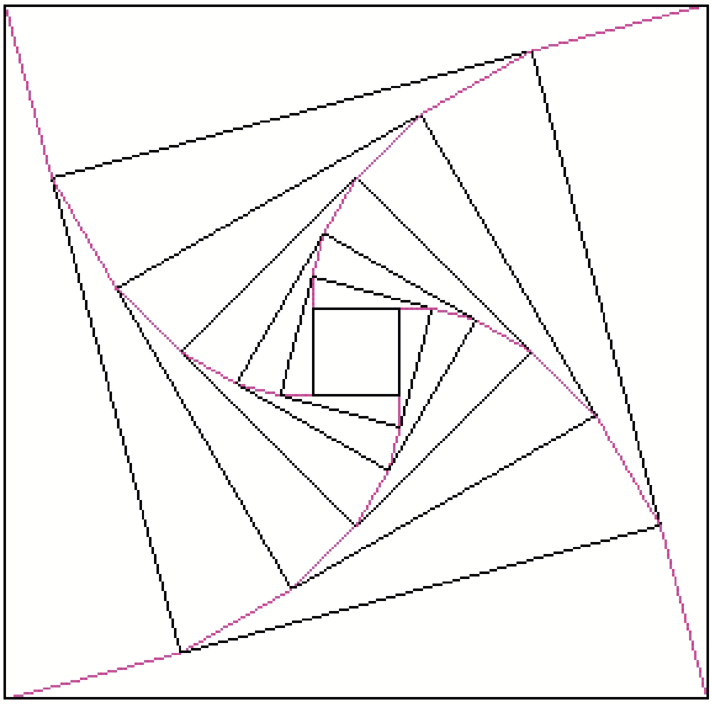
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 73
JUNIO DE 2006

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es
Página web: www.ucm.es/info/secdealg/puigadam
Nueva página web en preparación (en servicio parcial):
htttp://www.sociedadpuigadam.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 73 (Junio 2006)

Sobre una particularización del método Monte-Carlo de la altura media en el Cálculo Integral

J.C. Cortés
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
jccortes@mat.upv.es

G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

Abstract

In this article we study a interesting particularization of a method that belongs to Monte-Carlo procedures in order to evaluate definide integrals. Several illustrative examples are included.

Introducción

En los trabajos anteriores [1]-[3] se estudiaron tres métodos tipo Monte-Carlo (M.C.) para calcular de forma aproximada la integral definida

$$I = \int_a^b f(x)dx . \qquad \textbf{(1)}$$

El primer método, denominado M.C. geométrico, está basado en la interpretación geométrica de la integral (1) como el área bajo una curva junto con la interpretación frecuencialista de la probabilidad.

El segundo método, denominado M.C. de la altura media, está basado en la representación de (1) a través de sumas tipo Riemann y en las propiedades de la media muestral como buen estimador de la media poblacional. Como se verá más adelante, el método que estudiaremos en este trabajo está fundamentado en la aplicación del M.C. de la altura media a una representación integral adecuada de (1).

El tercer método, denominado M.C. basado en funciones de densidad, tiene cierta similitud con el que estudiaremos en este trabajo en el sentido de que está basado en una representación apropiada de (1) que requiere la introducción de una función de densidad.

El objetivo de este breve trabajo es enriquecer las aportaciones de los anteriores, estudiando una particularización interesante de [2], aunque las ideas pueden extenderse a los métodos dados en [1] y en [3]. Los fundamentos estadísticos que se requieren en el desarrollo que sigue pueden encontrarse en [1]-[3].

1 Particularizando el método Monte-Carlo de la altura media

El método se basa en aproximar (1) mediante

$$\breve{I}(N) = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - g(x_i)) + \int_a^b g(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

donde $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ son N valores independientes (obtenidos vía simulación) de una variable aleatoria (v.a.) X uniforme en $[a,b]$: $X \propto Un([a,b])$ y $g(x)$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

C.1. $g(x) \cong f(x) \quad , \quad \forall x \in [a,b]$.

C.2. $\int_a^b g(x)dx$ es computable analíticamente.

Es decir, la propuesta del método está fundamentada en sustituir una función $f(x)$, la cual no se sabe integrar, por otra función $g(x)$ que la aproxima bastante bien sobre el intervalo de integración (condición C.1.) y cuya integral sobre dicho intervalo sí es calculable (condición C.2.).

Aunque la expresión (2) nos pueda parecer artificial, en realidad se trata de una particularización del M.C. de la altura media aplicado a primera integral (ya que la segunda, sí sabemos calcularla según C.2.) del miembro derecho de la siguiente representación de la integral (1):

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_a^b g(x)dx . \quad \textbf{(3)}$$

Desde el punto de vista estadístico el método funciona porque el estimador utilizado:

$$\breve{I} = (b-a)(f(X) - g(X)) + \int_a^b g(x)dx \quad , \quad X \propto \text{Un}([a,b]) \quad \textbf{(4)}$$

tiene la siguiente propiedad fundamental

$$\begin{aligned} E[\breve{I}] &= (b-a)E[f(X) - g(X)] + \int_a^b g(x)dx \\ &= (b-a)\int_a^b (f(x) - g(x))\frac{1}{b-a}dx + \int_a^b g(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx = I \end{aligned}$$

i.e., la media del estimador $\breve{I}$ dado por (4) es precisamente la integral cuyo valor deseamos calcular. En consecuencia como la media muestral es un buen estimador de la media, la expresión (2), aproximará bien a (1).

Además, obsérvese que la varianza del estimador es

$$\text{Var}[\breve{I}] = (b-a)^2 \text{Var}[f(X) - g(X)]$$

y si se exige la condición C.1., se tendrá la siguiente propiedad deseable:

$$\text{Var}[f(X) - g(X)] \cong 0 \Rightarrow \text{Var}[\breve{I}] \cong 0$$

2 Aplicación al cálculo de integrales definidas

En este apartado se desarrollarán varios ejemplos con objeto de ilustrar cómo se lleva a la práctica el método descrito.

Ejemplo 1. Es bien sabido que la siguiente integral no es calculable aplicando la regla de Barrow al no conocerse una primitiva del integrando

$$I_1 = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Para construir la aproximación de I_1 a través del M.C. estudiado, tomaremos como aproximación $g(x)$ de $f(x)=\exp(-x^2/2)$ el desarrollo de Taylor de orden cuatro

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \cong 1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8} = g(x),$$

cuya integral sí sabemos evaluar:

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{103}{120},$$

por tanto, aplicando (2) podemos tomar como estimación

$$\breve{I}_1(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{e^{-\frac{x_i^2}{2}} - \left(1-\frac{x_i^2}{2}+\frac{x_i^4}{8}\right)\right\} + \frac{103}{120},\ \{x_i\}_{i=1}^{N} \in X \propto \mathrm{Un}\left([0,1]\right) \text{ indep.}$$

en la tabla 1 tomamos $N=10$ y obtenemos

$$\breve{I}_1(10) = \frac{-0.05424126821}{10} + \frac{103}{120} = 0.8529092065$$

este valor puede compararse con el que obtiene Derive® al aproximar I_1 por el método determinista de los trapecios: $I_1 \cong 0.8556243918$.

Del mismo modo que hicimos en [1]-[2], podemos programar con Derive® el cálculo de esta integral (y fácilmente generalizar el proceso) para cualquier N. A continuación damos la rutina básica particularizada para $N=1000$. Obsérvese que las líneas 4 y 5 pretenden mejorar el resultado promediando las aproximaciones finales:

```
#1:G(x):=TAYLOR(ê^(-x^2/2),x,0,4)
#2:Y(n):=ê^(-0.5(ABS(RANDOM_VECTOR(1,1))n/n)^2)-
G(RANDOM_VECTOR(1,1))n/n
#3:(1/1000)*SUM(Y(n),n,1,1000)+INT(G(x),x,0,1)
#4:Z(m):=((1/1000)*SUM(Y(n),n,1,1000)+INT(G(x),x,0,1)*
m)/m
#5:SUM(Z(m)/10,m,1,10)
```

que proporciona la aproximación: 0.8502267137 .

Simulación	r_i	$v_i = \exp(-x_i^2/2) - (1 - x_i^2/2 + x_i^4/8)$
1	0.5744827687	-0.00071899224
2	0.9085190132	-0.01060008712
3	0.8353277490	-0.00650118301
4	0.7978474231	-0.00497200270
5	0.9243058653	-0.01171451458
6	0.9700232673	-0.01549266878
7	0.2206409413	- 2.389117408·10^(-6)
8	0.6458383624	-0.00143617860
9	0.7176009900	-0.00267075471
10	0.4321013710	-0.00013249736
		$\sum_{i=1}^{10} v_i = -0.05424126821$

Tabla 1. Cálculos basados en la simulación para el ejemplo 1.

Ejemplo 2. Aproximemos ahora la integral

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

cuyo valor exacto sí conocemos: $I_2 = 0.5\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \cong 1.147$. Como aproximación $g(x)$ de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ tomaremos el desarrollo de Taylor de orden dos

$$\sqrt{1+x^2} \cong 1 + \frac{1}{2}x^2 = g(x) \quad , \quad |x| < 1,$$

cuya integral es:

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{7}{6},$$

como antes, por (2) la estimación del método es

$$\breve{I}_2(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\sqrt{1+x_i^2} - \left(1+\frac{x_i^2}{2}\right)\right\} + \frac{7}{6} \quad , \quad \{x_i\}_{i=1}^{N} \in X \propto \mathrm{Un}([0,1]) \text{ indep.}$$

Ahora la aproximación la realizamos con Derive® obteniéndose

$$\breve{I}_2(1000) = 1.160095501$$

a partir de la siguiente rutina:

```
#1:G(x):=TAYLOR(SQRT(1+x^2),x,0,2)
#2:Y(n):=sqrt(1+(ABS(RANDOM_VECTOR(1,1))n/n)^2)-
G(RANDOM_VECTOR(1,1))n/n
#3:(1/1000)*SUM(Y(n),n,1,1000)+INT(G(x),x,0,1)
#4:Z(m):=((1/1000)*SUM(Y(n),n,1,1000)+INT(G(x),x,0,1)*
m)/m
#5:SUM(Z(m)/10,m,1,10)
```

El resultado se mejora aumentando el orden de la aproximación de Taylor, aunque el tiempo de cálculo es notablemente superior.

Bibliografía

[1] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo geométrico en el Cálculo Integral*. Bol. Puig Adam nº 66 (2004), 63-73.

[2] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo de la altura media en el Cálculo Integral en varias dimensiones*. Bol. Puig Adam nº 69 (2005), 69-81.

[3] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo basado en funciones de densidad*. Bol. Puig Adam nº 72 (2006), 39-53.