

# Desarrollo de Herramientas Optimizadas Para el Análisis de Discontinuidades en Guías

*Autor:* Ivan Antonio Mantilla Gaviria,

*Director 1:* Juan Vicente Balbastre Tejedor,

*Director 2:* Alejandro Díaz Morcillo

*Resumen* – En este trabajo se presenta el desarrollo de una herramienta híbrida para la solución de discontinuidades en guías, compuesta por la técnica de Mode Matching y el Método de los Elementos Finitos (MEF). Dicha herramienta se basa en la descomposición del problema en secciones, donde para cada una de ellas se calcula la Matriz de Dispersión Generalizada (MDG) mediante una de las técnicas ya mencionadas. La elección de la técnica aplicada viene dada por la geometría de cada sección. Se hace primeramente un planteamiento del estudio de discontinuidades con cada una de las técnicas de forma individual, luego se presenta una descripción para la solución con la herramienta híbrida. Finalmente, para contrastar los resultados acá obtenidos, se utilizan algunas de las herramientas comerciales más avanzadas de FD-TD (Finite Difference-Time Domain) y de MEF. También se presentan los tiempos de simulación en una CPU AMD Athlon(tm) XP 3000+ , 2.17GHz de procesador y 512MB de memoria RAM.

*Abstract* – In this master thesis a hybrid tool is developed to solve waveguide discontinuities by using the Mode Matching technique and the Finite Element Method (FEM). This tool is based on a problem structure division in sections. Each section is solved by one of the techniques, calculating its Generalized Scattering Matrix (GSM). The technique choice depends on the section geometry. Then the tool combines the independent solutions to obtain the general solution. Finally, some advanced commercial tools in FD-TD (Finite-Difference Time Domain) and MEF are used in order to contrast the results. Simulation times are shown for a CPU AMD Athlon(tm) XP 3000+, 2.17GHz of processor and 512MB of RAM.

Autor: Ivan Antonio Mantilla Gaviria, email: [imantilla@itaca.upv.es](mailto:imantilla@itaca.upv.es)

Director 1: Juan Vicente Balbastre Tejedor, email: [jbalbast@itaca.upv.es](mailto:jbalbast@itaca.upv.es)

Fecha de Entrega: 7 de Septiembre de 2007



**ÍNDICE**

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>4</b>
<b>I. La Matriz de Dispersión Generalizada (MDG).....</b>	<b>5</b>
I.1 Definición.....	5
<b>II. Análisis de Discontinuidades en Guías de Onda Mediante la Técnica de Mode Matching7</b>	<b>7</b>
II.1 Descripción de la Técnica .....	7
II.2 Planteamiento General .....	8
II.2.1 Superficie de discontinuidad igual a la superficie de la primera guía con excitación en ella misma (caso 1).....	8
II.2.2 Superficie de discontinuidad igual a la superficie de la segunda guía con excitación en la primera (caso 2).....	10
II.3 Planteamiento del Sistema de Ecuaciones.....	12
II.3.1 Truncamiento de las Series a un Número Finito de Modos .....	12
II.3.2 El Problema de la Convergencia Relativa.....	12
II.3.3 Notación Matricial.....	13
II.3.4 Elección del Sistema de Ecuaciones .....	15
II.4 Obtención de la MDG Mediante Mode Matching.....	16
II.5 Normalización de los Modos.....	18
<b>III. Análisis de Discontinuidades en Guías de Onda Mediante el Método de los Elementos Finitos.....</b>	<b>20</b>
III.1 Obtención de la MAG Mediante el MEF .....	21
III.2 Aplicación del MEF .....	22
III.2.1 Ecuación Diferencial y Condiciones de Contorno .....	23
III.2.2 Obtención de la Ecuación Integral Mediante el Método de Galerkin .....	24
III.2.3 Discretización de la Formulación Débil.....	26
III.3 Obtención de la MDG a Partir de la MAG en Líneas de Transmisión.....	26
<b>IV. Herramienta Híbrida Mode Matching-MEF .....</b>	<b>31</b>
<b>V. Resultados .....</b>	<b>32</b>
V.1 Mode Matching .....	32
V.2 Método de los Elementos Finitos (MEF) .....	34
V.3 Herramienta Híbrida.....	36
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>39</b>
<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>40</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>40</b>

## INTRODUCCIÓN

La caracterización de elementos de guiado de ondas es un punto muy importante para el diseño de estructuras de microondas. La simulación numérica de la respuesta de estos componentes permite el diseño de una gran variedad de estructuras como filtros, guías corrugadas, bocinas, iris, hornos, etc. Son muchos los trabajos que se han desarrollado a lo largo de las últimas décadas y que aún siguen siendo objeto de estudios, orientados hacia el cumplimiento de este vital objetivo, aplicando técnicas analíticas, numéricas y combinación de ellas, todos con un aspecto en común, el de obtener mayor exactitud en menor tiempo, característica tal que se resume en una frase: “*Eficiencia Computacional*”.

El elemento caracterizador utilizado en este trabajo es la Matriz de Dispersión Generalizada (MDG), la cual permite describir numéricamente la interacción entre todos los modos presentes en una estructura de microondas. Las estructuras aquí tratadas están compuestas por tramos de guías rectangulares y tramos de geometrías complejas.

En este trabajo se combinan dos técnicas para la solución de problemas electromagnéticos, una analítica, conocida como Mode Matching, y una numérica, conocida como el Método de los Elementos Finitos (MEF), para obtener de esta manera una herramienta que permita resolver problemas de microondas con una mejora en la eficiencia computacional.

Se utiliza cada una de estas técnicas de forma independiente en una sección geoméricamente separable de la estructura para obtener la MDG correspondiente. La técnica de Mode Matching debido a su gran componente analítica se limita a las secciones compuestas por guías rectangulares, y el MEF a las secciones restantes (que pueden ser secciones de guías homogéneas, inhomogéneas, etc.).

En el Capítulo I se hace una descripción de la MDG, mencionando los principales trabajos que se han realizado en este tema, definiciones, formulación matemática, etc. En el Capítulo II, se presenta el desarrollo para el análisis de discontinuidades mediante Mode Matching, se describe la técnica, se hace un planteamiento general de un problema con el cual se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver, se comentan los problemas que tiene la técnica y las soluciones planteadas por diversos autores para atenuarlos, se presenta la formulación para la obtención de la MDG mediante esta técnica, y aspectos muy importantes a tener en cuenta en la implementación. En el Capítulo III se desarrolla el MEF para este tipo de problemas. A diferencia del anterior, en este caso la MDG no se obtiene directamente, sino que se construye la Matriz de Admitancia Generalizada (MAG) con el MEF y, a partir de ella y mediante un procedimiento directo, se obtiene la MDG. En el Capítulo IV se presenta una breve descripción sobre la herramienta híbrida Mode Matching-MEF. Finalmente en el Capítulo V se presentan resultados de simulaciones para validar cada una de las técnicas por separado y la herramienta híbrida, comparando con un software comercial de FD-TD y de MEF.

## I. La Matriz de Dispersión Generalizada (MDG)

El concepto de Matriz de Dispersión Generalizada nace a finales de los años 60 en el grupo de Mitra [1]. Posteriormente, en los años 70 y 80, se desarrollan trabajos más profundos por parte de T.E. Rozzi [2-4]. En 1982 aparecen trabajos con aspecto más general de una variedad de autores, entre los que cabe citar a F. Arndt [5-7], G.L. James [8], T. Itoh [9, 10], y E. Kühn y V. Hombach [11].

La MDG describe la interacción mutua de  $n$  modos tanto en propagación como al corte, permitiendo de esta manera una caracterización electromagnética correcta de los elementos de microondas, como filtros, guías corrugadas, bocinas, iris, hornos, etc. Está estrechamente relacionada con la matriz de dispersión convencional  $[S_c]$  que se utiliza comúnmente en redes de microondas. La diferencia es que ésta tiene en cuenta sólo el modo fundamental y cada uno de sus parámetros  $S_{ij}$  son escalares, mientras que la MDG incluye tanto el modo fundamental como los de orden superior, siendo cada uno de sus parámetros matrices en lugar de escalares y su cálculo requiere de una técnica analítica o numérica.

La caracterización de una estructura de microondas compuesta por diferentes tramos de guías con discontinuidades complejas se basa en la descomposición de ésta en tramos de geometrías que contienen discontinuidades cuya complejidad es menor y cuyas soluciones pueden ser fácilmente calculadas. A continuación, se caracteriza cada una de esas sub-estructuras mediante la MDG correspondiente. Una vez obtenida cada una de las MDGs, se obtiene la MDG total por medio de las operaciones matriciales adecuadas.

### 1.1 Definición

Como se ha comentado ya, la MDG describe el comportamiento electromagnético de redes de microondas mediante relaciones modales. Para una mejor comprensión, obsérvese la “Fig.1”, la cual consiste en una red equivalente de dos accesos.

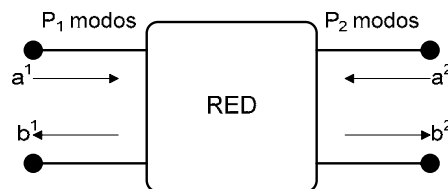


Fig.1. Red de dos accesos.

En ella  $a^i$  y  $b^i$  son las amplitudes complejas de los modos incidentes y reflejados en el acceso  $i$ . Se toman dos planos de referencia tales que la estructura a resolver quede entre ellos. Cada plano de referencia se trata como un puerto “físico” y se supone que cada uno de ellos está acompañado de infinitos puertos “modales”.

Se define la matriz de dispersión generalizada como:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \overline{\overline{S}}_{11(P_1 \times P_1)} & \overline{\overline{S}}_{12(P_1 \times P_2)} \\ \overline{\overline{S}}_{21(P_2 \times P_1)} & \overline{\overline{S}}_{22(P_2 \times P_2)} \end{bmatrix}_{(P_1+P_2) \times (P_1+P_2)} \quad (1)$$

la cual relaciona los modos incidentes y reflejados de los accesos de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \overline{b}_{(P_1 \times 1)}^1 \\ \overline{b}_{(P_2 \times 1)}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{S}}_{11(P_1 \times P_1)} & \overline{\overline{S}}_{12(P_1 \times P_2)} \\ \overline{\overline{S}}_{21(P_2 \times P_1)} & \overline{\overline{S}}_{22(P_2 \times P_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{a}_{(P_1 \times 1)}^1 \\ \overline{a}_{(P_2 \times 1)}^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde el énfasis superior de una línea denota un vector y la doble línea una matriz, mientras que los sub-índices de cada vector o matriz son sus respectivos tamaños, y:

$\overline{a}^1$ : Vector de amplitudes complejas de los  $P_1$  modos incidentes en el acceso 1.

$\overline{a}^2$ : Vector de amplitudes complejas de los  $P_2$  modos incidentes en el acceso 2.

$\overline{b}^1$ : Vector de amplitudes complejas de los  $P_1$  modos reflejados en el acceso 1.

$\overline{b}^2$ : Vector de amplitudes complejas de los  $P_2$  modos reflejados en el acceso 2.

Para el cálculo de la MDG es necesario calcular las amplitudes complejas de los modos salientes de los accesos ( $\overline{b}^1$  y  $\overline{b}^2$ ) por medio de alguna técnica analítica o numérica, dependiendo de las geometrías a tratar.

A manera de generalización, para el caso de un número  $N$  de accesos, se tiene la siguiente relación para el elemento  $S_{ij}$  de la MDG:

$$\overline{b}^i = \sum_{j=1}^N \overline{\overline{S}}_{ij} \cdot \overline{a}^j; \quad i = 1 \dots N \quad (3)$$

siendo  $\overline{b}^i$  un vector de amplitudes complejas de modos que se reflejan desde el acceso  $i$  y  $\overline{a}^j$  el vector de amplitudes complejas de modos que se propagan hacia el acceso  $j$ . Finalmente el tamaño de  $[\mathbf{S}]$  será de  $N \times N$  sub-matrices, y el de cada una de ellas será de  $P_i \times P_j$ , donde  $P_x$  es el número de modos utilizados en el acceso  $x$ .

## II. Análisis de Discontinuidades en Guías de Onda Mediante la Técnica de Mode Matching

El método de Mode Matching es una de las técnicas rigurosas más antiguas para la solución de discontinuidades en guías de onda. Esta técnica fue introducida en el año 1967 por Clarricoats y Slinn [12] e inmediatamente por Wexler [13], utilizando formulaciones más sistemáticas y organizadas para evaluar los problemas de dispersión de discontinuidades.

Esta técnica es muy útil cuando la geometría de la estructura puede identificarse como la unión de dos o más regiones, cada una perteneciente a un sistema de coordenadas separables. Esto significa que en cada región debe existir un conjunto bien definido de soluciones de las ecuaciones de Maxwell que satisfagan las condiciones de contorno excepto en la unión. Por esta razón la técnica de Mode Matching es muy utilizada para el análisis de discontinuidades en guías de onda transversales a la dirección de propagación, como las estudiadas en este trabajo.

Por otro lado, cabe destacar que una de las ventajas de esta técnica es que permite la solución de un problema con cierta complejidad geométrica, mediante la división de éste en secciones más sencillas, cuyos parámetros son conocidos o fácilmente calculables. El ámbito de aplicación de esta técnica es en estructuras que posean expresiones analíticas de los campos con una complejidad moderada, ya que de otra forma la complejidad analítica aumenta significativamente, hasta el punto de requerir apoyo de técnicas numéricas.

### II.1 Descripción de la Técnica

La técnica de Mode Matching consiste en expresar el campo eléctrico y magnético en ambos lados de una discontinuidad transversal como suma de los infinitos modos normales (soluciones ortonormales) de cada una de las secciones de guía de onda, con coeficientes desconocidos e imponer posteriormente las condiciones de continuidad de las componentes transversales de los campos [14, 15]. De este procedimiento se obtiene un sistema de ecuaciones que debe resolverse para obtener los coeficientes desconocidos.

Los campos transversales en una guía se expresan como:

$$\vec{E}_t^i = \sum_{n=1}^{P_i} v_n^i \cdot \vec{e}_n^{(i)} \quad (4)$$

$$\vec{H}_t^i = \sum_{n=1}^{P_i} i_n^i \cdot \vec{h}_n^{(i)} \quad (5)$$

Donde

$\vec{e}_n^{(i)}$ : Campo eléctrico transversal normalizado en amplitud en la guía  $i$ .

$\vec{h}_n^{(i)}$ : Campo magnético transversal normalizado en amplitud en la guía  $i$ .<sup>1</sup>

El subíndice  $n$  hace referencia al número de modo, incluyendo TE y TM.

Y  $v_n^i$  e  $i_n^i$  son los coeficientes de tensión y corriente respectivamente<sup>2</sup>, que se relacionan con las amplitudes de los modos incidentes y reflejados en una guía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{v}_n^1 &= \bar{a}_n^1 e^{-\gamma_n^1 z} + \bar{b}_n^1 e^{\gamma_n^1 z} \\ \bar{i}_n^1 &= \bar{a}_n^1 e^{-\gamma_n^1 z} - \bar{b}_n^1 e^{\gamma_n^1 z} \\ \bar{v}_n^2 &= \bar{a}_n^2 e^{\gamma_n^2 z} + \bar{b}_n^2 e^{-\gamma_n^2 z} \\ \bar{i}_n^2 &= \bar{a}_n^2 e^{\gamma_n^2 z} - \bar{b}_n^2 e^{-\gamma_n^2 z}\end{aligned}\tag{6}$$

## II.2 Planteamiento General

Por ser las estructuras de guías rectangulares el objeto de la utilización de Mode Matching en este trabajo, se ilustra la filosofía de esta técnica mediante una estructura formada por dos guías en cascada, exponiendo los dos posibles casos que de ahí se obtienen.

### II.2.1 Superficie de discontinuidad igual a la superficie de la primera guía con excitación en ella misma (caso 1)

Este caso se ilustra en la “Fig.2”.

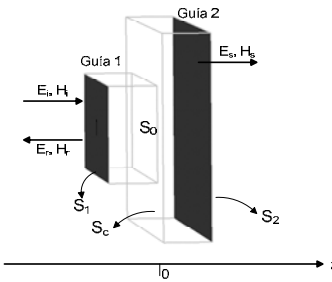


Fig.2. Guías rectangulares en cascada - caso 1.

Si se tiene un campo incidente  $\vec{E}_i = \vec{E}^{(1)+}$  que se propaga en la dirección  $+z$ , la discontinuidad en el plano  $z = 0$  produce un campo reflejado  $\vec{E}_r = \vec{E}^{(1)-}$  que se propaga en dirección  $-z$ , y un campo transmitido  $\vec{E}_s = \vec{E}^{(2)+}$  que se propaga en dirección  $+z$ . Las componentes transversales de estos campos quedan:

<sup>1</sup> La normalización de los campos se comenta en el siguiente apartado.

<sup>2</sup> No confundir con voltajes y corrientes modales, ni con tensión y corrientes normalizadas.



$$\vec{E}_t^{(1)} = \vec{E}_t^{(1)+} + \vec{E}_t^{(1)-} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^1 \cdot \vec{e}_m^{(1)} \cdot e^{-\gamma_m^{(1)} z} + b_m^1 \cdot \vec{e}_m^{(1)} \cdot e^{\gamma_m^{(1)} z} \quad (7)$$

$$\vec{H}_t^{(1)} = \vec{H}_t^{(1)+} + \vec{H}_t^{(1)-} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^1 \cdot \vec{h}_m^{(1)} \cdot e^{-\gamma_m^{(1)} z} - b_m^1 \cdot \vec{h}_m^{(1)} \cdot e^{\gamma_m^{(1)} z} \quad (8)$$

$$\vec{E}_t^{(2)} = \vec{E}_t^{(2)+} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cdot \vec{e}_n^{(2)} \cdot e^{-\gamma_n^{(2)} z} \quad (9)$$

$$\vec{H}_t^{(2)} = \vec{H}_t^{(2)+} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cdot \vec{h}_n^{(2)} \cdot e^{-\gamma_n^{(2)} z} \quad (10)$$

donde:

$a_m^1$ : Amplitud compleja del modo m incidente en la guía 1.

$b_m^1$ : Amplitud compleja del modo m reflejado en la guía 1.

$b_n^2$ : Amplitud compleja del modo n transmitido en la guía 2.

$\gamma_m^{(i)}$ : Constante de propagación del modo m en la guía i.

$\vec{e}_m^{(i)}$ : Campo eléctrico transversal normalizado en amplitud en la guía i.

$\vec{h}_m^{(i)}$ : Campo magnético transversal normalizado en amplitud en la guía i.

Las condiciones de contorno para los campos transversales en la discontinuidad son:

$$\vec{E}_t^{(2)}|_{z=0} = \begin{cases} \vec{E}_t^{(1)}|_{z=0} & \text{sobre } S_0 \\ 0 & \text{sobre } S_2 - S_0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\vec{H}_t^{(1)}|_{z=0} = \vec{H}_t^{(2)}|_{z=0} \quad \text{sobre } S_0 \quad (12)$$

Imponiendo (11)-(12) y desarrollando queda el siguiente sistema:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_m^1 + b_m^1) \cdot \vec{e}_m^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cdot \vec{e}_n^{(2)} \quad (13)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_m^1 - b_m^1) \cdot \vec{h}_m^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cdot \vec{h}_n^{(2)} \quad (14)$$

Los coeficientes  $b_m^1$  y  $b_n^2$  son desconocidos y  $a_m^1$  es el coeficiente de excitación del problema y, por lo tanto, conocido.

El sistema (13)-(14) no es como tal un sistema de ecuaciones, pues las funciones  $\vec{e}_m^{(i)}$  y  $\vec{h}_m^{(i)}$  tienen dependencia espacial con las variables (x,y). Por lo tanto, debe eliminarse esta dependencia

multiplicando vectorialmente<sup>1</sup> por  $\vec{h}_m^{(i)}$  y  $\vec{e}_m^{(i)}$  respectivamente, e integrando sobre la superficie de la discontinuidad a (13)-(14). Las expresiones que se obtienen después del procedimiento descrito se muestran en la Tabla 1.

Campo Eléctrico	Ec.	Campo Magnético	Ec.
$(a_m^1 + b_m^1) \cdot Q_{mm}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cdot B_{mn}$	(15)	$(a_m^1 - b_m^1) \cdot Q_{mm}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cdot A_{mn}$	(17)
$\sum_{m=1}^{\infty} (a_m^1 + b_m^1) \cdot A_{nm} = b_n^2 \cdot Q_{nn}^{(2)}$	(16)		

Tabla 1. Ecuaciones para la solución del caso 1.

Donde

$$Q_{mm}^{(1)} = \int_{S_1} \vec{e}_m^{(1)} \times \vec{h}_m^{(1)} \cdot \vec{ds} \quad y \quad Q_{nn}^{(2)} = \int_{S_2} \vec{e}_n^{(2)} \times \vec{h}_n^{(2)} \cdot \vec{ds} \quad (18)$$

$$B_{mn} = \int_{S_0} \vec{e}_n^{(2)} \times \vec{h}_m^{(1)} \cdot \vec{ds} \quad (19)$$

$$A_{nm} = \int_{S_0} \vec{e}_m^{(1)} \times \vec{h}_n^{(2)} \cdot \vec{ds} \quad y \quad A_{mn} = \int_{S_0} \vec{e}_m^{(1)} \times \vec{h}_n^{(2)} \cdot \vec{ds} \quad (20)$$

$Q_{mm}^{(1)}$  y  $Q_{nn}^{(2)}$  son integrales de acoplo entre los modos de la guía 1 y entre los modos de la guía 2, respectivamente, que sólo serán diferentes de cero cuando sea entre el mismo modo.  $B_{mn}$  y  $A_{nm}$  son integrales de acoplo entre los modos de la guía 1 y 2. La definición de  $A_{mn}$  es equivalente a la de  $A_{nm}$ .

La solución de este caso viene dada por una combinación entre una ecuación de campo eléctrico y la de campo magnético, es decir, un sistema formado por (15) y (17) ó (16) y (17). Sin embargo, como se demostrará más adelante, sólo una de estas combinaciones resulta útil.

### II.2.2 Superficie de discontinuidad igual a la superficie de la segunda guía con excitación en la primera (caso 2)

Otro caso de gran interés es el contrario al expuesto en la “Fig.2”, en el cual la excitación se encuentra en la guía de mayor sección, y la superficie de discontinuidad es igual a la superficie de la segunda guía. Este caso se ilustra en la “Fig.3”.

<sup>1</sup> No es la única forma de hacerlo, pues hay otros autores que utilizan un producto escalar.

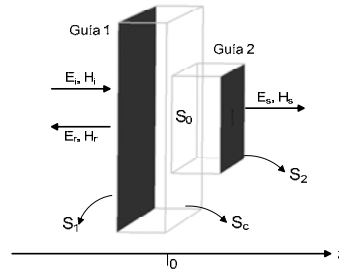


Fig.3. Guías rectangulares en cascada - caso 2.

El planteamiento del problema es similar al realizado en el caso 1, por lo que únicamente se muestra el resultado del desarrollo para este caso en la siguiente tabla

Campo Eléctrico	Ec.	Campo Magnético	Ec.
$(a_m^1 + b_m^1) \cdot Q_{mm}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cdot B_{mn}$	(21)	$\sum_{m=1}^{\infty} (a_m^1 - b_m^1) \cdot B_{nm} = b_n^2 \cdot Q_{nn}^{(2)}$	(23)
$\sum_{m=1}^{\infty} (a_m^1 + b_m^1) \cdot A_{nm} = b_n^2 \cdot Q_{nn}^{(2)}$	(22)		

Tabla 2. Ecuaciones para la solución del caso 2.

Donde

$$B_{nm} = \int_{S_0} \vec{e}_n^{(2)} \times \vec{h}_m^{(1)} \cdot \vec{ds} \quad (24)$$

$B_{nm}$  es una integral de acoplo entre los modos de la guía 1 y 2.

Al igual que en el caso 1, la solución de este caso viene dada por una combinación entre una ecuación de campo eléctrico y la de campo magnético, es decir, un sistema formado por (21) y (23) ó (22) y (23). Como se demostrará más adelante, también aquí sólo un de estas combinaciones resulta útil.

Hasta el momento se han desarrollado las expresiones de los campos, imponiendo las condiciones de contorno para obtener el sistema de ecuaciones a resolver, con el objetivo de calcular las amplitudes complejas de los modos reflejados y transmitidos en la discontinuidad de las guías. No obstante, las expresiones enunciadas en la Tabla 1 y en la Tabla 2 para los casos 1 y 2, respectivamente, han de enunciarse en otro formato para un mejor manejo al momento de la implementación computacional. Por lo tanto, se dedica el siguiente apartado al planteamiento del sistema de ecuaciones definitivo que se implementa en una galería de funciones que han sido desarrolladas para este trabajo.

### *II.3 Planteamiento del Sistema de Ecuaciones*

En este apartado se desarrolla el sistema de ecuaciones definitivo que se utiliza para el cálculo de las amplitudes complejas de los modos, enunciando uno a uno los aspectos que se deben tener en cuenta para este planteamiento, como son: la necesidad de truncar las series a un número finito de modos, la introducción de la notación matricial y la elección del sistema de ecuaciones final.

#### *II.3.1 Truncamiento de las Series a un Número Finito de Modos*

Hasta ahora se ha venido expresando los campos como un sumatorio de infinitos modos normales en cada guía, pero como es bien sabido, en el momento de su implementación es imposible el manejo de este tipo de series en un computador. Por lo tanto nace la necesidad de truncarlas a un número finito. Esto trae consigo un problema de convergencia en las soluciones conocido como la convergencia relativa, el cual se comenta en el apartado siguiente.

Se asume para cada guía un número finito de modos, siendo para la guía 1 un número  $M$  y para la guía 2 un número  $N$ . Por lo tanto, de ahora en adelante, los sub-índices  $m$  y  $n$  tendrán variación de  $m=1,2,\dots,M$  y  $n=1,2,\dots,N$ . Esto significa que se tiene para la discontinuidad un total de  $M$  modos incidentes,  $M$  modos reflejados y  $N$  modos transmitidos.

#### *II.3.2 El Problema de la Convergencia Relativa*

Como se ha comentado, la base del método de Mode Matching es la expansión del campo electromagnético en términos de series infinitas de modos normales. Debido a que la capacidad computacional es finita, a que la solución algebraica puede no corresponder a la solución física, y a que una serie sólo se puede truncar si es convergente, es de suma importancia asegurar la validez de la solución numérica, previamente a la simulación computacional del problema.

El problema de la convergencia relativa se debe a la necesidad de truncar varias series simultáneamente, y su efecto se ve representado en cuanto que los resultados numéricos convergen hacia diferentes valores y de manera diferente, dependiendo de cómo se trunquen las series. Por lo tanto, es muy importante poseer algún criterio para tratar de atenuar este problema.

El termino de convergencia relativa fue introducido por Mittra [16] en el año de 1963, y desde entonces son muchos los trabajos que se han desarrollado para plantear criterios que permitan la solución de este problema, entre los cuales cabe citar los desarrollos de Wexler [13], Masterman y Clarricoats [17], M. Leory [18], Mittra y Lee [19], y Sorrentino, *et al* [20], entre otros muchos.

Luego de hacer una revisión bibliográfica de los trabajos anteriormente mencionados, se ha decidido implementar el criterio expuesto en [19], con el cual y como se verá en el apartado de resultados, se han obtenido soluciones muy satisfactorias con apenas un número moderado de modos en cada guía. Este criterio se enuncia como se muestra a continuación:

$$\frac{N}{M} \leq \frac{A_{pequeña}}{A_{grande}} \quad (25)$$

Donde

$N$ : Número de modos en la guía de menor sección.

$M$ : Número de modos en la guía de mayor sección.

$A_{pequeña}$ : Área de la sección más pequeña.

$A_{grande}$ : Área de la sección más grande.

Se garantiza la convergencia óptima de la solución con  $N/M = A_{pequeña}/A_{grande}$ . Sin embargo, cuando no pueda establecerse la igualdad, se tiene que para  $N/M < A_{pequeña}/A_{grande}$  se obtienen resultados correctos, pero con una convergencia más lenta. Finalmente, para el caso  $N/M > A_{pequeña}/A_{grande}$  se obtienen resultados erróneos. Se tiene también que  $N$  debe ser lo suficientemente grande porque, de lo contrario, los resultados convergen pero hacia valores erróneos.

Por otra parte, tras hallar  $N$  y  $M$  mediante (25), se debe revisar que el último modo en cada guía no posea modos degenerados<sup>1</sup>, pues de ser así, han de tenerse en cuenta estos modos, con lo que  $N$  y/o  $M$  deberán aumentarse hasta evitar ese aspecto, cumpliendo al mismo tiempo la relación descrita por (25).

De lo anterior se puede ver que la tarea de calcular los valores de  $N$  y  $M$ , aunque no es algo complejo, tampoco es trivial. Por esta razón, para el desarrollo de este trabajo se ha creado una función que dados los valores iniciales de  $N$  y  $M$ , comprueba los modos degenerados mediante las frecuencias de corte en cada guía, y si los detecta recalcula  $N$  y  $M$ , garantizando al mismo tiempo que se cumpla la relación descrita por (25).

### II.3.3 Notación Matricial

Hasta el momento la notación implementada en las ecuaciones que se han desarrollado en los apartados anteriores ha sido una de tipo puntual, en el que cada variable representa un valor correspondiente a un subíndice. Para un planteamiento de un sistema de ecuaciones, esta forma de escritura es poco útil, por lo que es necesario utilizar una más adecuada.

La notación matricial compacta todas esas variables puntuales en vectores y matrices, de tamaños relacionados con el número de modos utilizados en las guías.

Se definen por lo tanto:

---

<sup>1</sup> Los modos degenerados son aquellos modos que poseen igual frecuencia de corte y, por tanto, misma constante de propagación.

$\bar{a}^1$ : Vector columna de dimensión  $M \times 1$ , cuyos elementos son las amplitudes complejas de los modos incidentes en la discontinuidad en la guía 1,  $a_m^1$ .

$\bar{b}^1$ : Vector columna de dimensión  $M \times 1$ , cuyos elementos son las amplitudes complejas de los modos reflejados en la discontinuidad en la guía 1,  $b_m^1$ .

$\bar{b}^2$ : Vector columna de dimensión  $N \times 1$ , cuyos elementos son las amplitudes complejas de los modos transmitidos en la discontinuidad en la guía 2,  $b_n^2$ .

$\bar{Q}^{(1)}$ : Matriz diagonal de dimensión  $M \times M$ , cuyos elementos son la evaluación de la matriz de acoplamiento entre modos en la guía 1,  $Q_{mm}^{(1)}$ , para los sub-índices  $m$  y  $m$ .

$\bar{Q}^{(2)}$ : Matriz diagonal de dimensión  $N \times N$ , cuyos elementos son la evaluación de la matriz de acoplamiento entre modos en la guía 2,  $Q_{nn}^{(2)}$ , para los sub-índices  $n$  y  $n$ .

$\bar{A}$ : Matriz de dimensión  $N \times M$ , cuyos elementos son la evaluación de la matriz de acoplamiento entre modos de la guía 1 y 2,  $A_{nm}$ , para los sub-índices  $n$  y  $m$ .

$\bar{B}$ : Matriz de dimensión  $M \times N$ , cuyos elementos son la evaluación de la matriz de acoplamiento entre modos de la guía 1 y 2,  $B_{mn}$ , para los sub-índices  $m$  y  $n$ .

Cabe anotar que para la definición de la matriz  $\bar{B}$  y la matriz  $\bar{A}$ , se ha tomado como referencia las integrales definidas por (19) y (20<sup>1</sup>), respectivamente, de tal forma que las integrales definidas la parte derecha de (20) y por (21), se denotan por  $\bar{A}^t$  y  $\bar{B}^t$ , respectivamente. Donde la  $t$  representa la traspuesta de la matriz.

Ahora, teniendo definida la notación matricial, el paso siguiente es reemplazarla en las expresiones de la Tabla 1 y la Tabla 2, como sigue a continuación:

#### Caso 1

Campo Eléctrico	Ec.	Campo Magnético	Ec.
$\bar{a}^1 + \bar{b}^1 = [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{B} \cdot \bar{b}^2$	(26)	$\bar{a}^1 - \bar{b}^1 = [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{A}^t \cdot \bar{b}^2$	(28)
$[\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A} \cdot (\bar{a}^1 + \bar{b}^1) = \bar{b}^2$	(27)		

Tabla 3. Ecuaciones para la solución del caso 1 en notación matricial.

#### Caso 2

Campo Eléctrico	Ec.	Campo Magnético	Ec.
ver ecuación (26)		$[\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{B}^t \cdot (\bar{a}^1 - \bar{b}^1) = \bar{b}^2$	(29)
ver ecuación (27)			

Tabla 4. Ecuaciones para la solución del caso 2 en notación matricial.

Como se había comentado anteriormente, para ambos casos las ecuaciones de campo eléctrico son iguales, por lo que en la Tabla 4 no se han redefinido sino que sencillamente se hace referencia

<sup>1</sup> La expresión de la parte izquierda.

a ellas en la Tabla 3. Es de suma importancia tener en cuenta que las matrices del caso 1 no son las del caso 2, pues en este último la guía 1 es la guía 2 del primer caso y viceversa.

El siguiente apartado se dedica a combinar estas ecuaciones para obtener el sistema definitivo que permita resolver cada uno de los casos.

#### II.3.4 Elección del Sistema de Ecuaciones

Ya se ha comentado brevemente en los apartados II.2.1 y II.2.2 que el sistema final de ecuaciones se obtiene de una combinación entre una ecuación de campo eléctrico y una de campo magnético, y que también para cada caso hay una que no es útil. Por lo tanto, este apartado se dedica a obtener la combinación de las expresiones que permitan formar un sistema adecuado para la solución de los casos, demostrando lo antes dicho.

Tendiendo en cuenta que en la guía 1 se tienen  $M$  modos y en la guía 2  $N$ , para el caso 1 se tiene el siguiente desarrollo

Tomando la combinación entre (26) y (28) y eliminando  $\bar{b}^1$  se tiene

$$2\bar{a}^1 = [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot (\bar{B} + \bar{A}^t) \cdot \bar{b}^2 \quad (30)$$

Es un sistema de  $M \times N$  ( $M$  ecuaciones con  $N$  incógnitas), y, por tanto, no útil.

Tomando (27) y (28) y reemplazando  $\bar{b}^2$  se tiene

$$\left( [I] - [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{A}^t \cdot [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A} \right) \cdot \bar{a}^1 = \left( [I] + [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{A}^t \cdot [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A} \right) \cdot \bar{b}^1 \quad (31)$$

Siendo un  $[I]$  una matriz identidad de dimensiones  $M \times M$  y (31) un sistema de  $M \times M$  ( $M$  ecuaciones con  $M$  incógnitas), conocido como formulación de primera especie, cuya solución da los valores de las amplitudes de los modos reflejados en la discontinuidad. Por medio de (27) se obtienen las amplitudes de los modos transmitidos.

Para esta misma combinación se puede también despejar  $\bar{b}^1$  de (28) y reemplazarlo en (27), como se muestra a continuación:

$$\left( [I] - [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A} \cdot [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{A}^t \right) \cdot \bar{b}^2 = 2[\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A} \cdot \bar{a}^1 \quad (32)$$

Siendo para esta parte  $[I]$  una matriz identidad de dimensiones  $N \times N$  y (32) un sistema de  $N \times N$  ( $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas), cuya solución proporciona los valores de las amplitudes de los modos transmitidos en la discontinuidad. Por medio de (28) se obtienen las amplitudes de los modos reflejados.

Las expresiones (31) y (32) son equivalentes. Por lo tanto, la elección de la una o la otra estará determinada por el número incógnitas, que viene marcado por el número de modos ( $N$  y  $M$ ) que se tome en cada guía.

En este trabajo se han hecho pruebas con ambas formulaciones y se ha comprobado que arrojan exactamente los mismos resultados, notándose apenas una despreciable reducción de tiempo al utilizar (31).

De manera similar que en apartado II.2.2, tampoco se muestra el desarrollo para el caso 2. Las expresiones definitivas para ambos casos se muestran a continuación.

<b>Caso 1</b>	<b>Ec.</b>
$\left([I] - [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{A}^t \cdot [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A}\right) \cdot \bar{a}^1 = \left([I] + [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{A}^t \cdot [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A}\right) \cdot \bar{b}^1$	(31)
$\left([I] - [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A} \cdot [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{A}^t\right) \cdot \bar{b}^2 = 2[\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{A} \cdot \bar{a}^1$	(32)

Tabla 5. Sistemas de ecuaciones definitivos para la solución del caso 1.

<b>Caso 2</b>	<b>Ec.</b>
$\left([\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{B} \cdot [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{B}^t + [I]\right) \cdot \bar{b}^1 = \left([\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{B} \cdot [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{B}^t - [I]\right) \cdot \bar{a}^1$	(33)
$2[\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{B}^t \cdot \bar{a}^1 = \left([I] + [\bar{Q}^{(2)}]^{-1} \cdot \bar{B}^t \cdot [\bar{Q}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{B}\right) \cdot \bar{b}^2$	(34)

Tabla 6. Sistemas de ecuaciones definitivos para la solución del caso 2.

#### II.4 Obtención de la MDG Mediante Mode Matching

Como se definió en (3), los coeficientes de amplitudes complejas de los modos en una discontinuidad se relacionan mediante cada uno de los elementos de la MDG. Hasta el momento se ha visto cómo calcular estos coeficientes por medio de la técnica de Mode Matching, por lo que resta únicamente calcular cada uno de los parámetros de la MDG mediante la relación descrita por (3).

Este apartado está dedicado a describir cómo calcular cada uno de los elementos que conforman la MDG para un caso general de dos guías de onda rectangulares. Se toma como referencia el siguiente esquema compuesto por dos guías rectangulares en cascada.

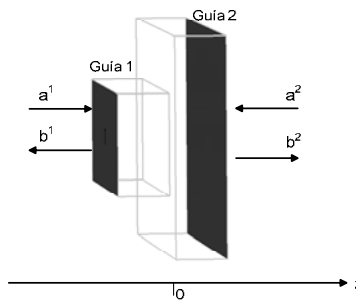


Fig.4. Red de dos guías rectangulares.



El objetivo es solucionar la discontinuidad entre las dos guías de la “Fig.4”. A continuación se desarrollan las expresiones para el cálculo de cada uno de los elementos de la MDG. Esta se definía en (2) como

$$\begin{bmatrix} \bar{b}^1 \\ \bar{b}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11} & \bar{\bar{S}}_{12} \\ \bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}^1 \\ \bar{a}^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

La definición de cada uno de los parámetros de la MDG es análoga a la de los elementos de la matriz de dispersión convencional<sup>1</sup> utilizada comúnmente en redes de microondas. Recordando que cada elemento de la MDG es una matriz y que cada excitación en las guías viene dada por un conjunto de modos representados por un vector, se definen cada uno de ellos como

$$\bar{\bar{S}}_{11} = \left. \frac{\bar{b}^1}{\bar{a}^1} \right|_{\bar{a}^2=0} \quad (36)$$

$$\bar{\bar{S}}_{21} = \left. \frac{\bar{b}^2}{\bar{a}^1} \right|_{\bar{a}^2=0} \quad (37)$$

$$\bar{\bar{S}}_{12} = \left. \frac{\bar{b}^1}{\bar{a}^2} \right|_{\bar{a}^1=0} \quad (38)$$

$$\bar{\bar{S}}_{22} = \left. \frac{\bar{b}^2}{\bar{a}^2} \right|_{\bar{a}^1=0} \quad (39)$$

En las relaciones (36)-(39), la función de la operación de división no es como tal la de dividir dos vectores, ya que vectorialmente hablando no es una operación válida. Tampoco es una división punto a punto, pues como se observa el resultado es una matriz y no un vector como se obtendría en realidad. No obstante, la intención de estas expresiones es enunciar el principio básico de los parámetros de dispersión de una guía, el cual dice que cada uno de estos viene dado por una relación entre amplitudes modales cuando uno de los puertos está acoplado (sólo hay excitación en un puerto y no hay modos reflejados en el otro). Por lo tanto, para obtener el valor numérico de cada elemento de la MDG, han de enunciarse cada uno de ellos mediante relaciones puntuales, tal y como se muestra a continuación:

$$S_{11}(i_1, j_1') = \left. \frac{b^1(i_1)}{a^1(j_1')} \right|_{a^1(j_1 \neq j_1')=0} \quad (40)$$

---

<sup>1</sup> Podría llamarse matriz de dispersión monomodo

$$S_{21}(i_2, j'_1) = \frac{b^2(i_2)}{a^1(j'_1)} \Big|_{a^1(j_1 \neq j'_1)=0} \quad (41)$$

$$S_{12}(i_1, j'_2) = \frac{b^1(i_1)}{a^2(j'_2)} \Big|_{a^2(j_2 \neq j'_2)=0} \quad (42)$$

$$S_{22}(i_2, j'_2) = \frac{b^2(i_2)}{a^1(j'_2)} \Big|_{a^2(j_2 \neq j'_2)=0} \quad (43)$$

Donde

$$i_1 = 1, 2 \dots M$$

$$j_1 = 1, 2 \dots M$$

$$i_2 = 1, 2 \dots N$$

$$j_2 = 1, 2 \dots N$$

$j'_1$  y  $j'_2$  son valores puntuales de los sub-índices  $j_1$  y  $j_2$  respectivamente.

Según (40)-(43) es evidente que para el cálculo de los parámetros de dispersión es necesario la solución de los casos 1 y 2, desarrollados en el apartado II.2 y II.3 respectivamente. Más en concreto, para los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  ha de resolverse el caso 1, y para el  $S_{12}$  y  $S_{22}$  el caso 2.

Finalmente, mediante (40)-(43), se puede comprobar también las dimensiones de cada parámetro matriz que se enuncia en (2)

$$\begin{bmatrix} \bar{b}_{(M \times 1)}^1 \\ \bar{b}_{(N \times 1)}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11(M \times M)} & \bar{S}_{12(M \times N)} \\ \bar{S}_{21(N \times M)} & \bar{S}_{22(N \times N)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}_{(M \times 1)}^1 \\ \bar{a}_{(N \times 1)}^2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Ya calculada la MDG correspondiente a la discontinuidad, el paso siguiente es combinarla con las correspondientes MDG de las guías, para obtener una MDG total que caracterice toda la estructura de la "Fig.4".

## II.5 Normalización de los Modos

En este apartado se expone un aspecto de suma importancia en el momento de implementar la técnica de Mode Matching, como es la normalización de los modos. Esto se hace con el fin de obtener todos los parámetros de la MDG normalizados, ya que las guías en cada puerto pueden ser distintas.

Las expresiones para los modos transversales en una guía rectangular son [21-23]

$$\vec{E}_{tpq}^{TE}(x, y) = \hat{x} \frac{q}{b} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} - \hat{y} \frac{p}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \quad (45)$$

$$\vec{E}_{tpq}^{TM}(x, y) = \hat{x} \frac{p}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} + \hat{y} \frac{q}{b} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \quad (46)$$

Donde  $p$  y  $q$  son las variaciones horizontales y verticales respectivamente, correspondientes a cada modo,  $a$  y  $b$  son las dimensiones horizontal y vertical respectivamente, de la guía. Para los campos magnéticos se cumple la siguiente relación, la cual es válida para ambos modos.

$$\vec{H}_t(x, y) = \frac{1}{Z} (-\vec{E}_y \hat{x} + \vec{E}_x \hat{y}) \quad (47)$$

Donde  $Z$  es la impedancia asociada al modo, que se puede calcular mediante las expresiones analíticas para las guías rectangulares.

Dado que las guía en cada puerto pueden ser diferentes, se deben normalizar las expresiones (45) y (46) respecto a la siguiente expresión

$$\int_S \vec{e}_m^{(i)} \times \vec{h}_n^{(i)} \cdot \vec{ds} = \delta_{mn} \quad (48)$$

Donde  $m$  y  $n$  representan un número de modo, que tiene asociados unos subíndices  $p$  y  $q$ .

Resolviendo (48) se obtiene el factor de normalización que debe acompañar a las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos. Esta solución se muestra a continuación y es válida tanto para modos TE como para TM

$$N_{pq} = \sqrt{\frac{v_p v_q Z_m}{q^2 \frac{a}{b} + p^2 \frac{b}{a}}} \quad (49)$$

Donde  $Z_m$  es la impedancia asociada el modo  $m$ .

Introduciendo la constante definida por (49) en las expresiones (45) y (46), se obtienen los campos normalizados:

$$\vec{e}_{tpq}^{TE}(x, y) = N_{pq} \left( \hat{x} \frac{q}{b} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} - \hat{y} \frac{p}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \right) \quad (50)$$

$$\vec{e}_{tpq}^{TM}(x, y) = N_{pq} \left( \hat{x} \frac{p}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} + \hat{y} \frac{q}{b} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \right) \quad (51)$$

La relación (47) para el campo magnético y eléctrico es igualmente válida en las expresiones normalizadas.

### III. Análisis de Discontinuidades en Guías de Onda Mediante el Método de los Elementos Finitos

En este apartado se describe el desarrollo de un método de análisis de discontinuidades en guía de onda mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF). Se pretende obtener la MDG, al igual que en el apartado de Mode Matching. La diferencia en este punto es que este método no se ha limitado al estudio de discontinuidades en guías rectangulares, sino que posee un carácter más general. Las estructuras que se pueden tratar con este método son como la mostrada en la “Fig.5”.

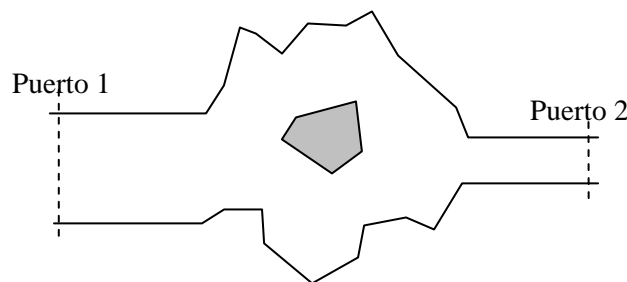


Fig.5. Estructuras tratadas con el MEF.

Esto es:

- Redes de dos puertos.
- Discontinuidades con formas arbitrarias, que pueden o no contener elementos dieléctricos, metálicos, con formas igualmente arbitrarias.
- Puertos situados en el plano  $XY$ , por lo que el eje de propagación es el eje  $z$ .

En esta aplicación del MEF, la MDG se obtiene a partir de la Matriz de Admitancia Generalizada (MAG), en lugar de obtenerla directamente como se ha hecho en el caso de Mode Matching. Las razones para utilizar este procedimiento son:

- La imposición de las condiciones de contorno en los puertos para ondas incidentes da lugar a matrices del sistema de ecuaciones lineales (SEL) diferentes para cada modo. Sin embargo, en el cálculo de matrices de admitancia, la matriz del SEL es común a todos los modos, modificándose únicamente el vector de términos independientes. Si el número de modos es elevado, esto puede ser una característica a explotar en aras de reducir el coste computacional del método.
- La imposición de onda incidente en un puerto (obtención de matriz  $S$ ) da lugar a una pérdida de dispersión de la matriz del SEL, lo que aumenta los requerimientos de memoria y el coste computacional del problema.
- En la obtención de matrices de admitancia la imposición de la condición de contorno de pared eléctrica (paredes metálicas de la estructura y cortocircuito del puerto

correspondiente) es natural, es decir, no es necesario comprimir el sistema y después de su resolución expandirlo.

- El cálculo de la MDG a partir de la MAG es prácticamente inmediato, con un coste computacional que no depende de las incógnitas del problema, sino únicamente del número de modos empleados.

En los siguientes apartados se describe la aplicación del MEF para la obtención de la MAG, la obtención de la MDG a partir de ésta, y algunas consideraciones importantes en la programación.

### III.1 Obtención de la MAG Mediante el MEF

Sea una red de dos accesos como la mostrada en la “Fig.6”, donde en el acceso 1 se consideran  $M$  modos y en el acceso 2  $N$  modos. Para simplificar, se supone que en el puerto 1 se toma  $M=2$  y en el puerto 2  $N=3$ . La MAG será entonces

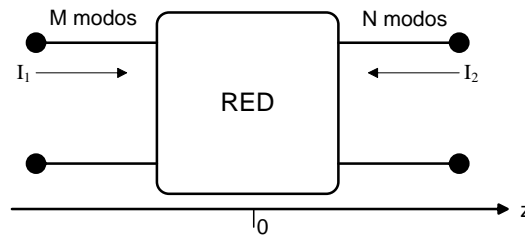


Fig.6. Red de dos accesos.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11}^{11} & Y_{12}^{11} & Y_{11}^{12} & Y_{12}^{12} & Y_{13}^{12} \\ Y_{21}^{11} & Y_{22}^{11} & Y_{21}^{12} & Y_{22}^{12} & Y_{23}^{12} \\ Y_{11}^{21} & Y_{12}^{21} & Y_{11}^{22} & Y_{12}^{22} & Y_{13}^{22} \\ Y_{21}^{21} & Y_{22}^{21} & Y_{21}^{22} & Y_{22}^{22} & Y_{23}^{22} \\ Y_{31}^{21} & Y_{32}^{21} & Y_{31}^{22} & Y_{32}^{22} & Y_{33}^{22} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Donde para cada elemento  $Y_{mn}^{ij}$ , los superíndices  $j, i$  indican los puertos donde se aplica la excitación de campo eléctrico y donde se mide el campo magnético, respectivamente. El puerto cortocircuitado será el contrario al excitado. Los índices  $n$  y  $m$  indican el modo  $n$  en el puerto de excitación y el modo  $m$  en el puerto de medida respectivamente.

De lo anterior se tiene que el planteamiento general del problema consiste en:

Para  $n=1,2,\dots,M$

1. Imponer el campo eléctrico de un modo  $n$  en el puerto 1 y cortocircuitar (condición de pared eléctrica) el puerto 2.
2. Resolver 1 con la formulación de campo magnético mediante el MEF.
3. A partir del campo magnético obtenido en el puerto 1, calcular los  $Y_{mn}^{11}$ , con  $m=1,2,\dots,M$ , mediante las integrales de acoplo correspondientes.

4. A partir del campo magnético obtenido en el puerto 2, calcular los  $Y_{mn}^{21}$ , con  $m=1,2,\dots,N$ , mediante las integrales de acoplo correspondientes.

Para  $n=1,2,\dots,N$

1. Imponer el campo eléctrico de un modo  $n$  en el puerto 2 y cortocircuitar (condición de pared eléctrica) el puerto 1.
2. Resolver 1 con la formulación de campo magnético mediante el MEF.
3. A partir del campo magnético obtenido en el puerto 1, calcular los  $Y_{mn}^{12}$ , con  $m=1,2,\dots,M$ , mediante las integrales de acoplo correspondientes.
4. A partir del campo magnético obtenido en el puerto 2, calcular los  $Y_{mn}^{22}$ , con  $m=1,2,\dots,N$ , mediante las integrales de acoplo correspondientes.

Las integrales de acoplo son el cálculo de la proyección de la componente de campo magnético tangencial al puerto de medida sobre el modo considerado. Así, por ejemplo, el parámetro de admitancia  $Y_{12}^{21}$  se obtiene excitando el puerto 1 con el modo 2, calculando mediante el MEF el campo magnético en la estructura y, concretamente, en el puerto 2, realizando la integral de acoplo con el campo magnético del modo 1 en la guía 2 en el puerto 2 y normalizando respecto al producto escalar de campos magnéticos, es decir,

$$Y_{12}^{21} = \frac{\iint_{p_2} \vec{H}_t^2 \cdot \vec{h}_1^2 \cdot \vec{ds}}{\iint_{p_2} \vec{h}_1^2 \cdot \vec{h}_1^2 \cdot \vec{ds}} \quad (53)$$

Donde  $\vec{H}_t^2$  es el campo magnético transversal en el puerto 2 y  $\vec{h}_1^2$  el campo magnético normalizado del modo 1 en el puerto 2. Se expresa de forma general (53), como

$$Y_{mn}^{ij} = \frac{\iint_{S_i} \vec{H}_t^i \cdot \vec{h}_m^i \cdot \vec{ds}}{\iint_{S_i} \vec{h}_m^i \cdot \vec{h}_m^i \cdot \vec{ds}} \quad (54)$$

cuando se ha excitado el puerto  $j$  con el campo eléctrico del modo  $n$  de la guía  $j$ .

Como se vio en el apartado II, si se normalizan adecuadamente las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos en las guías, la ecuación (54) es directamente la admitancia normalizada respecto de las impedancias de las guías en los puertos  $i$  y  $j$ .

### III.2 Aplicación del MEF

El análisis de estructuras de guiado de ondas requiere la resolución de la ecuación de onda vectorial para obtener los campos asociados a ellas. El método de los elementos finitos permite realizar este estudio en estructuras de geometría arbitraria, inhomogéneas y anisótropas mediante la transformación del problema diferencial en un problema algebraico. Esta transformación se basa en

la formulación de una ecuación integral equivalente a la ecuación diferencial inicial, y en la descomposición del dominio del problema en subdominios o elementos donde la función incógnita se interpola o aproxima mediante unas determinadas funciones base asociadas a cada elemento. Esta interpolación genera el problema algebraico equivalente.

De los procedimientos habitualmente utilizados para obtener la ecuación integral, se describe aquí el método de Galerkin o de los residuos ponderados. La alternativa a éste es la formulación variacional o de Ritz. Esta última se basa en la teoría del cálculo variacional y cuenta, por tanto, con una base matemática muy sólida. Sin embargo, dado que ambas son formulaciones equivalentes, se ha elegido la primera pues resulta conceptualmente más sencilla y no requiere nociones de cálculo variacional.

### III.2.1 Ecuación Diferencial y Condiciones de Contorno

La ecuación diferencial de partida para el análisis de estructuras de guiado que no presentan fuentes en su interior es la ecuación de onda vectorial homogénea en cualquiera de los campos  $\vec{E}$  o  $\vec{H}$ :

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \vec{E} - \omega^2 \epsilon \vec{E} = 0 \quad (55)$$

$$\nabla \times \epsilon^{-1} \nabla \times \vec{H} - \omega^2 \mu \vec{H} = 0 \quad (56)$$

Donde  $\mu$  y  $\epsilon$  son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica, respectivamente (son, en general, tensores complejos de dimensiones 3x3 que permiten el estudio de problemas con materiales anisótropos y con pérdidas), y  $\omega$  es la frecuencia angular.

A las ecuaciones (55)-(56) se les deben añadir las condiciones de contorno en la frontera del dominio del problema:

$$\hat{n} \times \vec{E} \Big|_{PE} = 0 \quad (57)$$

$$\hat{n} \times \vec{H} \Big|_{PM} = 0 \quad (58)$$

$$\vec{E} \Big|_{puerto\ i}^{modo\ n} = f(x, y) \quad (59)$$

Donde  $PE$  y  $PM$  indican condición de pared eléctrica y pared magnética, respectivamente, y (59) indica la imposición de un determinado modo  $n$  en el puerto  $i$  correspondiente.

Dado que el interés es obtener el campo magnético, es lógico que se emplee la formulación correspondiente (56).

### III.2.2 Obtención de la Ecuación Integral Mediante el Método de Galerkin

Para obtener una expresión integral equivalente a la ecuación diferencial (56) mediante el método de Galerkin, se multiplica esta ecuación por una función de test  $\vec{T}$  que cumpla las condiciones de contorno en la frontera del dominio del problema:

$$\vec{T} \cdot [\nabla \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H})] - \omega^2 \vec{T} \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \quad (60)$$

$$\hat{n} \times \vec{T}|_{PE} = 0, \text{ formulación en campo eléctrico} \quad (61)$$

$$\hat{n} \times \vec{T}|_{PM} = 0, \text{ formulación en campo magnético} \quad (62)$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad (63)$$

Donde  $\vec{A} = \varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}$  y  $\vec{B} = \vec{T}$ , se tiene

$$(\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \cdot (\nabla \times \vec{T}) + \nabla \cdot [(\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \times \vec{T}] - \omega^2 \vec{T} \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \quad (64)$$

Integrando (64) en el volumen  $\Omega$  del problema bajo estudio, se obtiene la siguiente expresión integral

$$\iiint_{\Omega} (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \cdot (\nabla \times \vec{T}) \cdot \vec{d}\Omega + \iiint_{\Omega} \nabla \cdot [(\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \times \vec{T}] \cdot \vec{d}\Omega - \omega^2 \iiint_{\Omega} \vec{T} \cdot (\mu \vec{H}) \cdot \vec{d}\Omega = 0 \quad (65)$$

Ahora, aplicando el teorema de la divergencia, (65) se transforma en

$$\iiint_{\Omega} (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \cdot (\nabla \times \vec{T}) \cdot \vec{d}\Omega + \oint_{\Gamma} [(\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \times \vec{T}] \cdot \vec{d}\Gamma - \omega^2 \iiint_{\Omega} \vec{T} \cdot (\mu \vec{H}) \cdot \vec{d}\Omega = 0 \quad (66)$$

Descomponiendo la integral de superficie de la parte izquierda de (66), entre los distintos tipos de condiciones de contorno (pared eléctrica, pared magnética y puerto excitado) se tiene



$$\oint_{\Gamma} [(\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \times \vec{T}] \cdot d\vec{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \hat{n} \cdot [(\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \times \vec{T}] d\Gamma \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} \hat{n} \cdot [(\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \times \vec{T}] d\Gamma = \\ & \iint_{PM} (\vec{T} \times \hat{n}) \cdot (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) d\Gamma + \iint_{PE} [\hat{n} \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H})] \cdot \vec{T} d\Gamma + \iint_{\Gamma_{excit}} [\hat{n} \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H})] \cdot \vec{T} d\Gamma \end{aligned} \quad (68)$$

Teniendo en cuenta la segunda ecuación de Maxwell en regiones sin fuentes:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} = j\omega \varepsilon \vec{E} \quad (69)$$

La ecuación (68) queda, por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} \hat{n} \cdot [(\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \times \vec{T}] d\Gamma = \\ & \iint_{PM} (\vec{T} \times \hat{n}) \cdot (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) d\Gamma + \iint_{PE} j\omega (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{T} d\Gamma + \iint_{\Gamma_{excit}} j\omega (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{T} d\Gamma \end{aligned} \quad (70)$$

Las integrales en el contorno con condición de pared eléctrica o magnética se anulan, ya que en pared magnética

$$\hat{n} \times \vec{T} = 0 \quad (71)$$

Y en pared eléctrica

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad (72)$$

Con lo que este tipo de condiciones se imponen de forma natural haciendo cero este término en la zona del contorno donde se da esa condición, esto es, paredes metálicas de la estructura y puerto en cortocircuito. Por lo tanto, la expresión final de la formulación débil es

$$\iiint_{\Omega} (\varepsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) \cdot (\nabla \times \vec{T}) \cdot d\vec{\Omega} - \omega^2 \iiint_{\Omega} \vec{T} \cdot (\mu \vec{H}) \cdot d\vec{\Omega} = -j\omega \iint_{\Gamma_{excit}} (\hat{n} \times \vec{E}^i) \cdot \vec{T} d\Gamma \quad (73)$$

Multiplicando ambos términos por  $\varepsilon_0$ , queda

$$\iiint_{\Omega} (\varepsilon_r^{-1} \nabla \times \vec{H}) \cdot (\nabla \times \vec{T}) \cdot \vec{d}\Omega - k_0^2 \iiint_{\Omega} \vec{T} \cdot (\mu_r \vec{H}) \cdot \vec{d}\Omega = -j\omega\varepsilon_0 \iint_{\Gamma_{excit}} (\hat{n} \times \vec{E}^i) \cdot \vec{T} d\Gamma \quad (74)$$

### III.2.3 Discretización de la Formulación Débil

Tras la generación de la malla o discretización del dominio tridimensional en  $n_e$  elementos tetraédricos, (74) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \iiint_{\Omega^e} (\varepsilon_{re}^{-1} \nabla \times \vec{H}^e) \cdot (\nabla \times \vec{T}^e) \cdot \vec{d}\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_e} k_0^2 \iiint_{\Omega^e} \vec{T}^e \cdot (\mu_{re} \vec{H}^e) \cdot \vec{d}\Omega^e \\ = -j\omega\varepsilon_0 \sum_{c=1}^{n_c} \iint_{\Gamma_{excit}^c} (\hat{n} \times \vec{E}^{ic}) \cdot \vec{T}^c d\Gamma^c \end{aligned} \quad (75)$$

Donde  $n_c$  es el número de elementos triangulares en el puerto de excitación y las funciones  $\vec{H}^e$  y  $\vec{T}^e$ , así como las propiedades  $\varepsilon_{re}$  y  $\mu_{re}$ , están definidas en el dominio del elemento  $e$ .

La interpolación utilizada es la interpolación vectorial, lineal y conforme en rotacional sobre tetraedros descrita en [24]. Allí también se puede encontrar cómo se obtienen los distintos elementos de la matriz  $A$  y el vector de términos independientes  $b$  que definen el SEL.

Las expresiones utilizadas para los campos eléctricos y magnéticos para el MEF deben ser las desarrolladas en el apartado II.5.1 de los campos normalizados para que los parámetros de admitancia en (54) se encuentren ya normalizados respecto a las impedancias de las guías.

### III.3 Obtención de la MDG a Partir de la MAG en Líneas de Transmisión

La obtención de la MDG a partir de la MAG viene descrita por el planteamiento de cuatro ecuaciones básicas con las que se obtienen los coeficientes de amplitudes en relación con los parámetros de admitancia.

Al imponer en el puerto 1 el modo  $n$  se tiene en ese puerto para el campo eléctrico en cada uno de los posibles  $m$  modos:

$$a_{mn}^{11} e^{-\gamma_m^1 z_1} + b_{mn}^{11} e^{\gamma_m^1 z_1} = \delta_{mn} \quad (76)$$

Y para el campo magnético:

$$\frac{a_{mn}^{11}}{Z_m^1} e^{-\gamma_m^1 z_1} - \frac{b_{mn}^{11}}{Z_m^1} e^{\gamma_m^1 z_1} = Y_{mn}^{11} \quad (77)$$

Análogamente, en el puerto 2 se tiene para el campo eléctrico:

$$a_{mn}^{21} e^{\gamma_m^2 z_2} + b_{mn}^{21} e^{-\gamma_m^2 z_2} = 0 \quad (78)$$

Y para el campo magnético:

$$\frac{a_{mn}^{21}}{Z_m^2} e^{\gamma_m^2 z_2} - \frac{b_{mn}^{21}}{Z_m^2} e^{-\gamma_m^2 z_2} = Y_{mn}^{21} \quad (79)$$

Donde se ha tenido en cuenta que la corriente se define entrante al cuadripolo y, por tanto en (79) se han cambiado los signos.

Por otra parte, al imponer en el puerto 2 el modo  $n$  se tiene en el puerto 1 para el campo eléctrico en cada uno de los posibles  $m$  modos:

$$a_{mn}^{12} e^{-\gamma_m^1 z_1} + b_{mn}^{12} e^{\gamma_m^1 z_1} = 0 \quad (80)$$

Y para el campo magnético:

$$\frac{a_{mn}^{12}}{Z_m^1} e^{-\gamma_m^1 z_1} - \frac{b_{mn}^{12}}{Z_m^1} e^{\gamma_m^1 z_1} = Y_{mn}^{12} \quad (81)$$

Análogamente, en el puerto 2 se tiene para el campo eléctrico:

$$a_{mn}^{22} e^{\gamma_m^2 z_2} + b_{mn}^{22} e^{-\gamma_m^2 z_2} = \delta_{mn} \quad (82)$$

Y para el campo magnético:

$$\frac{a_{mn}^{22}}{Z_m^2} e^{\gamma_m^2 z_2} + \frac{b_{mn}^{22}}{Z_m^2} e^{-\gamma_m^2 z_2} = Y_{mn}^{22} \quad (83)$$

Donde de nuevo se ha tenido en cuenta el sentido de la corriente.

Ahora, despejando y sustituyendo adecuadamente en las ecuaciones (76)-(83) se pueden obtener las expresiones de los coeficientes  $a_{mn}^{ij}$  y  $b_{mn}^{ij}$ . Estos quedan como se muestra a continuación

$$a_{mn}^{11} = \frac{1}{2}(\delta_{mn} + Y_{mn}^{11}Z_m^1)e^{\gamma_m^1 z_1} \quad (84)$$

$$b_{mn}^{11} = \frac{1}{2}(\delta_{mn} - Y_{mn}^{11}Z_m^1)e^{-\gamma_m^1 z_1} \quad (85)$$

$$a_{mn}^{21} = \frac{1}{2}Y_{mn}^{21}Z_m^2e^{-\gamma_m^2 z_2} \quad (86)$$

$$b_{mn}^{21} = \frac{1}{2}Y_{mn}^{21}Z_m^2e^{\gamma_m^2 z_2} \quad (87)$$

$$a_{mn}^{12} = \frac{1}{2}Y_{mn}^{12}Z_m^1e^{\gamma_m^1 z_1} \quad (88)$$

$$b_{mn}^{12} = -\frac{1}{2}Y_{mn}^{12}Z_m^1e^{-\gamma_m^1 z_1} \quad (89)$$

$$a_{mn}^{22} = \frac{1}{2}(\delta_{mn} + Y_{mn}^{22}Z_m^2)e^{-\gamma_m^2 z_2} \quad (90)$$

$$b_{mn}^{22} = \frac{1}{2}(\delta_{mn} - Y_{mn}^{22}Z_m^2)e^{\gamma_m^2 z_2} \quad (91)$$

Una vez conocidos estos coeficientes se pueden hallar los coeficientes de un modo  $m$ , tanto para una onda entrante como para una saliente, en ambos puertos, cuando se excita el puerto 1 con  $N_1$  modos con pesos  $p_n^1$  y el puerto 2 con  $N_2$  modos con pesos  $p_n^2$ , esto es:

$$a_m^1 = \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{11}p_n^1 + \sum_{n=1}^{N_2} a_{mn}^{12}p_n^2 \quad (92)$$

$$a_m^2 = \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{21}p_n^1 + \sum_{n=1}^{N_2} a_{mn}^{22}p_n^2 \quad (93)$$

$$b_m^1 = \sum_{n=1}^{N_1} b_{mn}^{11}p_n^1 + \sum_{n=1}^{N_2} b_{mn}^{12}p_n^2 \quad (94)$$

$$b_m^2 = \sum_{n=1}^{N_1} b_{mn}^{21}p_n^1 + \sum_{n=1}^{N_2} b_{mn}^{22}p_n^2 \quad (95)$$

Incorporando en (92)-(95) las expresiones (84)-(91) y expresándolas en forma matricial se tiene

$$\bar{a}^1 = \frac{1}{2}E_1 \cdot (I + Z_1 \cdot Y^{11}) \cdot \bar{p}^1 + \frac{1}{2}E_1 \cdot Z_1 \cdot Y^{12} \cdot \bar{p}^2 \quad (96)$$

$$\bar{a}^2 = \frac{1}{2}E_{-2} \cdot Z_2 \cdot Y^{21} \cdot \bar{p}^1 + \frac{1}{2}E_{-2} \cdot (I + Z_2 \cdot Y^{22}) \cdot \bar{p}^2 \quad (97)$$

$$\bar{b}^1 = \frac{1}{2}E_{-1} \cdot (I - Z_1 \cdot Y^{11}) \cdot \bar{p}^1 - \frac{1}{2}E_{-1} \cdot Z_1 \cdot Y^{12} \cdot \bar{p}^2 \quad (98)$$

$$\bar{b}^2 = -\frac{1}{2}E_2 \cdot Z_2 \cdot Y^{21} \cdot \bar{p}^1 + \frac{1}{2}E_2 \cdot (I - Z_2 \cdot Y^{22}) \cdot \bar{p}^2 \quad (99)$$

Donde se han definido las siguientes matrices  $E$  y  $Z$  como

$$E_{\pm 1} = \begin{bmatrix} e^{\pm \gamma_1^1 z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\pm \gamma_2^1 z_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\pm \gamma_m^1 z_1} \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$E_{\pm 2} = \begin{bmatrix} e^{\pm \gamma_1^2 z_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\pm \gamma_2^2 z_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\pm \gamma_m^2 z_2} \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Z_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Z_m^1 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} Z_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Z_m^2 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Agrupando (96)-(99) se obtienen dos sistemas de ecuaciones, de donde se obtiene finalmente la MDG.

$$\begin{bmatrix} \bar{a}^1 \\ \bar{a}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_1 \cdot (I + Z_1 \cdot Y^{11}) & \frac{1}{2}E_1 \cdot Z_1 \cdot Y^{12} \\ \frac{1}{2}E_{-2} \cdot Z_2 \cdot Y^{21} & \frac{1}{2}E_{-2} \cdot (I + Z_2 \cdot Y^{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{p}^1 \\ \bar{p}^2 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{b}^1 \\ \bar{b}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_{-1} \cdot (I - Z_1 \cdot Y^{11}) & -\frac{1}{2}E_{-1} \cdot Z_1 \cdot Y^{12} \\ -\frac{1}{2}E_2 \cdot Z_2 \cdot Y^{21} & \frac{1}{2}E_2 \cdot (I - Z_2 \cdot Y^{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{p}^1 \\ \bar{p}^2 \end{bmatrix} \quad (105)$$

Despejando el vector  $[p]$  en (104) y sustituyéndolo en (105) se obtiene la relación entre ondas entrantes y salientes para todos los modos en las guías, es decir la MDG.

$$\begin{bmatrix} \bar{b}^1 \\ \bar{b}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_{-1} \cdot (I - Z_1 \cdot Y^{11}) & -\frac{1}{2}E_{-1} \cdot Z_1 \cdot Y^{12} \\ -\frac{1}{2}E_2 \cdot Z_2 \cdot Y^{21} & \frac{1}{2}E_2 \cdot (I - Z_2 \cdot Y^{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_1 \cdot (I + Z_1 \cdot Y^{11}) & \frac{1}{2}E_1 \cdot Z_1 \cdot Y^{12} \\ \frac{1}{2}E_{-2} \cdot Z_2 \cdot Y^{21} & \frac{1}{2}E_{-2} \cdot (I + Z_2 \cdot Y^{22}) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}^1 \\ \bar{a}^2 \end{bmatrix} \quad (106)$$

De donde se observa claramente que, según (2),

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_{-1} \cdot (I - Z_1 \cdot Y^{11}) & -\frac{1}{2}E_{-1} \cdot Z_1 \cdot Y^{12} \\ -\frac{1}{2}E_2 \cdot Z_2 \cdot Y^{21} & \frac{1}{2}E_2 \cdot (I - Z_2 \cdot Y^{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_1 \cdot (I + Z_1 \cdot Y^{11}) & \frac{1}{2}E_1 \cdot Z_1 \cdot Y^{12} \\ \frac{1}{2}E_{-2} \cdot Z_2 \cdot Y^{21} & \frac{1}{2}E_{-2} \cdot (I + Z_2 \cdot Y^{22}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (107)$$

Fijando el origen de  $z$  en cada puerto, esto es  $z_1 = z_2 = 0$ , las matrices  $E_1$ ,  $E_{-1}$ ,  $E_2$ , y  $E_{-2}$  se convierten en matrices identidad, por lo que (107) puede ser escrita como

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I - Z_1 \cdot Y^{11}) & -\frac{1}{2}Z_1 \cdot Y^{12} \\ -\frac{1}{2}Z_2 \cdot Y^{21} & \frac{1}{2}(I - Z_2 \cdot Y^{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I + Z_1 \cdot Y^{11}) & \frac{1}{2}Z_1 \cdot Y^{12} \\ \frac{1}{2}Z_2 \cdot Y^{21} & \frac{1}{2}(I + Z_2 \cdot Y^{22}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (108)$$

En realidad, los parámetros  $Y_{mn}^{ij}$  calculados, debido a la normalización de los modos en los puertos (ver apartado II.5.1), son realmente  $\sqrt{Z_m^j} \sqrt{Z_n^i} Y_{mn}^{ij}$ , es decir, ya incorporan la impedancia  $Z_n^i$  y, además se encuentran normalizados. Por tanto, se puede escribir la MDG de la siguiente manera

$$[S] = \begin{bmatrix} I - Y^{11} & -Y^{12} \\ -Y^{21} & I - Y^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I + Y^{11} & Z_1 \cdot Y^{12} \\ Y^{21} & I + Y^{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (109)$$

De manera más compacta la ecuación (109) queda finalmente

$$[S] = (I - \bar{Y}) \cdot (I + \bar{Y})^{-1} \quad (110)$$

Donde  $\bar{Y}$  es la MAG obtenida mediante el MEF.

#### IV. Herramienta Híbrida Mode Matching-MEF

La herramienta híbrida que en este trabajo se plantea se basa en la descomposición de un problema de discontinuidades en tramos, resolviendo cada uno de ellos de forma independiente con Mode Matching o el MEF según sea su geometría.

Las estructuras tratadas en este trabajo constan de una sección de discontinuidades con guías rectangulares y otras con secciones de geometrías complejas. Las secciones de guías rectangulares se resuelven mediante Mode Matching y las restantes con el MEF. Se obtiene mediante cada método la MDG correspondiente y, mediante una secuencia iterativa, se combinan cada una de ellas hasta llegar a una MDG que caracterice todo el sistema. El procedimiento de combinación se describe a continuación.

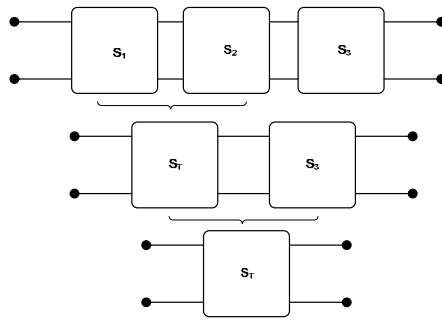


Fig.7. Combinación de MDGs.

Sea la “Fig.7” una secuencia de MDGs obtenidas de forma independiente con Mode Matching o el MEF, donde  $S_1$  y  $S_2$  están dadas de la siguiente manera

$$[S_1] = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11} & \bar{\bar{S}}_{12} \\ \bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{22} \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{33} & \bar{\bar{S}}_{34} \\ \bar{\bar{S}}_{43} & \bar{\bar{S}}_{44} \end{bmatrix} \quad (112)$$

Utilizando un procedimiento algebraico que combina  $[S_1]$  y  $[S_2]$ , la  $S_T$  queda:

$$\bar{\bar{S}}_T = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11} + \bar{\bar{S}}_{12}\Delta_1\bar{\bar{S}}_{33}\bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{12}\Delta_1\bar{\bar{S}}_{34} \\ \bar{\bar{S}}_{43}\Delta_2\bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{43}\Delta_2\bar{\bar{S}}_{22}\bar{\bar{S}}_{34} + \bar{\bar{S}}_{44} \end{bmatrix} \quad (113)$$

Donde

$$\Delta_1 = (I - \bar{\bar{S}}_{33}\bar{\bar{S}}_{22})^{-1} \quad (114)$$

$$\Delta_2 = (I - \bar{\bar{S}}_{22}\bar{\bar{S}}_{33})^{-1} \quad (115)$$

## V. Resultados

### V.1 Mode Matching

En la “Fig.8” se muestra una estructura típica de guías de onda, formada por dos tramos de guías rectangulares vacías. Se ha realizado la simulación utilizando 8 modos en la guía 1 y 23 en la guía 2, con un barrido de 200 puntos en frecuencia entre 2-5GHz.

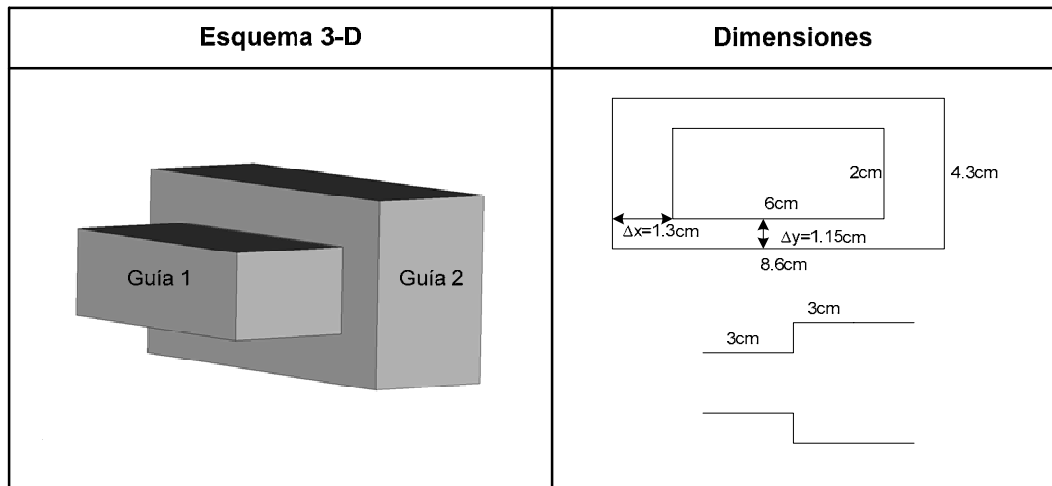


Fig.8. Estructura simulada con Mode Matching.

Se muestra en la “Fig.9” los parámetros de dispersión correspondientes al acoplo entre el primer modo de cada guía, es decir el elemento (1,1) de la MDG, con respecto al barrido de frecuencia ya mencionado. Por razones de espacio se muestra únicamente los resultados para el elemento (1,1) de la MDG, pero los resultados son igualmente correctos para cualquier otra combinación de modos.

Se puede observar como los resultados obtenidos con Mode Matching se ajustan de manera muy exacta a los obtenidos con el software comercial de FD-TD (CST Microwave Studio®<sup>1</sup>). En la siguiente tabla se muestran los tiempos de simulación que requirió cada método

Método	Tiempo Total (s)	Modos guía 1	Modos guía 2
Mode Matching	10.65	8	23
FD-TD	142	4	5

Tabla 7. Tiempos de simulación para Mode Matching y FD-TD.

Se tiene una reducción del tiempo de simulación en una escala promedio de 13:1 (FD-TD: Mode Matching), por lo que es evidente la mejora sustancial en la eficiencia computacional que se consigue con Mode Matching en relación a una técnica numérica, para este tipo de problemas.

<sup>1</sup> Computer Simulation Technology – [www.cst.com](http://www.cst.com)



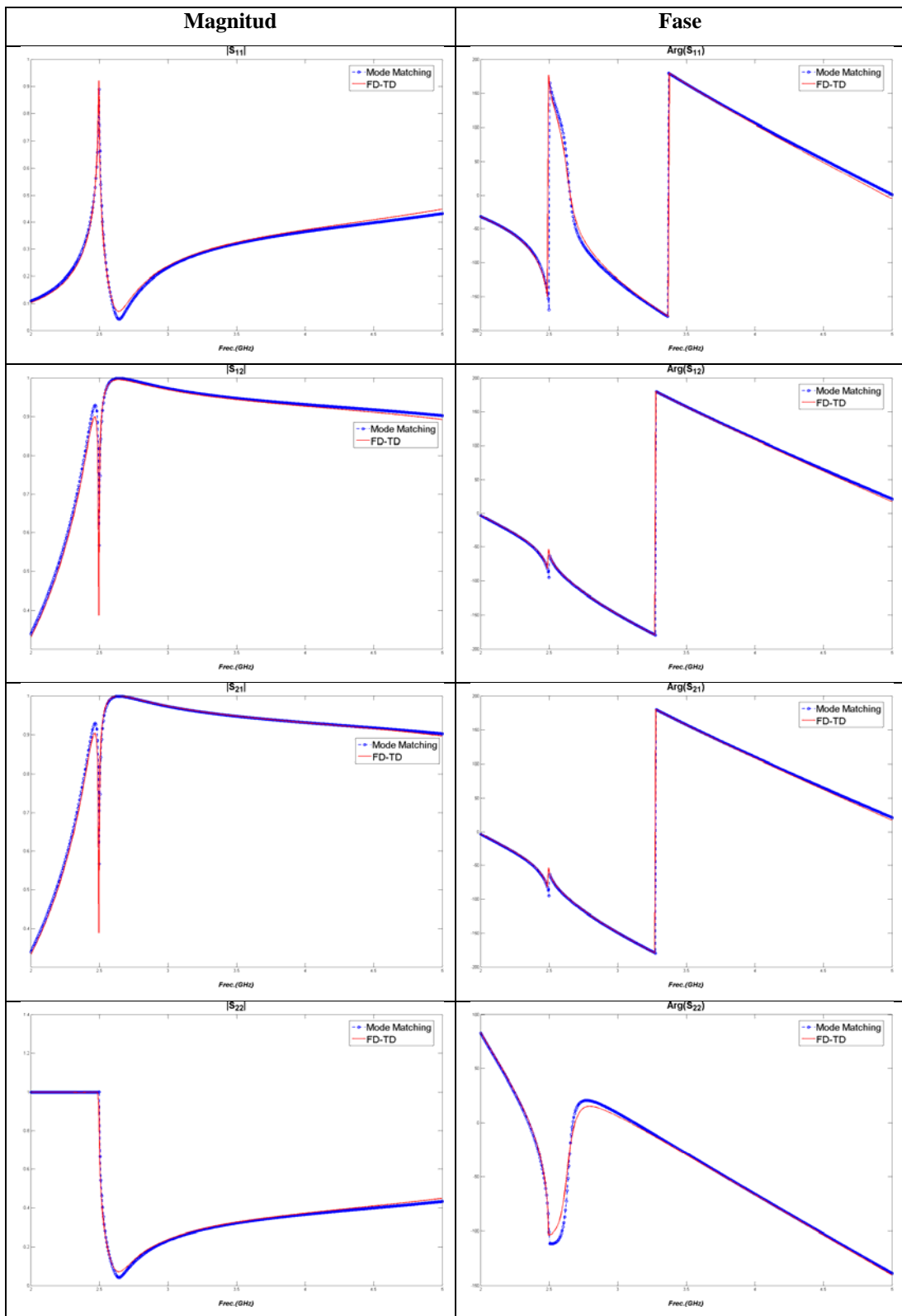


Fig.9. Comparativa Mode Matching - FD-TD.

## V.2 Método de los Elementos Finitos (MEF)

En la “Fig.10” se muestra una estructura conformada por un tramo de guía y un poste metálico en forma de cilindro centrado. Se ha realizado una simulación utilizando 33 modos en ambos puertos, con un barrido de 200 puntos en frecuencia entre 2-6 GHz.

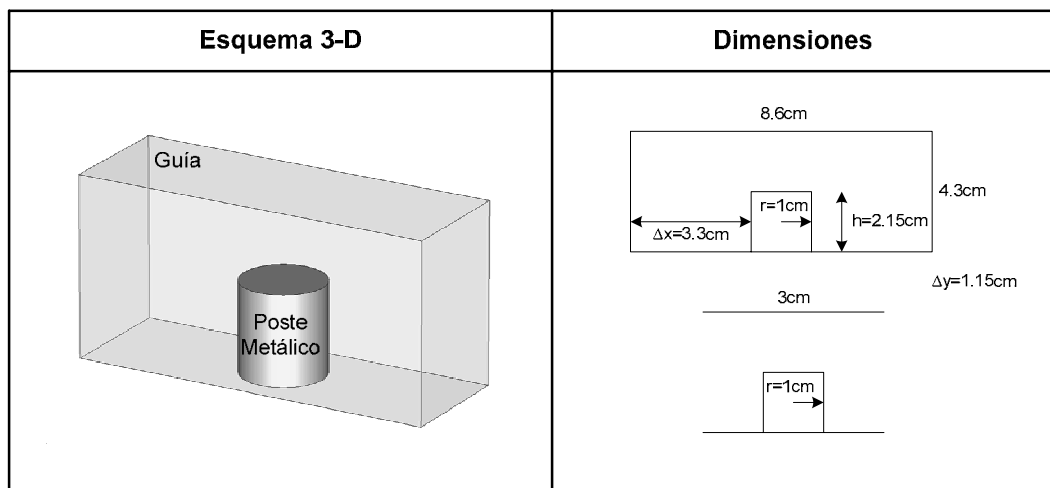


Fig.10. Estructura simulada con el MEF.

Se muestra en la “Fig.10” los parámetros de dispersión correspondientes al acoplo entre el primer modo de cada guía, es decir el elemento (1,1) de la MDG, con respecto al barrido de frecuencia ya mencionado. Al igual que el apartado anterior, por razones de espacio se muestra únicamente los resultados para el elemento (1,1) de la MDG, pero los resultados son igualmente correctos para cualquier otra combinación de modos.

Se puede observar como los resultados obtenidos con el MEF se ajustan de manera muy aproximada a los obtenidos con el software comercial de FD-TD. Algunas pequeñas desviaciones en altas frecuencias entre el MEF y FD-TD son debidas a la elección de un número menor de modos en FD-TD. En la siguiente tabla se muestran los tiempos de simulación que requirió cada método

Método	Tiempo Total(s)	Modos puerto 1	Modos puerto 2
MEF	11600 (3.22 horas)	33	33
FD-TD	30000 (8.33 horas)	23	23

Tabla 8. Tiempos de simulación para MEF y FD-TD.

Es preciso resaltar que las simulaciones realizadas con el software comercial de FD-TD en principio tomaban tiempos menores que el MEF, pero sus resultados no convergían, por lo que se

tuvo que refinar el mallado y aumentar el número de modos en cada puerto, hecho que generó el aumento de los tiempos.

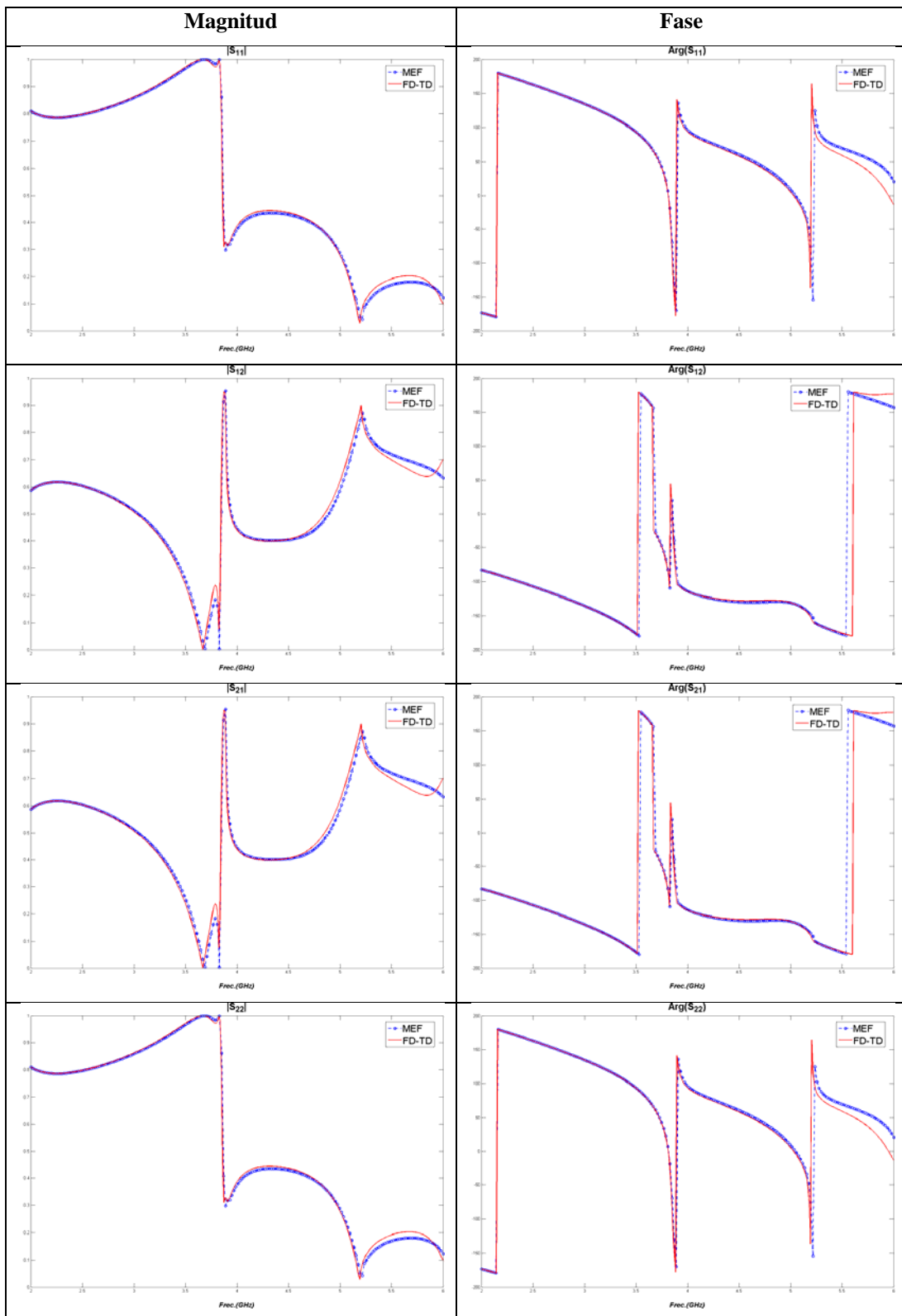


Fig.11. Comparativa MEF - FD-TD.

### V.3 Herramienta Híbrida

En la “Fig.12” se muestra una estructura para validar la herramienta híbrida, compuesta por un tramo de guías rectangulares vacías como las que se muestran en la “Fig.8”, y por un tramo de guía con poste metálico como el mostrado en la “Fig.10”. Para esta simulación se ha hecho un barrido de 200 puntos en frecuencia entre 2-6 GHz.

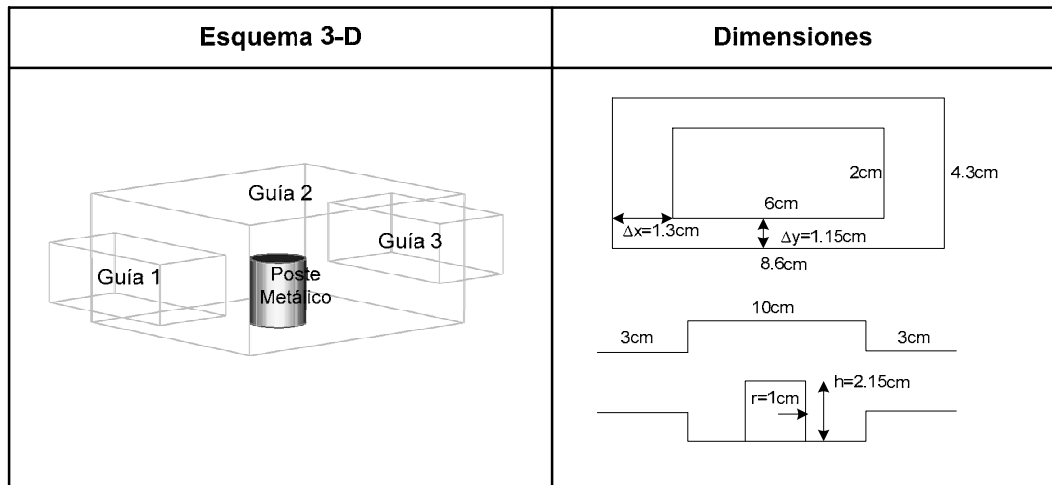


Fig.12. Estructura simulada con la herramienta híbrida.

Como se comentó en el apartado IV, la herramienta híbrida consiste en descomponer el problema en partes y resolver cada una de ellas mediante Mode Matching o el MEF. A continuación se muestra la descomposición del problema y el método utilizado para obtener la MDG de cada sección.

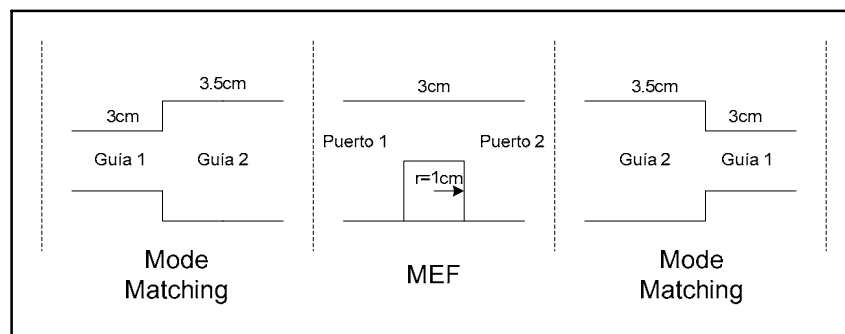


Fig.13. Descomposición del problema.

Para la primera parte se han tomado 16 modos en la guía 1 y 33 en la guía 2, en la segunda parte se han tomado 33 modos en ambos puertos, y, por ultimo, se observa que la tercera parte es un caso girado en el eje de propagación, de la primera parte, por lo que su MDG se obtiene por un simple cambio de variables que no implica la realización de nuevas simulaciones.

En la “Fig.14” se muestran los parámetros de dispersión para esta estructura. Estos resultados de manera similar que en los apartados anteriores, hacen referencia al elemento (1,1) de la MDG.

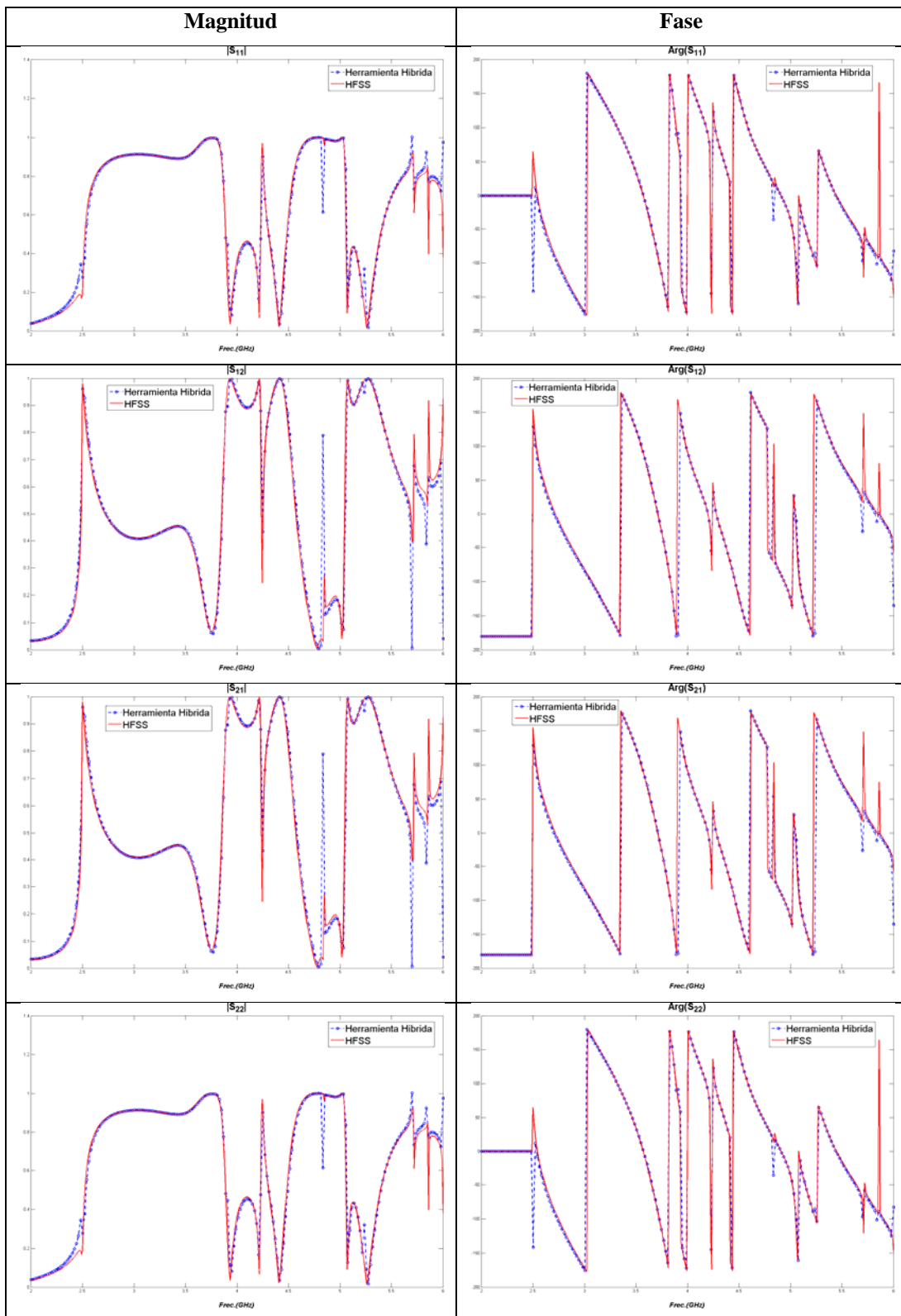


Fig.14. Comparativa Herramienta Híbrida - FD-TD.

Para este caso los resultados son validados con una herramienta comercial de MEF (HFSS<sup>1</sup>).

Los resultados obtenidos con la herramienta híbrida se ajustan de manera muy exacta a los conseguidos con la herramienta comercial de MEF. Debido a limitaciones en la capacidad computacional, para este último se han utilizado 3 modos en cada puerto, por lo que las diferencias apreciadas en la “Fig.14” son debidas a la falta de un número mayor de modos en la simulación.

En la Tabla 9 se muestran los tiempos de simulación para este caso. Se ve claramente la mejora en la eficiencia computacional aportada por la herramienta híbrida. La reducción del tiempo requerido es de un factor de 4:1 (MEF comercial: Herramienta Híbrida).

<b>Método</b>		<b>Tiempo Total (s)</b>	<b>Modos</b>	<b>Modos</b>
Herramienta Híbrida	Mode Matching	16.67	Guía 1: 8	Guía 2: 33
	MEF	11600 (3.22 horas)	Puerto 1: 33	Puerto 2: 33
	<b>Total</b>	<b>11616.67 (3.226 horas)</b>	--	--
HFSS		45648 (12.68 horas)	Puerto 1: 3	Puerto 2: 3

Tabla 9. Tiempos de simulación para herramienta híbrida y FD-TD.

Otro aspecto muy importante a resaltar para la herramienta acá descrita, es la versatilidad con la que cuenta, pues el número de modos se puede aumentar aún más para obtener resultados con mayor exactitud, aspecto que ha sido prácticamente imposible conseguir con el software comercial, en el mismo equipo descrito en el resumen de este trabajo.

---

<sup>1</sup> High-Frequency Structure Simulator – Copyright© 1984-2005 Ansoft Corporation , [www.ansoft.com](http://www.ansoft.com)

## CONCLUSIONES

Se ha descrito una herramienta para el análisis de discontinuidades en guías de onda, compuesta por una técnica analítica conocida como Mode Matching y una numérica conocida como el Método de los Elementos Finitos. Esta herramienta ha utilizado como elemento caracterizador a la Matriz de Dispersión Generalizada (MDG), la cual permite describir la interacción mutua entre los modos propagados y al corte en una estructura de microondas.

Para cada técnica por separado se ha presentado la definición formal, el desarrollo de la formulación matemática que las rige, el ámbito de aplicación, el planteamiento del problema y posterior solución.

La obtención de la MDG mediante la técnica de Mode Matching presenta una alta eficiencia computacional al no requerir la evaluación de complejas aproximaciones numéricas, característica que al tiempo la provee de gran exactitud. Por otra parte, posee el problema de la convergencia relativa, para el cual se ha presentado una de las opciones utilizadas para atenuarla.

La aplicación del MEF en la solución de problemas electromagnéticos, presenta su gran ventaja en cuanto la geometría de las estructuras aumenta significativamente su complejidad, ya que al ser un método numérico no requiere el desarrollo analítico de las ecuaciones de Maxwell. Para la obtención de la MDG mediante el MEF, se ha pasado intencionalmente por un punto intermedio: la Matriz de Admitancia Generalizada (MAG); se han mencionado las razones que justifican este procedimiento entre las que cabe resaltar la conservación de la dispersión de las matrices del Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL), aspecto que hace más eficiente la solución del problema.

Por último, se han presentado resultados para validar cada una de las técnicas y la herramienta híbrida que aquí se ha descrito, mostrándose en los dos primeros casos la comparativa con un software comercial de FD-TD, y para el último con MEF. Estos resultados permiten ver la gran ganancia en eficiencia computacional que se obtiene al dividir un problema en secciones y resolver cada una de ellas con el método adecuado.

Cada una de las técnicas acá descritas por separado junto con la herramienta híbrida, presentan en todos los casos una mejora significativa en la eficiencia computacional con respecto a los productos comerciales utilizados.

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres por todo el apoyo moral que en la distancia me brindan, a mis tutores por sus invaluable enseñanzas y consejos que han ayudado a finalizar este trabajo, y a todas aquellas personas que directa e indirectamente han aportado un grano de arena en este tiempo.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Glenn F. Vanblaricum and R. Mittra., "A Modified Residue-Calculus Technique for Solving a Class of Boundary Value Problems Part I: Waveguide Discontinuities," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-17, pp. 302-309, June 1969.
- [2] T. E. Rozzi, "Equivalent Network for Interacting Thick Inductive Irises," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-20, pp. 323-330, May 1972.
- [3] T. E. Rozzi and W. F. G. Mecklenbräuker., "Wide-Band Network Modeling of Interacting Inductive Irises and Steps," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-23, pp. 235-245, Feb. 1975.
- [4] M. S. Navarro, T. E. Rozzi, and Y. T. Lo., "Propagation in a Rectangular Waveguide Periodically Loaded with Resonant Irises," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-28, pp. 857-865, Aug. 1980.
- [5] H. Patzelt and F. Arndt., "Double-Plane Steps in Rectangular Waveguides and Their Applications for Transformers, Irises, and Filters," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-30, pp. 771-776, May 1982.
- [6] R. Vahldieck, J. Bornemann, F. Arndt, and D. Grauerholz., "W-Band low-Insertion-Loss E-Plane Filter," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-32, pp. 133-135, Jan. 1984.
- [7] F. Arndt, U. Tucholke, and T. Wriedt, "Broadband Dual-depth E-plane Corrugated Square Waveguide Polariser," *Electronics Letters*, vol. 20, pp. 458-459, May 1984.
- [8] G. L. James., "On the Problem of Applying Mode-Matching Techniques in Analyzing Conical Waveguide Discontinuities," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-31, pp. 718-723, Sep. 1983.
- [9] Y.-C. Shih, T. Itoh, and L. Q. Bui., "Computer-Aided Design of Millimeter-Wave E-Plane Filters," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-31, pp. 135-142, Feb. 1983.
- [10] T. S. Chu and T. Itoh, "Generalized Scattering Matrix Method for Analysis of Cascade and Offset Microstrip Step Discontinuities," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-34, pp. 280-284, Feb. 1986.
- [11] E. Kühn and V. Hombach., "Computer Aided Analysis of Corrugated Horns With Axial or Ring-Loaded Radial Slots," *International Conference on Antennas and Propagation. ICAP*, 1983.
- [12] P. J. B. Clarricoats and K. R. Slinn, "Numerical Solution of Waveguide-Discontinuity Problems," *Proceedings IEE*, vol. 114, pp. 878-886, July 1967.
- [13] A. Wexler., "Solution of Waveguide Discontinuities by Modal Analysis," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-15, pp. 508-517, Sep. 1967.
- [14] Y. C. Shih and K. G. Gray., "Convergence of Numerical Solutions of Step-Type Waveguide Discontinuity Problems by Modal Analysis," *IEEE MTT-S Digest*, pp. 233-235, 1983.
- [15] G. Concianuro, M. Guglielmi, and R. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis*: John Wiley & Sons, Inc, 2000.
- [16] R. Mittra, "Relative Convergence of the Solution of a Doubly Infinite Set of Equations," *J. Res. Nat. Bur. Stand*, 67D, pp. 245-254.
- [17] P. H. Masterman and P. J. B. Clarricoats., "Computer Field-Matching Solution of Waveguide Transverse Discontinuities," *Proceedings IEE*, vol. 118, pp. 51-63, Jan. 1971.



- [18] M. Leory, "On the Convergence of Numerical Results in Modal Analysis," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-31, pp. 655-659, July 1983.
- [19] R. Mittra and S. W. Lee., *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*. New York: MacMillan, 1971.
- [20] R. Sorrentino, M. Mongiardo, F. Alessandri, and G. Schiavon, "An Investigation of the Numerical Properties of the Mode-Matching Technique," *International Journal of Numerical Modelling*, vol. 14, pp. 19-43, April 1991.
- [21] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Second ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [22] A. Díaz-Morcillo, M. E. Requena, and J. Monzó-Cabrera, *Transmisión por Soporte Físico. Líneas de Transmisión y Circuitos Pasivos de Microondas*, Segunda ed. Cartagena - España: Universidad Politécnica de Cartagena, Septiembre de 2006.
- [23] L. N. Fernandez, J. V. Balbastre, L. J. Llácer, and H. E. González, *Electrodinámica para Ingenieros. Teoría y Problemas*. Valencia - España: Universidad Politécnica de Valencia, Marzo de 2005.
- [24] A. Díaz-Morcillo and L. N. Fernández, "Métodos de Mallado y Algoritmos Adaptativos en Dos y Tres Dimensiones Para la Resolución de Problemas Electromagnéticos Cerrados Mediante el Método de los Elementos Finitos," in *Departamento de Comunicaciones Valencia - España: Universidad Politécnica de Valencia*, 2000.
- [25] M. Salazar-Palma, T. K. Sarkar, L.-E. Gacía-Castillo, T. Roy, and A. Djordjevic, *Iterative and Self-Adaptive Finite-Elements in Electromagnetic Modeling*. Artech House, Inc., 1998.