

Estabilización Automática de una Bicicleta sin Conductor mediante el Enfoque de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones

Mauro Baquero-Suárez^{a,b,*}, John Cortes-Romero^a, Jaime Arcos-Legarda^a, Horacio Coral-Enriquez^{a,b}

^aDepartamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad Nacional de Colombia, Av. K30 No. 45 - 03, Edif. 411 Of. 203A, Bogotá D.C., Colombia.

^bFacultad de Ingeniería, Universidad de San Buenaventura, K8H No. 172 - 20, Edif. Diego Barroso Of. 204, Bogotá D.C., Colombia.

Resumen

Este trabajo propone una estrategia de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones (ADRC), usando observadores extendidos de perturbación, para estabilizar una bicicleta en movimiento, sin conductor y con una velocidad de avance variable. Aunque la bicicleta tiene una dinámica inestable y no lineal alrededor de su posición vertical, que puede modelarse como un sistema Lineal de Parámetros Variantes (LPV) dependientes de la velocidad, el diseño del controlador usa un modelo simplificado de parámetros concentrados invariantes en el tiempo y una velocidad nominal constante. El esquema ADRC agrupa las discrepancias entre el modelo simplificado y la planta, junto con las perturbaciones externas en una señal aditiva unificada, que es estimada a través del observador y realimentada mediante una ley de control lineal para rechazarla. La efectividad de la estrategia es validada mediante una co-simulación entre ADAMS y MATLAB, la cual exhibe un alto desempeño y robustez sobre un modelo dinámico virtual de la bicicleta, sometida a perturbaciones externas severas y variaciones de parámetros.

Palabras Clave:

Bicicletas robóticas, Rechazo activo de perturbaciones, Control robusto, Observadores de perturbación, Sistemas dinámicos de multicuerpos, Sistemas no lineales, Vehículos autónomos.

Automatic Stabilization of a Riderless Bicycle using the Active Disturbance Rejection Control Approach

Abstract

This work proposes an ADRC (Active Disturbance Rejection Control) strategy by disturbance extended observers to stabilize a moving riderless bicycle with a variant forward speed. Although the bicycle has an unstable and non-linear dynamics when in its upright position, which can be modeled as a LPV (Linear-Parameter-Varying) system that depends on the forward speed, a simplified time-invariant and lumped-parameter model, with an nominal constant forward speed is used in the controller design. ADRC scheme groups discrepancies between the simplified model and the plant, with external disturbances into an equivalent additive unified disturbance signal at input, which is estimated via the observer and rejected through a linear control law. The effectiveness of this strategy is validated by a co-simulation between ADAMS and MATLAB, which exhibits a high performance and robustness in a virtual dynamic model of the bicycle, submitted to severe external disturbances and parameter variations.

Keywords:

Robotic bicycles, Active disturbance rejection control, Robust control, Disturbance observers, Multibody systems dynamics, Non-linear systems, Autonomous vehicles.

1. Introducción

Una bicicleta es un sistema que tiene una dinámica inestable similar al péndulo invertido, pero que varía sus fuerzas y momentos de acuerdo con la velocidad de avance. Básicamen-

te, su inclinación es afectada por la gravedad, la posición de su centro de masa, la velocidad de avance y la posición angular de la dirección (Gordon Wilson and Jim Papadopoulos, 2004). Varias investigaciones como las presentadas en (Neimark and N. A. Fufaev, 2004; Schwab et al., 2005a,b), muestran que puede

* Autor para correspondencia: mabaqueros@unal.edu.co

To cite this article: Mauro Baquero-Suárez, John Cortes-Romero, Jaime Arcos-Legarda, Horacio Coral-Enriquez. Automatic Stabilization of a Rider-less Bicycle using the Active Disturbance Rejection Control Approach. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 15 (2018) 86-100. <https://doi.org/10.4995/riai.2017.8832>

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)

lograrse la estabilización autónoma de una bicicleta bajo cierto rango de velocidad de avance, mediante algún sistema de control en su dirección. La mayor dificultad radica en las incertidumbres de los modelos desarrollados hasta el momento, porque solamente capturan el comportamiento esencial de la bicicleta y algunas de sus perturbaciones. En (Limebeer and Sharp, 2006; Schwab and Meijaard, 2013; Åström et al., 2005) se presenta una revisión substancial sobre modelos matemáticos de diferente complejidad, obtenidos mediante el análisis de parámetros concentrados y algunas condiciones para estabilizar estos sistemas. Entre los modelos referenciados por estas revisiones, el presentado en (Meijaard et al., 2007; Papadopoulos, 1987) es el más utilizado en aplicaciones de control. En este modelo asumen que la bicicleta sólo está constituida por cuatro cuerpos rígidos y obtienen un modelo en espacio de estado con parámetros variantes (LPV), a partir de unas ecuaciones diferenciales de movimiento que provienen del principio de D'Alembert (Whipple, 1899). La validación del anterior modelo se desarrolló en (Kooijman et al., 2008) mediante la adquisición de datos en tiempo real de una bicicleta en movimiento. Este modelo es base del diseño utilizado en la estrategia propuesta del presente trabajo.

Existen otras contribuciones más orientadas al planteamiento de estrategias de control para estabilizar la bicicleta. En (Michini and Sean Torrez, 2007), se implementa un controlador LQR en la dirección que logra estabilizar una bicicleta a velocidad constante, por medio de un motor eléctrico acoplado en la rueda trasera. Este trabajo merece ser citado debido a que es uno de los primeros que muestra resultados experimentales satisfactorios y que han estimulado el desarrollo de este tipo de prototipos. En (Cerone et al., 2010), logran la estabilización mediante un controlador de realimentación de estado con ganancias que se ajustan automáticamente, solucionando una Desigualdad Matricial Lineal (LMI) dependiente de la velocidad de avance. Un mayor reto lo constituye el diseño de controladores independientes de la velocidad de avance, dada la referenciada dependencia de la velocidad con su dinámica, ese enfoque es precisamente el abordado en esta propuesta. En (Nenner et al., 2010) se diseña e implementa un controlador robusto basado en el modelo linealizado de la bicicleta y formulado mediante el enfoque de la teoría de realimentación cuantitativa (QFT), para estabilizar una motocicleta sin conductor a una velocidad mayor a 2.5 m/s, mostrándose resultados satisfactorios. En (Lam, 2011), muestran resultados experimentales de un eficiente controlador PD que estabiliza una bicicleta para niños por medio de un giroscopio de control de momento. Y por último, un trabajo interesante fue presentado en (Jin et al., 2015), donde se construyó un pequeño robot móvil tipo bicicleta, con un núcleo de estabilización basado en el efecto de precesión giroscópica, actuado mediante un controlador PID para garantizar la estabilidad en su postura vertical.

En la actualidad, se aprovechan las herramientas computacionales para desarrollar modelos dinámicos virtuales y simular su dinámica como un sistema de multicuerpos. En algunos trabajos como los presentados en (Tanelli et al., 2006; Yuan-yuan et al., 2017), se utilizan estas herramientas para validar en una forma más realista las estrategias de control propuestas que resuelven el problema de estabilidad de la bicicleta. Estas simulaciones aprobarían su posterior implementación instrumental,

entonces sería interesante validar los controladores presentados en (Ai-Buraiki and Thabit, 2014; Bickford and Davison, 2013; Brizuela et al., 2016; Hwang et al., 2009), donde sólo se realizan simulaciones numéricas con el modelo matemático.

En este artículo, el problema de estabilización de una bicicleta en movimiento y sin conductor, fue abordado mediante una estrategia de control basada en la técnica ADRC, la cual ha sido aplicada a un amplio número sistemas inciertos perturbados para el seguimiento robusto de referencias (Cortés Romero et al., 2014). El esquema propuesto considera un modelo lineal simplificado de la dinámica de la bicicleta pero perturbado. Bajo esta técnica, las perturbaciones son unificadas en una señal equivalente a la entrada de control, que tiene en cuenta de manera conjunta las dinámicas no modeladas y perturbaciones externas asociadas. Esta señal de perturbación es estimada mediante un observador extendido GPI y rechazada en línea por medio de una ley de control lineal que inyecta esta estimación (Cortés Romero et al., 2010).

El diseño se basa en un modelo aumentado a partir del modelo aproximado de la planta y la inclusión de un modelo interno aproximado lineal de la perturbación. La estrategia de control basada en observador extendido GPI, logra que el sistema de lazo cerrado recupere el desempeño del modelo lineal nominal tanto como la sintonización de las ganancias del observador lo permitan. La estrategia de diseño propuesta evita el uso de observadores basados en la estructura no lineal del sistema y propone en su lugar un observador estrictamente lineal. La estimación arbitrariamente cercana de la perturbación agregada, o incertidumbre aditiva total de planta, permite entonces su cancelación aproximada mediante la acción de control apropiada. El controlador propuesto fue evaluado mediante simulaciones realísticas que utilizan modelos dinámicos virtuales, a través de los paquetes profesionales de simulación de ADAMS y MATLAB. Estas simulaciones permiten la validación de la robustez de la estrategia por medio de la aplicación de perturbaciones severas que consisten básicamente en variaciones de la velocidad de avance, fuerzas externas laterales aplicadas al marco trasero de la bicicleta y cargas concentradas que cambian la posición de su centro de masa. Estas perturbaciones varían drásticamente la dinámica de la bicicleta, alejándose de su comportamiento esencial caracterizado por el modelo matemático simplificado.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: La Sección 2 presenta el modelamiento de la bicicleta. La Sección 3 explica en detalle la formulación de la estrategia de control para abordar el problema de estabilización. En la Sección 4 se exhiben y discuten los resultados obtenidos en las simulaciones desarrolladas para evaluar la estrategia propuesta. Finalmente, la Sección 5 entrega algunas conclusiones de este trabajo.

2. Ecuaciones del Movimiento de la Bicicleta

Inicialmente se considera el esquema simplificado que se exhibe en la Fig. 1, el cual describe a la bicicleta como un sistema que se desplaza en un plano horizontal, con toda su masa concentrada en el punto (b, h) , y con un eje de dirección vertical, lo que implica que tiene un ángulo con respecto al eje x de

$\alpha=90^\circ$, y una distancia horizontal con respecto al punto de contacto de la rueda frontal de $c=0$. Este sistema tiene tres grados de libertad (δ, φ, ψ) con respecto al sistema de coordenadas xyz , localizado en el punto de contacto de la rueda trasera.

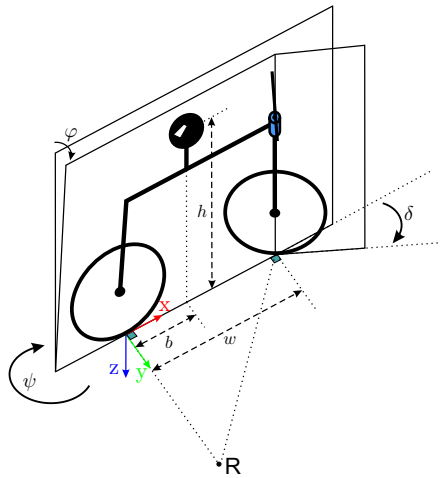


Figura 1: Esquema de la bicicleta en su forma simplificada.

La dinámica del ángulo de inclinación, φ , está regida por la ecuación (1). En donde se captan los efectos de la gravedad y las fuerzas centrífugas que afectan al sistema. El balance de momento angular con respecto al eje x , realizado en (Goldstein, 1953), muestra la dependencia de la dinámica de inclinación con respecto a la velocidad de avance, lo cual se vuelve explícito a continuación:

$$J_t w \ddot{\varphi} - m_t g h w \varphi = D_t \dot{\delta} v + m_t h \delta v^2, \quad (1)$$

donde J_t representa el momento de inercia de la bicicleta completa con respecto al eje x , mientras que D_t hace referencia a su tensor de inercia con respecto a los ejes xz , w es la distancia entre los puntos de contacto de las ruedas con el piso, m_t concentra la masa total de la bicicleta y g representa la aceleración de la gravedad. Si se supone una velocidad de avance constante, v_{cte} , la ecuación (1) se transforma en una representación lineal del sistema, lo cual permite extraer su transformada de Laplace. Así, la relación en el dominio complejo entre el ángulo de inclinación $\varphi(s)$ y el ángulo de la dirección $\delta(s)$ está dado por la función de transferencia que se muestra a continuación:

$$\frac{\varphi(s)}{\delta(s)} = v_{cte} \frac{D_t s + m_t h v_{cte}}{J_t w s^2 - m_t g h w}, \quad (2)$$

La ecuación (2) representa un sistema dinámico de orden $n=2$, que relaciona la rotación en la dirección δ , con el ángulo de inclinación φ . Esta función de transferencia tiene dos polos ubicados en

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{m_t g h}{J_t}} \quad (3)$$

y un cero en

$$z = -\frac{m_t v_{cte} h}{D_t} \quad (4)$$

que depende de la magnitud de la velocidad v_{cte} . El modelo matemático desarrollado hasta este momento permitirá, en la

Subsección 3.2, plantear un sistema de control para la inclinación de la bicicleta por medio de la manipulación del ángulo de la dirección. En la Tabla 1, están consignados los parámetros requeridos por la ecuación (1). Estos parámetros se obtuvieron de los valores de masa y su distribución en los cuerpos de un modelo CAD (Computer Assisted Design) de una bicicleta de montaña real, desarrollado con el software Solid Edge ST4 tal y como se muestra en la Fig.2.

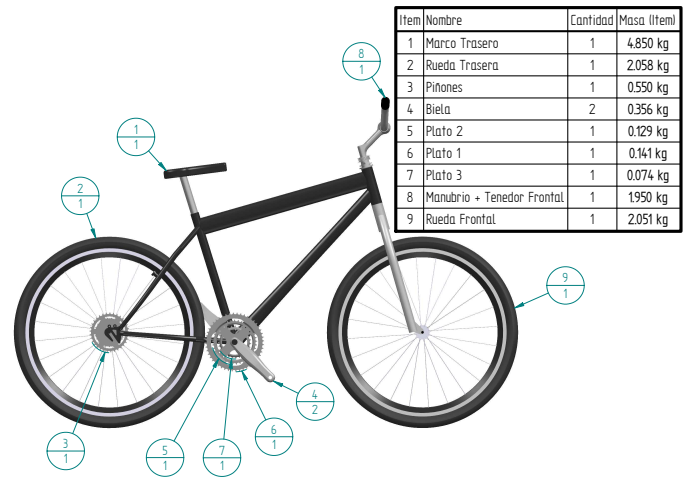


Figura 2: Modelo CAD de una bicicleta de montaña real.

Tabla 1: Parámetros de la bicicleta entera.

Item	Símbolo	Valor	Unidad
Masa total de la bicicleta	m_t	12.514197	Kg
Momento de inercia con respecto al eje x	J_t	4.095365	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
Producto de inercia con respecto a los ejes xz	D_t	3.492466	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
Distancia entre ejes	w	1.06016	m
Altura del centro de masa	h	0.502656	m
Distancia horizontal del centro de masa	b	0.514899	m
Gravedad	g	9.807	m/s^2
Velocidad de avance	v_{cte}	constante	m/s

Una extensión de la formulación anterior, se obtiene a partir de las ecuaciones linealizadas de movimiento presentadas en (Papadopoulos, 1987; Schwab et al., 2005a), las cuales, describen la dinámica fundamental de una bicicleta conceptual que consiste de cuatro cuerpos rígidos llamados como, el marco trasero, el tenedor frontal con el manubrio (marco frontal), y las ruedas trasera y frontal. Se asume que los cuatro cuerpos están interconectados mediante articulaciones de revolución, y que son simétricos con respecto al eje longitudinal x . El contacto entre las ruedas y una superficie del suelo asumida como plana y nivelada, es modelada por restricciones holonómicas en la dirección normal y por restricciones no-holonómicas en su dirección longitudinal y lateral. La Fig. 3 muestra el esquema de la bicicleta conceptual con sus cuatro cuerpos rígidos, su sistema de coordenadas xyz , y sus tres grados de libertad, los cuales son, el ángulo de inclinación φ , el ángulo de dirección δ y la velocidad de avance definida como $v = -R_{rw} \dot{\theta}_r$. Este modelo tampoco tiene en cuenta el par de perturbación ejercido sobre el eje de la dirección, que se genera por el efecto de la precesión giroscópica en la rueda frontal, el cual es capaz incluso de girar el marco frontal hacia el sentido donde se inclina la bicicleta y estabilizarla automáticamente a cierto rango de

velocidad (Kooijman et al., 2011).

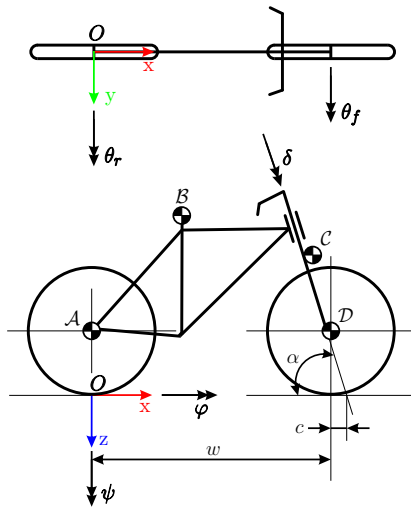


Figura 3: Esquema de la bicicleta en su forma básica.

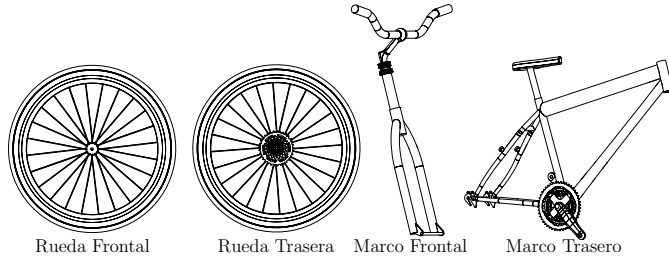


Figura 4: Modelo CAD de la bicicleta dividida en cuatro cuerpos.

Las ecuaciones linealizadas del movimiento, son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas dinámicamente, de la forma $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$, las cuales, pueden escribirse con mayor detalle de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + v\mathbf{C}_1\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2)\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (5)$$

en donde,

$$\mathbf{q} = [\varphi \quad \delta]^T \text{ y } \mathbf{f} = [T_\varphi \quad T_\delta]^T$$

T_φ es el par de inclinación considerado como una perturbación exógena, T_δ es el par de dirección aplicado al eje del manubrio y φ y δ son las variables de inclinación y dirección. Los parámetros son: 1) La matriz simétrica de masa \mathbf{M} , la cual entrega la energía cinética de la bicicleta a una velocidad de avance de cero. 2) La matriz de amortiguamiento dependiente de la velocidad de avance $\mathbf{C} = v\mathbf{C}_1$, la cual captura los pares giroscópicos antisimétricos que se deben a las variaciones en la dirección e inclinación. 3) La matriz de rigidez \mathbf{K} la cual es la suma de dos partes: una parte simétrica independiente de la velocidad y proporcional a la aceleración gravitacional $g\mathbf{K}_0$, y otra parte $v^2\mathbf{K}_2$ que se origina por los efectos centrífugos y giroscópicos. Los coeficientes de las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C}_1 , \mathbf{K}_0 y \mathbf{K}_2 fueron calculados por medio del algoritmo propuesto en (Meijaard et al., 2007), el cual utiliza los parámetros consignados en la Tabla 2, que se derivan del modelo CAD dividido en cuatro cuerpos tal y como se muestra en la Fig. 4. Este algoritmo

entrega los siguientes resultados:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4.09537 & 0.31541 \\ 0.31541 & 0.16216 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4.11551 \\ -0.58511 & 0.51821 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} -61.76730 & -4.80033 \\ -4.80033 & -1.31521 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6.69605 \\ 0 & 0.57886 \end{bmatrix}$$

Tabla 2: Parámetros básicos de la bicicleta conceptual.

Parámetro	Símbolo	Valor
Distancia entre ejes	w	1.06 m
Paso	c	0.06 m
ángulo del cabezal	α	$\arctan(3.51)$ rad
Gravedad	g	9.81 m/s^2
Velocidad de avance	v	variable m/s
Rueda trasera:		
Radio	R_{rw}	0.32 m
Masa	m_{rw}	2.61 kg
Momentos de inercia de masa	(A_{xx}, A_{yy}, A_{zz})	$(0.09, 0.18, 0.09) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Marco trasero:		
Posición del centro de masa	(x_{rf}, y_{rf}, z_{rf})	$(0.42, 0.003, -0.56) \text{ m}$
Masa	m_{rf}	5.91 kg
Momentos de inercia de masa	$\begin{bmatrix} B_{xx} & 0 & B_{xz} \\ B_{yy} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & B_{zz} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.32 & 0 & 0.05 \\ 0.56 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & 0.26 & 0 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Marco frontal:		
Posición del centro de masa	(x_{ff}, y_{ff}, z_{ff})	$(0.94, 0, -0.75) \text{ m}$
Masa	m_{ff}	1.95 kg
Momentos de inercia de masa	$\begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} \\ C_{yy} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & C_{zz} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.14 & 0 & -0.01 \\ 0.13 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & 0.03 & 0 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Rueda frontal:		
Radio	R_{fw}	0.32 m
Masa	m_{fw}	2.05 kg
Momentos de inercia de masa	(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz})	$(0.09, 0.18, 0.09) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Mediante manipulaciones algebraicas, la ecuación diferencial (5) se escribe en la forma de un sistema en espacio de estado, seleccionando φ , δ y sus derivadas $\dot{\varphi}$ y $\dot{\delta}$, como las variables del estado $\mathbf{x}(\mathbf{t})$, T_δ y T_φ como las entradas $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, y la salida $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ como el mismo estado $\mathbf{x}(\mathbf{t})$, debido a que pueden medirse fácilmente en la realidad. Entonces, Las ecuaciones en espacio de estado resultan así:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{v})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}), \quad (7)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{t})$$

en donde,

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = [\varphi \quad \delta \quad \dot{\varphi} \quad \dot{\delta}]^T, \quad \mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) \text{ y} \quad (8)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = [T_\varphi \quad T_\delta]^T$$

Las matrices $\mathbf{A}(\mathbf{v})$, \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} , se obtienen con las siguientes operaciones algebraicas tomadas de (Schwab et al., 2012):

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2) & -\mathbf{M}^{-1}(v\mathbf{C}_1) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{I} \text{ y } \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

La dependencia de \mathbf{A} sobre la velocidad v , califica este modelo como un sistema LPV, debido a que (7) describe un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI), para cada valor del parámetro variante en el tiempo v . Tomando como base el análisis reportado en (Cerone et al., 2010), las trayectorias de sus valores propios como función de la velocidad de avance v , se muestran en la Fig. 5 y la Fig. 6 respectivamente, ambas en un intervalo de $[0, 10]$ m/s.

Cuando v es cero, el sistema tiene cuatro valores propios reales ubicados en $\lambda_1 = 3.8804$, $\lambda_2 = 2.5721$, $\lambda_3 = -3.8819$ y $\lambda_4 = -2.6598$, los cuales están marcados con círculos rojos en la Fig.5. La ubicación de λ_1 y λ_2 en el semiplano derecho, explica la inestabilidad de la bicicleta en su posición vertical. Este sería el estado más crítico para controlar φ , actuando solamente sobre δ . A medida que v aumente, λ_1 y λ_2 se convierten en complejos conjugados y sus partes reales disminuyen hasta ubicarse dentro del semiplano izquierdo y estabilizar el sistema, a partir de $v = 3.15$ m/s. También, λ_4 se incrementa desplazándose hacia el semiplano derecho, retornando el sistema a su condición inestable desde $v = 3.95$ m/s.

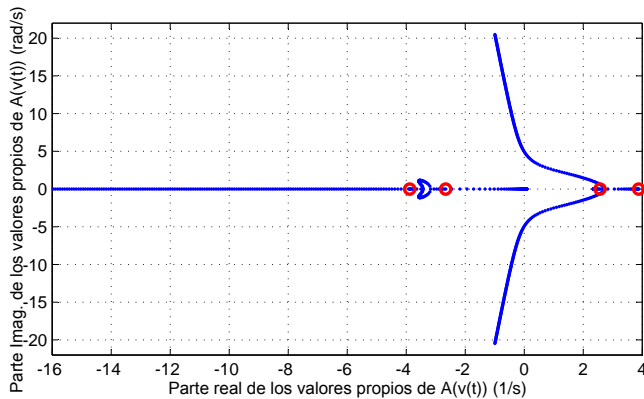


Figura 5: Trayectorias de los valores propios de la matriz $A(v)$ con v entre 0 y 10 m/s.

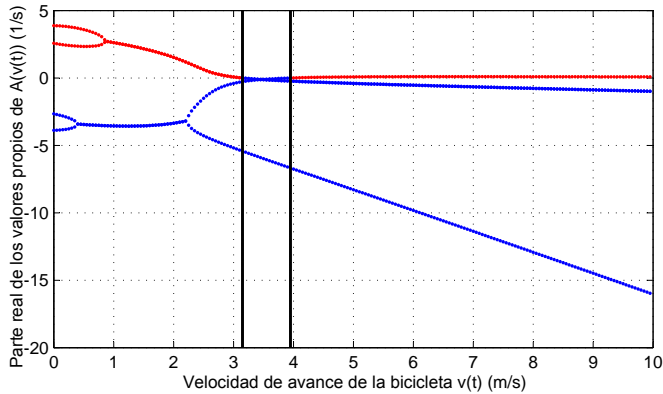


Figura 6: Trayectorias de la parte real de los valores propios de la matriz $A(v)$ en función de v .

La Fig. 6 muestra una franja de equilibrio para valores de v entre 3.15 m/s y 3.95 m/s, donde la bicicleta sin control se hace auto-estable, debido a que todos los valores propios están dentro del semiplano izquierdo. Por fuera de esta franja, existen dos zonas inestables que están localizadas antes de $v_w = 3.15$ m/s, y después de $v_c = 3.95$ m/s. La zona en la cual la velocidad está por debajo de v_w , es la más difícil de estabilizar porque la acción de control debe ser fuerte y rápida para contrarrestar las oscilaciones laterales de la bicicleta originadas por la baja velocidad de avance. La otra zona, en donde la velocidad está por encima de v_c , la estabilidad podría lograrse con acciones de control tenues y lentas en comparación con la zona anterior. Con esta información podría diseñarse un sistema de control que sea capaz de estabilizar la bicicleta con una mínima veloci-

dad de avance, asegurando su efectividad para velocidades más elevadas.

Assumiendo que la bicicleta se mueve alrededor de su posición vertical con valores de la inclinación cercanos a cero ($\varphi = 0$) y con una variación de velocidad de avance tan suave que puede aproximarse como constante durante un intervalo de tiempo ($v(t) = v_{cte}$), entonces, puede obtenerse a partir de (7), el siguiente modelo simplificado lineal e invariante en el tiempo para representar la dinámica de la dirección:

$$J_d \ddot{\delta} + v_{cte} C_d \dot{\delta} + (gK_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d}) \delta = T_\delta + \xi, \quad (10)$$

donde $J_d = 0.1379$, $C_d = 0.2012$, $K_{0_d} = -0.0963$ y $K_{2_d} = 0.0632$, respectivamente. T_δ es el par de control aplicado en el eje de la dirección, mientras que ξ es una señal variante en el tiempo que considera de manera agrupada los efectos de los acoplamientos dinámicos con el ángulo de inclinación, las dinámicas no modeladas y las perturbaciones externas. Despreciando momentáneamente las perturbaciones agrupadas en $\xi(t)$ y aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (10) se obtiene la siguiente función de transferencia del modelo nominal no perturbado:

$$\frac{\delta(s)}{T_\delta(s)} = \frac{1}{J_d s^2 + v_{cte} C_d s + (gK_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d})}. \quad (11)$$

Finalmente, bajo las consideraciones y suposiciones realizadas, la dinámica total de la bicicleta se describe por medio de dos funciones de transferencia en cascada, lineales, con parámetros concentrados, perturbados equivalentemente a cada entrada de control y que serán la base en el planteamiento de la estrategia de control en la siguiente sección.

2.1. Modelo Dinámico Virtual Construido en ADAMS

Para construir un modelo dinámico en ADAMS, el modelo CAD desarrollado en Solid Edge, fue importado al entorno ADAMS/View y se completaron los siguientes procedimientos:

1. Se ingresa el valor de masa de cada cuerpo de la bicicleta.
2. Se interconectan todos los cuerpos mediante articulaciones de revolución.
3. Se establece en las articulaciones el modelo de fricción de Coulomb de la Fig. 7, con los siguientes parámetros:

$$\mu_s = 0.05, \quad \mu_d = 0.03, \quad v_s = 0.1, \quad v_d = 2v_s,$$

donde μ_s y μ_d son los coeficientes de fricción estática y dinámica, y v_s y v_d , son las transiciones de velocidad que satisfacen a cada uno de los coeficientes.

4. Se agregan los actuadores que moverán la bicicleta.
5. Se construyen acoples virtuales para simular las relaciones de transmisión de las articulaciones enlazadas.
6. Se crea una superficie sólida plana que funcionará como la pista donde se moverá la bicicleta, y se modelan las fuerzas de contacto y de fricción entre la bicicleta y esta pista utilizando los parámetros de la Tabla 3.

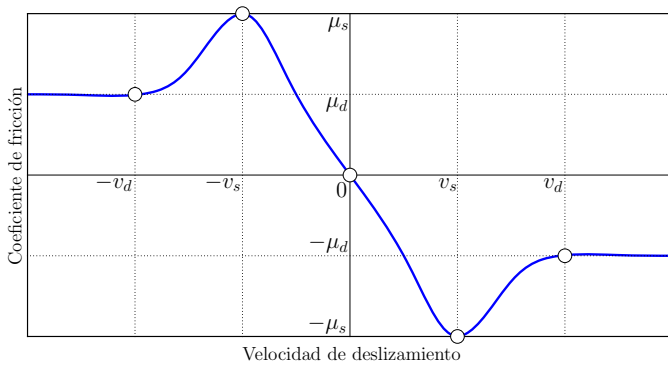


Figura 7: Modelo de fricción de Coulomb.

Tabla 3: Parámetros usados para modelar las fuerzas de contacto y de fricción.

Fuerza normal de impacto			
Parámetros	Materiales	acero vs asfalto	caucho vs asfalto
Rigidez		1.0E+008	1.0E+008
Exponente de fuerza		2.2	2.2
Amortiguamiento		1.0E+004	1.0E+004
Profundidad de penetración		1.0E-004	1.0E-004
Fuerza de fricción de Coulomb			
Parámetros	Materiales	acero vs asfalto	caucho vs asfalto
Coefficiente de fricción μ_s		0.6	0.72
Coefficiente de fricción μ_d		0.4	0.72
Velocidad de transición v_s		0.1	0.1
Velocidad de transición v_d		1.0	1.0

7. Se especifican las variables de entrada y salida que serán manipuladas de forma externa.
8. Se exporta el modelo no lineal de ADAMS/View hacia el entorno MATLAB/Simulink, por medio de la herramienta ADAMS/Controls.

La Fig. 8 muestra el modelo dinámico completado en ADAMS, en donde el bloque naranja representa el modelo exportado a MATLAB/Simulink.

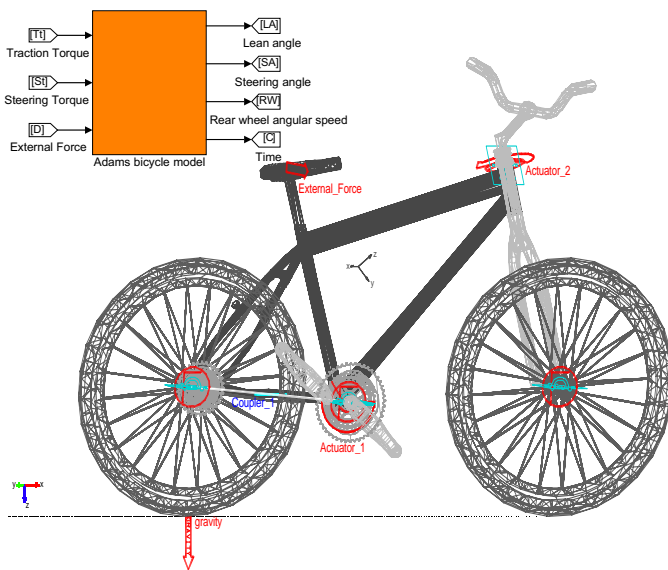


Figura 8: Modelo dinámico virtual de la bicicleta.

3. Formulación del Esquema de Control

En esta sección, se diseña un controlador de velocidad de avance, que permite al sistema de tracción de la bicicleta seguir perfiles suaves de velocidad con aceleraciones controladas. Luego, se propone un esquema de control en cascada para maniobrar el sistema de dirección de la bicicleta y estabilizarla dentro de un rango amplio de valores de velocidad de avance. La Fig. 9 muestra el esquema general de todo el sistema de control para estabilizar la bicicleta con una velocidad de avance establecida.

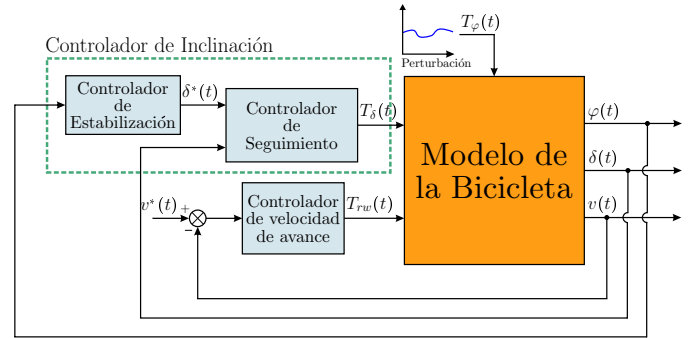


Figura 9: Esquema general de los sistemas de control de inclinación y velocidad de avance de la bicicleta.

3.1. Sistema de Control de Velocidad de Avance

Considerando que $v = -R_{rw}\dot{\theta}_r$, se propone controlar la velocidad angular de la rueda trasera $\dot{\theta}_r$, aplicándole el par requerido a su eje de giro. La dinámica del sistema de tracción de la bicicleta puede simplificarse como un conjunto de fuerzas y momentos que intervienen en la rueda trasera para generar su movimiento. La Fig. 10, muestra en un diagrama de cuerpo libre, las fuerzas y momentos concentrados en la rueda trasera, en donde v es la velocidad lineal del centro de masa, F_n es la fuerza normal concentrada en el eje, la cual, es exactamente el peso de la bicicleta, asumiendo que se mueve sobre una superficie plana, F_f es la fuerza de fricción que ejerce el suelo sobre la rueda y T_{rw} es el par aplicado por el actuador.

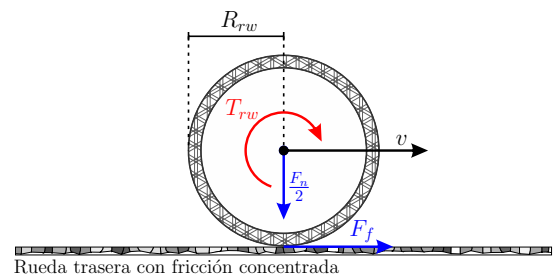


Figura 10: Diagrama de cuerpo libre de la rueda trasera.

A partir de las fuerzas y momentos definidos en la Fig. 10, se deriva el siguiente modelo lineal de parámetros concentrados:

$$\begin{aligned} F_f &= m_t R_{rw} \ddot{\theta}_r, \\ T_{rw} &= A_{yy} \ddot{\theta}_r + \mu_d \dot{\theta}_r + R_{rw} F_f, \end{aligned} \quad (12)$$

donde m_t es la masa total de la bicicleta, A_{yy} es el momento de inercia de la rueda con respecto a su eje de giro (ver Tabla 2), y

$\mu_d = 0.03$, es el coeficiente de fricción dinámico correspondiente a la articulación de la rueda. Combinando estas dos ecuaciones tenemos que

$$(A_{yy} + m_t R_{rw}) \dot{v} + \mu_d v = T_{rw} R_{rw}. \quad (13)$$

El modelo (13), no considera deslizamiento ni deformación de la rueda trasera cuando hay tracción, es decir, que no hay fricción dinámica entre el suelo y la rueda, y el coeficiente de deslizamiento del suelo siempre es constante, independientemente del par aplicado en su eje (Canudas de Wit and Tsiotras, 1999). La función de transferencia desde el par T_{rw} hasta la velocidad v es

$$G_{vT}(s) = \frac{v(s)}{T_{rw}(s)} = \frac{R_{rw}}{(A_{yy} + m_t R_{rw})s + \mu_d}. \quad (14)$$

Considerando la función de transferencia $G_{vT}(s)$, una acción de control PI es adecuada para gobernar la salida v . La acción de control PI es expresada como

$$T_{rw} = -K_p e_v - K_i \int_0^t e_v dt, \quad (15)$$

donde $e_v = v - v^*$ es el error de seguimiento y v^* es la velocidad de avance deseada. La función de transferencia de lazo cerrado desde la referencia v^* hasta la salida v resulta en

$$T_o(s) = \frac{K_p s + K_i}{\left(\frac{A_{yy} + m_t R_{rw}}{R_{rw}}\right) s^2 + \left(\frac{K_p R_{rw} + \mu_d}{R_{rw}}\right) s + K_i}. \quad (16)$$

Entonces, la sintonización de las ganancias K_p y K_i , se realiza mediante una localización arbitraria de los polos de $T_o(s)$, así:

$$K_p = \frac{2(A_{yy} + m_t R_{rw})\zeta_0\omega_0 - \mu_d}{R_{rw}}, \quad K_i = \frac{(A_{yy} + m_t R_{rw})\omega_0^2}{R_{rw}}, \quad (17)$$

donde ζ_0 y ω_0 son parámetros deseados de factor de amortiguamiento y frecuencia natural del lazo cerrado.

3.2. Sistema de Control de Inclinación

Para estabilizar la bicicleta, se propone un esquema de dos lazos de control en cascada diseñados bajo la filosofía del rechazo activo de perturbaciones. El primer lazo (controlador de estabilización), genera la referencia de posición angular requerida en la dirección para estabilizar la bicicleta. El segundo lazo (controlador de seguimiento) se encarga de seguir esa referencia aplicando par al sistema de dirección. La Fig. 11 muestra en detalle todo el esquema de control propuesto para estabilizar la bicicleta con una velocidad de avance establecida.

3.2.1. Controlador de estabilización

El controlador de estabilización genera la referencia de posición angular δ^* que debe seguir el sistema de dirección para estabilizar la bicicleta. Este controlador es diseñado con base en el modelo de la bicicleta linealizado en un punto de operación, asumiendo una velocidad de avance constante $v(t) = v_{cte} \forall t$, donde $v_{cte} \geq 1.5$ m/s. Considere el modelo (2), el cual se puede reescribir así:

$$\ddot{\varphi} - \frac{m_t g h}{J_t} \varphi = \frac{v_{cte}}{J_t W} (D_t \dot{\delta} + m_t h v_{cte} \delta) + \xi_{ext}, \quad (18)$$

donde ξ_{ext} es una perturbación equivalente a la entrada del sistema que agrupa posibles perturbaciones externas desconocidas y términos endógenos del sistema derivados principalmente por incertidumbres debido a la linealización.

El sistema (18) puede definirse de forma simplificada, así:

$$\ddot{\varphi} = \frac{m_t g h}{J_t} \varphi + u_{ext} + \xi_{ext} \quad (19)$$

donde,

$$u_{ext} = \frac{v_{cte}}{J_t W} (D_t \dot{\delta} + m_t h v_{cte} \delta) \quad (20)$$

es una entrada de control auxiliar que será usada para definir la ley de control del lazo externo.

Debido a que las variaciones de inclinación de la bicicleta son relativamente suaves y lentas, se utiliza una aproximación lineal de primer orden como el modelo interno de la función de perturbación:

$$\dot{\xi}_{ext} \approx \epsilon \quad (21)$$

donde ϵ es una constante cercana a cero. Así entonces, es posible encontrar un sistema en espacio de estados que incluye los estados de la planta (19) y también los estados de la perturbación suministrados por la aproximación del modelo interno (21). El sistema aumentado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{ext} &= A_{ext} x^{ext} + B_{ext} u_{ext} + F_{ext} \dot{\xi}_{ext} \\ \varphi &= C_{ext} x^{ext} \end{aligned} \quad (22)$$

donde,

$$A_{ext} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{m_t g h}{J_t} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{ext} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad x^{ext} = \begin{bmatrix} x_1^{ext} \\ x_2^{ext} \\ x_3^{ext} \end{bmatrix},$$

y $x_1^{ext} = \varphi$, $x_2^{ext} = \dot{\varphi}$, $x_3^{ext} = \xi_{ext}$ son las variables de estado del sistema aumentado. Nótese que anteriormente ξ_{ext} correspondía a una perturbación a la entrada del sistema, pero ahora la perturbación es una variable de estado y en consecuencia puede ser estimada usando un observador de estados.

Considere el siguiente observador basado en (22):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}^{ext} &= A_{ext} \hat{x}^{ext} + B_{ext} u_{ext} + L^{ext} (\varphi - \hat{\varphi}) \\ \hat{\varphi} &= C_{ext} \hat{x}^{ext} \end{aligned} \quad (23)$$

donde $L^{ext} = [l_1^{ext} \quad l_2^{ext} \quad l_3^{ext}]^T$ es el vector de ganancias del observador, y $\hat{x}_1^{ext} = \hat{\varphi}$, $\hat{x}_2^{ext} = \dot{\hat{\varphi}}$, $\hat{x}_3^{ext} = \hat{\xi}_{ext}$ son las estimaciones de φ , $\dot{\varphi}$ y ξ_{ext} , respectivamente. La dinámica del error de estimación $\tilde{x}^{ext} = x^{ext} - \hat{x}^{ext}$, es dominada por los valores propios de $(A_{ext} - L^{ext} C_{ext})$, entonces una apropiada selección del vector de ganancias del observador L^{ext} para obtener valores propios negativos en $(A_{ext} - L^{ext} C_{ext})$, proporciona una convergencia del error de estimación, \tilde{x}^{ext} , hacia una región cercana a cero donde cada error de estimación, $\tilde{x}_1^{ext} = \varphi - \hat{\varphi}$, $\tilde{x}_2^{ext} = \dot{\varphi} - \dot{\hat{\varphi}}$, $\tilde{x}_3^{ext} = \xi_{ext} - \hat{\xi}_{ext}$, permanece últimamente acotado.

Ahora, el objetivo de control es gobernar la salida $\varphi(t)$ del sistema simplificado (19), para obligarla a permanecer alrededor de cero independientemente de la función de perturbación

$\xi_{ext}(t)$. Entonces, se propone la siguiente ley de control auxiliar:

$$u_{ext} = -k_1^{ext} \hat{\varphi} - k_0^{ext} \varphi - \hat{\xi}_{ext}, \quad (24)$$

donde k_0^{ext} y k_1^{ext} son ganancias de control. Reemplazando la ley de control auxiliar (24) en el sistema en lazo abierto (19), se obtiene

$$\ddot{\varphi} = \frac{m_t g h}{J_t} \varphi - k_1^{ext} \hat{\varphi} - k_0^{ext} \varphi - \hat{\xi}_{ext} + \xi_{ext}.$$

Agrupando términos y reorganizando, la dinámica de lazo cerrado se convierte en

$$\dot{\varphi} + k_1^{ext} \hat{\varphi} - \frac{m_t g h}{J_t} \varphi + k_0^{ext} \varphi = \xi_{ext} - \hat{\xi}_{ext} + k_1^{ext} (\varphi - \hat{\varphi}), \quad (25)$$

donde, se observa que la dinámica de φ es dominada por el siguiente polinomio característico

$$\left(s^2 + k_1^{ext} s + k_0^{ext} - \frac{m_t g h}{J_t} \right), \quad (26)$$

cuyas ganancias de control se seleccionan para imponer una dinámica deseada de segundo orden para el lazo externo.

Finalmente, la ley de control del lazo externo se obtiene con base en (20) y se calcula como una función de la ley de control auxiliar, así:

$$\delta^*(s) = \frac{J_t W}{v_{cte} (D_t s + m_t h v_{cte})} u_{ext}(s). \quad (27)$$

3.2.2. Controlador de Seguimiento

Para iniciar con la formulación del controlador para el seguimiento de $\delta^*(t)$, considere el sistema (11), el cual se reescribe de la siguiente forma:

$$\ddot{\delta} = -\frac{v_{cte} C_d}{J_d} \dot{\delta} - \frac{(g K_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d})}{J_d} \delta + \frac{1}{J_d} T_\delta + \xi_{int}, \quad (28)$$

donde $\xi_{int} = \frac{1}{J_d} \xi$ agrupa perturbaciones del lazo interno debidas a términos exógenos (par externo reflejado en la dirección por el efecto de fuerzas laterales aplicadas en la bicicleta), posibles acoplamientos entre lazos, e incertidumbres en el modelo debido a la linealización.

Con el fin de proporcionar una estimación adecuada de ξ_{int} , es necesario definir un modelo interno aproximado de la perturbación. En este caso, una aproximación local de bajo orden $\dot{\xi}_{int}(t) \approx 0$ para el modelo interno de la perturbación $\xi_{int}(t)$, conlleva a la necesidad de diseñar un observador con alto ancho de banda, lo cual es un inconveniente cuando se tienen señales ruidosas o en especial cuando en el lazo interno se tienen perturbaciones que varían rápidamente (vea detalles en Cortés Romero et al. (2014)). En consecuencia, se decide definir el modelo interno como una aproximación local de orden 4, la cual proporciona un adecuado equilibrio entre ancho de banda del observador, disminución de las ganancias del observador y desempeño en la estimación:

$$\frac{d^4}{dt^4} \xi_{int} \approx \varepsilon, \quad (29)$$

donde ε es una constante cercana a cero.

Considere el siguiente sistema aumentado que contiene las variables de estado de la planta y las variables de estado correspondientes a la aproximación local del modelo interno de la perturbación:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{int} &= A_{int} x^{int} + B_{int} T_\delta + F_{int} \frac{d^4}{dt^4} \xi_{int} \\ \delta &= C_{int} x^{int} \end{aligned} \quad (30)$$

con,

$$A_{int} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(g K_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d})}{J_d} & -\frac{v_{cte} C_d}{J_d} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{int} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_d} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{int} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{int} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, x^{int} = \begin{bmatrix} x_1^{int} \\ x_2^{int} \\ x_3^{int} \\ x_4^{int} \\ x_5^{int} \\ x_6^{int} \end{bmatrix},$$

donde, $x_1^{int} = \delta$, $x_2^{int} = \dot{\delta}$, $x_3^{int} = \xi_{int}$, $x_4^{int} = \dot{\xi}_{int}$, $x_5^{int} = \ddot{\xi}_{int}$ y $x_6^{int} = \ddot{\xi}_{int}$ son las variables de estado del sistema aumentado.

Con base en (30), considere el siguiente observador:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}^{int} &= A_{int} \hat{x}^{int} + B_{int} T_\delta + L^{int} (\delta - \hat{\delta}) \\ \hat{\delta} &= C_{int} \hat{x}^{int} \end{aligned} \quad (31)$$

con

$$L^{int} = [l_1^{int} \ l_2^{int} \ l_3^{int} \ l_4^{int} \ l_5^{int} \ l_6^{int}]^T,$$

donde, \hat{x}^{int} es el vector de variables de estado estimadas por el observador y contiene: $\hat{x}_1^{int} = \hat{\delta}$, $\hat{x}_2^{int} = \dot{\hat{\delta}}$, $\hat{x}_3^{int} = \hat{\xi}_{int}$, $\hat{x}_4^{int} = \dot{\hat{\xi}_{int}}$, $\hat{x}_5^{int} = \ddot{\hat{\xi}_{int}}$ y $\hat{x}_6^{int} = \ddot{\hat{\xi}_{int}}$. La dinámica del error de estimación, $\tilde{x}^{int} = x^{int} - \hat{x}^{int}$, de este observador es dominada por los valores propios de la matriz $(A_{int} - L^{int} C_{int})$, en donde una selección apropiada de L^{int} –valores propios negativos en $(A_{int} - L^{int} C_{int})$ – asegura la convergencia de \hat{x}^{int} hacia una vecindad cercana a x^{int} , donde cada variable de estado permanece últimamente acotada. En consecuencia se tendrán estimaciones precisas de cada variable de estado cuya cota última depende principalmente de la magnitud de la parte real de los valores propios de la matriz $(A_{int} - L^{int} C_{int})$ (vea detalles en Cortés Romero et al. (2014)).

Ahora, con base en las estimaciones $\hat{\delta}$ y $\hat{\xi}_{int}$ suministradas por el observador (31), se propone la siguiente ley de control para el lazo interno:

$$\begin{aligned} T_\delta = \left[\hat{\delta}^* - k_1^{int} (\hat{\delta} - \hat{\delta}^*) - k_0^{int} (\delta - \delta^*) + \frac{v_{cte} C_d}{J_d} \hat{\delta}^* + \dots \right. \\ \left. + \frac{g K_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d}}{J_d} \delta^* - \hat{\xi}_{int} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

donde, k_0^{int} , k_1^{int} son las ganancias de control, y $\delta^*(t)$, $\hat{\delta}^*(t)$ y $\hat{\delta}^*(t)$ son las trayectorias deseadas de posición, velocidad y aceleración angular del sistema de dirección de la bicicleta.

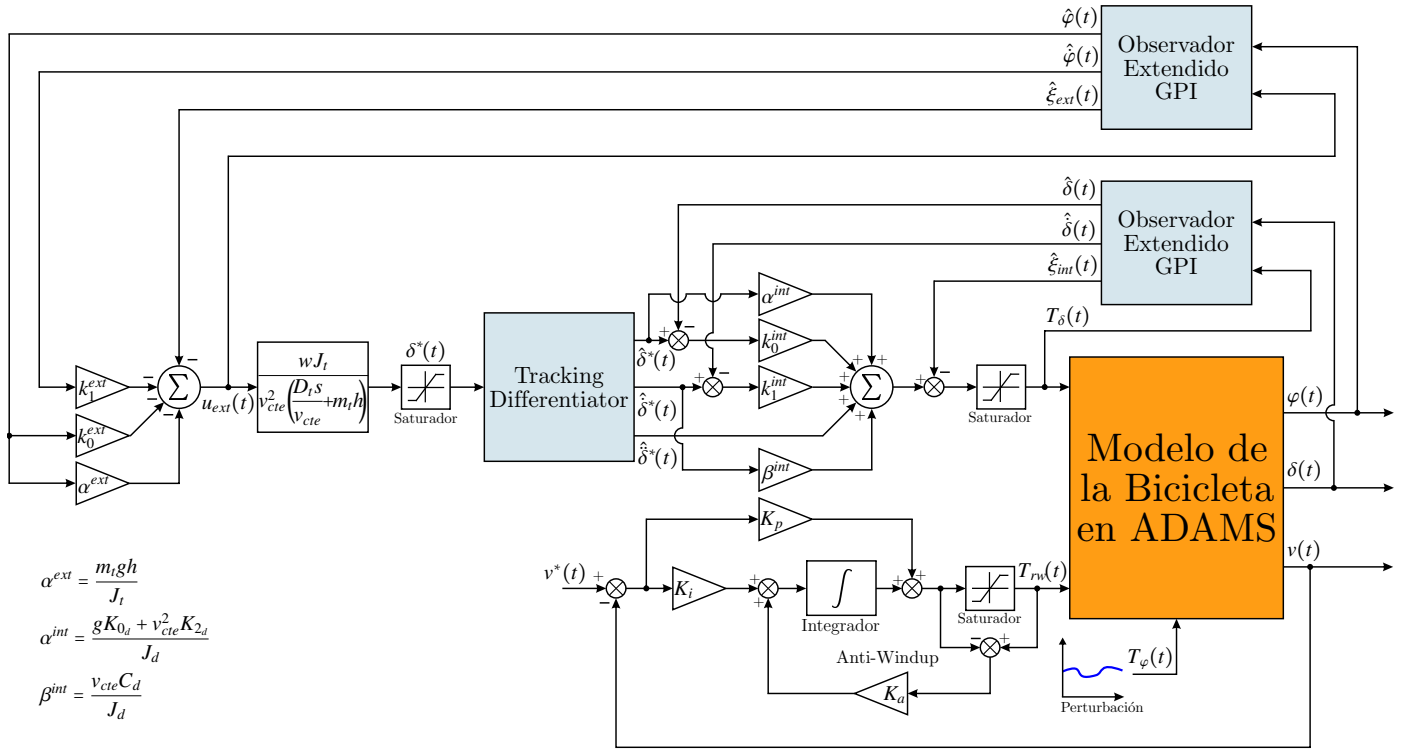


Figura 11: Esquema detallado del sistema de control de la bicicleta.

Luego, reemplazando la ley de control (32) en el sistema en lazo abierto (28), se obtiene la siguiente dinámica de lazo cerrado para el ángulo de la dirección:

$$\ddot{\delta} + \frac{v_{cte} C_d}{J_d} \dot{\delta} + \frac{(g K_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d})}{J_d} \delta = \hat{\delta}^* - k_1^{int} (\hat{\delta} - \hat{\delta}^*) \dots - k_0^{int} (\delta - \delta^*) + \frac{v_{cte} C_d}{J_d} \hat{\delta}^* + \frac{(g K_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d})}{J_d} \delta^* - \hat{\xi}_{int} + \xi_{int}. \quad (33)$$

Reorganizando (33) y definiendo $e_\delta = \delta - \delta^*$ como el error de seguimiento de lazo de control interno, se obtiene la siguiente dinámica del error de seguimiento:

$$\ddot{e}_\delta + \left(\frac{v_{cte} C_d}{J_d} + k_1^{int} \right) \dot{e}_\delta + \left(\frac{g K_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d}}{J_d} + k_0^{int} \right) e_\delta = \dots \left(\hat{\delta}^* - \delta^* \right) + \frac{v_{cte} C_d + k_1^{int} J_d}{J_d} \left(\hat{\delta}^* - \delta^* \right) \dots + k_1^{int} \left(\hat{\delta} - \hat{\delta}^* \right) + \left(\xi_{int} - \hat{\xi}_{int} \right). \quad (34)$$

Observe que el lado derecho de la ecuación (34) es acotado y cercano a cero asumiendo estimaciones precisas de $\hat{\xi}_{int}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\delta}^*$ y $\hat{\delta}^*$. Las primeras dos estimaciones las proporciona el observador (31), y las últimas dos estimaciones se obtienen mediante el algoritmo de seguimiento y diferenciación "Tracking Differentiator", el cual es sintonizado en la Sección 4.

Por lo tanto, dado el carácter acotado y cercano a cero de los errores de estimación $(\xi_{int} - \hat{\xi}_{int})$, $(\hat{\delta}^* - \delta^*)$, $(\hat{\delta} - \hat{\delta}^*)$ y $(\delta - \delta^*)$, el lado izquierdo de (34) se torna dominante, y entonces la selección de las ganancias de control $[k_0^{int}, k_1^{int}]$, se realiza para imponer una dinámica dominante deseada de segundo orden

del error de seguimiento del lazo interno de acuerdo al siguiente polinomio característico:

$$s^2 + \left(\frac{v_{cte} C_d}{J_d} + k_1^{int} \right) s + \left(\frac{g K_{0_d} + v_{cte}^2 K_{2_d}}{J_d} + k_0^{int} \right). \quad (35)$$

4. Simulación y discusión de resultados

La estrategia de control propuesta fue implementada mediante una co-simulación, que utiliza a MATLAB/Simulink para ejecutar la estrategia a través de su entorno de bloques y a ADAMS/View para simular la dinámica de multicuerpos de la bicicleta virtual. La Fig. 11 presenta en diagrama de bloques la estrategia de control de esta co-simulación mientras que la Fig. 12, exhibe un despliegue de pantalla donde se realiza la animación interactiva de la bicicleta controlada en el entorno ADAMS/View.



Figura 12: Animación de la bicicleta en ADAMS/View.

En esta co-simulación se consideró una velocidad de avance

nominal de $v_{cte} = 1.5$ m/s, y su esquema de control fue sintonizado de la siguiente manera:

1. El controlador de velocidad de avance se sintonizó mediante una localización clásica de polos, en donde se hace coincidir el polinomio característico de la función de transferencia de lazo cerrado (16), con $p(s) = s^2 + 2\omega_n\zeta_n s + \omega_n^2$, seleccionando una frecuencia natural y un factor de amortiguamiento de $\omega_n = 2$ y $\zeta_n = 1$ respectivamente, para imponer una dinámica del error de seguimiento ($e_v = v - v^*$) dependiente de sus polos $[-2 \ -2]$. Entonces, las ganancias del controlador PI fueron calculadas mediante (17), obteniendo como resultado: $K_p = K_i = 52.2$.
2. Se agregó un esquema anti-windup al controlador de velocidad tal y como se indica en (Åström and Hägglund, 1995), para reducir los incrementos de la acción integral que sobrepasan los niveles de saturación preestablecidos en la salida del actuador ($[-10 \ 10]$ Nm). La ganancia de este esquema fue calculada como:

$$K_a = 4(\sqrt{K_i/2K_p}).$$

3. El observador de (23) fue sintonizado mediante el método del estimador cuadrático lineal (LQE - filtro de Kalman), suponiendo señales de ruido blanco aditivas en la entrada u_{ext} y la salida φ del sistema (19), que satisfacen las siguientes covarianzas (ver Lewis and Popa (2008)):

$$\begin{aligned} E[\sigma\sigma^T] &= Q^{ext} = 5.10 \times 10^{-4}, \\ E[\varrho\varrho^T] &= R^{ext} = 1.06 \times 10^{-4}, \\ E[\sigma\varrho^T] &= N^{ext} = 3.15 \times 10^{-6}, \end{aligned} \quad (36)$$

siendo $\sigma(t)$ la señal de ruido asumida en la entrada de control y $\varrho(t)$ la señal de ruido asumida en la medición de la salida. Definiendo la matriz de ponderación de σ como $G^{ext} = [0.01 \ 0.01 \ 83000]^T$, el método LQE entrega el vector de ganancias $L^{ext} = [113.56 \ 6448 \ 182239.1]^T$, que permite una estimación óptima del estado del sistema, ubicando los valores propios del error de estimación $\tilde{e}^{ext} = (x^{ext} - \hat{x}^{ext})$ en $[-56.79 \ -28.385 + 49.023j \ -28.385 - 49.023j]$, para establecer un ancho de banda de (≈ 112 rad/s), y un adecuado amortiguamiento en la respuesta transitoria del observador.

4. La ley de control (24) fue sintonizada con $k_0^{ext} = 17.725$ y $k_1^{ext} = 3.462$, para lograr que la dinámica del ángulo de inclinación de la bicicleta sea dominada por los polos: $[-2.31 \ -1.15]$.
5. Para el observador de (31), se propone su sintonización también mediante el método LQE, suponiendo que la entrada T_δ y la salida δ del sistema (28) están contaminadas con señales de ruido blanco $m(t)$ y $n(t)$ respectivamente, las cuales satisfacen las siguientes covarianzas:

$$\begin{aligned} E[mm^T] &= Q^{int} = 5.5 \times 10^{-3}, \\ E[nn^T] &= R^{int} = 2.5 \times 10^{-4}, \\ E[mn^T] &= N^{int} = 3.3 \times 10^{-6}. \end{aligned} \quad (37)$$

Definiendo la matriz de ponderación de m como $G^{int} = [0.1 \ 0.1 \ 4000 \ 1 \ 0.1 \ 0.1]^T$, este método entrega el vector de ganancias $L^{int} = [69.98 \ 2448.22 \ 47015.04 \ 2007.34$

$43.35 \ 0.47]^T$, que permite la estimación óptima del estado del sistema, ubicando los valores propios del error de estimación $\tilde{e}_x^{int} = (x^{int} - \hat{x}^{int})$ en $[-36.3 \ -17.91 + 31.17j \ -17.91 - 31.17j \ -0.02 \ -0.01 + 0.02j \ -0.01 - 0.02j]$, para establecer un ancho de banda de (≈ 72 rad/s), y un adecuado amortiguamiento en la respuesta transitoria del observador.

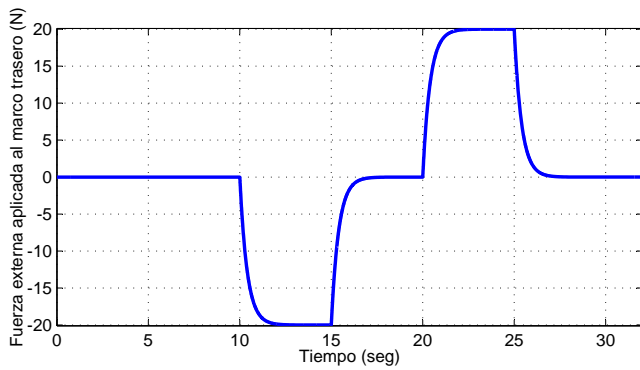
6. La ley de control de (32) fue sintonizada con $k_0^{int} = 1760$ y $k_1^{int} = 88$, para forzar la dinámica del error de seguimiento $e_\delta = (\delta - \delta^*)$ a ser dominada por los polos $[-57.266 \ -30.734]$.
7. Las derivadas con respecto al tiempo de la trayectoria de referencia δ^* , requeridas por la ley de control (32), se obtienen a partir del algoritmo "Tracking Differentiator (TD)" propuesto en (Gao et al., 2014), para generar un eficiente desempeño en el seguimiento y diferenciación de señales de entrada caracterizadas por suaves variaciones, compensando las posibles no linealidades causadas por perturbaciones y en algunos casos, ruido en la señal. Por esta razón ha sido utilizado en varias aplicaciones de ingeniería tales como (Emaru and Tsuchiya, 2005; Su et al., 2005; Sun and Zhiqiang Gao, 2005). Con este algoritmo fue posible generar apropiadamente las señales δ^* y $\dot{\delta}^*$ solamente con el ajuste de dos parámetros definidos como el factor de velocidad y factor de filtrado, cuyos valores fueron asignados para esta aplicación como $r_{TD} = 750$ y $h_{TD} = 0.005$ respectivamente.

A continuación se demuestra en la co-simulación que la estrategia de control propuesta logra estabilizar efectivamente el modelo dinámico virtual de la bicicleta. Para evaluar el desempeño y robustez de la estrategia, se realizaron dos tipos de simulaciones: en la primera, la bicicleta es sometida a cambios de velocidad alrededor de la nominal, y a fuerzas laterales en el marco trasero para simular el efecto de las perturbaciones externas y se muestra la respuesta del sistema de control para rechazarlas. En la segunda prueba se analiza el efecto de las incertidumbres paramétricas, agregándole una masa al marco trasero para modificar las propiedades mecánicas de la bicicleta (ver Tabla 2), y se exhibe la robustez de la estrategia ante estos efectos.

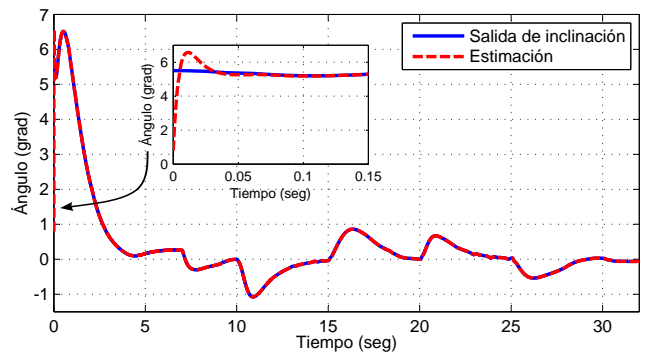
4.1. Prueba de rechazo de perturbaciones externas

En esta simulación, se demuestra que las estrategias de control de velocidad e inclinación logran estabilizar la bicicleta actuando en ella desde el reposo ($v(0) = 0$ m/s), y con una inclinación inicial de $\varphi(0) = 5.5^\circ$. En la Fig. 13(f) se muestra la velocidad v alcanzada por la bicicleta y se observa el desempeño del controlador PI en el seguimiento de la referencia v^* . El par T_{rw} generado por la acción PI se muestra en la Fig. 13(e). Algunos sobrepicos de velocidad que aparecen cuando la referencia es constante, se originan por el perfil de fuerza externa de la Fig. 13(a) aplicado al marco trasero.

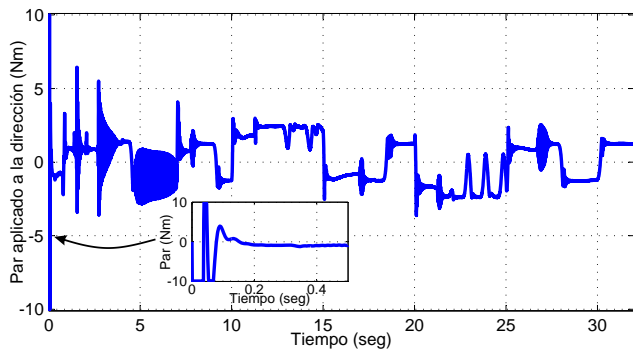
Ante los cambios de velocidad y la fuerza externa inyectada en el sistema, la Fig. 13(b) muestra claramente que el controlador de inclinación es efectivo en la estabilización de φ . El controlador estabilizador hace su parte generando la referencia balanceadora δ^* , mientras que el controlador seguidor cumple con su tarea de imponer un seguimiento robusto de esa referencia al



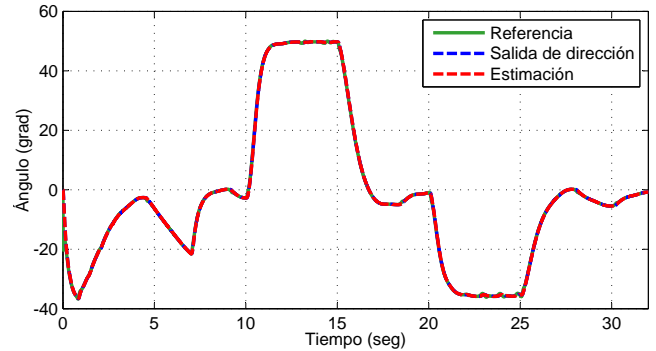
(a) Fuerza de perturbación aplicada al marco trasero.



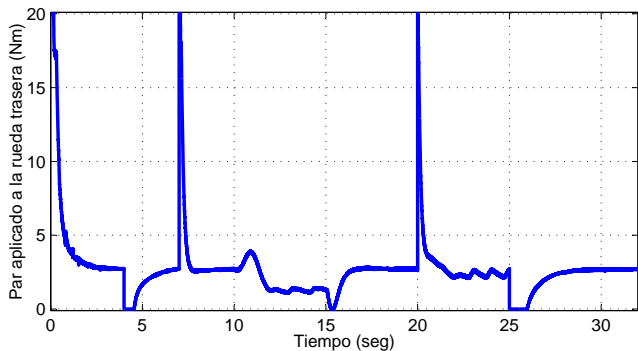
(b) Salida de inclinación φ y su estimación $\hat{\varphi}$.



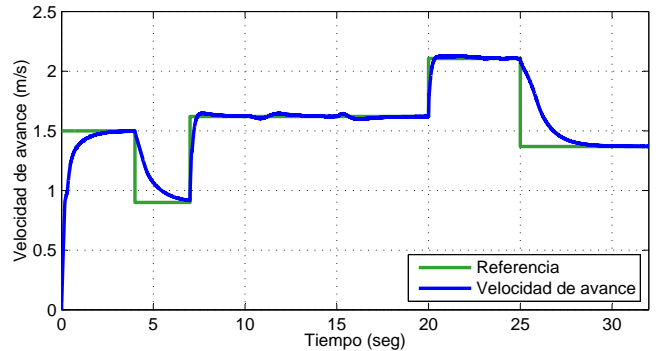
(c) Par de control aplicado en la dirección T_δ .



(d) Salida de dirección δ y su estimación $\hat{\delta}$.

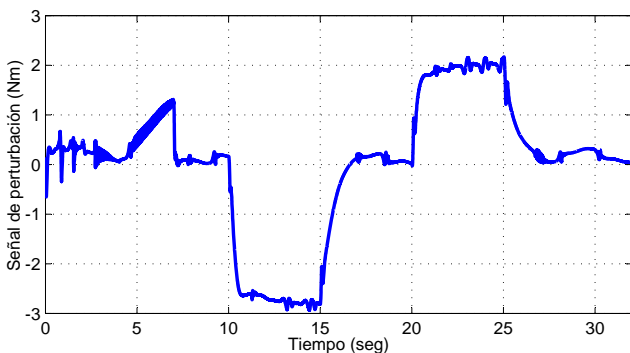


(e) Par de control aplicado en la rueda trasera T_{rw} .

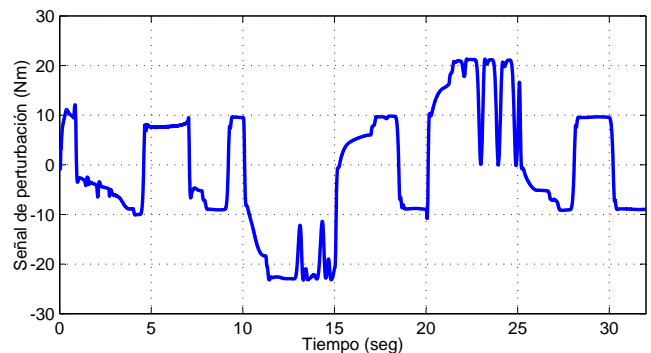


(f) Salida de velocidad de avance v .

Figura 13: Resultados obtenidos en la simulación de rechazo de perturbaciones externas.



(a) Señal de perturbación asociada a la inclinación.



(b) Señal de perturbación asociada a la dirección.

Figura 14: Estimaciones de las funciones de perturbación en la simulación de rechazo de perturbaciones externas.

sistema de dirección, tal y como se muestra en la Fig. 13(d). La acción de control T_δ generada por el controlador seguidor, muestra en la Fig. 13(c) que el mayor par aplicado al manubrio se produce en los primeros segundos de la simulación, en donde excede los límites de saturación preestablecidos (-10 a 10 Nm). Esto se debe a la inclinación inicial y su arranque desde el reposo. En la Fig. 14(a) y Fig. 14(b) se exhiben las funciones de perturbación estimadas por los observadores extendidos.

4.2. Prueba de compensación de variaciones paramétricas

En esta prueba se observa en segunda instancia, la robustez de la estrategia de control propuesta, ante variaciones de las propiedades mecánicas de la bicicleta por medio de una masa colocada en la parte superior del marco trasero tal y como se muestra en la Fig. 15. Esta masa fue ubicada con una inclinación de 20.6° con respecto al plano longitudinal lateral, para desplazar la posición del centro de masa desde su posición inicial, localizada muy cercana a este plano. En la simulación se toma una referencia constante de velocidad de avance ($v^* = 2 \text{ m/s } \forall t$) y una inclinación inicial de $\varphi(0) = 5^\circ$. La carga fijada en el tubo superior del marco trasero es habilitada a partir de los 10 segundos para observar el cambio de la dinámica de la bicicleta en este procedimiento.



Figura 15: Masa fijada en el tubo superior del marco trasero.

En la Fig. 17(a) se observa notoriamente que la estrategia de control es capaz de estabilizar la bicicleta a pesar de los diferentes pesos colocados a este sistema, desde 2 Kg hasta 12 Kg, siendo este último casi el doble del peso de la bicicleta. La Fig. 17(b) muestra el movimiento giratorio de la dirección que hace posible esta estabilización, compensando el efecto del peso de la masa inclinada de perturbación que desplaza el centro de masa de la bicicleta; y la Fig. 17(c) y Fig. 17(d) presentan la estimación de las funciones de perturbación asociadas a los grados de libertad de la dirección e inclinación. El mayor peso colocado a la bicicleta aumenta la magnitud y frecuencia de las oscilaciones de las señales de perturbación estimadas por los observadores. La realimentación de estas dos señales permiten la estabilización del sistema bajo estas condiciones, pero se reducen notablemente los márgenes de estabilidad de lazo cerrado.

4.3. Comparación con otra estrategia de control

El control de inclinación propuesto en este trabajo es comparado con otro sistema constituido por dos controladores PID

en cascada, tal y como se muestra en la Fig. 16. Ambos controladores son sintonizados a partir de las ecuaciones de movimiento definidas en la Sección 2 para la inclinación y dirección de la bicicleta y el método gráfico de sintonización de controladores PI/PID presentado en (Srivastava and Pandit, 2016) para sistemas de primer y segundo orden con tiempo de retardo.

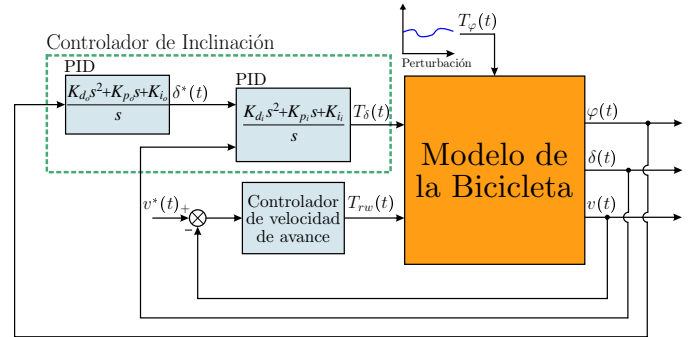


Figura 16: Estrategia de control clásica.

Según este método, es posible encontrar un conjunto de parámetros de K_p , K_i y K_d que satisfacen las especificaciones de respuesta transitoria de cada lazo del sistema de control de inclinación, garantizando un adecuado margen de ganancia (GM) y margen de fase (PM), mediante una localización de polos dominantes que es soportada por un criterio gráfico que ayuda a identificar las regiones de estabilidad y de márgenes de ganancia y fase predefinidos, en donde se pueden seleccionar los valores de las ganancias del controlador que cumplen con estas especificaciones.

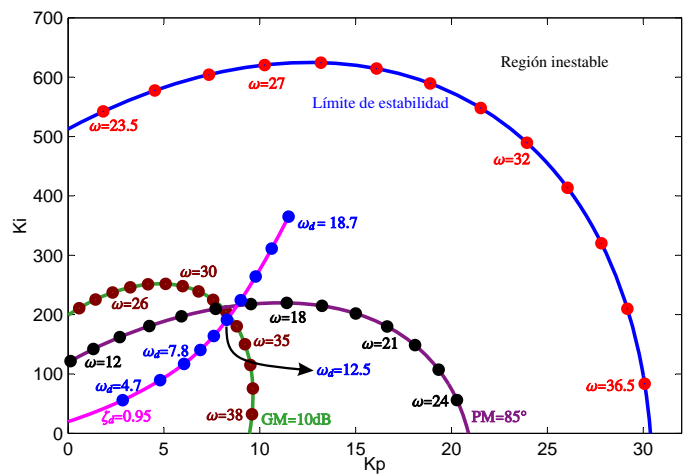
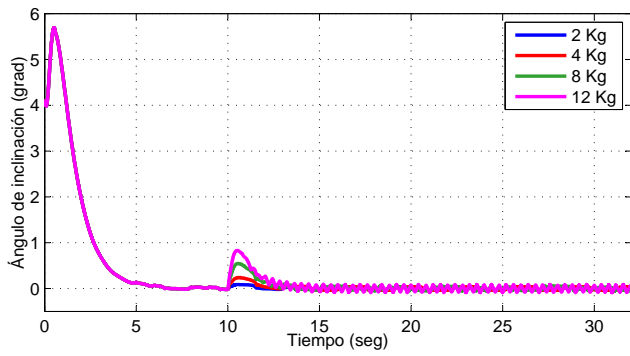
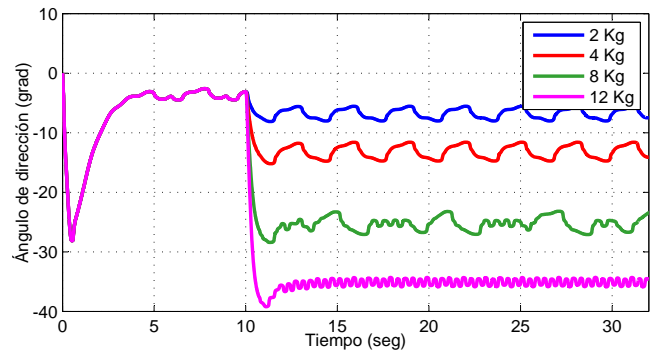


Figura 18: Región de estabilización, límites de margen de fase y de ganancia y el rango de K_p y K_i que cumple con las especificaciones deseadas en el lazo externo del control de inclinación (con $K_{d_o} = 0.1$).

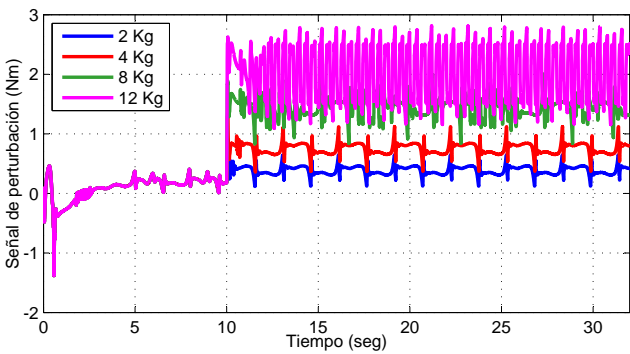
La Fig. 18 exhibe el mapa de la región de estabilidad del lazo externo del control de inclinación, sobre un plano que toma como ejes a K_p y K_i , fijando previamente la ganancia derivativa en $K_{d_o} = 0.1$. Dentro de la región de estabilidad se observan las curvas de margen de ganancia $GM = 10 \text{ dB}$ y margen de fase $PM = 85^\circ$ respectivamente, en donde algún punto (K_p, K_i) dentro de estas curvas garantiza los márgenes anteriormente especificados. También, aparece en la gráfica la curva que satisface un factor de amortiguamiento de $\zeta_d = 0.95$ con diferentes



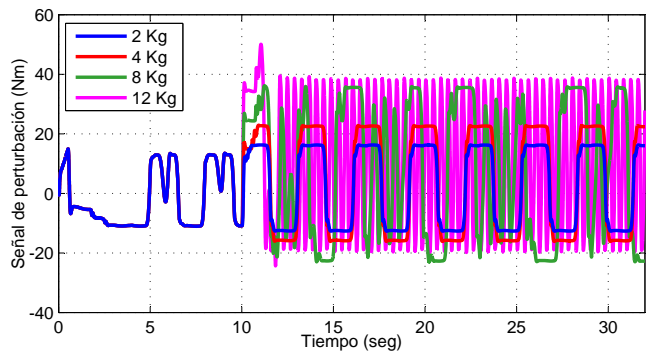
(a) Respuestas de la inclinación ante variaciones de peso en el marco trasero.



(b) Respuestas de la dirección ante variaciones del peso en el marco trasero.



(c) Señales de la estimación de la perturbación asociada a la inclinación.



(d) Señales de la estimación de la perturbación asociada a la dirección.

Figura 17: Respuestas del sistema de control de la bicicleta ante cambios de su peso en el marco trasero.

valores de una deseada frecuencia natural ω_d para el sistema de lazo cerrado. Con esta información se seleccionan las ganancias proporcional e integral como $K_{p_o} = 4.8$ y $K_{i_o} = 19.6$, siendo estos valores el punto donde se cumplen las especificaciones deseadas de margen de ganancia, margen de fase, factor de amortiguamiento y frecuencia natural para el sistema de lazo cerrado.

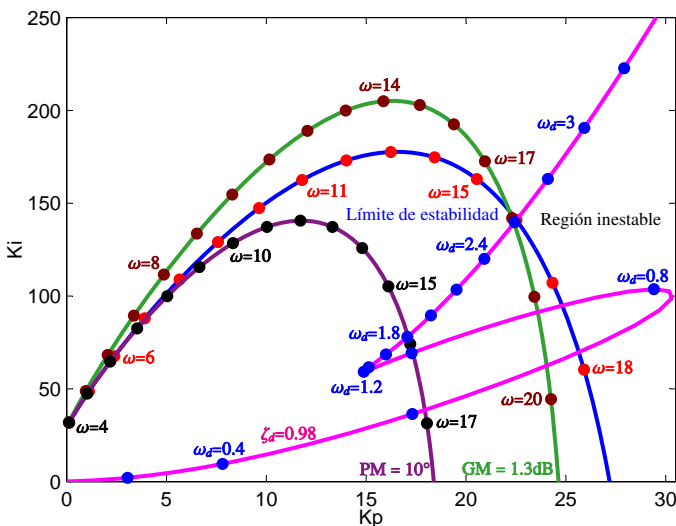


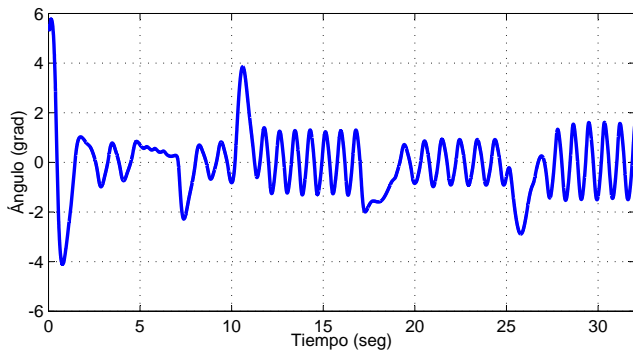
Figura 19: Región de estabilización, límites de margen de fase y de ganancia y el rango de K_{p_i} , y K_{i_i} que cumple con las especificaciones deseadas en el lazo interno del control de inclinación (con $K_{d_i} = 2$).

Aplicando el mismo método al lazo interno del control de inclinación se obtienen las curvas de la Fig. 19, predefiniendo

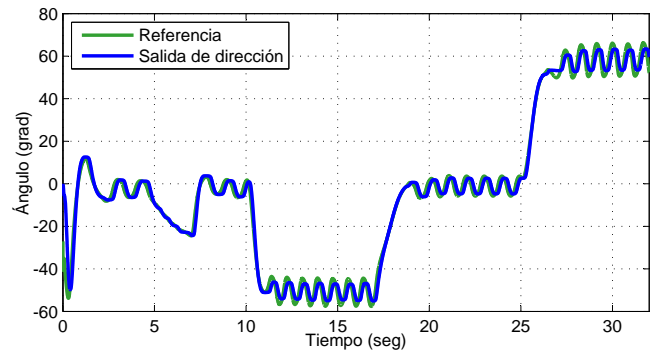
la ganancia derivativa como $K_{d_i} = 2$. Para lograr un seguimiento adecuado de la referencia δ^* , se eleva el ancho de banda del controlador con la restricción de no sobrepasar la curva del límite de estabilidad. Entonces, se consideran las curvas para un margen de ganancia de $GM = 1.3\text{dB}$ y un margen de fase de $PM = 10^\circ$. Las ganancias proporcional e integral se seleccionan en el punto ($K_{p_i} = 17.5$, $K_{i_i} = 80$), donde la curva que satisface un factor de amortiguamiento deseado en lazo cerrado de $\zeta_d = 0.95$, se intersecta con la curva de margen de fase cuando la frecuencia natural del sistema de lazo cerrado es $\omega_d = 1.8 \text{ rad/s}$.

Esta sintonización para las ganancias del controlador de este sistema de control permitió obtener las respuestas que se muestran en la Fig. 20 para la simulación de rechazo de perturbaciones externas y en la Fig. 21 para la simulación de estabilización ante variaciones paramétricas, siendo estas, las mismas pruebas que se realizaron para la estrategia de control propuesta.

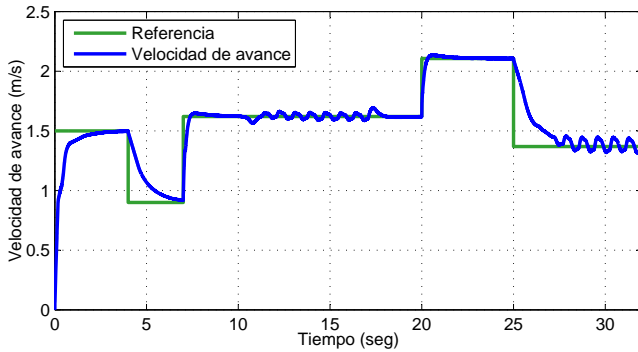
Al comparar estas respuestas con respecto a las obtenidas anteriormente en las simulaciones con la propuesta de control, se evidencia que la estrategia de control clásica no logra el desempeño ni la robustez del esquema de dos lazos en cascada diseñados bajo el enfoque ADRC. En la simulación de rechazo de perturbaciones externas, la estrategia de control clásica muestra en la Fig. 20(a) que la estabilización queda condicionada por las oscilaciones en la salida de inclinación, cuya magnitud se incrementa cuando las fuerzas laterales perturban a la bicicleta; contrario a lo que sucede con la estrategia de control propuesta, en donde las perturbaciones son efectivamente rechazadas aunque la velocidad de la bicicleta varíe (ver Fig. 13(b)).



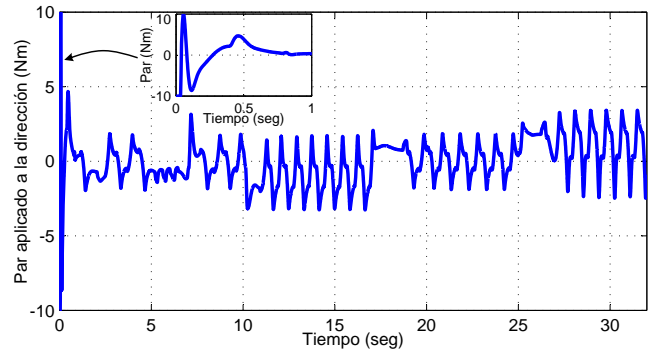
(a) Respuesta de la inclinación ante las perturbaciones externas.



(b) Respuesta de la dirección ante las perturbaciones externas.

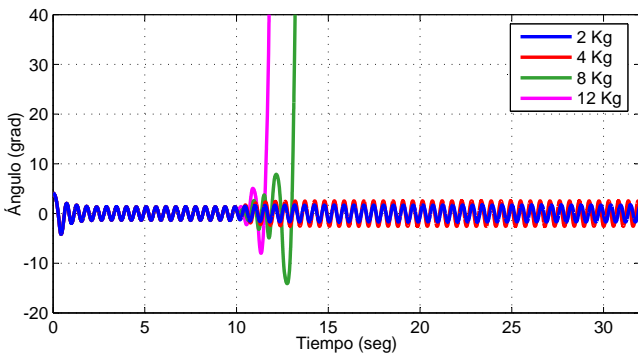


(c) Evolución de la velocidad de avance de la bicicleta.

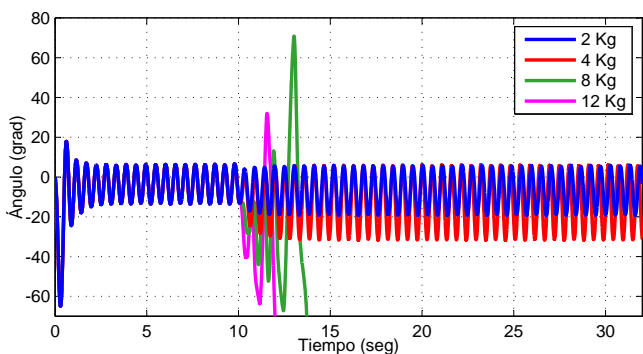


(d) Par aplicado a la dirección por el sistema de control.

Figura 20: Respuesta del esquema de control clásico ante las perturbaciones externas.



(a) Respuestas de la inclinación ante las variaciones paramétricas.



(b) Respuestas de la dirección ante las variaciones paramétricas.

Figura 21: Respuestas del esquema de control clásico ante las variaciones paramétricas.

En la simulación de variaciones paramétricas, la Fig. 21(a) exhibe la respuesta de la salida de inclinación generada por el

esquema clásico, en donde es observable su incapacidad para estabilizar la bicicleta con la carga inclinada de 8 Kg y 12 Kg. En la Fig. 17(a) se observa la contundencia y robustez de la estrategia ADRC, validando su capacidad para estabilizar el sistema con estas dos cargas. Sin embargo, aparecen oscilaciones de considerable magnitud en las estimaciones de las funciones de perturbación cuando la carga es de 12 Kg. Estas oscilaciones reducen los márgenes de estabilidad del sistema de lazo cerrado.

5. Conclusiones

La filosofía de control ADRC ofrece la posibilidad de diseños simples lineales de controladores para la estabilización de la bicicleta a partir modelos inciertos. La efectividad de esta estrategia de control, radica en la estimación activa de las no-linealidades y perturbaciones que afectan al modelo virtual durante su movimiento, por medio de observadores extendidos GPI. Se comprueba que gracias a esta estimación se reestablece el desempeño del modelo lineal simplificado de la bicicleta, permitiendo así, que la estructura lineal de las leyes de control establecidas en el lazo de estabilización, impongan las dinámicas de las referencias de entrada. Particularmente, se han realizado adaptaciones que permiten gran variación de los parámetros del modelo, específicamente los ceros de no mínima fase de la función de transferencia base del diseño, equivalente a la representación dinámica de la inclinación de la bicicleta.

Se mostró mediante pruebas y validaciones en simulación, que las estrategias de control ADRC propuestas, permiten realizar la estabilización efectiva de la bicicleta incluso ante varia-

ciones paramétricas, no linealidades en el sistema y el efecto de perturbaciones externas, a pesar de que son estructuras del tipo lineal.

Se analizó la robustez de los sistemas de control ante variaciones de la velocidad de avance, perturbaciones externas de fuerzas laterales severas y emulación de diferentes cargas fijadas al marco trasero para desplazar lateralmente el centro de masa de la bicicleta. Aunque el controlador estabilizador fue diseñado sobre un punto de operación, asumiendo una velocidad de avance constante, puede observarse su excelente desempeño para un amplio rango alrededor del valor nominal ($v_{cte} = 1.5$ m/s). El desempeño y robustez de este controlador se reduce tanto como la velocidad de avance disminuya del valor nominal, hasta el punto donde el sistema se vuelve inestable (cuando $v \approx 0.85$ m/s), lo cual corresponde a los límites naturales de controlabilidad del sistema.

El método propuesto es enteramente lineal y no requiere de adaptaciones dependientes de la velocidad de avance. La equivalente adaptación que realiza este esquema es por medio del observador extendido, el cual considera todos los cambios del modelo debidos a la velocidad dentro de la perturbación unificada. Se considera en el futuro plantear una estrategia de control que además de estabilizar la inclinación, posibilite el seguimiento de trayectorias.

Referencias

- Ai-Buraiki, O., Thabit, M. B., Jun 2014. Model Predictive Control Design Approach for Autonomous Bicycle Kinematics Stabilization. In: 22nd Mediterranean Conference of Control and Automation (MED). pp. 380–383.
- Bickford, D., Davison, D. E., May 2013. Systematic Multi-Loop Control for Autonomous Bicycle Path following. In: 2013 26th IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE). pp. 1–5.
- Brizuela, J., Astorga, C., Zavala, A., Pattalochi, L., Canales, F., Dec 2016. State and Actuator Fault Estimation Observer Design Integrated in a Riderless Bicycle Stabilization System. *ISA Transactions* 61, 199–210.
- Canudas de Wit, C., Tsotras, P., 1999. Dynamic Tire Friction Models for Vehicle Traction Control. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 4. pp. 3746–3751.
- Cerone, V., Andreo, D., Larsson, M., Regruto, D., Oct 2010. Stabilization of a Riderless Bicycle, A Linear-Parameter-Varying Approach [applications of control]. *Control Systems, IEEE* 30 (5), 23–32.
- Cortés Romero, J., Luviano Juárez, A., Álvarez Salas, R., Sira Ramírez, H., Aug 2010. Fast Identification and Control of an Uncertain Brushless DC Motor Using Algebraic Methods. In: 12th International Power Electronics Congress (CIEP). pp. 9–14.
- Cortés Romero, J., Ramos, G., Coral Enriquez, H., Aug 2014. Generalized Proportional Integral Control for Periodic Signals under Active Disturbance Rejection Approach. *ISA Transactions* 53 (6), 1901–1909.
- Emaru, T., Tsuchiya, T., Dec 2005. Research on Estimating Smoothed Value and Differential Value by using Sliding Mode System. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 21 (6), 391–402.
- Gao, B., Junpeng Shao, Xiaodong Yang, Nov 2014. A Compound Control Strategy Combining Velocity Compensation with ADRC of Electrohydraulic Position Servo Control System. *ISA Transactions* 53 (6), 1910–1918.
- Goldstein, H., 1953. *Classical Mechanics*, 3rd Edition. Addison-Wesley, Ch. 5, pp. 184–188.
- Gordon Wilson, D., Jim Papadopoulos, 2004. *Bicycling Science*, 3rd Edition. The MIT Press, Ch. 8, pp. 263–310.
- Hwang, C.-L., Hsiu-Ming Wu, Shih, C.-L., May 2009. Fuzzy Sliding Mode Underactuated Control for Autonomous Dynamic Balance of an Electrical Bicycle. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 17 (3), 658–670.
- Jin, H., Yang, D., Liu, Z., Zang, X., Li, G., Zhu, Y., Dec 2015. A Gyroscopic-Based Inverted Pendulum with Application to Posture Stabilization of Bicycle Vehicle. In: 2015 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). pp. 2103–2108.
- Kooijman, J. D. G., Meijaard, J. P., Papadopoulos, J. M., Ruina, A., Schwab, A. L., 2011. A Bicycle can be Self-Stable without Gyroscopic or Caster Effects. *Science* 332 (6027), 339–342.
- Kooijman, J. D. G., Schwab, A. L., Meijaard, J. P., May 2008. Experimental Validation of a Model for the Motion of an Uncontrolled Bicycle. *Multibody System Dynamics* 19 (1), 115–132.
- Lam, P. Y., Sep 2011. Gyroscopic Stabilization of a Kid-Size Bicycle. In: 2011 IEEE 5th International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems (CIS). pp. 247–252.
- Lewis, F. L., Popa, L. X. D., 2008. *Optimal and Robust Estimation, with an Introduction to Stochastic Control Theory*, 2nd Edition. CRC Press, Ch. 3, pp. 151–204.
- Limebeer, D. J. N., Sharp, R. S., Oct 2006. Bicycles, Motorcycles, and Models. *IEEE Control Systems* 26 (5), 34–61.
- Meijaard, J., Papadopoulos, J. M., Ruina, A., Schwab, A., 2007. Linearized Dynamics Equations for the Balance and Steer of a Bicycle: a Benchmark and Review. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 463 (2084), 1955–1982.
- Michini, B., Sean Torrez, 2007. *Autonomous Stability Control of a Moving Bicycle*. Tech. rep., Massachusetts Institute of Technology, USA, 77 Massachusetts Ave, Rm 33-336 - Cambridge MA 02139.
- Neimark, J. I., N. A. Fufaev, 2004. *Translations of Mathematical Monographs*. In: *Dynamics of Nonholonomic Systems*. Vol. 33. American Mathematical Society, Ch. 6, pp. 330–373.
- Nenner, U., Linker, R., Gutman, P.-O., 2010. Robust Feedback Stabilization of an Unmanned Motorcycle. *Control Engineering Practice* 18 (8), 970–978.
- Papadopoulos, J. M., 1987. *Bicycle Steering Dynamics and Self-stability: A Summary Report on Work in Progress*. Cornell bicycle research project, Cornell University, Ithaca, NY.
- Schwab, A., Meijaard, J., Papadopoulos, J., 2005a. Benchmark Results on the Linearized Equations of Motion of an Uncontrolled Bicycle. *Journal of Mechanical Science and Technology* 19 (1), 292–304.
- Schwab, A. L., J. P. Meijaard, Papadopoulos, J. M., Aug 2005b. A Multibody Dynamics Benchmark on the Equations of Motion of an Uncontrolled Bicycle. In: *Proceedings of the Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*. pp. 511–521.
- Schwab, A. L., Meijaard, J. P., May 2013. A Review on Bicycle Dynamics and Rider Control. *Vehicle System Dynamics* 51 (7), 1059–1090.
- Schwab, A. L., Meijaard, J. P., Kooijman, J. D. G., Aug 2012. Lateral Dynamics of a Bicycle with a Passive Rider Model: Stability and Controllability. *Vehicle System Dynamics* 50 (8), 1209–1224.
- Srivastava, S., Pandit, V., 2016. A PI/PID Controller for Time Delay Systems with Desired Closed Loop Time Response and Guaranteed Gain and Phase Margins. *Journal of Process Control* 37, 70–77.
- Åström, K. J., Häggglund, T., 1995. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2nd Edition. ISA, Ch. 3, pp. 80–92.
- Åström, K. J., Klein, R. E., Lennartsson, A., Aug 2005. *Bicycle Dynamics and Control: Adapted Bicycles for Education and Research*. *IEEE Control Systems* 25 (4), 26–47.
- Su, Y. X., Zheng, C. H., Dong Sun, Duan, B. Y., Aug 2005. A Simple Nonlinear Velocity Estimator for High-Performance Motion Control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 52 (4), 1161–1169.
- Sun, B., Zhiqiang Gao, Oct 2005. A DSP-based Active Disturbance Rejection Control Design for a 1-Kw H-bridge DC-DC Power Converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 52 (5), 1271–1277.
- Tanelli, M., Schiavo, F., Savaresi, S. M., Ferretti, G., Oct 2006. Object-Oriented Multibody Motorcycle Modelling for Control Systems Prototyping. In: *IEEE International Conference on Control Applications*. pp. 2695–2700.
- Whipple, F., 1899. The Stability of the Motion of a Bicycle. *Quart. J. Pure Appl. Math.* 30 (120), 312–348.
- Yuanyuan, F., Runjia, D., Yuping, X., 2017. *Steering Angle Balance Control Method for Rider-Less Bicycle Based on ADAMS*. Springer Singapore, Singapore, Ch. 1, pp. 15–31.