

ANÁLISIS FRACTAL DE CAUDALES DE RÍOS

Manuel Mahamud López

Resumen:

El análisis fractal se está convirtiendo en una herramienta para el estudio de datos experimentales que, en muchos casos, van a estar ligados a fenómenos naturales. El estudio de los caudales de ríos es un claro ejemplo de series temporales que pueden ser interpretadas desde una perspectiva fractal. En este trabajo se ha procedido a la determinación del exponente de Hurst para distintos aforos del río Ebro a lo largo de su curso, utilizando dos procedimientos de cálculo diferentes. Se ha llevado a cabo también un estudio fractal fundamental para verificar la dependencia funcional de las desviaciones acumuladas de caudal en función del intervalo temporal utilizado para la observación. En el caso de la determinación del exponente de Hurst no se han encontrado tendencias definidas en función de la situación de las estaciones de aforo. Por el contrario, el estudio del comportamiento fractal de las desviaciones acumuladas indica una fuerte influencia de las infraestructuras de regulación del caudal en los resultados del análisis.

Palabras clave: Análisis fractal, caudal de ríos, aforo, series temporales.

INTRODUCCIÓN

La mayor parte de los fenómenos y parámetros relacionados con los procesos naturales presentan una aparente aleatoriedad si se observa su comportamiento a lo largo del tiempo. Realizando un estudio riguroso se puede comprobar que los valores medidos no se corresponden con los que se obtendrían del análisis si estos eventos fuesen totalmente aleatorios. Tampoco los fenómenos naturales son absolutamente predecibles, aunque se puedan encontrar ciertos indicios de periodicidad. En cualquier caso, detrás de muchos fenómenos de interés para la Ingeniería Ambiental existen ciertos patrones de orden ocultos bajo un comportamiento aleatorio aparente. La evolución de las temperaturas y presiones atmosféricas a lo largo del tiempo, el espesor de las capas de sedimentos, el caudal de los ríos, la altura del nivel de los lagos o el crecimiento de las cosechas, son ejemplos típicos de variables naturales cuyas series temporales pueden ser sometidas a estudio.

Encontrar la forma de modelizar el comportamiento de los sistemas naturales en función del tiempo ha sido objeto de estudio a lo largo de la historia. Las predicciones que se hacen tanto en el área de la Ingeniería Ambiental como en otros campos del saber están basadas en el conocimiento previo que nos aporta la experiencia. Sería deseable conocer si el comportamiento de un sistema durante un cierto número de años puede ser extrapolado a intervalos de tiempo sustancialmente distintos. Si ello fuera cierto, el sistema en estudio podría ser considerado como un *fractal en el tiempo* y la metodología utilizada para el tratamiento de los objetos fractales sería de aplicación para su estudio. La idea básica que subyace en las técnicas de análisis fractal es el concepto de autosimilitud. Dicho concepto supone que un objeto fractal presenta un aspecto semejante independientemente del grado de detalle con que sea examinado. En el caso de series temporales, el mayor o menor grado de detalle vendrá dado por la menor o mayor longitud de los intervalos temporales sobre los que se promedian las variables.

Universidad de Oviedo. Departamento de Ingeniería Química y Tecnología del Medio Ambiente.
Facultad de Química. Campus de El Cristo. 33071 Oviedo (España). Teléfono: 34 985103668. Fax: 34 985103434. mahamud@correo.uniovi.es

Artículo recibido el 4 de junio de 2002, recibido en forma revisada el 4 de septiembre de 2003 y el 30 de enero de 2004 y aceptado para su publicación como *nota técnica* el 27 de abril de 2004.

Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

Una primera aproximación, el ajuste de Hurst

Aunque el concepto de fractal fue introducido formalmente a mediados de los años 70 (Mandelbrot, 1975, 1977), Hurst publicó en 1965 un procedimiento de análisis estadístico asimilable a las técnicas fractales. Dicho método posibilita el estudio de series temporales asociadas a multitud de fenómenos naturales como el caudal de los ríos o registros de temperaturas. Este procedimiento, denominado como *análisis del rango re-escalado* (*rescaled range analysis*), calcula el estadístico R/S para diferentes intervalos temporales y permite establecer una relación entre tres variables: la amplitud del intervalo de desviaciones acumuladas de una magnitud medible (rango estadístico, R), la desviación estándar de la misma (S) y el periodo de estudio (τ).

Sea $Q(t)$ el valor de la variable Q determinada para un tiempo t ; \bar{Q}_τ es el valor medio de $Q(t)$ en el intervalo temporal τ , siendo su definición matemática la usual

$$\bar{Q}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau Q(t) dt \quad (1)$$

Si $D(t, \tau)$ es la desviación acumulada de la variable Q para un tiempo t menor o igual que τ , su expresión matemática toma la forma

$$D(t, \tau) = \int_0^t (Q(t) - \bar{Q}_\tau) dt \quad | \quad t \leq \tau \quad (2)$$

Una vez conocida la desviación acumulada se define $R(\tau)$, o rango estadístico, como la máxima amplitud de la desviación acumulada en el intervalo temporal τ , es decir

$$R(\tau) = \max D(t, \tau) - \min D(t, \tau) \quad | \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (3)$$

Sea $S(\tau)$ la desviación estándar de la variable $Q(t)$ en el intervalo temporal τ , definida como

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau (Q(t) - \bar{Q}_\tau)^2 dt} \quad (4)$$

Correlacionando multitud de datos experimentales -casi 900 datos correspondientes a 120 fenómenos particulares- relativos a presiones, caudales de ríos, precipitaciones o temperaturas, entre otros,

Hurst obtuvo la siguiente relación:

$$R(\tau)/S(\tau) = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H \quad (5)$$

donde H es el exponente de Hurst, cuyo valor para la mayoría de los fenómenos naturales es aproximadamente 0,73. Obviamente, para la realización de cálculos a partir de datos experimentales discontinuos, las diferentes integrales de las fórmulas (1), (2) y (4) deberán ser sustituidas por sumatorios discretos de los diferentes valores.

El ajuste de los datos experimentales se lleva a cabo utilizando la expresión siguiente

$$\ln \left[\frac{R(\tau)}{S(\tau)} \right] = H \ln \left(\frac{\tau}{2} \right) \quad (6)$$

que es la forma linealizada de la Ecuación (5).

Quizá el ejemplo más típico de serie temporal ligada a fenómenos naturales sea la evolución del caudal de los ríos. En este caso la variable Q es el caudal y el valor de R representa el mínimo volumen que ha de tener un embalse que permita durante el tiempo τ una descarga anual constante igual al valor medio del caudal durante el mencionado periodo. En la literatura pueden encontrarse análisis basados en el método de Hurst para el estudio de series temporales relativas a variables meteorológicas o a fenómenos directamente relacionados (Burgos y Pérez, 1999; Miranda y Andrade, 1999; Oñate, 1997; Turcotte, 1994).

Propuesta alternativa de análisis fractal

En este trabajo se va a realizar un estudio de los caudales que permita la determinación de un exponente fractal típico, para lo cual se empleará una metodología similar a la utilizada en el análisis fractal de objetos físicos. En muchos casos, la medida de un objeto va a depender de las dimensiones de la unidad de medida utilizada, pudiendo observar y medir con mayor grado de detalle cuanto menor sea el estándar de medida utilizado (Mahamud, 2002). Análogamente, cuando observamos la evolución de una magnitud con el tiempo, el grado de conocimiento que tenemos sobre dicha evolución será distinto en función del intervalo temporal que utilicemos para su descripción. Pensemos, por ejemplo, en la caracterización del desplazamiento de un vehículo entre dos poblaciones.

En este caso, un registro continuo de velocidades instantáneas (recogido por un tacógrafo) nos suministra información mucho más detallada que una tabla que recoja valores de velocidad en determinados instantes y ésta a su vez, es más rica en información que un simple valor de velocidad media para todo el desplazamiento. Otros casos reales típicos donde podemos apreciar diferentes grados de detalle en función del intervalo de observación son, por ejemplo los registros de intensidad de circulación en una carretera o la evolución de los precios en los mercados financieros. En relación con los ejemplos anteriores podemos encontrar series de valores promediados para periodos de un año, de un mes, de un día o, incluso, registros de valores *instantáneos* para un determinado intervalo de tiempo.

Sea \bar{Q}_τ el valor medio de la magnitud $Q(t)$ -en nuestro caso particular, el caudal de un río- en el intervalo de tiempo τ y \bar{Q}_i el valor medio de $Q(t)$ en cada uno de los n intervalos de longitud τ/n en que dividimos un periodo de τ años, es decir

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{\tau/n} \int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt \quad (7)$$

donde $t_1 = \frac{\tau}{n}(i-1); t_2 = \frac{\tau}{n}i$

Simbolizando por $S_{\tau/n}$, el valor de la desviación absoluta acumulada durante el periodo temporal τ usando n valores medios correspondientes a cada uno de los intervalos, se tiene que

$$S_{\tau/n} = \sum_{i=1}^n \text{abs} \left(\frac{\tau}{n} \bar{Q}_i - \frac{\tau}{n} \bar{Q}_\tau \right) \quad (8)$$

Se ha definido S como una suma de valores absolutos de la desviación puesto que lo que pretendemos es obtener un parámetro que nos de idea de la "cantidad de variación" respecto de la media que podemos ser capaces de detectar, independientemente del signo de esta variación. Definida la desviación absoluta acumulada, se propone un procedimiento similar al utilizado para la determinación de dimensiones fractales de objetos físicos (Feder, 1988; Mahamud, 2002), siendo la magnitud a medir el valor $S_{\tau/n}$. Haciendo $\tau/\delta = \delta$, podemos obtener una relación entre $S_{\tau/n}$ y δ del tipo:

$$\ln(S_\delta) = \text{constante} - D \ln(\delta) \quad (9)$$

El valor de D puede ser estimado ajustando datos experimentales a la Ecuación (9) y calculando la pendiente de la línea obtenida. Ello es equivalente a determinar la dimensión fractal mediante el cociente de variaciones siguiente

$$D = \frac{\Delta \ln S_\delta}{-\Delta \ln \delta} \quad (10)$$

expresión que, junto con la Ecuación (9), es muy utilizada para determinar la dimensión de figuras definidas por algoritmos matemáticos o para la estimación de las dimensiones fractales de la superficie de sólidos a partir de medidas experimentales (Fadeev, 1996; Friesen y Mikula, 1987; Pfeifer y Avnir, 1983).

ESTUDIO EXPERIMENTAL DE CAUDALES DEL RÍO EBRO

Datos provenientes de siete estaciones de aforo situadas a lo largo del curso del río Ebro han sido utilizados para el cálculo del exponente de la relación de Hurst, indicada en la Ecuación (5). Las estaciones de aforo mencionadas se relacionan a continuación en el mismo orden en que se encuentran situadas a lo largo del curso del río: Arroyo, Miranda de Ebro, El Cortijo, Mendavia, Castejón, Zaragoza y Flix. Los valores empleados corresponden a periodos de 30 años y han sido tratados utilizando dos sistemas de cálculo. En primer lugar se han estimado los exponentes de Hurst utilizando un único valor del cociente R/S para periodos de tiempo de 10, 15, 20, 25 y 30 años. Como se puede apreciar en los gráficos de la figura 1, el ajuste de los datos a la Ecuación (6) puede considerarse bastante pobre, debido fundamentalmente al reducido número de años utilizados para el estudio. Por ello se ha considerado adecuado llevar a cabo un cálculo mejorado empleando el método que hemos denominado de ponderación total y que coincide esencialmente con procedimientos descritos en la literatura (North y Halliwell 1994, Rao y Bhattacharya 2001). Este procedimiento consiste en utilizar el mayor número de intervalos de tiempo iguales y disjuntos incluidos en el periodo de 30 años. Los intervalos utilizados fueron, en consecuencia, divisores enteros de 30: 30, 15, 10, 6, 5, 3 y 2 años y el número de intervalos -o lo que es lo mismo, el número de réplicas para calcular R - utilizado para el cálculo fue respectivamente de 1, 2, 3, 5, 6, 10 y 15. Mediante este método es posible obtener valores fiables del cociente R/S para intervalos pequeños ya que se calcula un valor medio a partir de los valores correspondientes a los diferentes intervalos disjuntos de igual amplitud.

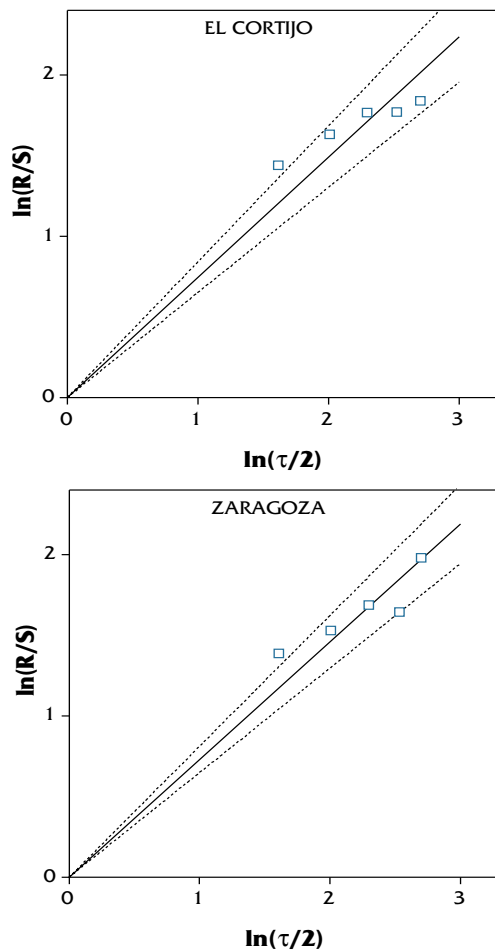


Figura 1. Representación gráfica de los puntos experimentales $\ln[R(\tau)/S(\tau)]$ vs. $\ln(\tau/2)$ y del ajuste lineal correspondiente para los datos obtenidos en dos estaciones de aforo. Los gráficos corresponden al método simple de cálculo. Las líneas punteadas representan el intervalo de confianza del 95% para las rectas de regresión.

En la figura 2 se pueden apreciar el número de réplicas de cálculo y los años que abarca cada una en función de la amplitud de los intervalos temporales utilizados. Este método de cálculo mejorado da lugar en todos los casos a mayores valores del coeficiente de determinación (r^2) para el ajuste de la Ecuación (6) y, generalmente, el error estándar para el coeficiente H disminuye. Dichos valores se encuentran recogidos en la tabla 1.

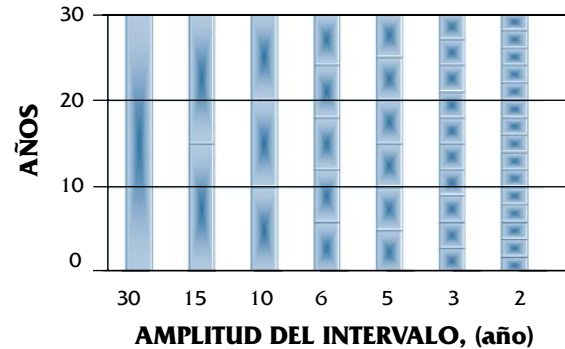


Figura 2. Esquema gráfico de las réplicas (intervalos) utilizadas en el método de ponderación total para el cálculo de R en función de la amplitud del intervalo.

En la figura 3 se representan los valores experimentales de $\ln(R(\tau)/S(\tau))$ frente a $\ln(\tau/2)$ obtenidos mediante el método de ponderación total en seis estaciones de aforo. Se indica asimismo la línea recta que representa el mejor ajuste de los datos y cuya pendiente corresponde con el exponente de Hurst. Los valores de H se encuentran en el intervalo 0.68-0.80 y parecen aumentar conforme las estaciones de aforo están más cercanas a la desembocadura. De todas formas, las variaciones no son significativas y no es posible obtener una generalización sistemática.

Tabla 1. Valores del exponente de Hurst, H, sus desviaciones estándar, σ_H y los coeficientes de determinación, r^2 , para el ajuste de los valores $\ln[R(\tau)/S(\tau)]$ y $\ln(\tau/2)$ a la Ecuación (6). Se recogen los resultados correspondientes al método simple de análisis y al método de ponderación total de los valores para distintas estaciones de aforo.

Estación de aforo	Método simple			Ponderación total		
	H	σ_H	r^2	H	σ_H	r^2
Arroyo	0,71	0,021	0,917	0,73	0,020	0,989
Miranda	0,66	0,030	0,318	0,68	0,022	0,982
El Cortijo	0,75	0,034	0,188	0,72	0,018	0,990
Mendavia	0,68	0,035	0,173	0,67	0,040	0,942
Castejón	0,72	0,034	0,480	0,75	0,015	0,993
Zaragoza	0,73	0,029	0,544	0,77	0,024	0,985
Flix	0,81	0,015	0,959	0,80	0,028	0,983

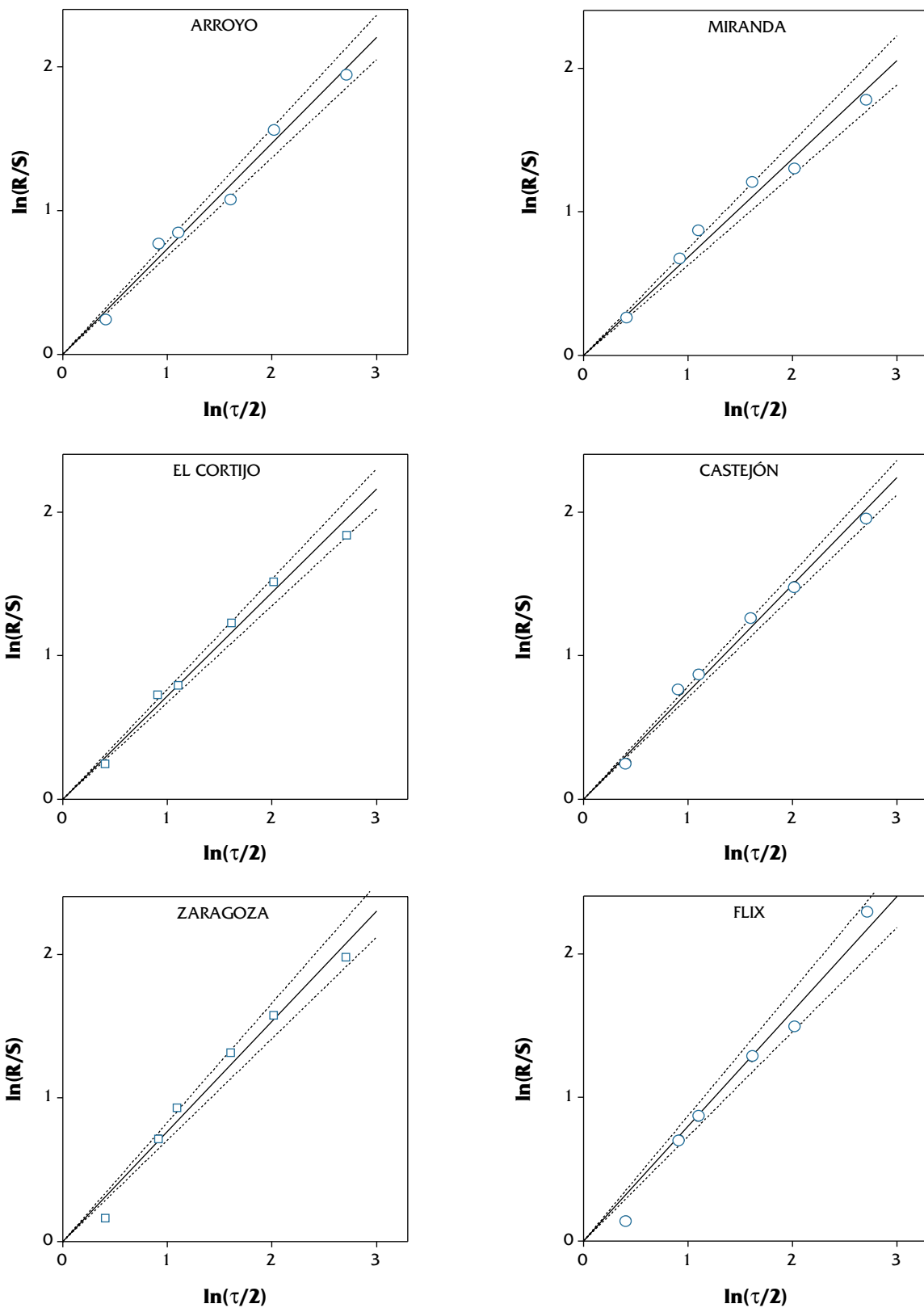


Figura 3. Representaciones gráficas de la forma lineal del ajuste de Hurst -ecuación (6)- para los caudales del río Ebro determinados en diversas estaciones de aforo. Las líneas punteadas representan el intervalo de confianza del 95% para las rectas de regresión.

El exponente H puede ser determinado de manera más exacta cuanto mayor sea el intervalo temporal considerado para el análisis. Conocido H para un intervalo temporal determinado, el rango estadístico, R , puede ser estimado. Esto es posible ya que los valores de la desviación estándar no varían mucho si los tiempos son suficientemente largos -como se puede comprobar en la representación de la figura 4. Este método permite obtener una estimación del volumen de un reservorio de agua que equalice el caudal a lo largo de un intervalo temporal dado.

Para determinar el valor de D se realiza un ajuste de los datos experimentales de $\ln(S_\delta)$ y $\ln(\delta)$ a la recta definida por la Ecuación 9. Para poder comparar las gráficas correspondientes a distintas estaciones de aforo resulta conveniente llevar a cabo una normalización de los valores de S_δ dividiendo cada uno de ellos por el volumen total que ha circulado por el aforo durante el periodo τ considerado. La expresión matemática que define las desviaciones normalizadas es pues

$$S_N = \frac{S_\delta}{\tau Q_\tau} \quad (11)$$

La figura 5 muestra los gráficos obtenidos representando los pares de valores $\ln(\delta)$ - $\ln(S_N)$ para los caudales del río Ebro a su paso por diferentes estaciones de aforo. En la tabla 2 se encuentran recogidos los correspondientes valores de D , su desviación estándar y el coeficiente de determinación para el ajuste según la Ecuación 9. Los tiempos utilizados -valores de δ - para el cálculo han sido 15, 10, 6, 5, 3, 2 y 1 año. Los valores de D toman valores comprendidos en el intervalo 0.2-0.93. Este hecho indica que la falta de constancia en los caudales del río dependen en gran medida de la situación de las correspondientes estaciones de aforo.

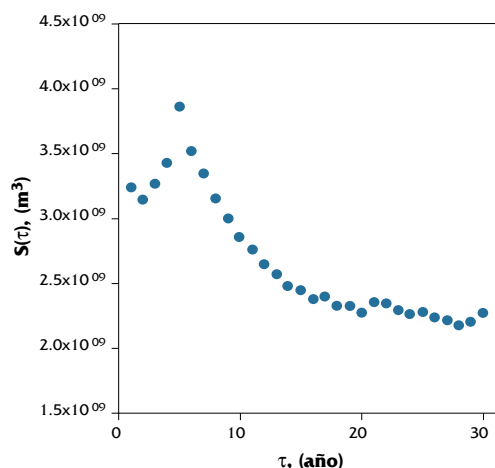


Figura 4. Valores de la desviación estándar de los caudales medios acumulados, $S(\tau)$, frente al intervalo temporal de cálculo, τ . Los datos de caudal corresponden a la estación de aforo de Zaragoza.

Del análisis de los resultados se puede inferir que los valores de D más pequeños corresponden a estaciones que se encuentran aguas abajo de grandes presas y próximas a las mismas: Arroyo y Miranda, próximas al Embalse del Ebro y Flix, inmediatamente aguas abajo de los embalses de Mequinenza y Ribarroja. La existencia de estas grandes obras de regulación hidráulica tiene como consecuencia una mayor constancia de los caudales, hecho que se refleja en bajos valores de D . Según la Ecuación (9) un valor de D igual a cero corresponde con un valor constante de S_δ y para que esta premisa se cumpla para todo valor de δ es preciso que $S_\delta=0$, es decir, que el caudal sea constante. Por lo tanto el valor de $D=0$ correspondería a una corriente cuyas aguas provienen de una zona totalmente regulada y por lo tanto, con un caudal anual constante. Por contra, los valores de D aumentan cuando en el punto de aforo se reciben importantes cantidades de agua provenientes de cuencas poco reguladas.

Tabla 2. Valores de D y sus correspondientes desviaciones estándar obtenidos por ajuste de los datos experimentales a la Ecuación (9). Se indican asimismo los coeficientes de determinación, r^2 .

Estación de aforo	D	Desviación estándar τ_D	Coficiente de determinación (r^2)
Arroyo	0,40	0,057	0,908
Miranda de Ebro	0,38	0,062	0,881
El Cortijo	0,80	0,071	0,962
Mendavia	0,83	0,188	0,797
Castejón	0,93	0,239	0,750
Zaragoza	0,62	0,137	0,803
Flix	0,20	0,059	0,690

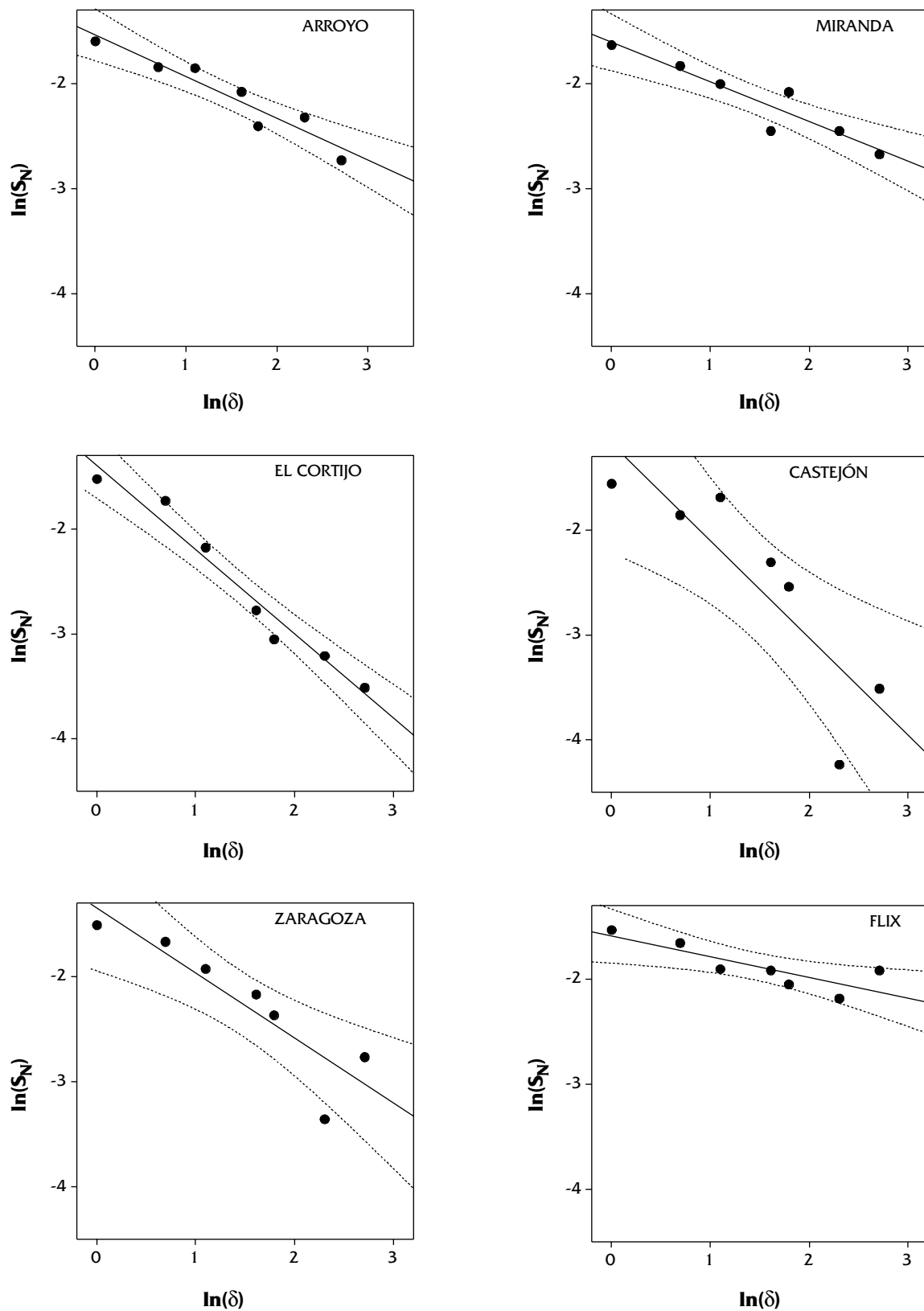


Figura 5. Representaciones gráficas de los valores $\ln(S_N)$ en función de $\ln(\delta)$ para diferentes estaciones de aforo. Las líneas rectas representan el ajuste de los mismos a la ecuación (9). Las líneas punteadas delimitan la zona en donde se encontrarán las rectas de regresión con un 95% de probabilidad.

Tabla 3. Volúmenes de capacidad de embalse aguas arriba, superficie de cuenca, caudal anual y relación capacidad/caudal anual para las distintas estaciones de aforo.

Estación de aforo	Capacidad de embalse (10 ³ hm ³)	Superficie de cuenca (10 ³ km ²)	Caudal anual (10 ³ hm ³)	Capacidad/Caudal anual
Arroyo	0,54	0,53	0,31	1,74
Miranda de Ebro	0,56	5,9	1,82	0,31
El Cortijo	0,84	10,4	3,28	0,26
Mendavia	0,91	12,05	2,45	0,37
Castejón	1,48	25,3	8,45	0,18
Zaragoza	1,58	41,1	8,33	0,19
Flix	6,46	82,3	14,6	0,44

En la tabla 3 se recogen para las distintas estaciones los datos de volumen de embalses aguas arriba de cada aforo, la superficie de cuenca correspondiente, el caudal anual y la ratio capacidad/caudal. La figura 6 permite visualizar los ratios capacidad/caudal frente a la dimensión fractal D . En el caso de Arroyo, que tiene el mayor ratio capacidad/caudal, no le corresponde una dimensión fractal mínima aunque sí que es un valor relativamente bajo (0,40). Hay que tener en cuenta que en este caso el cociente es mucho mayor que el correspondiente a otras estaciones y si se hiciera el cálculo capacidad/área de cuenca, por ejemplo, este cociente sería cuando menos un orden de magnitud superior al correspondiente a cualquier otra estación. La dispersión de puntos correspondientes a otras estaciones de aforo podría deberse a los múltiples canales de riego existentes cuya influencia modifica de hecho el régimen a lo largo del curso del río.

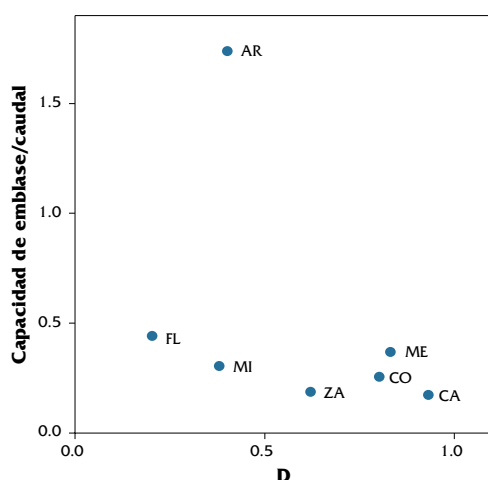


Figura 6. Representación gráfica de los valores de la ratio capacidad de embalse/caudal frente a la dimensión fractal D .

No existe contradicción entre las variaciones de los parámetros H y D ya que ambos tienen su origen en dos procedimientos de cálculo distintos. El exponente H está relacionado con el rango R definido en la ecuación 3 y que corresponde a la amplitud de la oscilación de la desviación acumulada $D(t, \tau)$, que es a su vez determinada mediante el cálculo integral de la ecuación 2. Esto trae como consecuencia que la variación de estos parámetros $-D(t, \tau)$ y R respecto al tiempo va a estar muy amortiguada. Por contra, la dimensión fractal propuesta, D , depende de las variaciones absolutas de caudal acumuladas respecto de la media -desviación absoluta acumulada, $S_{\tau/n}$, calculada según la ecuación 8- siendo esta magnitud muy variable en función del intervalo temporal τ/n elegido. Por ello, el parámetro D es más sensible a las variaciones de caudal en intervalos de tiempo cortos.

CONCLUSIONES

Del análisis de la literatura científica y del estudio llevado a cabo en el presente trabajo se pueden extraer una serie de conclusiones que se indican a continuación.

1. Las técnicas de análisis fractal están siendo utilizadas en muchos campos de las ciencias puras y aplicadas así como en áreas de la Ingeniería. El análisis fractal de series temporales resulta de especial interés para el estudio de fenómenos naturales y particularmente de aquéllos relacionados con la meteorología.
2. El estudio de las variaciones de los caudales de los ríos con el tiempo puede ser abordado utilizando metodologías de análisis fractal, ya que éstas suministran herramientas adicionales para el estudio de estos importantes parámetros.

3. La determinación de un exponente fractal típico se apunta como un posible indicador del grado de regulación existente en una cuenca fluvial. El análisis fractal permite no sólo una caracterización de los fenómenos naturales sino que es un parámetro sensible a la influencia de la actividad humana en variables naturales como el caudal de los ríos. Métodos clásicos como el procedimiento de Hurst pueden ser complementados con un análisis de la evolución de los caudales con el tiempo desde una perspectiva fractal más genuina.

4. Al igual que sucede en otras ramas de la ciencia, estos nuevos métodos de estudio no van a sustituir a las tradicionales técnicas de análisis aunque se convertirán probablemente en una herramienta de investigación complementaria.

AGRADECIMIENTOS

Los datos utilizados para los cálculos en este trabajo han sido obtenidos del banco de datos del servidor informático de la Confederación Hidrográfica del Ebro en la dirección www.chebro.es. El autor desea agradecer a la Confederación la facilidad de acceso público a la información mencionada.

LISTA DE SÍMBOLOS

D	Dimensión fractal (adimensional)
$D(t, \tau)$	Desviación acumulada de caudal para un tiempo t menor o igual que τ (volumen)
H	Exponente de Hurst (adimensional)
$Q(t)$	Caudal para un tiempo t (volumen·tiempo ⁻¹)
\bar{Q}_i	Valor medio del caudal en el intervalo temporal i -ésimo de amplitud τ/n (volumen·tiempo ⁻¹)
\bar{Q}_τ	Valor medio del caudal en un intervalo de tiempo τ (volumen·tiempo ⁻¹)
$R(\tau)$	Máxima amplitud de la desviación acumulada en el intervalo de tiempo τ (volumen)
r^2	Coefficiente de determinación (adimensional)
S_δ	Desviación absoluta acumulada medida a intervalos de tiempo δ (volumen)
S_N	Desviación absoluta acumulada normalizada (adimensional)
$S(\tau)$	Desviación estándar del caudal durante el intervalo de tiempo τ (volumen·tiempo ⁻¹)
t	Tiempo (tiempo)
Δ	Símbolo matemático de incremento
δ	Intervalo de tiempo usado como unidad de medida (tiempo)
σ_D	Desviación estándar del exponente D (adimensional)
σ_H	Desviación estándar del exponente de Hurst (adimensional)
τ	Intervalo temporal (tiempo)

REFERENCIAS

- Burgos, T.R. y Pérez, E. (1999). *Estimation of the Fractal Dimension of a Rainfall Time Series over a Zone Relevant to the Agriculture in Havana*. *SOMETCUBA Bulletin*, 5(1). Edición on-line.
- Fadeev, A.Y., Borisova, O.R. y Lisichin, G.V. (1996). *Fractality of Porous Silicas: A Comparison of Adsorption and Porosimetry data*. *Journal of Colloid and Interface Science*, 183: 1-5.
- Feder, J. (1998). *Fractals*. Plenum Press, Nueva York.
- Friesen, W.I. y Mikula, R.J. (1987). *Fractal Dimensions of Coal Particles*. *J. Colloid Interface Sci.*, 120(1): 263-271.
- Hurst, H.E., Black, R.P. y Simaika, Y.M. (1965). *Long Term Storage: An Experimental Study*. Constable, Londres.
- Mahamud, M. (2002). *El Análisis Fractal en Ingeniería Ambiental*. Ingeniería Química. (En prensa).
- Mandelbrot, B.B. (1975). *Les Objects Fractals: Forme, Hazard et Dimension*. Flammarion, París.
- Mandelbrot, B.B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, Nueva York.
- Miranda, J.G.V. y Andrade, R.F.S. (1999). *Rescaled Range Analysis of Pluviometric Records in Northeast Brazil*. *Theor. Appl. Climatol.* 63, 79-88.
- North, C.P. y Halliwell, D.I. (1994). *Bias in Estimating Fractal Dimension with the Rescaled-Range (R/S) Technique*. *Mathematical Geology*, 26(5), 531-555.
- Oñate Rubalcaba, J.J. (1997). *Fractal Análisis of Climatic Data: Annual Precipitation Records in Spain*. *Theor. Appl. Climatol.*, 56, 83-87.
- Pfeifer, P. y Avnir, D. (1983). *Chemistry in Noninteger Dimensions between Two and Three. I. Fractal Theory of Heterogeneous Surfaces*. *Journal of Chemical Physics*, 79(7), 3558-3565.
- Rao, A.R. y Bhattacharya, D. (2001). *Effect of Short-Term Memory on Hurst Phenomenon*. *Journal of Hydrologic Engineering*, marzo/abril, 125-131.
- Turcotte, D.L. (1994). *Fractal Theory and the Estimation of Extreme Floods*. *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, 99, 377-389.

