Parámetros constantes de una órbita kepleriana

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta las constantes orbitales más importantes para el estudio del movimiento de satélites artificiales.

En cada una de las 4 secciones se presenta y justifica un parámetro que permanece constante en el movimiento orbital kepleriano. Se muestran también algunas de las consecuencias de su invariabilidad y algún ejemplo de su cálculo. Dentro de la presentación de estas constantes y sus consecuencias se definen parámetros importantes del movimiento orbital como la velocidad radial, la transversal, los Horizontes Local y Vertical así como el ángulo de vuelo.

Para poder entender este artículo necesitas tener claros algunos conceptos que pueden consultarse en la referencia:

- El momento angular de una masa m en un sistema de referencia inercial es: $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{r} \wedge m\overrightarrow{v}$
- La ecuación del movimiento relativo $\ddot{\overrightarrow{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\overrightarrow{r}$.
- $\overrightarrow{r} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = r\,\dot{r}$
- $\overrightarrow{A} \wedge \left(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{B} \cdot \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) - \overrightarrow{C} \cdot \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)$
- $\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}\right) = \left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{C}$

2 Objetivos

Una vez se haya leído con detenimiento este documento, el **lector será capaz de obtener** a partir de los vectores posición y velocidad de un cuerpo en un instante:

- El vector y la magnitud del momento angular de una órbita
- Las velocidades radial y transversal y el ángulo de vuelo de un cuerpo que orbita alrededor de otro
- El valor de la Energía mecánica específica de una órbita
- El vector de Laplace y el vector excentricidad de una órbita que permiten conocer la dirección de la línea de ápsides y la excentricidad orbital.

3 Conservación del momento angular de una órbita

Sabemos que el momento angular de un cuerpo m_2 respecto a otro m_1 es:

$$\overrightarrow{H_{2,1}} = \vec{r} \wedge m_2 \dot{\vec{r}} \tag{1}$$

donde $\vec{r}$ y $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ son la posición y la velocidad de m_2 respecto a m_1 respectivamente. Si dividimos (1) por m_2 y denotamos por $\vec{h} = \dfrac{\overrightarrow{H_{2,1}}}{m_2}$ obtenemos

$$\boxed{\vec{h} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}} \tag{2}$$

que es el **momento angular específico** (o por unidad de masa) siendo sus unidades km^2/s.

Derivando (2) respecto del tiempo obtenemos

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} + \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} \tag{3}$$

Por otra parte podemos aplicar la ecuación del movimiento relativo $\left(\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{\mu}{r^3}\vec{r}\right)$ a la igualdad anterior resultando

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{r} \wedge \left(-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right) = -\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \wedge \vec{r}) = \vec{0} \tag{4}$$

Por tanto el momento angular específico de una órbita, $\vec{h}$ es **constante**.

Consecuencia: Plano orbital

El vector $\vec{h} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$ es normal al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\dot{\vec{r}}$ y como es constante podemos asegurar que toda la trayectoria (órbita) de m_2 alrededor de m_1 permanece en un único plano que llamaremos **plano orbital** (ver figura 1).

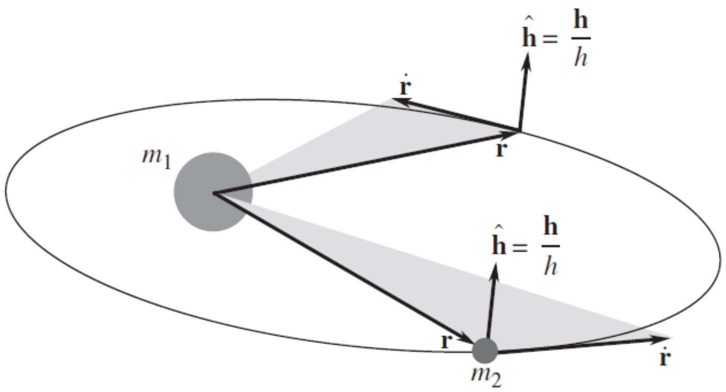

Figura 1: La trayectoria de m_2 alrededor de m_1 permanece en un plano cuyo vector normal está definido por $\vec{h}$

Este vector normal nos permite definir el **vector unitario normal** al plano orbital, $\vec{u_h} = \dfrac{\vec{h}}{h}$.

Consecuencia: Velocidad radial y velocidad transversal

Como la órbita de m_2 alrededor de m_1 está en un único plano podemos orientar el movimiento sobre esa la órbita (ver figura 2). El vector velocidad relativa $\dot{\overrightarrow{r}}$ puede descomponerse en dos componentes perpendiculares entre sí, $\overrightarrow{v_r} = v_r \overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{v_\perp} = v_\perp \overrightarrow{u_\perp}$ siguiendo la dirección radial hacia fuera desde m_1 y perpendicular a éste, respectivamente. Los vectores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\perp}$ son los vectores unitarios radial

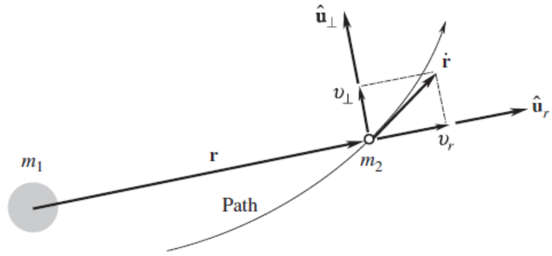

Figura 2: Componentes ($\vec{v}_r$ y $\vec{v}_\perp$) de la velocidad de m_2 vistas desde la parte superior de la órbita

Utilizando esa descomposición, podemos reescribir (2) como:

$$\overrightarrow{h} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = r\overrightarrow{u_r} \wedge (v_r\overrightarrow{u_r} + v_\perp \overrightarrow{u_\perp}) = rv_r\,(\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_r}) + rv_\perp\,(\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\perp}) = rv_\perp \overrightarrow{u_h}$$

y por tanto

$$\boxed{h = rv_\perp} \tag{5}$$

lo que permite asegurar que el momento angular depende solo de la componente transversal de la velocidad.

Consecuencia: Horizontes Local y Vertical y Ángulo de Vuelo

La dirección de la componente transversal de la velocidad $v_\perp$ nos permite definir lo que se conoce como **Horizonte Local** (HL) y la dirección de la componente radial v_r, el **Horizonte Vertical** (HV) (ver figura 3). El ángulo γ formado entre el vector velocidad $\overrightarrow{v}$ y el HL $(v_\perp)$ se conoce como **ángulo de vuelo**.

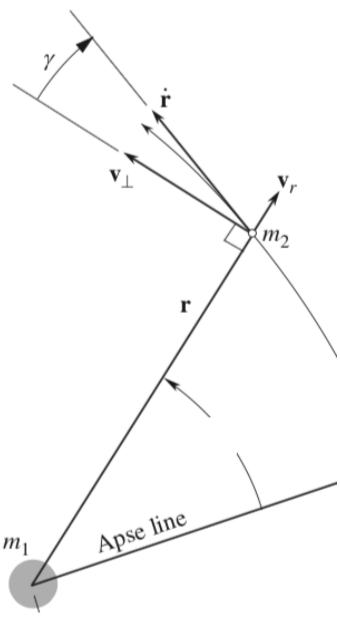

Figura 3: Horizontes Local (HL) Vertical (HV) y Ángulo de Vuelo (γ)

De esta misma figura se deduce que
$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} \tag{6}$$

y de la propia definición de $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$ tenemos que:

$$h = r\,v\,\sin(90^o - \gamma) \quad \rightarrow \quad \boxed{h = r\,v\,\cos\gamma} \tag{7}$$

Nota: Al despejar γ en esta igualdad podemos encontrar una ambigüedad en su signo. Para resolverla estudiamos el signo de $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v}$ de la siguiente forma:

Si $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v} > 0$ significa que $\overrightarrow{v}$ está por encima del $HL(v_\perp)$ y γ será positivo.

Por el contrario, si $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v} < 0$ significa que $\overrightarrow{v}$ está por debajo del $HL(v_\perp)$ y γ será negativo.

Ejemplo Considera un satélite cuya posición y velocidad en un instante son:

$$\overrightarrow{r} = (12756.5, 19134.7, 31891.2)\ km \quad \text{y} \quad \overrightarrow{v} = (7.9, 15.8, 0)\ km/s$$

a) Calcula el vector unitario normal que define el plano orbital y cuál es el momento angular en cualquier punto de la órbita

b) Calcula la componente transversal de la velocidad en ese instante

c) Halla también el ángulo de vuelo en ese mismo instante y la velocidad radial.

Solución:

a) Sabemos que $\overrightarrow{h}$ es un vector normal al plano orbital por lo que podemos aplicar la igualdad (2) resultando:

$$\overrightarrow{h} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = (-503881, 251940, 50388.6)$$

que una vez normalizado resulta:

$$\overrightarrow{u_h} = (-0.890871, 0.445435, 0.890879)$$

Para hallar el momento angular calculamos la magnitud de $\overrightarrow{h}$:

$$h = \|\overrightarrow{h}\| = 565605\ km^2/s$$

b) Para hallar la velocidad transversal podemos utilizar (5):

$$v_\perp = \frac{h}{r} = \frac{565605}{39318.1} = 14.3854\ km/s$$

c) Para hallar el ángulo de vuelo utilizaremos la expresión (7):

$$\gamma = \arccos\frac{h}{r\,v} = \arccos\frac{565605}{39318.1 \cdot 17.6649} = \pm 35.4773^o.$$

Para evitar la ambigüedad entre el valor positivo y el negativo evaluaremos el signo de $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v}$. Como en este caso $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v} > 0$ el ángulo de vuelo es positivo (está por encima del HL):

$$\gamma = 35.4773^o.$$

Finalmente la componente radial de la velocidad se puede deducir de (6):

$$v_r = v_\perp \tan\gamma = 14.3854 \cdot \tan 35.4773^{\circ} = 10.2524\ km/s.$$

4 Conservación de la velocidad areolar o Ley de las Áreas

Tal y como se muestra en la figura 4 el vector posición $\vec{r}$ barre una superficie dA durante un intervalo de tiempo dt.

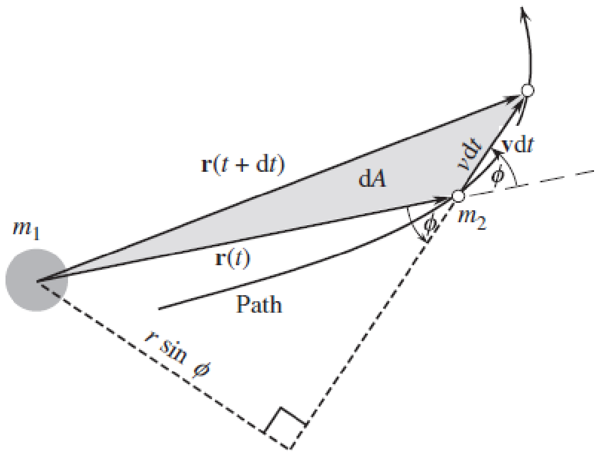

Figura 4: Área barrida por el vector $\vec{r}$ durante un intervalo de tiempo dt

Al ser un diferencial podemos considerar que la superficie dA es triangular por lo que

$$dA = \frac{1}{2} base \cdot altura = \frac{1}{2} vdt \cdot r\sin\phi = \frac{1}{2} r\,(v\sin\phi)\,dt = \frac{1}{2} r v_\perp dt = \frac{h}{2} dt$$

de donde se deduce que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = cte.$$

En consecuencia la variación de área por unidad de tiempo es siempre la misma. Esta propiedad es conocida como **2ª Ley de Kepler** (áreas iguales son barridas en tiempos iguales).

Ejemplo Considera la posición y velocidad del satélite del ejemplo anterior y calcula el error relativo que se comete al aproximar el área barrida durante un segundo por un triángulo.

Solución: El área real barrida durante un segundo se puede calcular con la expresión anterior:

$$dA = \frac{h}{2}\,dt = \frac{565605}{2} \cdot 1 = 282803\ km^2$$

La aproximación triangular es

$$aA = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{r \cdot (v \cdot 1)}{2} = \frac{39318.1 \cdot 17.6649 \cdot 1}{2} = 347276\ km^2$$

En consecuencia el error relativo será

$$\epsilon_r = \frac{|||aA - dA|||}{dA} = \frac{|||347276 - 282803|||}{282803} = 0.22798$$

5 Conservación de la Energía de una órbita

Partiendo de nuevo de la ecuación del movimiento $\left(\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right)$ y multiplicando escalarmente a ambos lados por $\dot{\vec{r}}$ obtenemos

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \rightarrow \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \tag{8}$$

Desarrollando primero un sumando y luego el otro

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mu}{r^3} r\,\dot{r} = \frac{\mu\,\dot{r}}{r^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

sustituimos en (8) resultando

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon(cte)} \tag{9}$$

El primer término $\frac{v^2}{2}$ es la energía cinética por unidad de masa y $-\frac{\mu}{r}$ es la energía potencial por unidad de masa del cuerpo m_2. La **energía total mecánica** de la órbita por unidad de masa o específica ε, es la suma de ambas, siendo sus unidades km^2/s^2.

De la ecuación (9) se deduce que la energía específica de una órbita permanece constante a lo largo de toda ella. Esta propiedad es conocida como **Ley de Conservación de la Energía** de una órbita o ecuación **Vis-Viva**.

Ejemplo:

Continuando con el ejemplo de la Sección (3)

Halla la energía mecánica específica de la órbita. (Considera que $\mu = 398600\ km^3/s^2$)

Solución: Utilizamos en este caso la igualdad (9) obteniendo:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{17.6649^2}{2} - \frac{398600}{39318.1} = 145.887 km^2/s^2$$

6 Conservación del vector de Laplace y la excentricidad

Consideremos otra vez la ecuación del movimiento $\left(\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right)$ y multipliquemos ambos términos vectorialmente por $\vec{h}$ obtenemos

$$\ddot{\vec{r}} \wedge \vec{h} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \wedge \vec{h} \tag{10}$$

Para el término de la izquierda desarrollamos

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{h}\right) = \ddot{\vec{r}} \wedge \vec{h} + \underbrace{\dot{\vec{r}} \wedge \frac{d\vec{h}}{dt}}_{0} \quad \rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} \wedge \vec{h} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{h}\right) \tag{11}$$

y para el de la derecha

$$\begin{aligned} \boxed{-\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r} \wedge \vec{h}\right)} &= -\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r} \wedge \left(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}\right)\right) = -\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r} \cdot \left(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}\right) - \dot{\vec{r}}\left(\vec{r} \cdot \vec{r}\right)\right) = \\ &= -\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r} \cdot (r \cdot \dot{r}) - \dot{\vec{r}} r^2\right) = -\frac{\mu}{r^2}\left(\vec{r}\dot{r} - \dot{\vec{r}}\, r\right) = \\ &\underbrace{=}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\vec{r}}{r}\right) = \frac{\mu}{r^2}\left(r\dot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{r}\right)} \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\vec{r}}{r}\right)} \end{aligned} \tag{12}$$

Sustituyendo en (10) los resultados de (11) y (12) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{h}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\vec{r}}{r}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{h} - \mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{0}.$$

El interior de la derivada anterior

$$\boxed{\vec{C} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{h} - \mu\frac{\vec{r}}{r}} \tag{13}$$

se llama **vector de Laplace**, $\vec{C}$ que es **constante**.

Consecuencia: Vector excentricidad y excentricidad orbital

Partiendo del vector de Laplace y multiplicando escalarmente por $\vec{h}$

$$\vec{C} \cdot \vec{h} = \left(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{h} - \mu\frac{\vec{r}}{r}\right) \cdot \vec{h} = \underbrace{\left(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{h}\right) \cdot \vec{h}}_{0} - \frac{\mu}{r}\left(\underbrace{\vec{r} \cdot \vec{h}}_{0}\right) = 0 \rightarrow \vec{C} \perp \vec{h}$$

por tanto el vector $\overrightarrow{C}$ está **contenido en el plano orbital**.

Llamamos **vector excentricidad** al vector

$$\boxed{\overrightarrow{e}} = \frac{\overrightarrow{C}}{\mu} = \boxed{\frac{\dot{\overrightarrow{r}} \wedge \overrightarrow{h}}{\mu} - \frac{\overrightarrow{r}}{r}} \tag{14}$$

que carece de dimensiones y a cuyo módulo se le llama **excentricidad** de la órbita.

Además a la línea definida por el vector excentricidad se le llama **línea de ápsides**.

Ejemplo:

Continuando con el ejemplo de las Secciones (3) y (5)

Halla la constante Vector de Laplace, el vector excentricidad y el valor de la excentricidad de esta órbita.

Solución: Utilizamos para el vector de Laplace la expresión (13):

$$\overrightarrow{C} = \dot{\overrightarrow{r}} \wedge \overrightarrow{h} - \mu\frac{\overrightarrow{r}}{r} = \left(666816, -592054, 9.62834 \cdot 10^6\right)$$

Dividiendo de μ obtenemos el vector excentricidad que nos indica la dirección de la línea de ápsides (perigeo):

$$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{C}}{\mu} = (1.6729, -1.48533, 24.1554)$$

que calculando su norma nos da la excentricidad de la órbita

$$e = \|\overrightarrow{e}\| = 24.2588.$$

7 Cierre

A lo largo de este artículo hemos visto como en el movimiento orbital permanecen constantes **el vector momento angular** $\overrightarrow{h}$ que define la dirección normal del plano orbital y que nos permite definir las velocidades radial y transversal y el ángulo de vuelo, **la velocidad aerolar**, **la energía mecánica específica** y **el vector de Laplace** $\overrightarrow{C}$ que nos permite definir el vector excentricidad, su magnitud y la dirección de la línea de ápsides.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.