

APLICACION DE METODOS NUMERICOS AL CALCULO CONJUNTO DE LA ESTRUCTURA Y LA CIMENTACION DE LOS EDIFICIOS

Luisa Basset, Dr. Arquitecto.

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras.

Universidad Politécnica de Valencia, Cno. de Vera s/n, 46022 Valencia, España.

Manuel Rechea, Dr. Ingeniero de Caminos.

Departamento de Ingeniería de Terreno.

Universidad Politécnica de Valencia, Cno. de Vera s/n, 46022 Valencia, España.

RESUMEN DEL TRABAJO

La estructura y la cimentación son dos partes del edificio que están unidas físicamente entre sí y que descansan sobre el suelo. Existe, por tanto, una interacción entre ambas que permanece durante toda la vida del edificio, de manera que, tanto los asentamientos diferenciales como los posibles cambios de rigidez del conjunto producirán una redistribución de esfuerzos en la estructura que no puede ser despreciada en la mayoría de los casos.

En este artículo, los autores presentan un método de cálculo iterativo que considera conjuntamente superestructura, cimentación y suelo, determinando los movimientos en los nudos de la estructura (incluidos los de los apoyos), los esfuerzos en las barras y las dimensiones de las zapatas.

El planteamiento se ha hecho para estructuras planas sobre zapatas aisladas en arenas, aunque el proceso de cálculo es válido si se adoptan otras funciones representativas del suelo, así como otras condiciones para el diseño de las zapatas [1].

METODO DE CALCULO CONJUNTO DE ESTRUCTURA Y CIMENTACION

1. PLANTEAMIENTO DEL METODO

Es práctica común asumir para la estructura de un edificio un comportamiento elástico y lineal, sin que esto suponga un alejamiento sustancial de la realidad. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el suelo, cuyo comportamiento es claramente no lineal.

Por eso, al abordar conjuntamente el análisis de estructura y cimentación, se plantea un procedimiento iterativo de manera que se llega a la resolución final del conjunto estructura-cimentación cuando los movimientos calculados en los puntos de apoyo de la estructura (a partir de las reacciones, de las funciones que definen el suelo y de las dimensiones de las zapatas) coinciden, después de las iteraciones necesarias, con los movimientos impuestos a los mismos al inicio de ese ciclo, es decir:

$$(\bar{W}_s) - (\bar{W}_0) = 0 \quad (1)$$

siendo: (\bar{W}_s) : vector de movimientos calculados en los apoyos de la estructura a partir de las funciones de suelo y las dimensiones de la zapata, en cada iteración.

(\bar{W}_0) : vector de movimientos impuestos en los apoyos de la estructura al inicio de cada iteración.

Para asegurar y agilizar la convergencia, se utiliza el Método de Newton-Raphson, tomando como punto de partida un conjunto de movimientos impuestos nulo ($(\bar{W}_0) = (0)$).

La ecuación (1) representa un sistema cuyo número de ecuaciones es el número de movimientos de los apoyos, por lo que particularizada para un movimiento concreto en la dirección i de un apoyo será:

$$W_{si} - W_{oi} = F_i(\bar{W}_o) = 0 \quad (2)$$

siendo : W_{si} : movimiento calculado en ese punto en la dirección i .
 W_{oi} : movimiento impuesto en ese punto en la dirección i .
 \bar{W}_o : vector de todos los movimientos impuestos al inicio de cada iteración.

ya que W_{si} es una función no lineal de la reacción correspondiente R_i , que a su vez es función lineal del conjunto de movimientos impuestos W_o , incluido el W_{oi} .

Se aplica ahora el Método de Newton-Raphson, tomando los primeros términos del desarrollo en serie para aproximar la solución:

$$F_i(\bar{W}_o + \Delta\bar{W}_o) = F_i(\bar{W}_o) + \Delta\bar{W}_o \cdot F'_i(\bar{W}_o) = F_i(\bar{W}_o) + \Delta W_{oj} \cdot \left(\frac{\partial W_{si}}{\partial R_i} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial W_{oj}} - \frac{\partial W_{oi}}{\partial W_{oj}} \right) = 0$$

con $j = 1 \dots n$ siendo n el número de movimientos de los apoyos (no hay sumatorio en i) (3)

Operando:

$$\left(\frac{\partial W_{si}}{\partial R_i} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial W_{oj}} - \delta_{ij} \right) \cdot \Delta W_{oj} = -F_i(\bar{W}_o) = W_{oi} - W_{si} \quad \text{con} \quad \delta_{ij} = \frac{\partial W_{oi}}{\partial W_{oj}} \quad \{1 \text{ si } i = j, 0 \text{ si } i \neq j\}$$

con $j = 1 \dots n$ siendo n el número de movimientos de los apoyos (no hay sumatorio en i) (4)

Volviendo de nuevo al sistema general de ecuaciones, considerando todos los movimientos de los apoyos, tenemos el sistema:

$$(W_s' \cdot R' - I) \cdot \Delta\bar{W}_o = \bar{W}_o - \bar{W}_s \quad (5)$$

siendo : $\Delta\bar{W}_o$: incremento de movimientos, incógnita del sistema de ecuaciones
 \bar{W}_o : vector de movimientos impuestos en los apoyos
 \bar{W}_s : vector de movimientos calculados en los apoyos
 I : matriz identidad
 R' : matriz cuyos coeficientes son las derivadas de las reacciones con respecto de los movimientos impuestos
 W_s' : matriz cuyos coeficientes son las derivadas de las funciones no lineales de los movimientos calculados con respecto de las reacciones.

Se resuelve el sistema de ecuaciones obteniendo los incrementos $\Delta\bar{W}_o$ que sumados a los \bar{W}_o representarán los movimientos finales del ciclo correspondiente \bar{W}_f que se comparan con los impuestos al inicio del ciclo.

Si son distintos comienza un nuevo ciclo en el que se toman como impuestos los movimientos finales del ciclo anterior.

El esquema general del proceso de cálculo correspondiente a un ciclo cualquiera n es:

1. Cálculo de la estructura con el Método matricial de las Rigideces:

En primer lugar se obtienen los movimientos de los nudos, teniendo en cuenta que se conocen los movimientos de los apoyos y que, por tanto, se introducen como dato al inicio de cada iteración. En la primera, éstos movimientos impuestos son nulos y en las sucesivas son los movimientos finales del ciclo anterior.

A partir de los movimientos se calculan las reacciones en los apoyos, que son las cargas sobre la cimentación y el terreno.

2. Cálculo de los movimientos de la cimentación mediante las funciones que definen el comportamiento del suelo y que, como dependen, entre otros factores, de las dimensiones de las zapatas, obligan al diseño de éstas en cada iteración.

3. Aproximación a los movimientos solución con el Método de Newton-Raphson.

4. Comparación entre los movimientos finales del ciclo correspondiente y los impuestos al inicio del mismo, determinando si debe comenzarse una nueva iteración o bien si se ha llegado al final del cálculo.

2. CALCULO DE LOS MOVIMIENTOS DE LA CIMENTACION (W_s) Y DE SUS DERIVADAS RESPECTO DE LAS REACCIONES (W_s')

Para calcular los movimientos de los puntos de apoyo de la estructura (W_s) puede utilizarse cualquier conjunto de ecuaciones que representen el comportamiento del suelo. Las funciones utilizadas en este caso se deducen a partir de la fórmula propuesta por Schmertmann para el cálculo de asientos en arenas (6), con algunas variaciones:

$$s = c_1 \cdot c_2 \cdot q \cdot \int_0^{2B} \frac{I(z)}{E(z)} \cdot dz \quad (6)$$

siendo : s : asiento de la zapata
 c_1 : coeficiente de profundidad
 c_2 : coeficiente de fluencia
 q : tensión al nivel de la zapata
 I : coeficiente de influencia
 E : módulo de elasticidad
 z : profundidad
 B : lado de la zapata cuadrada

Se toma para I una distribución elástica con $\nu=0.3$ para evitar que se anule para profundidades superiores a dos veces el lado de la zapata y para c_2 el valor correspondiente a 5 años.

Según la experiencia adquirida por los autores en la zona de Valencia, puede asignarse a E el valor de la resistencia dinámica, disponible cada 20 centímetros, con lo que la integral se transforma en un sumatorio que puede aproximarse mediante mínimos cuadrados a la curva $U \cdot B^V$, siendo U el coeficiente de rigidez del suelo, B el lado de la zapata cuadrada y V el coeficiente de distribución de la resistencia dinámica con la profundidad.

Expresando la tensión q en función de los esfuerzos en los apoyos y considerando una zapata rectangular equivalente de igual área, se obtiene la expresión (7) que representa el movimiento de la cimentación:

$$s = 0.0268 \cdot \left(\frac{N}{A \cdot B} + \frac{12 \cdot M \cdot x}{A^3 \cdot B} - q_0 \right) \cdot U \cdot (\sqrt{A \cdot B})^V \quad (7)$$

siendo : N : axil en la base de la zapata
 M : momento en la base de la zapata
 A, B : dimensiones de la zapata
 x : distancia de la fibra más alejada a la neutra
 q_0 : $(\gamma \cdot D)/2$
 γ : peso específico suelo-hormigón
 D : profundidad de la zapata

Este movimiento será la suma de una componente vertical y otra debida al giro, por lo que se descompone en dos funciones:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 0.0268 \cdot \left(\frac{N}{A \cdot B} - q_0 \right) \cdot U \cdot (\sqrt{A \cdot B})^V \\
 F_2 &= 0.0268 \cdot \frac{12 \cdot M}{A^3 \cdot B} \cdot U \cdot (\sqrt{A \cdot B})^V
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

siendo: F_1 : función de asiento
 F_2 : función de giro

Los movimientos W_s se determinan a partir de estas dos funciones (el movimiento horizontal es $F_3 = F_2 \cdot D$), tales que F_1 depende de A, B, N y F_2 de A, B, M lo que obliga a dimensionar las zapatas en cada iteración.

Los coeficientes de W_s son las derivadas de estas funciones con respecto de la reacción correspondiente, es decir:

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_1}{dN} &= \frac{\partial F_1}{\partial N} + \frac{\partial F_1}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dN} + \frac{\partial F_1}{\partial B} \cdot \frac{dB}{dN} \\
 \frac{dF_2}{dM} &= \frac{\partial F_2}{\partial M} + \frac{\partial F_2}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dM} + \frac{\partial F_2}{\partial B} \cdot \frac{dB}{dM}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Estas derivadas dependen de las derivadas de A y B con respecto de N y M, derivadas que se obtienen de las ecuaciones que han servido para su determinación.

3. CALCULO DE LAS DIMENSIONES DE LAS ZAPATAS

Para dimensionar las zapatas se ha adoptado como criterio de optimización el área mínima, obligando a que se cumplan unas limitaciones geométricas, de movimiento y de tensión. Pueden añadirse o suprimirse condiciones e incluso variar el criterio de dimensionado (volumen mínimo, precio mínimo,...) sin que por eso se modifique el esquema general de cálculo propuesto.

Las limitaciones adoptadas son:

a) Condiciones geométricas :

$$\begin{aligned}
 B &\geq 0.8 \text{ m} \\
 A &\geq 0.8 \text{ m} \\
 A &\geq B \geq \frac{A}{2}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

b) Condiciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
 B &\geq \left(\frac{40.2 \cdot M \cdot U}{A^{3-\frac{V}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} && \text{giro} \\
 s_{\max} &= 0.0268 \cdot U \cdot \left(\frac{N}{A \cdot B} - q_0 \right) \cdot (\sqrt{A \cdot B})^V && \text{asiento maximo}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

giro máximo = 0.008 radianes; asiento máximo absoluto = 5 cm; asiento máximo diferencial = L/500

c) Condiciones de tensión :

$$B \geq \frac{l}{1.25 \cdot \sigma_{ad} - 2 \cdot q_0} \left(\frac{N_0}{A} + \frac{6 \cdot M}{A^2} \right) \quad \text{t. max. trapecial}$$

$$B \geq \frac{l}{\sigma_{ad} - 2 \cdot q_0} \cdot \frac{N_0}{A} \quad \text{t. med. trapecial}$$

$$B \geq \frac{l}{2 \cdot q_0} \cdot \left(\frac{2 \cdot F \cdot M}{A^2} - \frac{N_0}{A} \right) \quad \text{vuelco}$$

$$B \geq \frac{-P_2 + \sqrt{P_2^2 - 4 \cdot P_1 \cdot P_3}}{2 \cdot P_1} \quad \text{t. max. triangular} \quad (12)$$

siendo : σ_{ad} : tensión admisible

N_0 : axil en los apoyos

F : coeficiente de seguridad al vuelco (se ha tomado F=2)

$$P_1 = 2 \cdot q_0 \cdot A^2 \cdot (32 \cdot q_0 - 15 \cdot \sigma_{ad})$$

$$P_2 = N_0 \cdot A \cdot (64 \cdot q_0 - 15 \cdot \sigma_{ad}) + 30 \cdot M \cdot \sigma_{ad}$$

$$P_3 = 16 \cdot N_0^2$$

Todas estas limitaciones admiten una representación gráfica (figura 1).

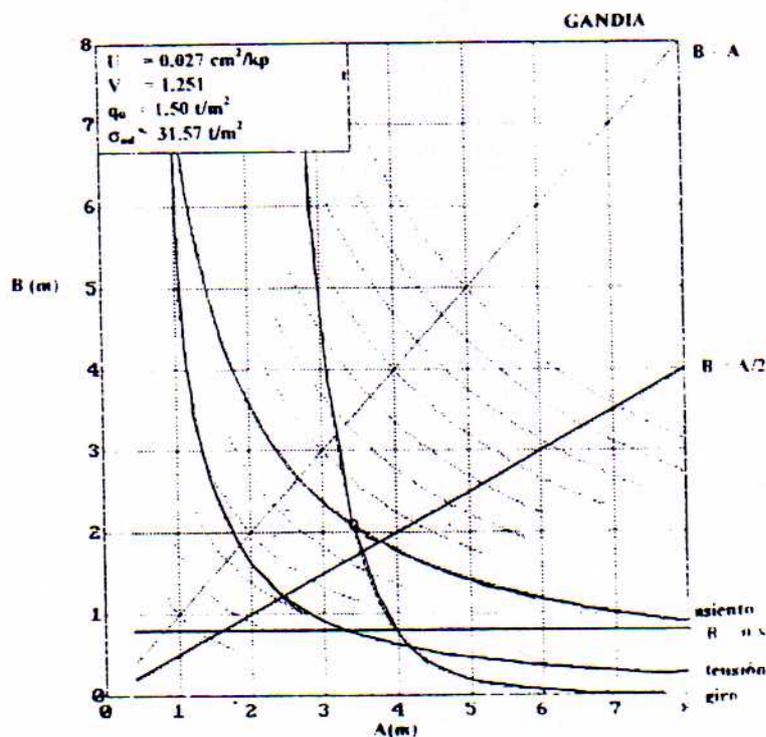


Figura 1

Diagrama dimensional para el cálculo de zapatas

En negro están representadas las curvas de la función óptima (en este caso el área mínima), y la recta $A = B$ (que constituye una limitación geométrica).

En azul están representadas las curvas de pendiente menor que la de la función óptima y que pertenecen al grupo 1. Estas curvas son, en este caso, las limitaciones de giro, tensión máxima trapecial, vuelco y tensión máxima triangular. A medida que aumenta el valor de A, se desciende por la curva, encontrando siempre un valor de B que disminuye la función óptima.

En rojo están representadas las curvas de pendiente mayor o igual que la de la función óptima y que pertenecen al grupo 2. Estas curvas son, en este caso, las limitaciones geométricas (excepto $A \geq B$), de asiento y tensión media trapecial. Situados en ellas, el punto siguiente aumenta o iguala el valor de la función óptima, luego concluyen el dimensionado.

Las dimensiones A y B se determinan por la intersección de dos curvas, una de cada grupo, a partir de las cuales se deducen, posteriormente, sus derivadas respecto de las reacciones.

4. CALCULO DE LAS COMPONENTES DE R'

El aceptar la hipótesis de comportamiento elástico y lineal para la estructura implica que los desplazamientos de los nudos son funciones lineales de las fuerzas exteriores y también que las reacciones son funciones lineales del conjunto de desplazamientos. Por tanto, cada reacción R_i es función lineal del conjunto de movimientos impuestos W_o y puede expresarse como:

$$R_i = A_i + C_{ij} \cdot W_{oj} \quad (13)$$

con $j = 1 \dots n$ siendo n el número de movimientos de los apoyos (no hay sumatorio en i)

siendo: A_i : término correspondiente a las fuerzas exteriores

$C_{ij} \cdot W_{oj}$: término correspondiente a los movimientos impuestos

$$C_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial W_{oj}}$$

W_{oj} : movimientos impuestos al inicio de cada iteración.

Los coeficientes C_{ij} son las derivadas de las reacciones respecto de los movimientos impuestos, es decir, los términos de R' . Estos coeficientes se obtienen una sola vez antes de iniciar las iteraciones.

5. EJEMPLOS DE CALCULO

Se presenta como ejemplo un pórtico perteneciente a un edificio de viviendas situado en Gandia, sobre un terreno de tipo arenoso (figura 2).

Esta formado por dos vanos y trece plantas. La estructura es de hormigón armado siendo las vigas planas de igual canto en todas las plantas excepto en la segunda, en la que éste es mayor.

Se ha calculado este pórtico siguiendo dos procedimientos:

a) En primer lugar, se ha realizado un cálculo con el procedimiento habitual, es decir, considerando que los apoyos de la estructura son empotramientos perfectos y despreciando, por tanto, la influencia del terreno.

b) En segundo lugar, se ha realizado un cálculo siguiendo el método propuesto por los autores en este artículo, es decir, considerando la influencia del terreno y dimensionando simultáneamente las zapatas.

El objetivo que se persigue con esto es el de poder comparar los resultados y determinar el grado de influencia del suelo en la estructura así como la importancia de considerarlos conjuntamente.

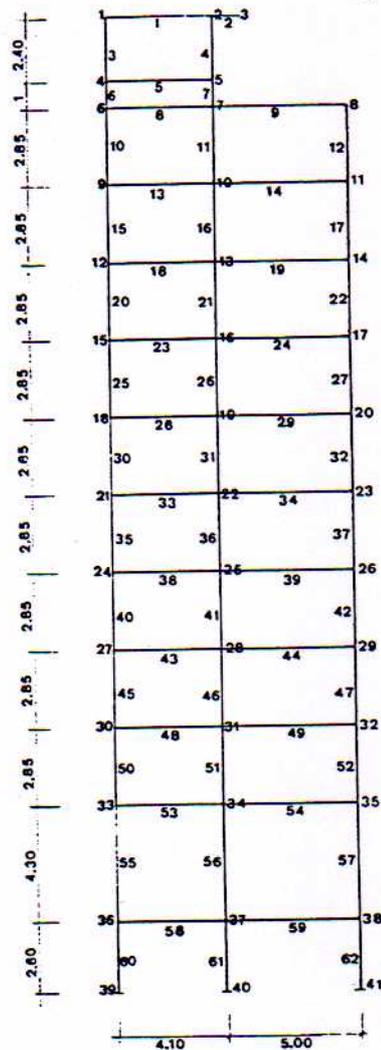


Figura 2
Esquema del pórtico

Los gráficos de la figura 3 representan en ordenadas las plantas del edificio y en abcisas el cociente entre los esfuerzos obtenidos por ambos métodos, indicativo precisamente de ese grado de influencia.

El cuarto gráfico representa los asientos de las tres zapatas del pórtico.

La influencia del suelo en la estructura es evidente a la vista de los resultados obtenidos. En concreto, para este pórtico los axiles varían hasta un 7%, los cortantes hasta un 21% y los momentos hasta un 84%. Lógicamente las diferencias mayores se producen en los momentos flectores, aunque no pueden despreciarse tampoco en los cortantes y axiles.

Los factores que determinan la mayor o menor influencia del suelo en la estructura, según se deduce de estos gráficos, son fundamentalmente tres:

a) La proximidad a la cimentación, de manera que cuanto más cerca del suelo se encuentre una barra más se verá afectada por la redistribución de esfuerzos producida por los movimientos de la cimentación.

b) La variación de la rigidez relativa de una barra o de una zona de la estructura con respecto a las demás, ya que cuanto más rígida sea, la influencia del suelo será mayor, tal y como ocurre, por ejemplo en la planta 11.

PORTICO 1

(INT./EMP.)

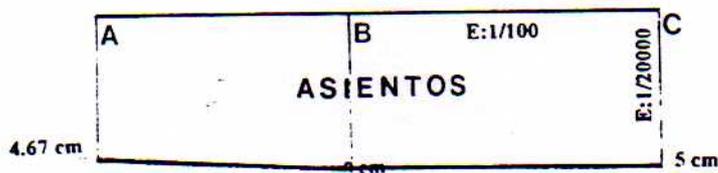
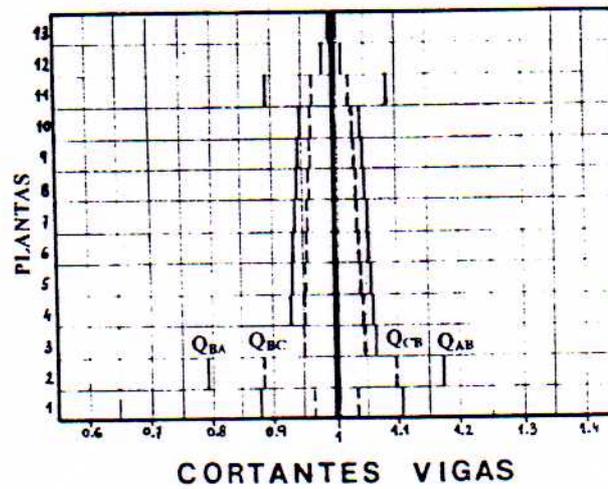
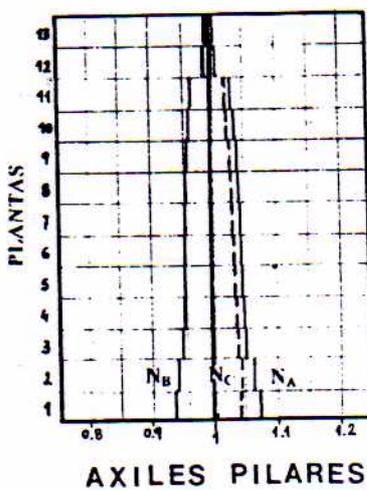
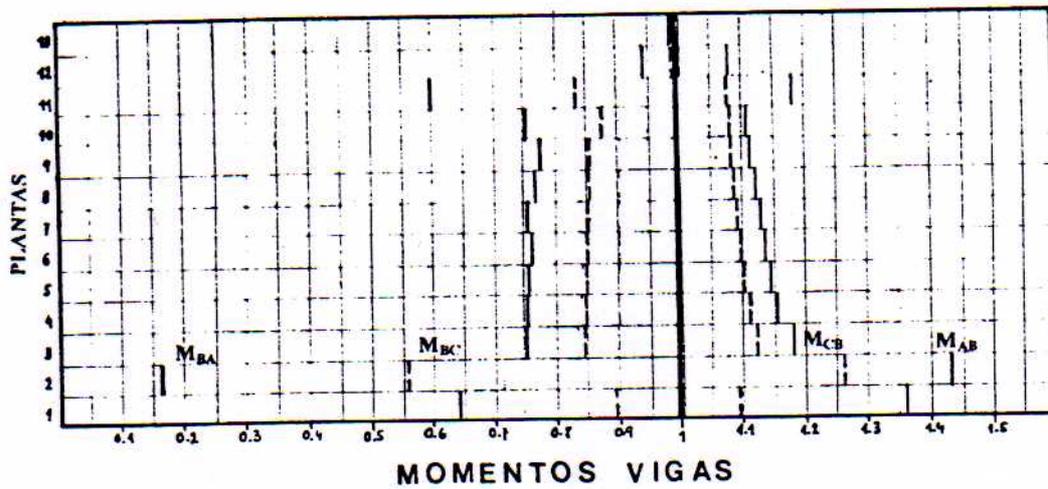


Figura 3

Comparación entre los esfuerzos obtenidos a partir del cálculo de la estructura empotrada sin considerar el suelo y a partir del método propuesto que considera la interacción suelo-estructura

c) El asiento diferencial, factor que puede considerarse como el más determinante en la influencia de la redistribución de esfuerzos en la estructura, y que ha provocado, en este caso, que las variaciones sean mayores en el vano izquierdo que en el derecho.

Estos tres factores sumados son los causantes de que la segunda planta sea la más afectada por los movimientos de la cimentación.

Como conclusión inmediata a este trabajo se deduce la importancia de utilizar un método de cálculo que considere la estructura junto con la presencia del terreno y que controle los movimientos de la cimentación, no solo en cuanto al valor del asiento máximo admisible, sino también al valor del asiento diferencial entre zapatas.

6. BIBLIOGRAFIA

1. BASSET, Luisa.- Una aproximación a la implementación de los efectos de la interacción suelo-estructura en el cálculo de edificios. *Tesis Doctoral E.T.S. Arquitectura de Valencia* (1992)
(En esta tesis se incluyen referencias bibliográficas sobre cálculo de asientos, cálculo de zapatas e interacción suelo-estructura.)