El tiempo de vuelo en órbitas keplerianas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta la relación que existe entre el tiempo y la posición de un cuerpo que se encuentra orbitando alrededor de otro. También se muestran algunos casos de aplicación y se incluyen ejemplos de su estudio.

Recordemos que según [**Curtis**] **la ecuación orbital** de un satélite de masa m que órbita alrededor de un cuerpo central de masa M por atracción gravitatoria es[1]:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} \overset{(1)}{=} \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{1}$$

donde $h = \|\overrightarrow{h}\| = \|\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}\|$ es el momento angular que es constante, $\mu = G(M+m)$ es el parámetro gravitacional, $e = \|\overrightarrow{C}/\mu\|$ es la excentricidad de la órbita obtenida con el vector de Laplace que también es constante y θ es la anomalía verdadera (ángulo entre $\overrightarrow{e}$ y $\overrightarrow{r}$).

Esta ecuación orbital origina trayectorias que representan curvas cónicas (circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas) según los valores de e. Al resolver la ecuación del movimiento y obtener la ecuación orbital se ha eliminado la dependencia del tiempo, sin embargo es necesario poder localizar un cuerpo en su órbita en cualquier instante, (ver figura 1). En este documento vamos a conocer la ecuación del tiempo para las órbitas cerradas (circulares y elípticas).

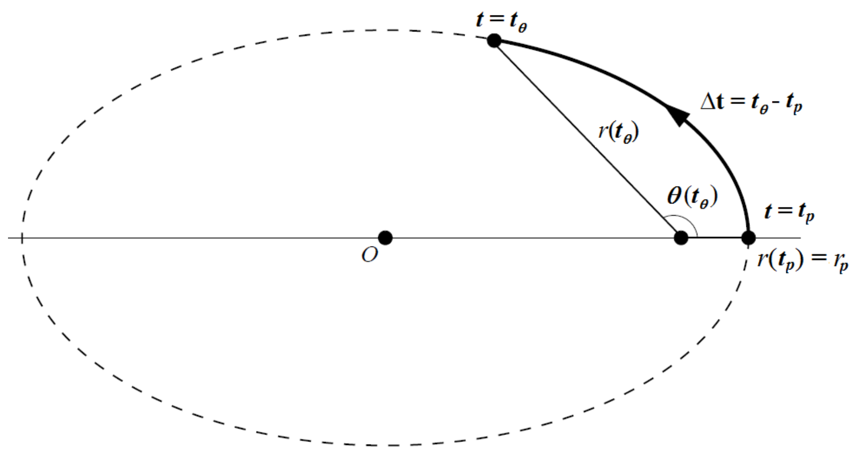

Figura 1: Es necesario relacionar cada posición con un instante de tiempo

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a recordar algunas constantes:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante si la comparamos con la del Sol o con la de cualquier planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante

$$\mu = G(M+m) = GM$$

siendo para la Tierra $\mu_T = 398\,600\ km^3/s^2$ y para Venus, $\mu_V = 324\,859\ km^3/s^2$.

[1] La segunda forma de la ecuación orbital se obtiene con:

$$2a = r_a + r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e\cos 180^\circ} + \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e\cos 0^\circ} = \frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e}\right) = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{(1-e^2)} \rightarrow \frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2).$$

- Ni la Tierra ni Venus son esféricos pero cuando, por aproximación se considere que sí lo son, se utilizan como radios los ecuatoriales

$$R_T = 6378\ km, \qquad R_V = 6052\ km.$$

Además de esas constantes debes conocer algunas relaciones entre parámetros orbitales que se verifican en cualquier órbita kepleriana y que pueden consultarse en la bibliografía:

- El momento angular de cualquier órbita verifica: $h = r\, v_\perp$.
- La energía específica para una órbita elíptica cumple: $\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$.
- El ángulo de vuelo γ viene determinado por la igualdad: $\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$.
- La velocidad radial y la transversal en cualquier posición y órbita son:

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \operatorname{sen}\theta \qquad v_\perp = \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\theta).$$

- El periodo de una órbita cerrada es: $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Partiendo de una anomalía verdadera, posición en la órbita, obtener la anomalías excéntrica y media y con ésta el tiempo transcurrido desde que pasó por el periapsis.
- Conociendo el tiempo desde que pasó por el periapsis, hallar las anomalías media y excéntrica para con ésta última calcular la anomalía verdadera (posición) en ese instante.
- En el proceso de este último objetivo aprenderás a resolver la ecuación de Kepler utilizando el método de Newton.

3 Tiempo de paso por el periapsis, (t_p).

El momento angular verifica que $h = r\, v_\perp$ y a su vez la velocidad tranversal cumple que $v_\perp = r\,\dot\theta$ y por tanto la anomalía verdadera de un cuerpo θ está relacionada con el tiempo t mediante la expresión

$$h = r^2\dot\theta \tag{2}$$

que se puede escribir como

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{h}{\left(\frac{h^2/\mu}{1+e\cos\theta}\right)^2}$$

que separando variables resulta

$$\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta = \frac{\mu^2}{r^3}dt$$

Considerando t_p el **tiempo en el instante de paso por el periapsis**[2] ($\theta = 0°$) e integrando ambos lados se tiene

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t-t_p) = \int_0^\theta \frac{d\sigma}{(1+e\cos\sigma)^2}d\sigma. \tag{3}$$

Esta integral tiene diferentes expresiones según el tipo de cónica que sea.

Ejemplo

Resuelve la ecuación del tiempo para el caso de órbitas circulares ($e = 0$).

Solución

Si $e = 0$ la integral (3) queda reducida a

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t-t_p) = \int_0^\theta d\sigma$$

y por tanto

$$t - t_p = \frac{h^3}{\mu^2}\theta \overset{r=\frac{h^2}{\mu}}{=} \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}\theta \overset{T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}}{=} \frac{T}{2\pi}\theta.$$

4 Ecuación de tiempos para órbitas elípticas, ($0 < e < 1$)

Para el caso de órbita elíptica es necesario introducir algunos conceptos nuevos.

4.1 Movimiento medio, n.

La velocidad angular del vector $\overrightarrow{r}$ en una órbita elíptica no es constante aunque cada periodo T son barridos $2\pi\, rad$. Por tanto la proporción $\dfrac{2\pi}{T}$ es la velocidad angular media que se conoce como **movimiento medio** y se representa como n, así

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{4}$$

[2] Con frecuencia se toma $t_p = 0$ como tiempo inicial

4.2 Anomalía media, M.

La **anomalía media**, M, es el ángulo (en rad) recorrido por un cuerpo ficticio moviéndose sobre la elipse con una velocidad angular constante, n. Por tanto

$$M = n\,(t - t_p) = \frac{2\pi}{T}\,(t - t_p) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t - t_p). \tag{5}$$

Notas:

Para $\theta > 180°$ serán negativas E y M por lo que tambien será $t - t_p < 0$. Para obtener el verdadero tiempo transcurrido desde su paso por el periapsis deberemos sumar un periodo T: $(t - t_p) + T$.

En una órbita circular $M = \theta$ en cualquier posición pero en una elíptica solo coinciden en el periapsis y apoapsis.

4.3 Anomalía excéntrica, E.

Hay otra anomalía que resulta conveniente conocer. Se trata de la **anomalía excéntrica**, E que es el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del cuerpo central sobre la circunferencia principal, y el eje de la elipse (ver figura 2).

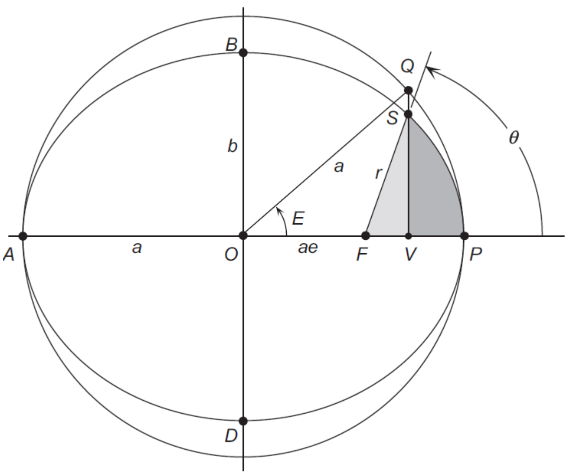

Figura 2: La anomalía excéntrica E es el ángulo entre el eje y la proyección del planeta sobre la circunferencia principal.

De la figura se deduce que

$$a\cos E = a\,e + r\cos\theta \;\rightarrow\; a\cos E = a\,e + \frac{a\left(1 - e^2\right)\cos\theta}{1 + e\cos\theta} \;\rightarrow\; \cos E = \frac{e + \cos\theta}{1 + e\cos\theta} \tag{6}$$

Esta expresión permite encontrar $\cos E$ cuando $\cos\theta$ es conocido y viceversa pero al intentar hallar E o θ aparecen dos posibles valores, lo que nos da una ambigüedad. Para evitar esa ambigüedad se utiliza otra expresión.

Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría a (6) se deduce que

$$\operatorname{sen} E = \frac{\sqrt{1 - e^2}\,\operatorname{sen}\theta}{1 + e\cos\theta} \tag{7}$$

Agrupando (6) y (7) y las fórmulas del ángulo mitad se llega a

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}. \tag{8}$$

En este caso para cada valor de E entre 0 y 2π hay un único valor de θ.

4.4 Ecuación de Kepler: Relación entre M y E.

Utilizando la ley de las áreas (ver **Curtis**) se puede ver que la anomalía media y la excéntrica están relacionadas mediante la llamada **Ecuación de Kepler**:

$$M = E - e\,\mathrm{sen}\,E \tag{9}$$

Esta ecuación tiene muchas aplicaciones en Mecánica orbital pero se agrupan en dos casos:

Problema 1. Dada una órbita elíptica $(h,\, e)$ determinar el tiempo transcurrido desde que un cuerpo paso por el periapsis, $t - t_p$ para una posición determinada θ. Ver el esquema siguiente:

$$\boxed{\theta} \xrightarrow{(8)} \boxed{E} \xrightarrow{(9)} \boxed{M} \xrightarrow{(5)} \boxed{t - t_p}$$

Una aplicación de este caso es la determinación del tiempo en el cual un satélite terrestre pasa de la zona iluminada por el Sol a la sombra proyectada por la Tierra y viceversa. Los puntos donde esto ocurre son obtenidos por la geometría de la órbita pero necesitamos conocer ese periodo de sombra para que el satélite funcione solo con sus baterías.

Problema 2. Dada una órbita elíptica $(h,\, e)$ y un tiempo desde el paso por el periapsis, $t - t_p$, determinar la anomalía verdadera θ que indica su posición. Ver el esquema siguiente:

$$\boxed{t - t_p} \xrightarrow{(5)} \boxed{M} \xrightarrow{(9)} \boxed{E} \xrightarrow{(8)} \boxed{\theta}$$

Una aplicación de este problema es conocer la posición precisa de un satélite en un instante para comunicarse con él y la realización de aproximaciones a una estación espacial en órbita.

Método de Newton

Estos dos casos parecen similares pero en realidad son bastante diferentes sobre todo en como se resuelve la ecuación de Kepler (9). En el primer caso, la solución M se obtiene directamente del valor de E mientras que en el segundo, es más complicado porque no se puede despejar E en función de M siendo necesario utilizar un método numérico de aproximaciones sucesivas. El método más conocido por su simplicidad es el **Método de Newton** aunque hay otros muchos.

El método de Newton consiste en resolver la ecuación

$$F(E) = E - e\,\mathrm{sen}\,E - M = 0$$

con aproximaciones generadas por la fórmula (10) considerando como punto inicial $x_0 = M$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \tag{10}$$

repitiendo hasta que $|F(x_k)|$ esté tan cerca de 0 como se desee o hasta que $|x_{k+1} - x_k|$ sea lo bastante pequeño.

5 Ejemplos

5.1 Ejemplo 1

Una órbita geocéntrica elíptica tiene un radio de perigeo de $10000\,km$ y uno de apogeo de $19000\,km$. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar desde el perigeo a una anomalía verdadera de $150°$? ¿Cuál es la anomalía verdadera a las dos horas y media de pasar por el perigeo?

Solución:

La primera cuestión se resuelve directamente (Problema 1). Conociendo los radios del perigeo y apogeo r_p y r_a se puede obtener la excentricidad mediante

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{19000 - 10000}{19000 + 10000} = 0.310345$$

Conocida la excentricidad e y la anomalía verdadera θ la expresión (8) permite encontrar la anomalía excéntrica E

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-0.310345}{1+310345}}\tan\frac{150°}{2}\right) = 2.434\,rad.$$

Aplicando la ecuación de Kepler (9) se obtiene directamente

$$M = E - e\,\mathrm{sen}\,E = 2.434 - 0.310345\,\mathrm{sen}(2.434) = 2.232\,rad.$$

Para aplicar la igualdad (5) y obtener el tiempo desde su paso por el perigeo $t - t_p$ es necesario hallar el semieje mayor a, que se puede deducir mediante

$$r_p = a(1-e) \quad \rightarrow \quad a = \frac{r_p}{1-e} = \frac{10000}{1-0.310345} = 14500\,km.$$

y por tanto

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t - t_p) \quad \rightarrow \quad \boxed{t - t_p} = M\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2.232\sqrt{\frac{14500^3}{398600}} = \boxed{6173\,s}.$$

Para la segunda pregunta se aplica también la ecuación (5)

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t - t_p) = M = \sqrt{\frac{398600}{14500^3}}\,(9000) = 3.254\,rad$$

Ahora para obtener la anomalía excéntrica E, se resuelve la ecuación de Kepler (9), pero esta vez hay que utilizar un método iterativo. Definimos

$$F(E) = E - e\,\mathrm{sen}\,E - M = E - 0.310345\,\mathrm{sen}\,E$$

y se aplica el método de Newton partiendo de $x_0 = 3.254$

$$3.254,\ 3.228,\ 3.228 \quad \rightarrow \quad E = 3.228\, rad.$$

Al repetir el tercer decimal se detiene el proceso y se utiliza la expresión (8) para hallar la anomalía verdadera θ

$$tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}\right)$$

$$= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+0.310345}{1-0.310345}}\tan\frac{3.254}{2}\right) = -176^{\circ}$$

$$\boxed{\theta} = \boxed{184^{\circ}}.$$

5.2 Ejemplo 2

Los elementos de la sonda Magallanes orbitando alrededor de Venus son $a = 10424.1\, km$ y $e = 0.39433$. La exploración comenzó cuando la anomalía verdadera era $\theta = 280^{\circ}$. ¿Cuáles eran su altitud, su ángulo de vuelo y el tiempo desde el paso por el perigeo en ese instante?

Solución: Partiendo de la ecuación orbital se puede obtener el radio en el instante indicado y por tanto su altitud

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} = \frac{10424.1\left(1-0.39431^2\right)}{1+0.39431\cos(280^{\circ})} = 8239\, km$$

$$\boxed{alt} = r - R_V = 8239 - 6052 = \boxed{2187\, km}.$$

El ángulo de vuelo viene dado por el cociente entre la velocidad radial y la transversal

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_{\perp}} = \frac{\frac{\mu}{h}e\,\mathrm{sen}\,\theta}{\frac{\mu}{h}\left(1+e\cos\theta\right)} = \frac{e\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+e\cos\theta} = \frac{0.39431\,\mathrm{sen}(280^{\circ})}{1+0.39431\cos 280^{\circ}} = -0.363 \rightarrow \boxed{\gamma = -19.97^{\circ}}.$$

Para hallar el tiempo se necesita las anomalías excéntrica E y media M. La primera de ellas se deduce de la igualdad (8)

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad E = 2\arctan\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\arctan\sqrt{\frac{1-0.39431}{1+0.39431}}\tan\frac{280^{\circ}}{2} = -1.0104\, rad$$

y la segunda mediante la ecuación de Kepler (9)

$$M = E - e\,\mathrm{sen}\,E = -1.0104 - 0.39431\,\mathrm{sen}(-1.0104) = -0.6764\, rad$$

Finalmente aplicamos (5) y obtenemos el tiempo desde su paso por el perigeo

$$t - t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_V}} \cdot M = \sqrt{\frac{10424.1^3}{324859}} \cdot (-0.6764) = -1263\, s.$$

Pero como debe ser después de su paso por el periapsis

$$\boxed{t - t_p} = T + (t - t_p) \xrightarrow{T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu_V}}=11732.5} = 11732.5 - 1263 = \boxed{10469.5\, s}.$$

5.3 Ejemplo 3

Un satélite terrestre orbita con un semieje mayor de $25512\, km$ y con una altura sobre la superficie en el perigeo de $3189\, km$. ¿Cuál es la anomalía verdadera 4 horas después de su paso por el perigeo?

Solución:

Sabemos que si $alt_p = 3189\, km$, como $R_V = 6502\, km$ el radio del perigeo es

$$r_p = R_T + 3189 = 9567\, km$$

pero como $r_p = a(1-e)$

$$r_p = a(1-e) \quad \rightarrow \quad e = 1 - \frac{r_p}{a} = 1 - \frac{9567}{25512} = 0.625.$$

Por otra parte conociendo el semieje a y el tiempo desde su paso por el perigeo $t - t_p = 4\, h$ se puede hallar la anomalía media M con la expresión (5),

$$M = n\,(t - t_p) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot (4 \cdot 3600) = \sqrt{\frac{398600}{25512^3}} \cdot 14400 = 2.231\, rad.$$

Por lo que la ecuación de Kepler (9) queda

$$2.231 = E - 0.625\, \mathrm{sen}\, E$$

Para resolverla aplicamos el método de Newton empezando por $x_0 = 2.231$ a la función

$$F(E) = E - 0.625 \sin E - 2.231$$

Con 3 iteraciones el valor con tres decimales se repite y entonces se para el proceso

$$2.231,\ 2.588,\ 2.569,\ 2.569 \quad \rightarrow \quad E = 2.569\, rad.$$

Una vez conocida la anomalía excéntrica E se puede calcular la anomalía verdadera θ con la expresión (8)

$$tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta} = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\frac{E}{2}\right)$$

$$= 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+0.625}{1-0.625}} \tan\frac{2.569}{2}\right) = \boxed{164^\circ}.$$

6 Cierre

Este artículo ha mostrado como se relacionan el tiempo orbital y la posición en la órbita.

Para establecer esa relación se han definido el movimiento medio y las anomalías media y excéntrica. También se ha mostrado como la ecuación de Kepler permite obtener cualquiera de esas anomalías a partir de la otra, habiéndose recordado para ello el método de Newton.

Como consecuencia de esas definiciones y expresiones se ha visto como resolver el problema de obtención del tiempo orbital a partir de la anomalía verdadera y viceversa.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] Prussing, John E. and Conway, Bruce A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] Chobotov, Vladimir A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.