ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 36.3 (2018): 121-140
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2252
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato

High school students' learning trajectories of the concept of tangent line

Abilio Orts
IES Tavernes Blanques (Valencia, España)
abilioorts@gmail.com

Salvador Llinares
Universidad de Alicante (España)
sllinares@ua.es

Francisco José Boigues
Universitat Politècnica de València (España)
fraboipl@mat.upv.es

RESUMEN • El objetivo de esta investigación es caracterizar trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en estudiantes de Bachillerato en un experimento de enseñanza. Se considera un modelo de progresión del aprendizaje del concepto de recta tangente que usa la idea de linealidad local (concepción leibniziana) para apoyar la transición desde la concepción euclídea hasta la concepción cartesiana. Identificamos tres trayectorias de aprendizaje caracterizadas por dos aspectos: *i*) la relación entre los registros gráfico y analítico que permite progresar desde la concepción euclídea a la cartesiana vía la concepción leibniziana, y *ii*) la aproximación al valor de una función en el entorno del punto de tangencia mediante la recta tangente. Los resultados obtenidos sugieren que la interiorización de la concepción leibniziana es necesaria para superar el obstáculo epistemológico que supone la concepción euclídea para el aprendizaje del concepto de recta tangente.

PALABRAS CLAVE: Progresión en el aprendizaje; Comprensión matemática; Recta tangente; Descomposición genética; Trayectoria de aprendizaje.

ABSTRACT • The goal of this research is to characterize high school students' learning trajectories of the concept of tangent line in a teaching experiment. The experiment considers a model of learning progression of the concept of tangent line using the local linearity of a function (Leibnizian conception) to support the transition from the Euclidean conception to the Cartesian one. We identify three learning trajectories characterized by how high students manage both: *i*) the relation between the graphical and analytical registers to support the progression from the Euclidean conception to the Cartesian one through the Leibnizian conception; and, *ii*) the approximation to the value of a function by the tangent line in the neighbourhood of the point of tangency. The findings suggest that the internalization of the Leibnizian conception is necessary to overcome the epistemological obstacle that the Euclidean conception entails for the learning of the concept of tangent line.

KEYWORDS: Learning progressions; Mathematical understanding; Tangent line; Genetic decomposition; Learning trajectory.

Recepción: diciembre 2016 • Aceptación: abril 2018 • Publicación: noviembre 2018

Orts, A., Llinares, S., & Boigues, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 36*(3), 121-140.

INTRODUCCIÓN

La recta tangente es un concepto importante en el aprendizaje del cálculo en Educación Secundaria puesto que permite interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto y ser la recta que mejor aproxima localmente una función (Robles, Del Castillo & Font, 2010). Algunas investigaciones indican que el conocimiento previo de los estudiantes sobre la recta tangente a un círculo influye negativamente en el desarrollo de una comprensión más general de recta tangente a una curva vinculada al límite de una sucesión de rectas secantes (Biza, Christou & Zachariades, 2008; Biza, Nardi & Zachariades, 2009; Biza & Zachariades, 2010; Páez & Vivier, 2013). Estas investigaciones indican tres características en la concepción de la recta tangente de los estudiantes. En primer lugar, estudiantes cuya concepción de recta tangente es aquella recta que toca en un punto, pero no corta la función. Esta concepción genera dificultades al considerar lo que pasa en los puntos angulosos, en los puntos de inflexión y cuando la curva se confunde con la recta tangente. En segundo lugar, estudiantes que aplican propiedades geométricas de forma local (por ejemplo, consideran que la recta tangente es aquella que toca, pero no corta a la curva en el entorno del punto de tangencia) y, finalmente, estudiantes que conciben la recta tangente como límite de las rectas secantes (Biza *et al.*, 2008; Castela, 1995).

Sin embargo, existe menos información sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Vivier (2010) indica que los alumnos inicialmente construyen una concepción euclídea con el registro geométrico, como la recta que toca en un punto a la circunferencia, que conlleva la idea de recta perpendicular al radio de la circunferencia (significado que forma parte del currículo de primer curso de Educación Secundaria, 12-13 años). Posteriormente, en el currículo de Bachillerato (16-17 años) se introduce la recta tangente a partir de la concepción cartesiana en el registro analítico como el límite de las rectas secantes en dicho punto, noción que conlleva el significado de recta tangente como aquella que pasa por el punto de tangencia con pendiente igual a la derivada de la función en dicho punto. Sin embargo, los estudiantes mantienen cierta desconexión entre los significados vinculados a los registros geométricos y analíticos, lo que indica que la idea de recta tangente como la recta que tiene un solo punto en común con la curva, introducida al estudiar la recta tangente a la circunferencia, es un obstáculo para identificar una recta tangente que tenga varios puntos de corte con la función.

Para apoyar el aprendizaje de la recta tangente, la transición entre las concepciones euclídea y cartesiana se plantea desde diferentes perspectivas. Una de ellas implica partir de la idea de linealidad local (concepción leibniziana de recta tangente como la prolongación del segmento infinitesimal en el que se encuentra el punto de tangencia). Así, por ejemplo, Maschietto (2008) indica que estudiantes universitarios, utilizando las calculadoras gráficas como elemento mediador, pueden generar un nuevo significado de la recta tangente definida a partir de su *micro-straightness* (explotando así la idea de Tall [1985] de la realización de sucesivos zooms sobre la gráfica de la función). De un modo similar, Milani y Baldino (2002) abogan por usar la función *zoom* de CorelDraw hasta conseguir que la curva y la recta tangente aparezcan como líneas paralelas, permitiendo a los estudiantes ampliar sus imágenes del concepto e incorporar elementos del mundo de los infinitesimales. Sin embargo, para otros autores, el uso de la concepción leibniziana para apoyar la transición entre la concepción euclídea y la cartesiana de la recta tangente se debería realizar a través de la convención matemática y no necesariamente a través de la visualización (Canul, Dolores & Martínez-Sierra, 2011). Estos diferentes puntos de vista dejan abierto el problema de cómo apoyar la transición entre las diferentes concepciones de la recta tangente y plantean cuestiones sobre la influencia de las actividades que realizan los estudiantes. El problema de investigación que planteamos pretende proporcionar información sobre el proceso de aprendizaje del concepto de recta tangente generado en un experimento de enseñanza diseñado ad hoc que introduce el papel de la linealidad local de la función en un punto para apoyar la transición desde la concepción euclídea a la cartesiana.

MARCO TEÓRICO

Las referencias teóricas sobre el aprendizaje de conceptos usadas en esta investigación son la teoría APOS (Arnon *et al.*, 2014) y las aportaciones sobre el papel de las tareas para apoyar la progresión en el aprendizaje conceptual de los estudiantes (Simon *et al.*, 2004; Simon & Tzur, 2004; Tzur & Simon, 2004).

La teoría APOS usa la idea de abstracción reflexiva de Piaget, considerando las formas de conocer los conceptos matemáticos denominadas acciones, procesos, objetos y esquemas, y los mecanismos constructivos de interiorización, encapsulación y tematización. Así, una acción es cualquier manipulación física o mental que realiza un individuo sobre un elemento matemático para obtener otro elemento. Por ejemplo, conocer como acción la concepción leibniziana de recta tangente se manifiesta al realizar varios *zooms* sobre la función para comprobar su linealidad local y comparar con la recta tangente. En la medida en que una acción se repite y el estudiante reflexiona sobre ella se interioriza en un proceso. El estudiante puede realizar otras acciones con los procesos y llegar a ser consciente de esas transformaciones, lo que le permite encapsular el proceso en un objeto. Por ejemplo, en el caso de la concepción leibniziana de la recta tangente, significa que el estudiante ya no necesita realizar físicamente los sucesivos *zooms* sobre la curva para obtener la recta tangente, sino que es capaz de visualizarla sin la herramienta tecnológica del *zoom*. Para conocer un concepto como objeto, el estudiante debe ser capaz de volver al proceso que lo ha originado (desencapsular). Por último, una colección de procesos y objetos puede organizarse para formar un esquema. Cuando los estudiantes son capaces de determinar las limitaciones de uso del concepto durante la resolución de los problemas y utilizarlo en otros contextos diferentes de aquel en el que fue definido, se dice que han tematizado el esquema. En el caso del concepto de recta tangente, un estudiante ha tematizado el esquema de recta tangente cuando es capaz de utilizar este concepto para obtener el valor aproximado de una función en el entorno de un punto.

Además, en el desarrollo de la comprensión algunas veces hay que tener en cuenta obstáculos epistemológicos que lo dificultan. Por ejemplo, la idea de recta tangente concebida como la recta que tiene un solo punto en común con la curva, introducida al estudiar la recta tangente a la circunferencia, suele ser un obstáculo para identificar una recta tangente a una curva que tenga varios puntos de corte con la función. Por otra parte, la progresión en el aprendizaje del concepto de recta tangente se entiende como un camino a lo largo del cual los estudiantes alcanzan el objetivo de aprendizaje (Simon & Tzur, 2004) y puede ser descrita mediante una descomposición genética del concepto, vista como una hipótesis del investigador para justificar las decisiones de enseñanza (Orts, Llinares & Boigues, 2016). En esta investigación nos hemos apoyado en la relación entre la descomposición genética de un concepto y la idea de trayectoria de aprendizaje (Battista, 2011; Clements & Sarama, 2004; Simon, 2014), ya que entendemos que una descomposición genética puede verse como una forma de describir la progresión en el aprendizaje que forma parte de una trayectoria hipotética de aprendizaje. En particular, la descomposición genética usada en esta investigación considera la linealidad local de la función como un elemento que debe relacionarse con la tendencia de la sucesión de las rectas secantes para llegar a conocer el concepto de recta tangente como objeto. Además, el uso de la recta tangente para interpolar valores de la función cercanos al punto de tangencia permite considerar la tematización del esquema de recta tangente (tabla 1).

Tabla 1.
Elementos y características de una descomposición genética del concepto de recta tangente en el nivel de Bachillerato

E0	Prerrequisitos
E01	Reconocimiento como acción de puntos de una recta y de una función a partir de su abscisa a nivel gráfico y analítico
E02	Conocer como acción el concepto de pendiente de una recta a partir de dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) (Cálculo): $$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
E03	Conocer como proceso el concepto de pendiente de una recta como medida de la razón de crecimiento de dicha recta
E04	Conocer como proceso la idea de recta (forma analítica): identificar y hallar puntos de una recta
E05	Conocer como objeto la idea de recta: Ecuación punto-pendiente de una recta: $y-y_0= m(x-x_0)$
E06	Conocer como proceso el límite como tendencia
E07	Conocer como proceso el concepto de derivada de una función en un punto: $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
E08	Conocer como objeto el concepto de función derivada
E1	Linealidad local de una función en un punto
E11	Acción de aplicar varios *zooms* sobre una función en un determinado punto
E12	Interiorización de la acción E11 en un proceso
E13	El objeto de concebir, localmente, la función como un segmento cuya prolongación se definiría como recta tangente (mejor aproximación lineal)
E2	Sucesión de rectas secantes
E21	Acción de crear rectas secantes manteniendo un punto fijo y acercando otro punto al fijo
E22	Interiorización de la acción de crear sucesiones de rectas secantes (E21) en un proceso
E23	Encapsulación como objeto de la idea de sucesión de recta secante
E1RE2	Conocer como proceso la identificación de la recta tangente (E1) con la tendencia límite de E2
E03RE07	Conocer como proceso la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto tangencia (pendiente de la recta tangente): $$\lim_{x_1\to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$
E3	Recta tangente como objeto: $y-y_0= f'(x_0)(x-x_0)$
E31	Acción de hallar la ecuación de la recta tangente
E32	Interiorizar la acción de determinar la ecuación de la recta tangente
E33	Encapsular como objeto la idea de recta tangente, relación modo gráfico y analítico (ecuación)
E4	Tematización del esquema de recta tangente
E41	Desencapsulación del objeto recta tangente

E_i = *Elementos matemáticos;* E_iRE_j = *Relaciones entre elementos* (Orts *et al*., 2016)

Para entender cómo progresan los estudiantes en el aprendizaje, Simon & Tzur (2004) proponen dos fases, la de participación y la de anticipación. En la fase de participación, los estudiantes identifican regularidades en la relación entre las actividades realizadas (la resolución de los problemas) y los efectos producidos durante su resolución. Estas regularidades son los elementos del concepto que se está aprendiendo, identificados en la descomposición genética. En el caso de la recta tangente, son la linealidad local de la función (E1), la tendencia de la sucesión de las rectas secantes (E2) y su identificación con la recta tangente (E1RE2), la ecuación de la recta tangente y su relación con la derivada (E3). En la fase de anticipación, los estudiantes son capaces de usar estos elementos en diferentes situaciones, lo que permite la tematización de la nueva estructura conceptual construida, es decir, la recta tangente (E4). De esta manera, los estudiantes pueden usar el concepto de recta tangente en diferentes funciones y evaluar su existencia en puntos singulares, comprobando propiedades de la recta tangente o razonando cuándo dos rectas que pasan por el mismo punto en una curva y cumplen ciertas condiciones del concepto de recta tangente, pero no otras, son o no rectas tangentes a la curva en ese punto. En este sentido, el mecanismo de tematización implica la transición de la aplicación o uso implícito a un uso consciente de las propiedades de la recta tangente (Piaget & García, 1989). Dicha transición es evidencia del paso de la fase de participación (construcción del concepto) a la fase de anticipación (uso del concepto).

En esta transición de la fase de participación a la de anticipación, Roig, Llinares & Penalva (2010, 2012) identificaron tres momentos característicos. En el primer momento (proyección) los estudiantes construyen y organizan un conjunto de registros relativos a los efectos de las actividades realizadas y, a través de casos particulares, van identificando los elementos matemáticos que definen el concepto. En el segundo momento (reflexión) los estudiantes coordinan y comparan la información desde los diferentes registros de representación en algunas actividades, lo que les permite empezar a abstraer alguna regularidad durante la resolución de las diferentes tareas, esto es, el concepto de recta tangente vinculado a la situación en la que se ha generado. Finalmente, en el momento de anticipación local, los estudiantes aplican en diferentes situaciones el concepto (la regularidad identificada), ampliando los contextos en los que son capaces de usarlo.

Con la descomposición genética del concepto de recta tangente, vista como un conjunto de construcciones mentales cada vez más sofisticadas que un estudiante debería desarrollar para alcanzar su comprensión en el nivel de Bachillerato (Orts *et al.*, 2016), y con la descripción del modelo de aprendizaje conceptual derivado de las dos fases para el aprendizaje conceptual (Simon *et al.*, 2004) y la transición entre ellas (Roig *et al.*, 2010, 2012), fundamentamos las decisiones del diseño del experimento de enseñanza.

EXPERIMENTACIÓN

Participantes y contexto

Los participantes en el experimento de enseñanza fueron once estudiantes de primer curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Los estudiantes fueron distribuidos en cinco grupos, cuatro parejas y un trío. Previamente a la participación en el experimento, los alumnos estudiaron el concepto de derivada en los libros de texto a partir de su definición como límite del cociente incremental. La derivada se interpretó analíticamente como la tasa de variación instantánea y geométricamente como la pendiente de la recta tangente (usando la concepción cartesiana sin definir previamente la recta tangente). Los estudiantes recibieron instrucción previa en el manejo de los programas GeoGebra y CamStudio (<www.http://camstudio.org/>). Este último *software* permite grabar las sesiones del experimento y registrar las acciones realizadas en el ordenador y los comentarios realizados por los estudiantes.

Experimento de enseñanza

La aproximación adoptada refleja una aproximación denominada «classroom-based interventions» (Steffe & Thompson, 2000; Stylianides & Stylianides, 2013). El experimento de enseñanza tenía como objetivo apoyar la transición desde la concepción euclídea a la concepción cartesiana vía la idea de la aproximación local (concepción leibniziana) para favorecer la tematización del esquema de recta tangente. Fue diseñado considerando la descomposición genética como una progresión en el aprendizaje que integra información desde tres componentes (tabla 1). Primero, un análisis epistemológico del concepto que nos ha permitido identificar tres concepciones a lo largo de la historia: concepción euclídea –recta tangente como aquella recta que toca en un punto sin cortar la gráfica de la función–, concepción cartesiana –recta tangente como límite de las rectas secantes– y concepción leibniziana –curva formada por infinitos segmentos y al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto obtenemos la recta tangente–. Segundo, un análisis curricular de cómo se presenta la recta tangente en algunos libros de texto de las principales editoriales españolas. Finalmente, un análisis cognitivo que incluye una síntesis de las investigaciones previas junto con el análisis de las respuestas a un cuestionario piloto contestado por un grupo de alumnos de primer y segundo curso de Bachillerato de las modalidades de Ciencia y Tecnología y Ciencias Sociales (Orts *et al.*, 2016).

En segundo lugar, diseñamos un conjunto de tareas usando el programa GeoGebra para apoyar la transición de la concepción euclídea a la cartesiana vía la concepción leibniziana mediante la visualización, permitiendo crear oportunidades para superar los obstáculos derivados de la concepción euclídea. Algunas de las actividades usadas serán introducidas en la sección de resultados para explicar el razonamiento de los estudiantes. El experimento de enseñanza se desarrolló en cuatro sesiones (S) de cincuenta y cinco minutos cada una (tabla 2).

Tabla 2.
Estructura del experimento de enseñanza

S	*Objetivo*	*Foco de la tarea*	*N.ª de actividades*
1	Mostrar las limitaciones de la concepción euclídea	*i)* Identificación por los estudiantes de la recta tangente a una función que la corta en más de un punto *ii)* Identificación por los estudiantes de la recta tangente a una función en un máximo relativo *iii)* Identificación por los estudiantes de la recta tangente a otra recta *iv)* Discusión entre iguales sobre la existencia de recta tangente en un punto anguloso	4
2	Introducir la concepción leibniziana	Actividades consistentes en la utilización del *zoom* de GeoGebra para estudiar la linealidad local de varias funciones en diferentes puntos, incluyendo puntos angulosos	3
3	Transición entre la concepción euclídea y la concepción cartesiana vía la concepción leibniziana	Sesión grupal (única sesión en la que interviene el profesor) *i)* Uso del deslizador de GeoGebra para visualizar dinámicamente la convergencia de las rectas secantes a la recta tangente *ii)* Obtención analítica de la ecuación de la recta tangente *iii)* Realización de actividades de cálculo de la recta tangente	5
4	Tematización del esquema de recta tangente	*i)* Obtención analítica de la ecuación de la recta tangente en varios puntos *ii)* Identificación razonada (gráfica o analíticamente) de la recta tangente a una función en un punto de inflexión *iii)* Obtención de la ecuación de la recta tangente paralela a otra recta dada *iv)* Obtención del valor de un parámetro para que las rectas tangentes a una función en dos puntos diferentes sean paralelas *v)* Obtención del valor aproximado de una función en un punto cercano a otro del que se conoce su imagen y su derivada	5

Análisis

Los datos de esta investigación son las transcripciones de las interacciones entre los alumnos durante la resolución de las actividades y los productos generados al manipular los *applets* en el ordenador al resolver las actividades. Consideramos como unidad de análisis las expresiones verbales junto con lo registrado en el ordenador, que indica el uso de los elementos matemáticos por parte de los estudiantes durante la resolución de las actividades. El proceso inductivo de análisis de los diferentes grupos y el análisis intercasos posterior nos ha permitido identificar características del aprendizaje de la recta tangente (Clement, 2000).

Las unidades de análisis son extractos de los protocolos e imágenes de la pantalla del ordenador desde las que inferimos características de la forma de proceder de los estudiantes en cada problema. La identificación de conductas semejantes o diferentes en la resolución de cada actividad nos permitió inferir lo que parecía fundamentar el uso de los elementos matemáticos que definen la descomposición genética y la forma en la que los estudiantes conocían dichos elementos. Estas hipótesis eran posteriormente chequeadas para comprobar si eran consistentes con la manera en la que los estudiantes resolvían las diferentes actividades propuestas. Por ejemplo, si identificaban de manera gráfica la recta tangente, si relacionaban o no los métodos analíticos-gráficos, etc. Posteriormente, centramos nuestra atención en la concepción de recta tangente que parecía justificar la conducta de los estudiantes (euclídea, cartesiana o leibniziana) y cómo evolucionaba su uso a lo largo de la resolución de las diferentes actividades. Es decir, de qué manera se usaba la linealidad local de la función en un punto, el significado de recta tangente como tendencia del límite de la sucesión de rectas secantes y la manera en la que la identificación de la pendiente de la recta tangente como derivada de la función en dicho punto les permitía calcular la ecuación de la recta tangente.

Finalmente, a partir de la descripción de las estrategias, la presencia de las diferentes concepciones de la recta tangente y la manera en la que eran coordinados los registros gráfico y analítico-algebraico, identificamos características de las trayectorias de aprendizaje de los diferentes grupos de estudiantes.

RESULTADOS

Identificamos tres trayectorias de aprendizaje definidas por la manera en la que los estudiantes usaban los elementos de la descomposición genética del concepto de recta tangente en la resolución de las actividades. A continuación, describimos las características de las tres trayectorias de aprendizaje.

Trayectoria 1. Sin superar la concepción euclídea

La pareja de estudiantes GA (formada por G y A) no consiguió superar la concepción euclídea, lo que les generaba dificultades para comprender la recta tangente como límite de las rectas secantes. Por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 2 (S2-A3),

Sesión 2-Actividad 3: Dada la curva $f(x)=2x^2-x$, averigua cuál de las siguientes rectas es tangente en x = 1:

a) $y = 3x-2$,

b) $y = \dfrac{17x-12}{5}$

identificaron la recta tangente *b*) de manera gráfica como aquella que toca la curva, pero no la corta.

Estos estudiantes no conocen como objeto el concepto de recta tangente, que implica la acción de hallar la ecuación de la recta tangente y relacionar los registros gráfico y analítico. Por ejemplo, en la actividad para hallar la recta tangente a una curva paralela a una recta dada (S4-A3), recurren a un método gráfico por tanteo apoyándose en el hecho de que conocen que las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Sesión 4-Actividad 3: Obtén la recta tangente a $y = x^2 - 3x + 4$ paralela a la recta $y = -2x+1$.

Puesto que saben que la ecuación de la recta tangente será de la forma $y = -2x+n$, los estudiantes prueban primero con la recta $y = -2x+3$ y ven que no es tangente (figura 1a). A continuación, prueban con $y = -2x+4$ (figura 1b), que tampoco es tangente. Como ven que la recta buscada debe estar entre las rectas anteriores, prueban con $y = -2x+3{,}5$ (figura 1c) y, por último, dan con la solución $y = -2x+3{,}75$ (figura 1d). Para comprobar la solución, realizan un *zoom* para acercar, lo que puede entenderse como que están usando una concepción euclídea de un modo local por influencia de la concepción leibniziana (figura 1e).

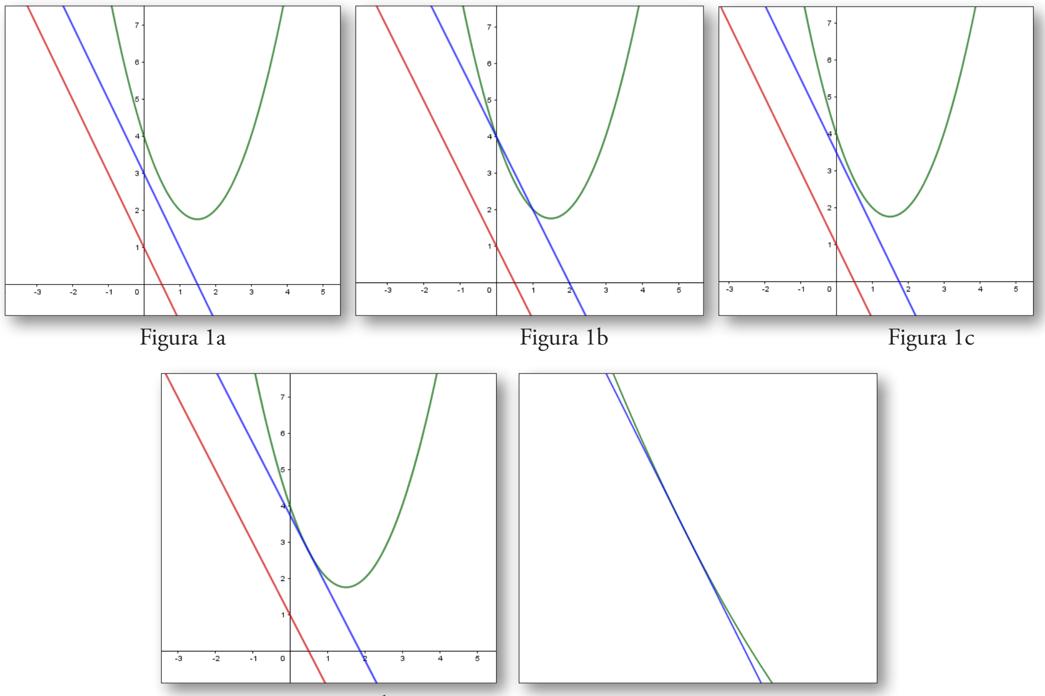

Figura 1a Figura 1b Figura 1c

Figura 1d Figura 1e

Fig. 1. Fases del proceso de tanteo (ensayo y error) de la pareja GA.

Trayectoria 2. La recta tangente como objeto

Dos parejas de estudiantes (ES y OM) calcularon la ecuación de la recta tangente y reconocieron la relación entre los registros gráfico y analítico, lo que les permitió comprobar las soluciones obtenidas en un registro dado desde el otro registro. Por ejemplo, en la actividad S4-A3:

Sesión 4-Actividad 3: Obtén la recta tangente a $y = x^2 - 3x + 4$ paralela a la recta $y = -2x+1$.

Los dos grupos obtuvieron la ecuación de la recta tangente de forma analítica y, posteriormente, utilizaron un procedimiento gráfico para comprobar la solución obtenida. Así, tras obtener que la recta tangente es $y = -2x + \frac{15}{4}$, activaron la vista gráfica y comprobaron que efectivamente dicha recta es a la vez tangente a la función y paralela a la recta dada. Esta forma de proceder usa la derivada de una función en un punto como valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto y el punto de tangencia como elemento clave para calcular la ecuación de la recta tangente. Este hecho evidencia la identificación de la recta tangente con el límite de la sucesión de rectas secantes entendido como la derivada de la función en el punto de tangencia. Por ejemplo, en la resolución de la actividad S4-A1:

Sesión 4-Actividad 1: Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y= x^2$ en el punto de abscisa $x=1$.

Uno de los grupos (ES) en esta trayectoria indicaba:

E: Hacemos la derivada de la curva $y = x^2$ que nos da 2x y después tenemos que sustituirla por el 1 que es por donde pasa en el punto de abscisa.

S: Tenemos que calcular la pendiente.

E: Con eso sacamos la m, la pendiente.

S: Sí.

E: Después sustituimos en la primera ecuación por 1 para saber la *y*, y nos da 1. Entonces sabemos que la recta pasa por (2,1) y ahora tenemos que calcular la n.
[el punto de tangencia no es el (2,1) sino el (1,1), si bien al realizar los cálculos lo habían hecho bien. Se trata de un lapsus al dar esta explicación a posteriori]

E: Lo que hacemos es escribir y = mx + n y sustituimos ahí y nos da n igual a –1. Entonces la recta tangente es y = 2x – 1.

Los estudiantes en esta trayectoria evidencian la comprensión de la linealidad local de una función en un punto de manera gráfica, lo que les permite discernir si una recta es o no recta tangente en un punto usando el *zoom* del GeoGebra para apoyar visualmente su decisión. Así, en la actividad S2-A3:

Sesión 2-Actividad 3: Dada la curva $f(x)=2x^2–x$, averigua cuál de las siguientes rectas es tangente en x = 1:

$$a)\ y=3x-2$$

$$b)\ y=\frac{17x-12}{5}$$

Los estudiantes del grupo OM amplían el entorno del punto para ver que la función y la recta tangente coinciden (figura 2).

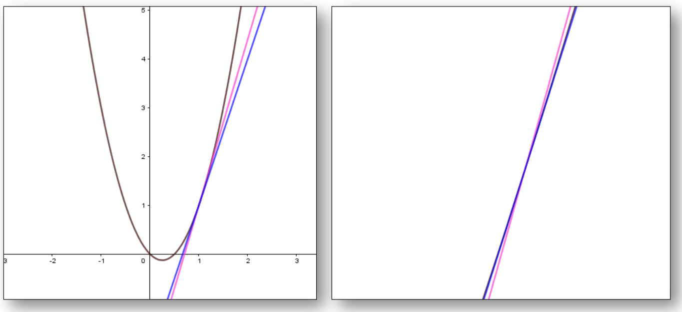

Fig. 2. Uso de la linealidad local de una función.

O: La recta azul, la *a*), va por encima de la parábola.

M: […] Cuando las dos rectas coinciden es que es tangente. En cambio, la otra recta, la *b*), de color rosa, sigue atravesándola. […] En *x* igual a 1 la recta *a*) es tangente.

Con esta forma de proceder, los estudiantes en esta trayectoria hacen un uso operativo de la idea de recta tangente como la mejor aproximación lineal a la función, lo que evidencia el uso de la concepción leibniziana del concepto de recta tangente. Así, frente a la concepción euclídea usada por los estudiantes en la trayectoria 1 (la toca, pero no la corta), ahora los estudiantes en la trayectoria 2 hacen un mayor número de *zooms* para concluir que la recta tangente y la función coinciden (concepción leibniziana). Pero este uso operativo se realiza solo de un modo gráfico, lo que les permite identificar la recta tangente de entre varias posibilidades, comprobar los resultados obtenidos por un procedimiento algebraico o comprender que la sucesión de rectas secantes converge a la recta tangente obtenida mediante la concepción leibniziana. Este comportamiento indica que estos estudiantes han interiorizado la concepción cartesiana con la ayuda de la concepción leibniziana. Sin embargo, los estudiantes en esta trayectoria tienen dificultades en el uso de la concepción leibniziana a nivel analítico ya que no son capaces de resolver la última cuestión del experimento de enseñanza (calcular el valor aproximado de una función en el entorno de un punto). Es, precisamente, esta última cuestión la que diferencia a los estudiantes de esta trayectoria de los de la trayectoria 3, quienes sí han sido capaces de obtener dicho valor aproximado (S4-A5).

Trayectoria 3: La tematización del esquema de recta tangente

Dos grupos de estudiantes (SK y TRES) hicieron un uso consciente del significado de la recta tangente desde la perspectiva leibniziana cuando tuvieron que reconocer la recta tangente de entre varias y resolver las actividades de interpolación para calcular el valor aproximado de la función en un punto cercano al punto de tangencia. Esta forma de actuar puede ser entendida como una evidencia de la fase de anticipación local en el aprendizaje del concepto de recta tangente, ya que aplicaron en diferentes situaciones el concepto de recta tangente relacionando los registros gráfico y analítico de manera consciente. Así, en la actividad S4-A5:

Sesión 4-Actividad 5: Una determinada función $f(x)$ pasa por el punto (1,2). Además se sabe que su derivada en $x = 1$ vale 3, es decir, $f'(1) = 3$. Obtén de manera aproximada el valor de $f(1{,}027)$. Esboza un gráfico que explique tu respuesta.

El grupo TRES la resuelve con un procedimiento algebraico. Para ello, hallan primero la ecuación de la recta tangente, $y = 3x-1$ (usando la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente). A continuación sustituyen el valor x=1,027 en dicha recta, obteniendo de manera aproximada f(1,027), es decir, 2,081. Por último, suponen una función, $f(x) = x^3+1$, cuya recta tangente es la obtenida. Para comprobar el procedimiento realizado en el registro algebraico, recurren al registro gráfico, es decir, representan gráficamente la función y la recta tangente y comprueban la solución obtenida (figura 3).

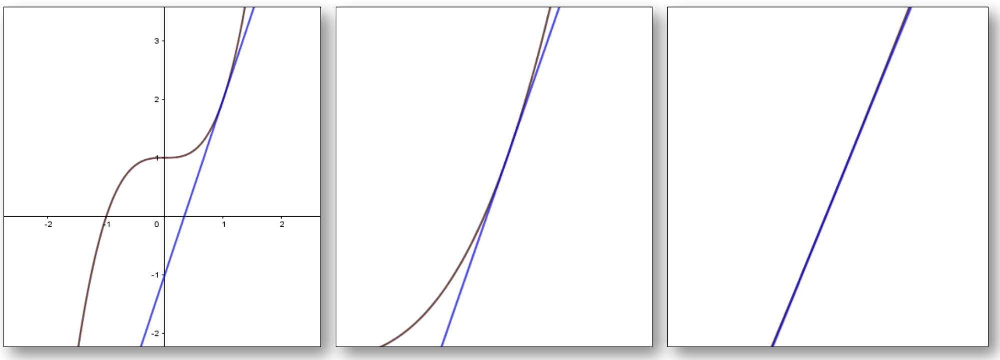

Fig. 3. Uso de la concepción leibniziana en el registro gráfico para comprobar los pasos dados en el registro analítico en una situación de interpolación.

Este procedimiento evidencia la manera en la que los estudiantes de esta trayectoria apoyan lo realizado en un registro con información procedente del otro registro. El uso de la concepción leibniziana de la recta tangente se manifiesta al considerar la linealidad local de la función en el modo gráfico cuya prolongación define la recta tangente.

Una característica de esta trayectoria de aprendizaje es el uso consciente que realizan los estudiantes de las propiedades de la recta tangente. Por ejemplo, cuando usan la recta tangente como mejor aproximación local de una función (uso de la concepción leibniziana). En la actividad de interpolación (calcular el valor aproximado de una función en un punto, S4-A5), el grupo TRES calcula la recta tangente y la utiliza para aproximar el valor de la función en un entorno del punto (figura 4).

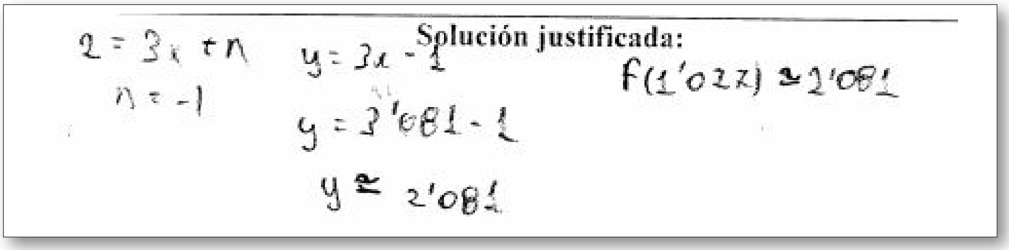

Fig. 4. Solución analítica-algebraica al problema de interpolación (grupo TRES).

A la hora de esbozar un gráfico, identifican la función original con *f(x)* = x^3+1, es decir, realizan una integral sin conocer dicho concepto, buscando una función que pase por el punto (1,2) y cuya derivada en $x=1$ sea 3 (figura 5).

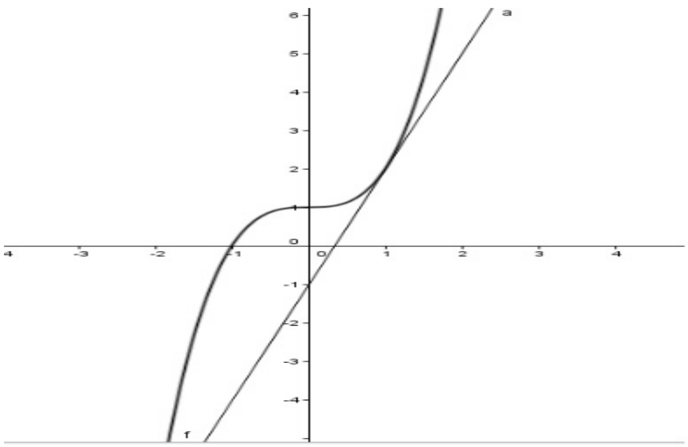

Fig. 5. Gráfica de interpolación que describe la recta tangente como mejor aproximación local (recurso gráfico del grupo TRES al problema de interpolación).

Por otra parte, el grupo SK obtiene la recta tangente correctamente. Sin embargo, como desconoce la función original, identifica la recta tangente con la función original, como se manifiesta en el diálogo siguiente (líneas 4 a 11), por lo que, en lugar de obtener un valor aproximado, obtiene lo que en su caso sería el valor real (figura 6).

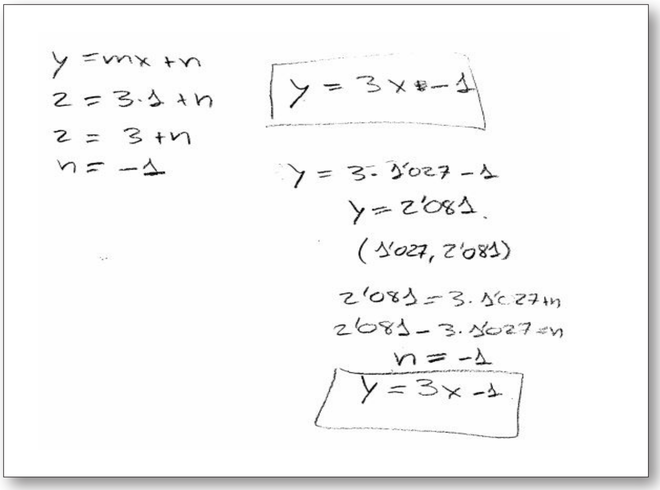

Fig. 6. Solución a la actividad 5 de la sesión 4 por el grupo SK.

1	S: Ya tenemos aquí que es 3x – 1. Esa es la ecuación.
2	K: Y ahora dice, obtened de forma aproximada el valor de 1,027.
3	S: Sí, pero sabes qué pasa, que esto que acabamos de sacar es la recta tangente a la función, no es la función. Es la recta tangente, la función todavía no la sabemos. Sabemos que la función pasa por (1,2) y que la recta tangente de ella es esta. [...]
4	S: Pero espera, si la pendiente es solo un número y es la derivada, es que no sabemos si se ha quitado algo, pero parece que la función sea una recta. Y si la función es una recta, la recta tangente es ella misma. Y sería esta la función que teníamos. ¿Sabes lo que quiero decir?
5	K: No.
6	S: Que si tenemos que la derivada en x igual a 1 es 3, tú has dicho que la función podría tener 3x más algo, eso es una ecuación de una recta.
7	K: Exacto.
8	S: Y la recta tangente a una recta es ella misma.
9	K: Sí, es ella misma.
10	S: Nosotros hemos sacado la recta tangente, entonces la función podría ser ella misma.
11	K. Podría ser la misma recta.
12	S: ¿Sacamos el valor de f en 1,027?
13	K: ¿Sustituimos?
14	S: Sí, en el valor de la recta tangente, en la y ponemos 1,027.
15	K: Es al revés.
16	S: *Sí, ponemos y es igual a 3 por 1,*027 menos 1.
17	K: 2,081.
18	S: Entonces pensamos que es 2,081.

La interacción en el grupo SK muestra cómo los estudiantes intentan determinar de qué manera lo que saben de la recta tangente les permite resolver el problema de interpolación. La manera en la que S, uno de los estudiantes de esta pareja, hace uso de manera explícita de la linealidad local de la función en el punto (1,2) se pone de manifiesto en el fragmento 4. La explicación que proporciona, como consecuencia de las dudas de su compañero, puede ser entendida como una evidencia de la desencapsulación del concepto de recta tangente en el proceso de generar una explicación durante la resolución del problema. Este comportamiento puede ser entendido como reflejo de la tematización del esquema de recta tangente. La manera en la que los estudiantes SK deciden sustituir la función por la recta tangente en el punto x = 1,027 evidencia el uso operativo de la concepción leibniziana de la recta tangente en el sentido de que la función localmente coincide con dicha recta.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado cómo estudiantes de Bachillerato aprenden el concepto de recta tangente al participar en un experimento de enseñanza. Dicho experimento se ha diseñado según una descomposición genética como parte de una trayectoria hipotética de aprendizaje con el objetivo de ayudar a la tematización del concepto de recta tangente, entendido como el uso consciente de las propiedades de la recta tangente en diferentes contextos. Las actividades propuestas utilizaban el *software* GeoGebra para facilitar la relación de los registros analítico y gráfico.

Los resultados muestran tres trayectorias de aprendizaje. En la trayectoria 1, los estudiantes experimentan con casos particulares aproximándose a la resolución por tanteo numérico, pero tienen dificultades en relacionar el registro gráfico y el analítico (momento de proyección). Los estudiantes de la trayectoria 2 relacionan los registros gráfico y analítico en algunas actividades, como en la obtención de la ecuación de la recta tangente teniendo en cuenta que la derivada de la función en el punto de tangencia es la pendiente de la recta tangente. Además, usan en el registro gráfico la idea de la linealidad local de la función (perspectiva leibniziana), que ayuda a comprender la función localmente como un segmento cuya prolongación definiría la recta tangente en ese punto, pero no en el registro analítico. Este comportamiento, en el que los estudiantes relacionan la información desde diferentes registros de representación en algunas actividades, lo que les permite empezar a abstraer el significado del concepto de recta tangente pero vinculada a la situación en la que se ha generado, puede ser considerado una evidencia del momento de reflexión. Finalmente, la trayectoria 3 evidencia la aplicación de los estudiantes del concepto de recta tangente para calcular valores aproximados de la función (interpolación), relacionando la información desde los registros analítico y gráfico, lo que caracteriza el momento de anticipación local en el aprendizaje del concepto de recta tangente (figura 7).

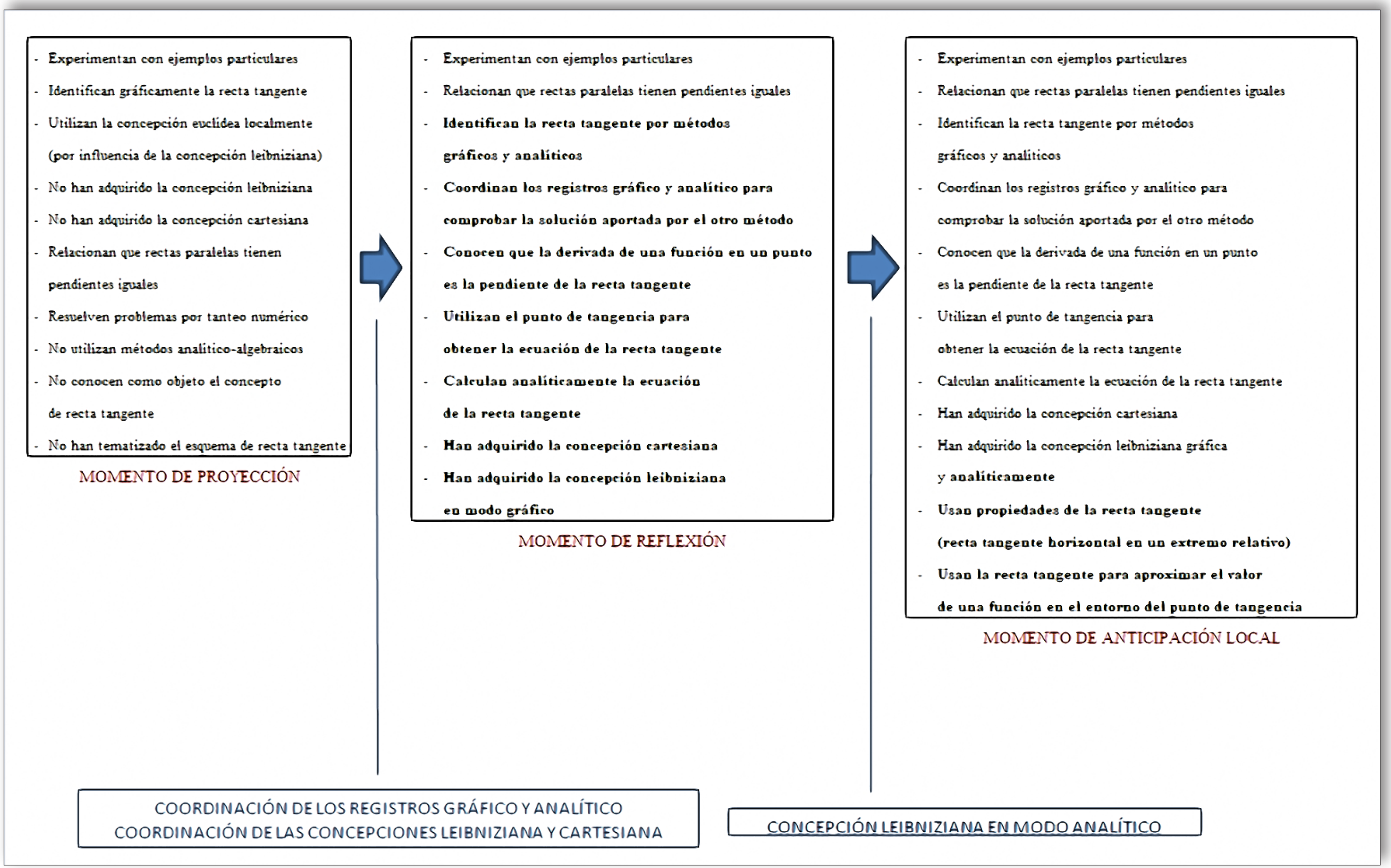

Fig. 7. Características de las trayectorias en el aprendizaje del concepto de recta tangente.

La identificación de estas tres trayectorias de aprendizaje se apoya en el reconocimiento de dos características en la manera en la que los estudiantes resuelven las diferentes actividades. Por una parte, la relación entre los registros gráfico y analítico para apoyar la transición desde la concepción leibniziana a la concepción cartesiana. En segundo lugar, la manera en la que se realiza la aproximación al valor de una función en el entorno del punto de tangencia mostrando la tematización del esquema de recta tangente. Las características de estas trayectorias se han generado analizando los registros de los grupos, por lo que no es posible determinar características personales, lo que plantea una nueva cuestión de investigación relativa a la relación entre las dimensiones personal y social en el aprendizaje que podría empezar a contestarse complementando con la realización de entrevistas clínicas en diferentes momentos de la secuencia de enseñanza.

Relación entre el registro gráfico y el analítico en la transición de la concepción leibniziana a la concepción cartesiana de la recta tangente

Los estudiantes de la trayectoria 1 no son capaces de relacionar los registros gráfico y analítico y no han podido pasar de la concepción leibniziana a la cartesiana. Estos estudiantes identifican la recta tangente a una curva mediante una concepción euclídea usada localmente, es decir, no han visualizado que la curva y la recta tangente se superponen en el entorno del punto, sino que, al no realizar los sucesivos *zooms* necesarios, siguen pensando en la recta tangente a una curva como aquella que toca pero no corta la función. Los estudiantes de la trayectoria 2 relacionan los registros gráfico y analítico y son capaces de usar la concepción leibniziana en modo gráfico, lo que, además de ayudarles a identificar rectas tangentes a una curva, les posibilita interiorizar la transición de la concepción euclídea a la cartesiana vía la concepción leibniziana en el registro gráfico, usando la idea de que la derivada de la función en ese punto es la pendiente de la recta tangente. Por ello son capaces de obtener la recta tangente a una función paralela a otra recta dada. Sin embargo, al no tener interiorizada la concepción leibniziana en modo analítico, no son capaces de obtener el valor aproximado de una función en el entorno de un punto a partir de la correspondiente recta tangente. Cuestión que sí resuelven los estudiantes de la trayectoria 3, que han interiorizado la concepción leibniziana en modo gráfico y analítico.

En este proceso, los recursos tecnológicos (como el uso del *zoom*, el deslizador o la representación gráfica de diferentes funciones en puntos diversos) han favorecido la visualización y la comprobación de los resultados obtenidos analíticamente mediante un procedimiento gráfico. Los recursos tecnológicos han permitido la experimentación de los alumnos (resolución de ejercicios por tanteo), así como la comprobación de conjeturas. Este papel como mediador semiótico de los recursos tecnológicos (Mariotti, 2012) ha ayudado a los alumnos a relacionar los registros gráfico y analítico, facilitando el progreso hacia niveles de pensamiento más sofisticados evidenciados por los momentos de reflexión y anticipación local del proceso de aprendizaje conceptual (Simon *et al.*, 2004; Aranda & Callejo, 2017).

La tematización del esquema: aproximación al valor de una función en el entorno del punto de tangencia mediante la recta tangente

Un estudiante ha tematizado el concepto de recta tangente si es capaz de usarlo en un contexto diferente del que se utilizó para introducirlo. Los estudiantes de la trayectoria 3 evidencian la interiorización de la concepción leibniziana en modo analítico y son capaces de usar el concepto de recta tangente para obtener el valor aproximado de una función en el entorno de un punto a través de la recta tangente. Sin embargo, los estudiantes de la trayectoria 2 han construido un concepto de recta tangente que les permite resolver las actividades siempre que se planteen en un contexto similar al utilizado para definir la recta tangente –identificación y construcción de rectas tangentes–, pero no son capaces de ir más allá

–por ejemplo, usar el concepto de recta tangente para interpolar los valores de la función–. Por ello, resuelven con éxito todas las tareas planteadas salvo la actividad 5 de la sesión 4. Por otra parte, los estudiantes de la trayectoria 1 no son capaces de resolver tareas que impliquen la aproximación al valor de una función en el entorno del punto de tangencia, al no tener interiorizada la concepción leibniziana.

Implicaciones para la enseñanza

La investigación y los resultados obtenidos proporcionan dos tipos de contribuciones. En primer lugar, un nuevo conocimiento sobre diferentes trayectorias en el aprendizaje de la recta tangente que aporta información para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje que ayuden a los estudiantes a progresar hacia niveles de pensamiento más sofisticado. Esta información puede ser usada en el desarrollo de currículo, la elaboración de libros de texto y el diseño de materiales docentes. Se subraya la necesidad de que las secuencias de enseñanza-aprendizaje definan como objetivo superar el obstáculo epistemológico que supone la concepción euclídea y ayuden a adquirir la concepción cartesiana a partir de la concepción leibniziana. Para ello se deben considerar diferentes tipos de tareas, como presentar gráficas de funciones cuya recta tangente corte en varios puntos y ejemplos de rectas tangentes en puntos de inflexión, como han sido consideradas en el experimento de enseñanza diseñado y en otras investigaciones (Biza *et al*., 2008; Tall, 1985; Vivier, 2010). En este sentido, actividades como la número 5 de la sesión 4 han mostrado ser un buen indicador de cómo los estudiantes han tematizado el esquema de recta tangente al usar la concepción leibniziana no solo como definición del concepto, sino también en un entorno diferente.

En segundo lugar, esta investigación aporta información sobre el debate en educación matemática acerca de los constructos de trayectoria de aprendizaje (hipotética o real) y niveles de progresión, en el sentido de integrar la perspectiva cognitiva que considera las fases en el aprendizaje conceptual en el desarrollo de las trayectorias de aprendizaje (Battista, 2011; Clements & Sarama, 2004; Simon & Tzur, 2004; Simon, 2014; Weber, Walkington & McGalliard, 2015). Los elementos usados para describir las progresiones en el aprendizaje de la recta tangente permiten estar en disposición de fundamentar el diseño de futuros experimentos de enseñanza (Simon *et al*., 2004; Clements & Sarama, 2004). Los resultados de estos experimentos de enseñanza aportarán información sobre características de trayectorias de aprendizaje. Estas trayectorias de aprendizaje deben ser entendidas como descripciones detalladas de las secuencias de ideas, estrategias y formas de pensar que un estudiante emplea mientras se implica en el aprendizaje de la recta tangente (considerando cómo el estudiante interacciona con otros y con las tareas instruccionales). Por lo tanto, esta investigación se sitúa en la intersección de tres constructos teóricos usados en educación matemática, el de descomposición genética de un concepto, el de progresión en el aprendizaje y el de trayectoria de aprendizaje. La descripción de la descomposición genética del concepto de recta tangente mostrada en este trabajo es una manera de caracterizar la progresión hipotética en el aprendizaje y, por lo tanto, puede ser vista como una parte de una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995), al definir un objetivo de aprendizaje (la tematización del concepto de recta tangente con alumnos de Bachillerato). Así, los resultados empíricos vinculados a una secuencia didáctica determinada, y por lo tanto a un contexto curricular, permiten considerar en qué medida las características de las trayectorias de aprendizaje identificadas (la progresión en el aprendizaje) podrían o no modificarse al introducir cambios en la secuencia instruccional (Battista, 2011).

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.

Una versión previa de algunos de estos resultados fue presentada en el XX Simposio de la SEIEM, Málaga en septiembre de 2016.

REFERENCIAS

Aranda, M. C., & Callejo, M. L. (2017). Formas de aproximar el área bajo una curva: un estudio con estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(1), 157-174. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2075.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *Apos Theory. A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. Londres, Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6.

Battista, M. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 507-570.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 53-70. https://doi.org/10.1080/14794800801916457.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the learning of Mathematics*, *29*(3), 31-36.

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218-229. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.11.001.

Canul, E., Dolores. C., & Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 173-202.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(1), 7-47.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (547-590). Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. G., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1.

Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. En T. Y. Tso (ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 25-40). Taipei, PME.

Maschietto, M. (2008). Graphic calculators and micro-straightness: analysis of a didactic engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*, 207-230. https://doi.org/10.1007/s10758-008-9141-7.

Milani, R., & Baldino, R. (2002). The theory of limits as an obstacle to infinitesimal analysis. En A. D. Cockburn & E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 345-352). Norwich, Universidad de East Anglia.

Orts, A., Llinares, S., & Boigues, F. J. (2016). Elementos para una Descomposición Genética del concepto recta tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 111-134.
Páez, R., & Vivier, L. (2013). Teachers' conception of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 209-229.
https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.005.
Piaget, J., & García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. Nueva York, Columbia University Press.
https://doi.org/10.1086/356015.
Robles, M. G., Del Castillo, A. G., & Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (523-532). Lleida, SEIEM.
Roig, A. I., Llinares, S., & Penalva, M. C. (2010). Construcción del concepto de múltiplo común en el dominio de los números naturales. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(2), 261-274.
Roig, A. I., Llinares, S., & Penalva, M. C. (2012). Different moments in the participatory stage of the secondary students' abstraction of mathematical conceptions. *BOLEMA*, *26*(44), 1345-1366.
https://doi.org/10.1590/s0103-636x2012000400011.
Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.
https://doi.org/10.2307/749205.
Simon, M. A. (2014). Hypothetical learning trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-275). Londres: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_72.
Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2.
Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 305-329.
https://doi.org/10.2307/30034818.
Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology. Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (267-306). Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
Stylianides, A., & Stylianides, G. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM. Mathematics Education*, *45*, 333-341.
https://doi.org/10.1007/s11858-013-0501-y.
Tall, D. (1985). Chords, tangents and the Leibniz notation. *Mathematics Teaching*, *112*, 48-52.
Tzur, R., & Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 287-304.
https://doi.org/10.1007/s10763-004-7479-4.
Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (65-81). Dordrecht, Kluwer.
https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5.
Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignament secondaire. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, *15*, 173-199.
Weber, E., Walkington, C., & McGalliard, W. (2015). Expanding notions of learning trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(4), 253-272.
https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1083836.

High school students’ learning trajectories of the concept of tangent line

Abilio Orts
IES Tavernes Blanques
(Valencia, España)
abilioorts@gmail.com

Salvador Llinares
Universidad de Alicante
(España)
sllinares@ua.es

Francisco José Boigues
Universitat Politècnica
de València (España)
fraboipl@mat.upv.es

The goal of this research is to characterize high school students’ learning trajectories of the concept of tangent line generated in a teaching experiment. The experiment considers a model of learning progression of tangent line using the local linearity of a function to support the transition from the Euclidean conception (the tangent line touches but does not cut the conic) to the Cartesian conception (tangent line as the limit of the secant lines).

We identify three learning trajectories characterized by how high students manage both: (*i*) the relation between the graphical and analytical registers to support the transition from the Leibnizian conception (a curve is formed by infinite segments; extending the segment in which the point is located we obtain the tangent line) to the Cartesian conception; and, (*ii*) the approximation to the value of a function by the tangent line in the neighbourhood of the point of tangency.

We consider the three characteristic moments in the transition between the phase of participation and the anticipation in conceptual learning (Roig, Llinares & Penalva, 2010, 2012; Tzur & Simon, 2004). During the first moment (projection) the students organized a set of registers relative to the effects of the activities performed. In the second one (reflexion), they abstract some regularity in this set of relations, coordinating and comparing the different registers, in this case, the concept of tangent line linked to the situation in which it was generated. Finally, during the third moment (local anticipation) the students are able to apply the regularity identified in different situations. Each trajectory identified in the experiment is associated with one of these three moments. The students in the first trajectory have not overcome the Euclidean conception, although they use this conception in a local way instead of the global focus (used in the previous years when it was defined as the tangent line of a circle using the Euclidean conception). Also, they have problems to relate graphical and analytical registers. The students in the second trajectory have internalized the Cartesian conception with the help of the Leibnizian conception on the graphic register, but still have difficulties in the analytic register (they are not able to calculate the approximate value of a function in the neighbourhood of a point). Finally, the students in the third trajectory have thematized the concept of tangent line (in the sense given by APOS theory), since they apply it in situations different from those in which it was defined. Thus, as they have internalized in addition to the Cartesian conception the Leibnizian conception both in the graphic and analytical mode, they are able to obtain the approximate value of a function.

We have identified two transitions to progress from one moment to the next one in conceptual learning: First, students need to coordinate the graphic and analytical registers to relate the Cartesian conception (in the analytical register) and Leibnizian conception (in the graphic register) and, secondly, they need to comprehend the Leibnizian conception in the analytical way. These findings suggest that the internalization of the Leibnizian conception is necessary to overcome the epistemological obstacle that the Euclidean conception entails for the learning of the concept of tangent line.

The results of this research provide information to the curriculum developers, writers of textbooks, designers of teaching materials and teaching educators, for they underline the need of defining as a learning objective, overcome the epistemological obstacle of the Euclidean conception and help students acquire the Cartesian conception from the Leibnizian conception. To do this, different types of tasks must be considered, such as graphs of functions whose tangent line cuts at several points or tangent lines at inflection points or tangent lines to another line. Finally, from a theoretical point of view, this work integrates the cognitive perspective that considers the phases in conceptual learning in the development of learning trajectories.