Resumen

El objetivo de esta tesis es estudiar las propiedades ergódicas (acotación en potencias, ergodicidad media y ergodicidad media uniforme) de operadores definidos en varios espacios de funciones. En un espacio Hausdorff localmente convexo E, un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ es llamado acotado en potencias si el conjunto de sus iteradas es equicontinuo. Las medias de Cesàro de T son

$$T_{[n]} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} T^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

El operador T se dice ergódico en media si la sucesión $(T_{[n]})_n$ converge puntualmente y se dice uniformemente ergódico en media si la sucesión converge uniformemente en conjuntos acotados.

En el Capítulo 1 se estudia el operador de multiplicación cuando está definido sobre espacios ponderados de funciones continuas y sobre sus límites inductivos y proyectivos. Trabajamos sobre un espacio topológico Hausdorff, normal y localmente compacto X. Dada una función continua φ, el operador de multiplicacion se define como $M_\varphi : f \mapsto \varphi f$.

Una función continua v se llama peso si es estrictamente positiva. Los espacios (de Banach) ponderados de funciones continuas son

$$C_v := C_v(X) = \{f \in C(X) \,:\, \|f\|_v := \sup_{x \in X} v(x)|f(x)| < \infty\},$$

$$C_v^0 := C_v^0(X) = \{f \in C(X) \,:\, vf \text{ se anula en infinito}\},$$

con la norma $\|\cdot\|_v$.

Mostramos que la acotación en potencias del operador de multiplicación en estos espacios es equivalente a que φ esté acotado por 1. En la Sección 1.2 vemos que esto es, sin embargo, sólo una condición necesaria para la ergodicidad media. Para C_v^0, añadir la condición de que la antiimagen de

1 por el símbolo sea un abierto es suficiente para tener ergodicidad media. Esto no es suficiente para C_v, pero incluir la condición de que el símbolo esté alejado de 1 da ergodicidad media e incluso da ergodicidad en media uniforme en los dos espacios.

En las Secciones 1.3 y 1.4 se centra la atención en límites indutivos y proyectivos de los espacios de la Sección 1.2. Si $V = (v_n)_n$ es una familia decreciente de pesos, entonces los limites inductivos ponderados de funciones continuas son $VC = \mathrm{ind}_n C_{v_n}$ y $V_0C = \mathrm{ind}_n C^0_{v_n}$. Si $A = (a_n)_n$ es una familia creciente de pesos, los límites proyectivos ponderados de funciones continuas son $CA = \mathrm{proj}_n C_{a_n}$ y $CA_0 = \mathrm{proj}_n C^0_{a_n}$. Las propiedades ergódicas son caracterizadas en función de la familia de pesos y de la llamada familia de Nachbin $\overline{V}$ asociada a V o a A. El comportamiento es diferente para los límites de los C_{v_n} (resp. C_{a_n}) del de los límites de los $C^0_{v_n}$ (resp. $C^0_{a_n}$).

En la Sección 1.5 se determinan completamente el espectro y el espectro de Waelbroeck del operador de multiplicación. En la última Sección 1.6 se compara la topología del conjunto de multiplicadores entre límites proyectivos con la inducida por la topología de operadores de convergencia uniforme en acotados.

El Capítulo 2 se centra en estudiar espacios ponderados de sucesiones y sus límites inductivos y proyectivos. Una sucesión $v = (v(i))_i \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se llama peso si es estrictamente positiva. Los espacios de Banach ponderados de sucesiones considerados son $\ell_p(v)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $c_0(v)$.

Dada una matriz de Köthe $A = (a_n)_n$ (i.e. a_n es un peso y $a_n(i) \leq a_{n+1}(i)$ para todo $i, n \in \mathbb{N}$), el espacio escalonado de orden $1 \leq p \leq \infty$ se define como

$$\lambda_p(A) := \operatorname*{proj}_{n\in\mathbb{N}} \ell_p(a_n) \quad \text{y} \quad \lambda_0(A) = \operatorname*{proj}_{n\in\mathbb{N}} c_0(a_n).$$

El espacio co-escalonado de orden $1 \leq p \leq \infty$ se define, para una familia decreciente de pesos $V = (v_n)_n$, como

$$\kappa_p(A) := \operatorname*{ind}_{n\in\mathbb{N}} \ell_p(v_n) \quad \text{y} \quad \kappa_0(A) := \operatorname*{ind}_{n\in\mathbb{N}} c_0(v_n).$$

En las Secciones 2.2 y 2.3 se estudian las propiedades ergódicas y espectrales del operador de multiplicación. Los casos $p = \infty$ y $p = 0$ son casos particulares de C_v y C^0_v y de sus límites y los resultados se deducen del Capítulo 1. En el caso $1 \leq p < \infty$, los resultados coinciden con los de $p = 0$.

En la Sección 2.4 se caracteriza cuándo el operador de multiplicación es acotado o compacto, de manera similar a la continuidad. En la Sección

2.5, como en la Sección 1.6, la topología del conjunto de multiplicadores entre espacios escalonados se compara con la inducida por la topología de operadores de convergencia uniforme en acotados. También se estudia la topología del conjunto de operadores acotados. En la última Sección 2.6, los resultados de las secciones anteriores se aplican a los espacios de series de potencias, como casos particulares de los espacios escalonados.

El Capítulo 3 trata el operador de composición dado por una aplicación holomorfa del disco unidad abierto complejo en sí mismo, considerado entre diferentes espacios de Banach de funciones holomorfas. Si $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es holomorfa, el operador de composición es $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$.

En la Sección 3.2 se dan condiciones necesarias y suficientes para las propiedades ergódicas del operador de composición definido en un espacio de Banach de funciones holomorfas general asumiendo una o varias propiedades dadas.

Los resultados de la Sección 3.2 se aplican en la Sección 3.3 a espacios clásicos de funciones holomorfas, en particular, espacios ponderados de Bergman de tipo infinito H_v y H_v^0, espacios de Bloch $\mathcal{B}_p$ y $\mathcal{B}_p^0$, espacios de Bergman A^p y espacios de Hardy H^p. Primero se prueba que C_φ es acotado en potencias precisamente cuando φ tiene un punto fijo en el disco unidad. También se muestra que si φ es un automorfismo periódico del disco, entonces C_φ es uniformemente ergódico en media y que si es un automorfismo no periódico, entonces C_φ es ergódico en media pero no uniformemente ergódico en media. En H_v^0, $\mathcal{B}_p^0$, A^p y H^p la ergodicidad media es equivalente a que φ tenga un punto fijo y si además φ no es un automorfismo, entonces la ergodicidad media es equivalente a que las iteradas del operador converjan débilmente. En H_v y $\mathcal{B}_p$ la ergodicidad media es equivalente a la ergodicidad en media uniforme. Si φ no es un automorfismo y tiene un punto fijo $z_0 \in \mathbb{D}$, entonces, en todos los espacios, C_φ es uniformemente ergódico si, y sólo si, el operador es quasicompacto si, y sólo si, las iteradas convergen en norma a la evaluación en el punto fijo.