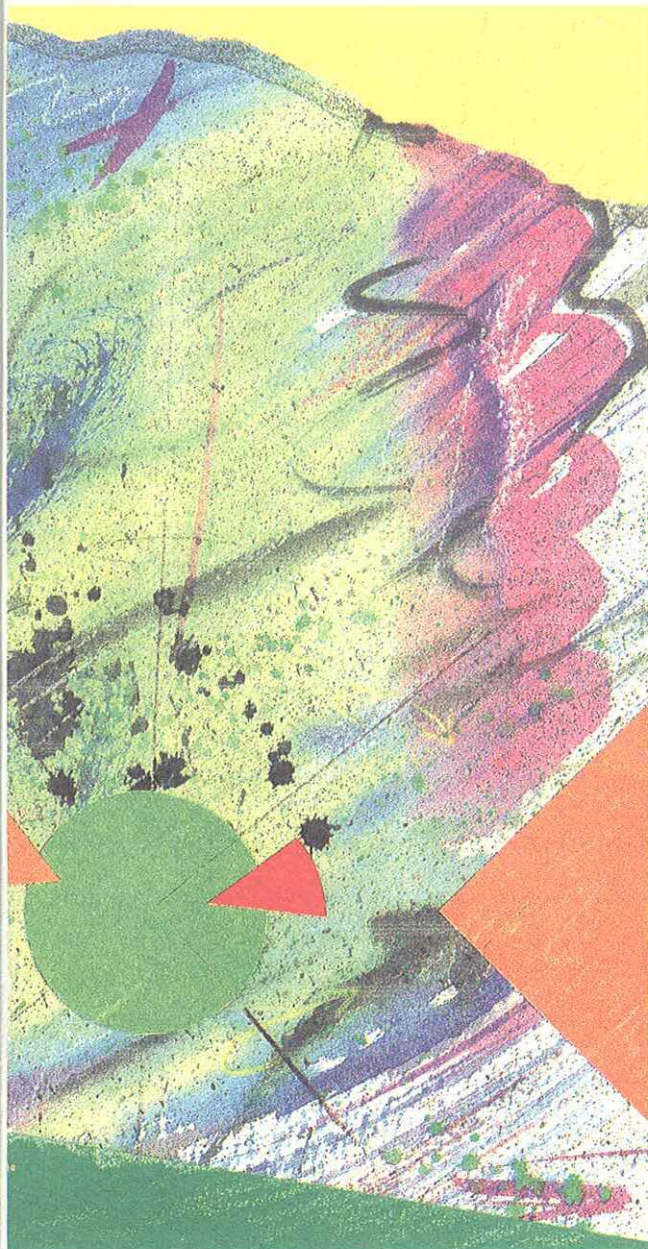


epsilon



Los problemas aritméticos de estructura aditiva de dos operaciones

Inmaculada García Romero, Manuel Aguilar Villagrán y Jaime Martínez Montero

Fraciones y juegos en la enseñanza obligatoria
Manuel Alcalá

Aproximación intuitiva a algunos tipos de convergencia estocástica

J.C. Cortés y A. Debón

Un modelo estocástico de propagación de incendios forestales

L.M. García Raffi, E.A. Sánchez Pérez, O. Valero, S. Pueblas y J.V. Sánchez Pérez

Multiplicaciones con cifras desconocidas: problemas para practicar y comprender el algoritmo estándar de la multiplicación

Jesús Gallardo Romero y José Luis González Mari

El Vídeo en el aula de matemáticas (2ª parte)

Ana Bueno Jiménez, Mª Carmen Ruiz Abad, Cristóbal Calvente Iglesias, Mª Carmen Vicente González y Cristóbal Naranjo Berrocal

El papel de la hoja de cálculo en la representación de funciones

Francisco Ruiz López y María Peñas Troyano

Intuición espacial

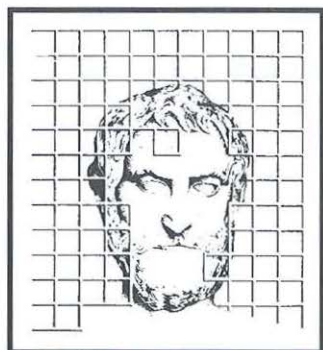
Félix Martínez de la Rosa y Carlos Vinuesa Sánchez

El valor de un teorema

Francisco José Santonja Gómez

epsiban

REVISTA DE LA SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACION MATEMATICA "THALES"



consejo editorial

Editor Principal

F. Javier Pérez

Sección Investigación en Educación Matemática

Francisco Ruiz López

Experiencias Docentes

Manuel Alcalá Hernández

Pedro Nieto Nieto

Ana Rodríguez Chamizo

Sixto Romero Sánchez

Francisco José Santonja Gómez

Recursos

Agustín Carrillo de Albornoz

José Muñoz Santonja

Francisco José Santonja Gómez

Historia

F. Javier Pérez Fernández

Matemáticas y...

F. Javier Pérez Fernández

Sixto Romero Sánchez

Francisco Ruiz López

Inmaculada Serrano Gómez

Edita

Sociedad Andaluza de Educación
Matemática «Thales»

Centro Documentación «Thales»

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Imprime

Grafitrés, S.L.

Cristóbal Colón, 12 - Utrera (Sevilla)

Depósito Legal

SE-421-1984

I.S.S.N.

1131-9321

Período

3º Cuatrimestre 2002

Suscripción

ESPAÑA: 36,00 EUROS

PAÍSES DEL EURO: 55,00 EUROS

RESTO PAÍSES: 55 \$ USA

(3 NÚMEROS AL AÑO)

APROXIMACIÓN INTUITIVA A ALGUNOS TIPOS DE CONVERGENCIA ESTOCÁSTICA

J.C. Cortés

Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad Politécnica de Valencia

A. Debón

Departamento de Estadística e Investigación Operativa.
Universidad Politécnica de Valencia

RESUMEN. En este trabajo estudiamos cuatro modos clásicos de convergencia estocástica: en probabilidad, casi segura, en media cuadrática y en distribución. El artículo está basado en la interpretación gráfica a través del software estadístico SPLUS.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de convergencia es fundamental tanto en el Cálculo Estocástico como en el Cálculo Determinista. Nuestro interés se centra en el contexto aleatorio en el que existen varios tipos de convergencia, entre las más importantes tenemos las siguientes:

convergencia $\left\{ \begin{array}{l} \text{en media } p\text{-ésima} \xrightarrow{p=2} \text{ en media cuadrática (c.m.c.)} \\ \text{casi segura (c.c.s.) o en probabilidad 1 ó fuerte} \\ \text{en probabilidad (c.p.)} \\ \text{en distribución (c.d.) o en ley o débil} \end{array} \right.$

Puesto que, cada vez con más frecuencia los modelos matemáticos tienden a incorporar aleatoriedad en sus planteamientos, pues las respuestas que ofrecen los modelos deterministas resultan en muchos casos insatisfactorias, debido a que la

realidad de un fenómeno físico, químico, social, económico,... suele estar envuelta de cierta incertidumbre que no puede describirse de forma tan rígida como exige un modelo matemático determinista. De hecho si repasamos modelos de tipo deterministas, en la mayor parte de las ocasiones observaremos que en su planteamiento suelen contener hipótesis del tipo: “*supongamos la condición ideal ...*”.

La creciente tendencia actual de que numerosas ramas tradicionales de tipo determinista empiezan a considerar la incertidumbre introduciendo variables aleatorias en sus modelos, tales como ecuaciones diferenciales estocásticas, augura que antes o después, el concepto de convergencia estocástica deba ser incorporado con más intensidad, profundidad y premura no sólo en nuestras clases de Estadística y Probabilidad, sino también en los primeros cursos de Cálculo.

A nivel docente, la ilustración e interpretación intuitiva de los conceptos matemáticos más abstractos resulta atractivo y de gran interés, a la par que cada vez más accesible debido al creciente auge de la informática y el desarrollo de software estadístico y matemático de cada vez más fácil utilización.

El objetivo de este trabajo es dar una interpretación intuitiva del significado de los diferentes tipos de convergencia estocástica mediante simulaciones a las que hacemos corresponder un gráfico, a través del asistente estadístico SPLUS, apoyándonos para ello en un ejemplo clásico, los sucesivos lanzamientos (un total de n) de una moneda

legal, cuya distribución es bien conocida: $B(n; \frac{1}{2})$ (binomial de parámetros n y

$$p = \frac{1}{2}).$$

El trabajo está organizado como sigue. En el segundo apartado recordaremos las definiciones de los distintos tipos de convergencia que analizaremos, así como algunos resultados que luego requeriremos para completar el estudio. Los siguientes cuatro apartados los dedicaremos a estudiar e interpretar intuitivamente las cuatro clases de convergencia estocástica antes apuntadas: c.p., c.c.s., c.m.c. y c.d., respectivamente. Debido al nivel de abstracción, nos esforzaremos principalmente en los tres primeros tipos, dado que, la convergencia en distribución, es un tema que, a nivel docente se estudia con mayor detalle a través del teorema central del límite.

2. PRELIMINARES

En este apartado recordaremos las principales definiciones y resultados que necesitaremos para desarrollar la anunciada interpretación gráfica de los distintos tipos de convergencia. Estos resultados forman el cuerpo básico de cualquier curso de Teoría de la Probabilidad, por lo que para su estudio puede consultarse cualquier texto clásico como por ejemplo, (Tucker, 1973) o (Gmurman, 1983).

Empecemos introduciendo las definiciones de convergencia estocástica de una sucesión de vs.as. (variables aleatorias) $\{X_n\}$ hacia una variable aleatoria límite X

(supondremos que $\{X_n\}$ y X están definidas sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{B}, P))

$$c.p.: X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\left\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\}\right] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1)$$

$$c.c.s.: X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} X \Leftrightarrow P\left[\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right] = 1$$

$$c.m.c.: X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.c.} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[(X_n - X)^2\right] = 0 \quad (2)$$

$$c.d.: X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(X_n) = F(X) \quad (3)$$

En la definición de c.m.c., E denota el operador media o esperanza, y en la de c.d., F_n y F , denotan las funciones de distribución de las v.s.as. X_n y X , respectivamente.

Es bien conocida la relación existente entre estos cuatro tipos de convergencia:

$$\left. \begin{array}{l} c.c.s. \\ c.m.c. \end{array} \right\} \Rightarrow c.p. \Rightarrow c.d.$$

Por otra parte, puede establecerse la siguiente equivalencia para la c.c.s.:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\bigcup_{j \geq n} \left\{\omega \in \Omega : |X_j(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\}\right] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (4)$$

En el siguiente apartado aplicaremos la desigualdad generalizada de Tchebycheff, la cual establece que dada una función continua (medible) y no negativa de una variable aleatoria X , digamos $h(X)$, de modo que $E[(h(X))^i] < +\infty$, se cumple

$$P[h(X) > y] \leq \frac{E[(h(X))^i]}{y^i} \quad (5)$$

La importancia de este resultado reside en que proporciona una cota superior de probabilidad tipo cola para cualquier variable aleatoria X , cualquiera que sea su distribución.

Otra inecuación probabilística que utilizaremos es la desigualdad de Boole, que asegura que para toda sucesión de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$ se cumple

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i] \quad (6)$$

Por otra parte, recordemos que si X es una variable aleatoria binomial de parámetros n y p , $X \sim Bi(n; p)$, entonces su media y varianza valen, respectivamente

$$\mu = E[X] = n \cdot p \quad ; \quad \sigma^2 = Var[X] = n \cdot p \cdot q \quad (7)$$

Además sus momentos centrales de órdenes 3 y 4 valen, respectivamente,

$$\mu_3[X] = E[(X - \mu)^3] = npq \cdot (q - p) \quad ; \quad \mu_4[X] = npq(p^2 + 3npq - 4pq + q^2) \quad (8)$$

siendo $q = 1 - p$ con $0 < p < 1$.

Posteriormente, también necesitaremos aplicar la relación existente entre los momentos de orden k ordinarios (centrales), α_k^X (μ_k^X), de una v.a. X , y los momentos de orden k ordinarios (centrales), α_k^Y (μ_k^Y), de una v.a. $Y = aX$:

$$\alpha_k^Y = a^k \cdot \alpha_k^X \quad , \quad \mu_k^Y = a^k \cdot \mu_k^X \quad (9)$$

Acabamos este apartado, recordando un resultado técnico: una cota inferior para la suma parcial n -ésima de los inversos de los cuadrados de los naturales, que utilizaremos en el estudio de la c.c.s., y que cuya prueba puede encontrarse en (Shkarsky, p. 53)

$$\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \cdot \frac{\pi^2}{6} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \quad (10)$$

3. INTERPRETACIÓN INTUITIVA DE LA CONVERGENCIA EN PROBABILIDAD

Como adelantamos en la introducción, llegaremos a la interpretación intuitiva de la c.p. a través de un ejemplo clásico, el lanzamiento de una moneda. Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda legal n veces cuyo espacio muestral Ω está formado por 2^n vectores de dimensión n cuyas componentes son caras o cruces.

A cada uno de estos vectores le asociamos la v.a.: $C_n : \Omega \rightarrow [0,1]$ definida por: C_n es la proporción de caras que han aparecido en los n lanzamientos. En la tabla 1, recogemos una simulación realizada a través de SPLUS de este experimento cuyo código de generación es

```
Cn<-0
n.caras<-0
for (i in 1:100){ muestra<-rbinom(1,i,0.5)
Cn[i]<-muestra/i
n.caras[i]<-muestra}
cbind(n.caras,Cn)
```

ED

TABLA 1. SIMULACIÓN DEL LANZAMIENTO DE UNA MONEDA LEGAL

n (nº lanzamientos)	B_n (nº caras)	C_n (proporc. caras)
10	6	0.6
20	3	0.15
40	21	0.525
60	28	0.467
80	36	0.45
100	43	0.43

Calculemos ahora la distribución de la v.a. C_n . Para ello observamos que cada vez que lanzamos la moneda legal podemos asociarle una v.a. Bernouilli $A_j \sim Ber\left(p = \frac{1}{2}\right)$

$$A_j = \begin{cases} 1 & \text{si sale cara} \\ 0 & \text{si sale cruz} \end{cases} \quad \text{con} \quad P[A_j = 1] = P[A_j = 0] = \frac{1}{2}$$

y como la moneda es legal, las variables aleatorias $\{A_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{B}$ son independientes, por lo que la variable aleatoria

$$B_n = \sum_{k=1}^n A_k$$

que nos da el número total de caras obtenidas tras n lanzamientos sigue una ley binomial, $B_n \sim Bi\left(n; \frac{1}{2}\right)$. Ahora bien, como nuestra v.a. de interés es C_n , la cual indica la proporción de caras en n lanzamientos se tiene

$$C_n = \frac{1}{n} \cdot B_n \quad \text{con } B_n \sim Bi\left(n; \frac{1}{2}\right) \quad (11)$$

Veamos que $C_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \frac{1}{2}$, para ello aplicaremos la desigualdad de Tchebycheff, por lo que necesitaremos previamente calcular la media y la varianza de C_n

$$E[C_n] = E\left[\frac{1}{n} B_n\right] = \frac{1}{n} E[B_n] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (12)$$

$$Var[C_n] = Var\left[\frac{1}{n} B_n\right] = \frac{1}{n^2} Var[B_n] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4n} < \infty$$

donde hemos utilizado (7)-(9). Ahora aplicando (5) para $X = C_n$, $h(C_n) = |C_n - E[C_n]| \geq 0$, $i = 2$ e $y = \varepsilon$, se tiene

$$0 \leq P\left[\left|C_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (13)$$

que según (1), prueba que la sucesión de frecuencias relativas del suceso C_n de aparición de cara en n lanzamientos converge en probabilidad hacia el valor teórico $p = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto aplicando (13), dado $\varepsilon > 0$ pequeño y una probabilidad pequeña ρ , basta tomar $n > n_0 = \left\lceil \frac{1}{4\rho\varepsilon^2} \right\rceil + 1$, siendo $\lceil \cdot \rceil$ la parte entera, para asegurar

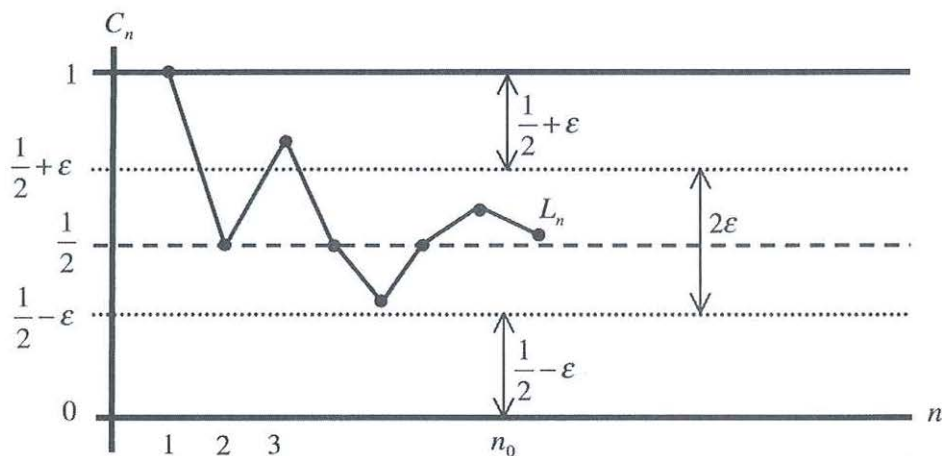
$$P\left[\left|C_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right] < \rho \quad \forall n \geq n_0 \quad (14)$$

o en otras palabras, la masa de probabilidad que hay fuera del intervalo $\left[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right]$ es menor que ρ , para todo ε y ρ , siempre que $n \geq n_0$.

Gráficamente esto significa que si convenimos en representar los resultados obtenidos en los sucesivos lanzamientos (n, C_n) y los unimos mediante segmentos rectos, obtendremos una línea poligonal L_n que cumplirá que fijados $\varepsilon > 0$ y $0 < \rho < 1$, y fijada una abscisa $n > n_0$ donde dibujamos un intervalo vertical centrado en el punto $\frac{1}{2}$ y de amplitud 2ε , entonces la probabilidad de que la poligonal L_n no pase por dentro de ese intervalo es menor a ρ (véase figura 1).

ED

FIGURA 1. INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA c.p.



Así por ejemplo, para $\varepsilon = 0.25$ y $\rho = 0.2$, según (14) basta tomar

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{4 \cdot 0.2^2 \cdot 0.25} \right\rceil + 1 = 26$$

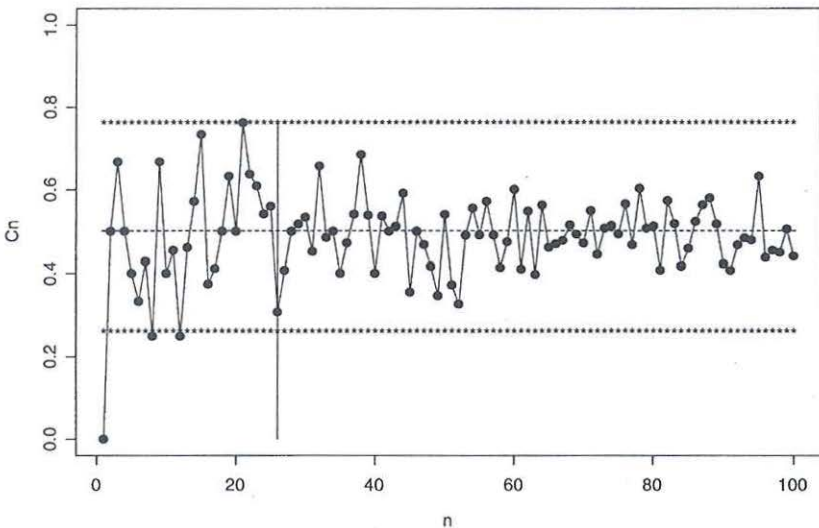
para garantizar que se cumpla

$$P \left[\left| C_n - \frac{1}{2} \right| > 0.25 \right] < 0.2 \quad \forall n > 26$$

La interpretación intuitiva de este ejemplo puede verse en la figura 2, la cual ha sido realizada con SPLUS utilizando el siguiente código

```
# CONVERGENCIA EN PROBABILIDAD
#n.max es tamaño muestral máximo que vamos a considerar
c.p<-function(n.max,epsilon.max,ro.max)
{
for (i in 1:n.max){ muestra<-rbinom(1,i,0.5)
Cn[i]<-muestra/i}
Cn
n<-seq(from=1,to=n.max)
y<-rep(0.5,n.max)
epsilon<-epsilon.max
#CÁLCULO DE ncero para epsilon =epsilon.max y ro.max tenemos n=26
ro<-ro.max
ncero <- 1/(4*(ro^2)*epsilon)+1
plot(n, Cn, ylim=c(0,1))
lines(n, Cn,col=4)
points(n,y, pch="-")
points(n,y-rep(epsilon,n.max), pch="*")
points(n,y+rep(epsilon,n.max), pch="*")
lines(rep(ncero,n.max), Cn,col=8)
lines(rep(ncero,100), Cn,col=8)
}
win.graph()
c.p(100,0.25,0.2)
```

FIGURA 2. INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA c.p. CON SPLUS



Antes de pasar a estudiar la c.c.s. es interesante subrayar que la definición (1) de c.p. significa que la diferencia entre X_n y X es verosímilmente pequeña con gran probabilidad para n suficientemente grande, pero no significa que la diferencia $X_n(\omega) - X(\omega)$ sea pequeña para $\omega \in \Omega$, incluso siendo n muy grande, como puede verse mediante el siguiente ejemplo:

$$X_n = \begin{cases} n & \text{si } P[n] = \frac{1}{n} \\ -1 & \text{si } P[-1] = 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

entonces, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} -1$, pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - (-1)| > \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

sin embargo, la diferencia $X_n(\omega) - X(\omega) = X_n(\omega) + 1$ puede valer $n + 1$, que se hace mayor a medida que n aumenta.

4. INTERPRETACIÓN INTUITIVA DE LA CONVERGENCIA CASI SEGURA

Veamos ahora que $C_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \frac{1}{2}$. Para aliviar la notación, dado n llamemos

$$A_j(\varepsilon) = \left\{ \omega \in \Omega : \left| C_j(\omega) - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right\}, \quad j \geq n$$

y según (4), consideremos $\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j(\varepsilon)$, entonces por la desigualdad de Boole (6) se tiene

$$P\left[\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i(\varepsilon) \right] \leq \sum_{i=n}^{\infty} P[A_i(\varepsilon)] \quad (15)$$

Ahora acotaremos la serie numérica de la derecha aplicando la desigualdad de Tchebycheff generalizada para $X = C_j$, $h(X) = |C_j - E[C_j]| \geq 0$, $i = 4$, $y = \varepsilon$ y obtenemos

$$P[A_j(\varepsilon)] \leq \frac{3j-2}{(2\varepsilon)^4 j^3} \quad (16)$$

donde hemos utilizado $E[C_j] = \frac{1}{2}$ según se vio en (12) y que el momento centrado de orden 4 de C_j vale, aplicando (8) para $p = \frac{1}{2}$,

$$\mu_4[C_j] = \mu_4\left[\frac{1}{j}B_j\right] = \frac{1}{j^4} \mu_4[B_j] = \frac{3j-2}{16j^3}$$

Sustituyendo (16) en (15) se llega a

$$0 \leq P\left[\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j(\varepsilon)\right] \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{3j-2}{(2\varepsilon)^4 j^3} \leq \frac{3}{(2\varepsilon)^4} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^2} \quad (17)$$

y tomando en (17) límites cuando $n \rightarrow \infty$, se deduce aplicando el criterio del emparedado que para cada $\varepsilon > 0$ arbitrario

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j(\varepsilon)\right] = 0$$

lo que demuestra que $C_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \frac{1}{2}$. Obsérvese que para ello hemos utilizado que la suma infinita en (17) es el resto de orden $n - 1$ de una serie numérica de términos positivos que es convergente, cuyo término general es $a_k = \frac{3}{(2\varepsilon)^4 k^2}$.

Todo ello nos asegura que dados $\varepsilon > 0$ y $0 < \rho < 1$, podemos encontrar n_1 de modo que

$$P\left[\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j(\varepsilon)\right] < \rho \quad \forall n \geq n_1 \quad (18)$$

Para determinar el valor n_1 a partir del cual se satisface (18), utilizamos que como

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

entonces, por (10) se deduce

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1} \right) \right] \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

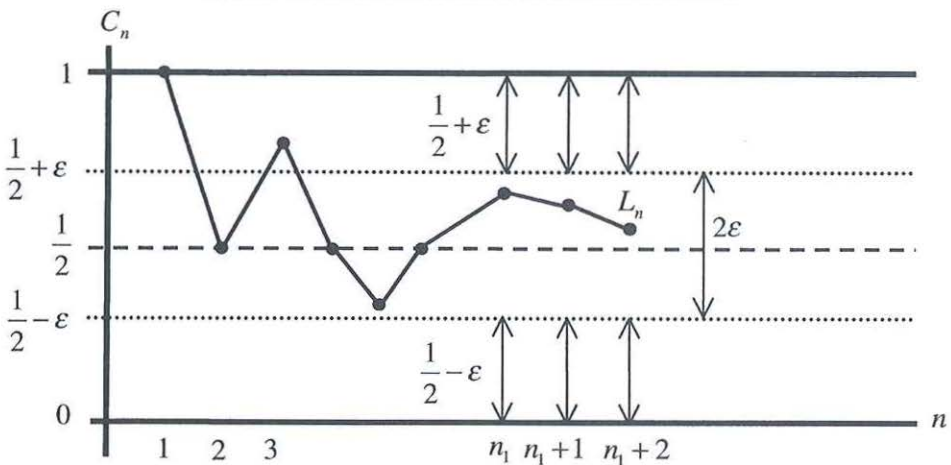
que aplicado en (17), para $\varepsilon > 0$ y $0 < \rho < 1$, previamente dados, basta tomar n_1 el primer entero que satisfaga

$$\frac{3}{(2\varepsilon)^4} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1} \right) \right] \cdot \frac{\pi^2}{6} < \rho$$

el cual en la práctica puede determinarse fácilmente de forma numérica.

Apoyándonos ahora en la misma idea que para la c.p., y en la definición basada en la expresión (4) como una unión de conjuntos, podemos interpretar gráficamente este tipo de convergencia como sigue: fijados $\varepsilon > 0$ y una probabilidad $0 < \rho < 1$, para cualquier $n > n_1$, la probabilidad de que, con la notación anterior, la curva poligonal L_n salga del intervalo de longitud 2ε en los puntos de abscisas $n_1 + 1, n_2 + 2, n_1 + 3, \dots$ es inferior a ρ (véase figura 3).

FIGURA 3. INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA c.c.s.



Obsérvese que si en (16) hubiéramos aplicado, al igual que hicimos para la c.p., la desigualdad de Tchebycheff para $i = 2$ hubiéramos obtenido

$$P[A_j(\varepsilon)] \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

y (17) hubiera quedado

$$0 \leq P\left[\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j(\varepsilon)\right] \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{n}$$

con lo cual no hubiéramos podido aplicar el mismo argumento para demostrar la c.c.s., ya que, la serie armónica es divergente.

5. INTERPRETACIÓN INTUITIVA DE LA CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA

Ahora veremos que $C_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.c.} \frac{1}{2}$. Para ello aplicaremos directamente la definición

(2), donde cabe subrayar que la convergencia estocástica en m.c. se diferencia de la c.p. y de la c.c.s., en que está dada en términos de la convergencia determinista de una sucesión de números: la del error cuadrático medio, ya que, la media de una sucesión de vs.as. es una sucesión de números (reales o complejos),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\left(C_n - \frac{1}{2}\right)^2\right] &= \frac{1}{4} + \lim_{n \rightarrow \infty} E[C_n^2] - E[C_n] \\ &= \left\{T^{ma} \text{ König : } Var[C_n^2] = E[C_n^2] - E^2[C_n]\right\} \\ &= \frac{1}{4} + \lim_{n \rightarrow \infty} Var[C_n^2] + E^2[C_n] - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} = 0 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (12). En consecuencia,

$$C_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.c.} \frac{1}{2}$$

Para dar la interpretación intuitiva de la c.m.c., nos apoyaremos en la descomposición siguiente

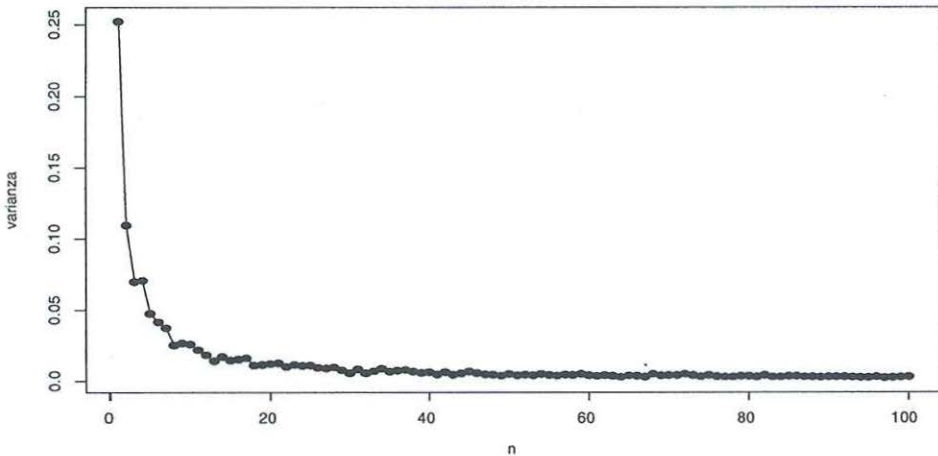
$$\underbrace{E\left[\left(C_n - \frac{1}{2}\right)^2\right]}_{\text{error cuadrático medio}} = \underbrace{\text{Var}[C_n]}_{\text{varianza}} + \underbrace{\left(E[C_n] - \frac{1}{2}\right)^2}_{\text{sesgo}=0} = \text{Var}[C_n]$$

donde hemos utilizado (12) para asegurar que el, en este caso, sesgo es idénticamente nulo. Por tanto, si la sucesión de números reales no negativos $\text{Var}[C_n]$ converge a cero, se tendrá que $C_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.c.} \frac{1}{2}$. El programa SPLUS nos permite representar en la figura 4 la varianza de esta sucesión de vs.as., y visualizar que tiende a cero.

ED

```
#CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRATICA
#VARIANZA
Cn2<-rep(0, 100*100)
dim(Cn2)<-c(100,100)
i<-0
for (n in 1:100){ muestra2<-rbinom(100, n,0.5)
  i<-i+1
  Cn2[,i]<-muestra2/n}
varianza<-apply(Cn2, 2, var)
n<-seq(1:100)
par(mfrow=c(1,1))
win.graph()
plot(tam,varianza)
lines(tam,varianza)
```

FIGURA 4. INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA c.m.c. CON SPLUS



6. INTERPRETACIÓN INTUITIVA DE LA CONVERGENCIA EN DISTRIBUCIÓN

La convergencia en distribución supone que la función de distribución de la secuencia de variables aleatorias se aproxima a la función de distribución de la variable aleatoria límite a medida que aumenta el tamaño muestral.

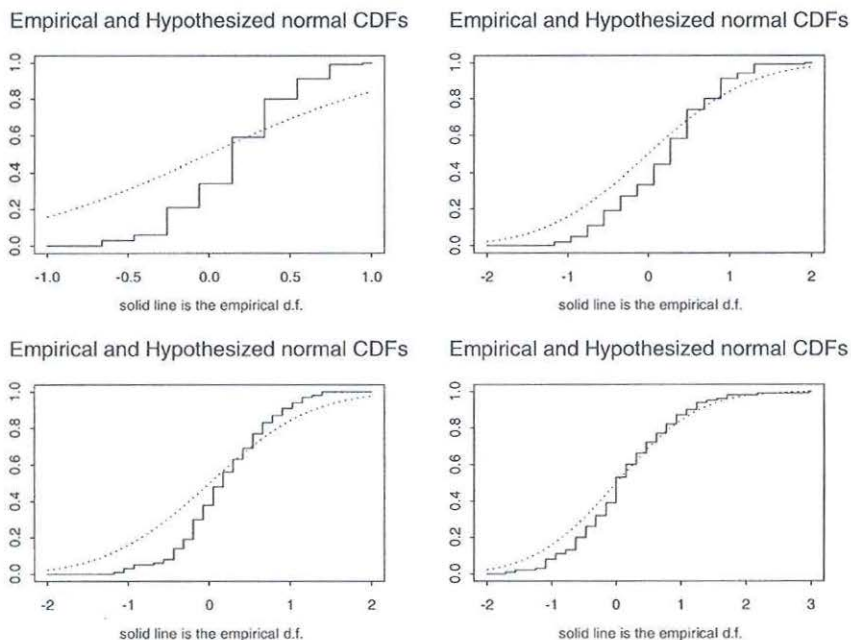
En nuestro ejemplo, supone pues que las funciones de distribución de las C_n están cada vez más cerca de la función de distribución de la proporción de caras si la proporción verdadera es $1/2$, que según el teorema central del límite es aproximadamente:

$$C_n \sim N\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{4n}}\right) \Rightarrow z_n = \frac{C_n - 1/2}{\sqrt{1/4n}} \sim N(0,1).$$

Con el código siguiente hemos calculado las 100 observaciones para los tamaños muestrales de 1 a 100, pero mostramos gráficamente las funciones de distribución empíricas de las z_z correspondientes a los tamaños muestrales 10, 40, 80, 100 comparadas con la normal tipificada que le correspondería y a la que deben aproximarse cada vez más.

```
#CONVERGENCIA EN DISTRIBUCION
win.graph()
par(mfrow=c(2,2))
z<-(Cn2[,10]-mean(Cn2[,1]))/sqrt(var(Cn2[,1]))
cdf.compare(z, distribution="normal")
z<-(Cn2[,40]-mean(Cn2[,20]))/sqrt(var(Cn2[,20]))
cdf.compare(z, distribution="normal")
z<-(Cn2[,80]-mean(Cn2[,30]))/sqrt(var(Cn2[,30]))
cdf.compare(z, distribution="normal")
z<-(Cn2[,100]-mean(Cn2[,50]))/sqrt(var(Cn2[,50]))
cdf.compare(z, distribution="normal")
```


FIGURA 5. INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA c.d. CON SPLUS



ED

7. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado los distintos tipos de convergencia estocástica que suelen explicarse en un curso de Teoría de la Probabilidad, enfatizando nuestro enfoque hacia la interpretación intuitiva de los mismos mediante SPLUS, ya que, son conceptos muy abstractos, sobre todo la c.p. y la c.c.s.

En este sentido, nos parece fundamental, siempre que sea posible, apelar a la intuición, antes de entrar en la justificación rigurosa de los distintos resultados para lograr una mejor asimilación de los resultados que pretendamos desarrollar en el aula. Por ejemplo, la demostración de la relación de jerarquía entre los distintos tipos de convergencia estocástica dada en la introducción, puede ser justificada en parte por los siguientes hechos notables deducidos inmediatamente desde las correspondientes definiciones: dada una sucesión de v.s.as. la c.d. necesita únicamente del conocimiento de la distribución univariante, la c.m.c. y la c.p. necesitan únicamente de las distribuciones bivariantes, mientras que la c.c.s. requiere del conocimiento de todas las distribuciones multivariantes, tal y como se deduce de (4).

BIBLIOGRAFÍA

- GMURMAN, V. E. (1983). *Teoría de las Probabilidades y Estadística*, 1ª edición, Moscú, Ed. Mir.
- SHAKARSKY, D.O., CHENTZOV, N.N., YAGLOM, I.M. (1993). *The URSS Olympiad Problem Book*, 1ª edición, New York, Ed. Dover.
- TUCKER, H.G. (1973). *Introducción a la Teoría Matemática de las Probabilidades y la Estadística*, 1ª edición, Barcelona, Ed. Vicens Vives.