellos es el llamado Vector de Laplace,

$$\vec{C} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

donde $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ y $\vec{h}$ son los vectores posición, velocidad y momento angular respectivamente y $\mu = G(M+m)$ es el parámetro gravitacional.

Llamamos **vector excentricidad** al vector

$$\vec{e} = \frac{\vec{C}}{\mu} = \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

que carece de dimensiones y que se puede comprobar que está contenido en el plano orbital. Al módulo de $\vec{e}$ se le conoce como **excentricidad** de la órbita (e) y a la línea que define se le llama **línea de ápsides**.

Si multiplicamos la ecuación (2) escalarmente por $\vec{r}$ se obtiene

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = \vec{r} \cdot \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{\left(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}\right) \cdot \vec{h}}{\mu} - r = \frac{h^2}{\mu} - r \tag{3}$$

Por otra parte

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = r\, e\, \cos\theta \tag{4}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{e}$ (dirección de la línea de ápsides) y $\vec{r}$ (vector posición) conocido como **Anomalía Verdadera** (figura 1).

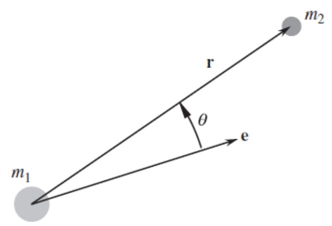

Figura 1: La anomalía verdadera θ es el ángulo entre el vector $\vec{e}$ y el vector posición $\vec{r}$

Sustituyendo (4) en (3) resulta

$$r\, e\, \cos\theta = \frac{h^2}{\mu} - r \tag{5}$$

que despejando r deja la expresión

$$\boxed{r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\, \cos\theta}} \tag{6}$$

Esta igualdad es conocida como **ecuación orbital** del movimiento de una masa alrededor de otra. Los parámetros μ, h y e son constantes, e no puede ser negativo y la única variable es la anomalía verdadera, θ.

4 Consecuencias

4.1 Consecuencia 1: Órbitas resultantes y algunas dimensiones comunes

Al variar la anomalía verdadera, θ, la ecuación orbital representa una curva en polares que se corresponde con una sección cónica. En la figura 2 se muestra solo una de las posibles cónicas.

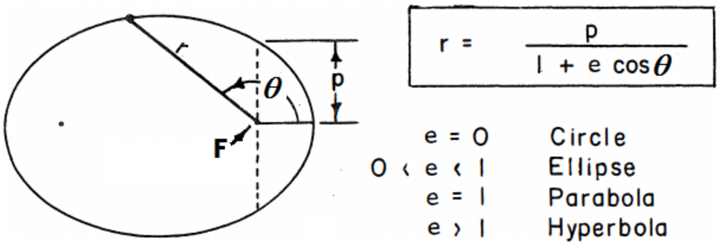

Figura 2: Una de las posibles trayectorias es la órbita elíptica pero hay otras posibilidades.

Su nombre proviene de que una cónica puede obtenerse por la intersección de un plano con un cono circular recto, ver figura 3.

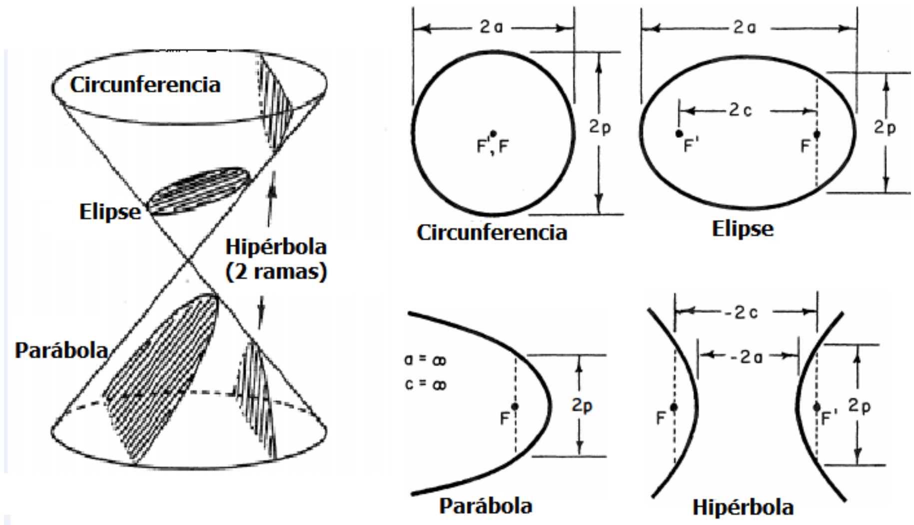

Figura 3: Las curvas cónicas pueden ser de cuatro tipos: Circulares, Elípticas, Parabólicas o Hiperbólicas.

La forma de la curva depende de los valores de la excentricidad e: Circular ($e = 0$), elíptica ($0 < e < 1$), parabólica ($e = 1$) e hiperbólica ($e > 1$). Todas ellas se llaman **Órbitas Keplerianas**.

Hay algunas dimensiones geométricas que son comunes a todas las cónicas (figura 3) (**Bate**):

- **Distancia semifocal,** c. Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la trayectoria descrita es simétrica en todos los casos por lo que todas tienen dos focos F y F'. El foco primario F indica la posición del cuerpo central, mientras que el secundario F' es poco relevante. La distancia entre ambos focos se representa por $2c$ por lo que c se llama **distancia semifocal**. En la parábola se asume que F' está a una distancia infinita de F, $c = \infty$ mientras que en la circunferencia F y F' coinciden, $c = 0$.

- **Semieje mayor,** a. La longitud de la cuerda que pasa por los dos focos se llama eje mayor y se representa por $2a$, por lo que a recibe el nombre de **semieje mayor**. Para la parábola se toma que $2a = \infty$ y para la hipérbola se considera que es negativo.

- **Excentricidad,** e. Por la propia definición de sección cónica se verifica para todas las formas excepto para la parábola que

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \tag{7}$$

- **Semilactus rectum** o pamámetro orbital, p. Otro valor importante de una trayectoria es el **semilactus rectum** o **parámetro** de la órbita p, que es la distancia al cuerpo central cuando $\theta = 90^{\circ}$ (por simetría, también cuando $\theta = 270^{\circ}$). Aplicando esos valores a la ecuación orbital (6) se obtiene que

$$p = \frac{h^2}{\mu}. \tag{8}$$

y excepto para la parábola, en todas las cónicas se puede deducir que

$$p = a\left(1 - e^2\right) \tag{9}$$

- **Periapsis** y **apoapsis**, r_p y r_a. Los puntos en los extremos del eje mayor se llaman ápsides siendo el más cercano al foco primario F, el **periapsis**, r_p y el más alejado el **apoapsis**, r_a. Al conocer el cuerpo central su nombre se adapta según cual sea éste (perigeo/apogeo si es la Tierra, perihelio/afelio si es el Sol, perijove/apojove si es Júpiter, etc.). En las órbitas circulares no están definidos y en las abiertas el apoapsis carece de sentido físico. El periapsis y el apoapsis tienen lugar cuando $\theta = 0^{\circ}$ y $\theta = 180^{\circ}$ respectivamente (ver figura 4) por lo que

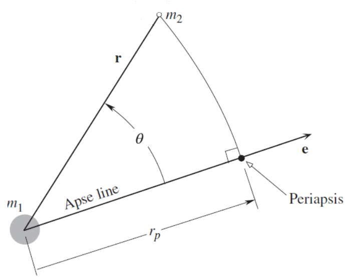

Figura 4: El punto de máxima aproximación al cuerpo central es el periapsis y se produce cuando la anomalía verdadera es nula.

las expresiones de estos puntos son:

$$r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e} \overset{(8)}{=} \frac{p}{1+e} \overset{(9)}{=} a\left(1 - e\right) \tag{10}$$

$$r_a = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1-e} = \frac{p}{1-e} = a\left(1 + e\right) \tag{11}$$

4.2 Consecuencia 2: Las componentes de la velocidad en cada instante pueden expresarse en función de θ.

Aplicando que $h = r\,v_\perp$ (**Curtis**) y reemplazando r con la ecuación orbital (6) resulta

$$\boxed{v_\perp} = \frac{h}{r} = \frac{h\,(1+e\cos\theta)}{\frac{h^2}{\mu}} = \boxed{\frac{\mu}{h}\,(1+e\ \cos\theta)} \tag{12}$$

Por otra parte, la velocidad angular de $\overrightarrow{r}$ es $\dot{\theta}$ por lo que $v_\perp = r\dot{\theta} = \frac{h}{r} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$, entonces

$$\boxed{v_r} = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{h^2}{\mu}\frac{e\ \overbrace{\dot{\theta}}^{\frac{h}{r^2}}\ \operatorname{sen}\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \overbrace{\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}}^{r}\ \overbrace{\frac{\frac{h}{r^2}}{1+e\cos\theta}}^{\frac{\mu}{r\,h}}\, e\operatorname{sen}\theta = \boxed{\frac{\mu}{h} e\operatorname{sen}\theta} \tag{13}$$

4.3 Consecuencia 3: El ángulo de vuelo también puede expresarse en función de θ.

Como sabemos que el ángulo de vuelo, γ verifica que $\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$ (**Curtis**), podemos obtener su expresión en función de θ sustituyendo las expresiones (12) y (13):

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} = \frac{e\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}. \tag{14}$$

El ángulo de vuelo (igual que v_r) está por encima del Horizonte Local y es positivo cuando el cuerpo se aleja del periapsis y está por debajo del Horizonte Local y es negativo cuando se aleja (ver figura 5).

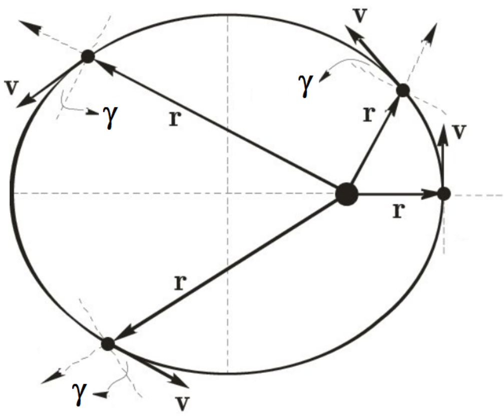

Figura 5: Ejemplo de ángulos de vuelo en una órbita elíptica. El ángulo de vuelo γ es positivo cuando el cuerpo se aleja del periapsis ($0° < \theta < 180°$) y negativo cuando se acerca ($180° < \theta < 360°$)

4.4 Consecuencia 4: La energía específica puede expresarse en función del momento angular h, de la excentricidad e y el semieje mayor a.

La energía total mecánica por unidad de masa o **energía específica** ε es la suma de la energía cinética ($\frac{v^2}{2}$) y la potencial ($-\frac{\mu}{r}$) por unidad de masa y por tanto:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \tag{15}$$

La energía específica es constante por lo que será la misma en todos los puntos de la órbita y en particular en el periapsis ($\theta = 0^o$),

$$\varepsilon = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} \tag{16}$$

donde r_p y v_p son la posición y velocidad en el periapsis. En ese punto además $v_r = 0$ por lo que $v_p = v_\perp = \frac{h}{r_p}$ (ver figura 5) y con la expresión de r_p obtenida en (10) la energía queda

$$\boxed{\varepsilon} = \frac{\frac{h^2}{r_p}}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{\frac{h^2}{\frac{h^2/\mu}{1+e}}}{2} - \frac{\mu}{\frac{h^2/\mu}{1+e}} = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}\left(1-e^2\right)} \tag{17}$$

Por otra parte, si aplicamos (8) y (9) a esa expresión se obtiene

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}} \tag{18}$$

5 Ejemplo

En un sistema de referencia inercial centrado en la Tierra ($\mu = 398600\ km^3/s^2$) se tienen los vectores posición y velocidad

$$\overrightarrow{r} = (-8900, -1690, 5210)\ km$$
$$\overrightarrow{v} = (-6, -4.5, -1.5)\ km/s$$

Calcula
a) El momento angular, la excentricidad y el semieje mayor de la órbita.
b) La anomalía verdadera en ese instante.
c) El ángulo de vuelo y las velocidades radial y transversal en ese punto.
d) La distancia al periapsis y al apoapsis y la energía específica de la órbita

Solución:

a) En primer lugar calculamos el vector del momento angular $\overrightarrow{h}$ y su magnitud

$$\overrightarrow{h} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = (-8900, -1690, 5210) \wedge (-6, -4.5, -1.5) = (25980, -44610, 29910)$$
$$h = \|(25980, -44610, 29910)\| = 59662.6\ km^2/s^2$$

Con $\overrightarrow{h}$ y la expresión (2) podemos calcular el vector excentricidad y su magnitud:

$$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{C}}{\mu} = \frac{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{h}}{\mu} - \frac{\overrightarrow{r}}{r} = (0.3461, 0.514175, 0.466255)$$
$$e = \|\overrightarrow{e}\| = 0.7756$$

Como $e < 1$ la órbita es elíptica y por (8) y (9)

$$p = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu} \quad \to \quad a = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1-e^2} = 22412.9\ km$$

b) Para calcular la anomalía verdadera utilizamos la ecuación orbital (6)

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} \quad \to \quad \cos\theta = \frac{\frac{h^2}{\mu r} - 1}{e} = -0.187539$$

Para hallar θ debemos decidir si el cuerpo se está alejando ($\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v} > 0$) o acercando ($\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v} < 0$) al periapsis.

En este caso

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v} = 53190 > 0 \quad \to \quad \theta \in (0^{\circ}, 180^{\circ})$$

por lo que

$$\theta = \arccos(-0.187539) = 100.809^{\circ}.$$

c) El ángulo de vuelo γ se calcula con (14)

$$\tan\gamma = \frac{e \operatorname{sen}\theta}{1 + e\cos\theta} = 0.891514$$

y el signo de γ se decide por el valor de θ

$$\gamma = \arctan(0.891514) = \overbrace{+}^{\theta<180^{\circ}} 41.7174^{\circ}$$

Podemos comprobar que este valor coincide con el que resulta de aplicar la fórmula $\cos\gamma = \frac{h}{rv}$ que aparece en **Curtis**

La velocidad transversal $v_{\perp}$ también puede ser calculada de dos formas diferentes: mediante la expresión $v_{\perp} = \frac{h}{r}$ que aparece en **Curtis** o con la expresión (12)

$$v_{\perp} = \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\theta) = 5.70913\ km/s$$

De forma similar se puede hallar la velocidad radial v_r como indica **Curtis** con $v_r = v_{\perp}\tan\gamma$ o con la anomalía verdadera y la excentricidad mediante la igualdad (13):

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta = 5.08977\ km/s$$

d) La distancia al periapsis y al apoapsis se calculan con las expresiones (10) y (11) respectivamente

$$r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e} = 5029.46\ km$$
$$r_a = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1-e} = 39796.4\ km$$

mientras que la energía específica ε se puede calcular con la ecuación Vis-Viva ($\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$) o con las identidades (17) o (18)

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}\left(1-e^2\right) = -\frac{\mu}{2a} = -8.8922\ km^2/s^2.$$

6 Cierre

A lo largo de este artículo hemos visto como se obtiene la ecuación orbital en coordenadas polares definiendo la anomalía verdadera de una posición.

A partir de la ecuación orbital hemos deducido los tipos de órbitas keplerianas y hemos definido unas dimensiones geométricas comunes a todas las cónicas (semidistancia focal, semieje mayor, excentricidad, parámetro orbital, distancia al periapsis y al apoapsis.

También se han obtenido como consecuancia de la ecuación orbital nuevas expresiones de las velocidades transversal y radial, del ángulo de vuelo y de la energía específica

Referencias

[1] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[2] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.