

Diseño de un Controlador Difuso mediante la Síntesis Difusa de Lyapunov para la Estabilización de un Péndulo de Rueda Inercial [☆]

Nohe R. Cazarez-Castro^{a,*}, Luis T. Aguilar^b, Selene L. Cardenas-Maciel^a, Carlos A. Goribar-Jimenez^a, Mauricio Odreman-Vera^a

^aTecnológico Nacional de México - Instituto Tecnológico de Tijuana, Av. ITR Tijuana y Blvd. Alberto Limón Padilla, S/N, 22510, Tijuana, Baja California, México.

^bInstituto Politécnico Nacional-CITEDI, avenida Instituto Politécnico Nacional No. 1310 Colonia Nueva Tijuana, Tijuana 22435 México.

Resumen

En el presente trabajo se reporta el diseño de un controlador difuso tipo Mamdani para el problema de estabilización de un péndulo de rueda inercial. Las reglas difusas son obtenidas mediante la síntesis difusa de Lyapunov, lo cual permite mantener al mínimo el uso de la heurística, y desde la etapa de diseño garantizar estabilidad en lazo cerrado. Por otra parte el diseño de las reglas difusas es mucho más simple que la ardua tarea de resolver las ecuaciones diferenciales no lineales usadas tradicionalmente para modelar sistemas de control. Merece énfasis especial el hecho de que el diseño se hace libre del modelo matemático del sistema a controlar.

Palabras Clave:

Control difuso, Estabilidad de Lyapunov, Sistema subactuado.

1. Introducción

La solución al problema de regulación para un péndulo invertido es un problema clásico en teoría de control debido a sus aplicaciones en robótica, como puede ser: la etapa de balanceo de un robot bípedo y el control de robots manipuladores. Se han utilizado diferentes técnicas de control para resolver este problema, entre las que destacan los métodos de estructura variable como los reportados por Andrievsky (2011) y por Hernández (2003); el control basado en superficie dinámica presentado en Qaiser et al. (2006) y Qaiser et al. (2007); control basado en energía como el reportado en Ng et al. (2013), control óptimo por Andary et al. (2009) y técnicas de saturación como se reporta en Ye et al. (2007). Estos enfoques de diseño, que se podrían catalogar como tradicionales, requieren un alto grado de conocimiento en técnicas y métodos matemáticos para la manipulación de ecuaciones diferenciales no lineales que corresponden a los modelos dinámicos de sistemas mecánicos.

Las técnicas de computación inteligente también se han utilizado como estrategia de solución para este problema de control, por ejemplo en Martínez-Soto et al. (2012) se usan métodos bioinspirados para optimizar las ganancias de un controla-

dor proporcional-derivativo-integral (PID) para resolver el problema de regulación, mientras que Castillo et al. (2008) propone un sistema difuso tipo-2 para controlar un péndulo invertido y en Cazarez-Castro et al. (2010) se propone una hibridación genético difusa tipo-2 para resolver el problema de regulación para un mecanismo con backlash.

En este artículo se utiliza un sistema difuso como estrategia de control para resolver el problema de estabilización de un péndulo de rueda inercial.

Típicamente se ha usado una metodología heurística para el diseño de las reglas de un sistema de inferencia difusa, situación que ha sido muy criticada por la comunidad de control tradicional debido a que no se puede garantizar (con formalidad matemática) estabilidad siguiendo este enfoque de diseño. En el presente trabajo se presenta el diseño de un controlador difuso tipo Mamdani (Mamdani and Assilian (1975)) para estabilizar el péndulo de rueda inercial en el punto de equilibrio inestable en lazo abierto. Dicho diseño se basa en la teoría de estabilidad de Lyapunov (1892), con lo cual se puede garantizar estabilidad para el sistema en lazo cerrado. Este enfoque no es nuevo, se ha utilizado previamente en Margaliot and Langholz (1999), con una conceptualización no ortodoxa de la definición de estabilidad en sentido de Lyapunov, debido a que no se garantiza de manera formal que el origen es un punto de equilibrio estable, enfoque que si se considera en el presente artículo. En Castillo et al. (2006) se utiliza un enfoque similar para el control de robot manipulador.

Las principales contribuciones del presente artículo son las

* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: nohe@ieee.org (Nohe R. Cazarez-Castro), laguilarb@ipn.mx (Luis T. Aguilar), lilettecardenas@ieee.org (Selene L. Cardenas-Maciel), cgoribar@tectijuana.edu.mx (Carlos A. Goribar-Jimenez), mauricio.odreman@tectijuana.edu.mx (Mauricio Odreman-Vera)

siguientes:

- El controlador propuesto tiene la ventaja de no requerir necesariamente las ecuaciones dinámicas de la planta, sino que basta con tener conocimiento cualitativo sobre el comportamiento de éste para poder hacer una relación lingüística entre la acción de control y las variables de estado del sistema. El hecho de que el diseño no dependa del modelo matemático, es una característica destacable del presente trabajo;
- Garantizar estabilidad asintótica del punto de equilibrio del sistema de lazo cerrado mediante el método de Lyapunov;
- La base de reglas difusas y la granulación de variables de entrada y salida son resultado directo del proceso de diseño;
- La estructura del sistema difuso resultante es mínimo con sólo cuatro reglas;
- Se resuelve el problema de regulación, a pesar de la presencia de fricción en el sistema.
- Se reportan resultados experimentales.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, los seis puntos mencionados anteriormente resultan de gran interés. Sin importar el sistema dinámico que se desee controlar, los esquemas tradicionales de control requieren forzosamente del modelo matemático que lo describen, mientras que el enfoque reportado en el presente artículo requiere solo de una descripción cualitativa de la respuesta de las variables del sistema ante cualquier excitación, garantizando estabilidad asintótica en sentido de Lyapunov.

Por otro lado, la granulación mínima resultante para las variables de entrada y de salida, junto con el conjunto de las cuatro reglas resultantes, permite tener un sistema difuso mínimo, lo cual permite tener implementaciones en tiempo real, a diferencia de los esquemas heurísticos tradicionales para el diseño de sistemas difusos que resulta en sistemas de gran complejidad computacional, y que por lo tanto, requieren de grandes capacidades de cómputo para su ejecución. Por ejemplo, en Becerikli and Celik (2007) diseñan un controlador difuso para un péndulo, sin embargo, la cantidad de reglas usadas en su controlador hace prohibitivo intentar ejecutar experimentos. Mientras que en Yi and Yubazaki (2000), a pesar de que la cantidad de reglas del controlador difuso no es tan grande, no garantizan estabilidad en lazo cerrado y es necesario el modelo matemático para el diseño del controlador.

El resto del artículo está organizado como sigue. La Sección 2 describe el planteamiento del problema y el modelo dinámico del mecanismo caso de estudio. En la Sección 3 se presenta el diseño del controlador difuso basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov, así como una prueba de estabilidad asintótica. Los resultados al problema de control se presentan en la Sección 4. La Sección 5 presenta las conclusiones.

2. Modelo dinámico

En esta sección se presenta un modelo matemático para el péndulo de rueda inercial considerado en el presente artículo. Sin embargo, es importante enfatizar que dicho modelo se presenta como referencia y como elemento necesario para presentar resultados por simulación, ya que el diseño del controlador difuso se basa en las suposiciones presentadas en la Sección 3 y no en el modelo matemático de la planta.

El péndulo de rueda inercial es un mecanismo subactuado no-lineal muy utilizado en el ámbito académico para mostrar el uso de las distintas técnicas de control. Consiste en un péndulo físico con un disco o rueda inercial fijada al final del eslabón mediante un eje paralelo al eje de rotación del péndulo, el actuador es un motor de Corriente Directa (CD) acoplado al disco, éste genera un par de torción que produce una aceleración angular en el disco, lo que a su vez genera una reacción por inercia que es utilizada para controlar activamente el sistema. La ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema incluyendo fricción viscosa y de Coulomb y perturbaciones, reportada en Iriarte et al. (2013), es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \sin(q_1) + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}_1) \\ f_s \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau(t) + \mathbf{w}(t), \quad (1)$$

donde $q_1(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo del péndulo medido en el sentido de las manecillas del reloj desde la posición vertical inferior; $q_2(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo absoluto del disco; $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo; $f_c \operatorname{sign}(\dot{q}_1)$ es el efecto de fricción de Coulomb, $f_s \dot{q}_2$ representa la fuerza de fricción viscosa que afecta al actuador, en este caso f_c y f_s son constantes positivas que denotan los coeficientes de fricción de Coulomb y viscosa, respectivamente; J_1 , J_2 y h son los parámetros físicos del péndulo y dependen de las dimensiones geométricas y la distribución de masas; τ es el par de torción aplicado al disco y $\mathbf{w} = [w_1(t) \ w_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ son las perturbaciones externas que afectan al sistema. La representación gráfica del péndulo de rueda inercial que se utiliza a lo largo de éste trabajo se muestra en la Figura 1.

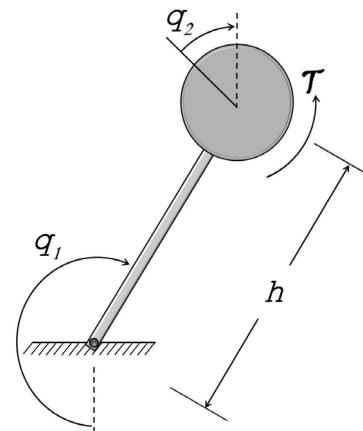


Figura 1: Esquema del péndulo de rueda inercial.

Nótese de la Figura 1 y de la ecuación dinámica (1) que la articulación q_1 es gobernada por la acción de la rueda (q_2), motivo por el cual la primera articulación puede ser frenada a través de la rueda o por el efecto de la fricción de Coulomb.

3. Diseño del controlador difuso

A continuación se presenta el diseño del controlador difuso.

3.1. Objetivo de control

El objetivo de control es llevar el eslabón a la posición vertical superior a partir de una condición inicial en una vecindad alrededor del punto de equilibrio, y mantenerlo en esa posición aún en presencia de perturbaciones externas, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\pi - q_1(t)\| = 0. \quad (2)$$

3.2. Síntesis de controlador difuso

Para aplicar la síntesis difusa de Lyapunov se considera que se tiene muy poca información acerca del sistema, y que de hecho, no se conoce un modelo dinámico exacto que lo represente. Se asume además lo siguiente:

S1 El sistema tiene en realidad dos estados de interés x_1 y x_2 , donde x_1 es la variable de error definida como $x_1 = q_1(t) - \pi$ y $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{q}_1(t)$;

S2 La condición inicial se encuentra en una vecindad alrededor del origen, es decir $x(0) \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^2$ donde

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \varepsilon\},$$

donde $x = [x_1 \ x_2]^T$ y $\varepsilon > 0$;

S3 No se tiene información del modelo dinámico para la síntesis del controlador difuso. Sin embargo, de (1) se puede deducir que existe correspondencia entre la aceleración del error angular del péndulo \dot{x}_2 y $-\tau$, al menos en la vecindad del punto de equilibrio \mathcal{N} , esto es, cuando τ aumenta (disminuye) entonces \dot{x}_2 aumenta (disminuye).

Debido a que las Suposiciones **S1-S3** no son triviales, y el hecho de no considerar el modelo (1) del péndulo para el diseño del controlador, se descarta la posibilidad de utilizar técnicas tradicionales de control que basan su análisis y síntesis en el modelo matemático de la planta a controlar, y sus parámetros.

La Suposición **S1** es válida debido a que en sistemas mecánicos la aceleración puede alcanzar un valor máximo dependiendo de la naturaleza del actuador, es decir $\|\ddot{q}_2\| \leq F$, $F > 0$, mientras que la posición angular de la rueda q_2 no está restringida o limitada en su giro por lo que se puede omitir la dinámica de la rueda en la síntesis del controlador. La Suposición **S2** es una consideración estándar en sistemas subactuados pendulares debido a la existencia de múltiples puntos de equilibrio y a la ya probada condición de la no existencia de punto de equilibrio único (Brockett (1983)). Para la Suposición **S3** considérese la

representación en variables de estados de (1) en términos de los errores x_1 y x_2 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J_1 - J_2} (-h \sin(x_1 + \pi) - f_c \text{sign}(x_2)) - \frac{1}{J_1 - J_2} \tau, \end{aligned} \quad (3)$$

bajo la ausencia del efecto de fricción viscosa de la rueda sobre el péndulo. Sin pérdida de generalidad se supone que $\text{sign}(0) = 0$. En el dominio \mathcal{N} , la aceleración del error angular del péndulo se puede expresar de la siguiente forma:

$$\dot{x}_2 = \frac{h}{J_1 - J_2} x_1 - \frac{f_c}{J_1 - J_2} \text{sign}(x_2) - \frac{1}{J_1 - J_2} \tau, \quad (4)$$

donde se usó la propiedad $\sin(x_1 + \pi) = -\sin(x_1)$ y además $-\sin(x_1) \approx -x_1$ en la vecindad \mathcal{N} . De la ecuación (4) se deduce que existe proporcionalidad entre la aceleración angular y el par aplicado τ con pendiente $-1/(J_1 - J_2)$. Debido a que J_1 y J_2 se asumen desconocidas no es posible incorporarlas en la síntesis del controlador difuso, sin embargo, es suficiente saber que \dot{x}_2 aumenta o disminuye cuando $-\tau$ lo hace, entonces la siguiente igualdad $\dot{x}_2 = -\tau$ es válida para el subsecuente diseño.

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2, \quad (5)$$

que es positiva definida y radialmente desacotada. Es importante notar que la función candidata de Lyapunov propuesta no posee todas las variables de estado de la dinámica real del sistema (1), sin embargo, siguiendo Korotnikov (1998) y considerando que las variables no presentes explícitamente en (5) son gobernadas por las presentes, entonces (5) es válida para el problema en estudio. La derivada de (5) con respecto al tiempo es

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2 \dot{x}_2. \quad (6)$$

Considerando que se tiene como conocimiento previo de que \dot{x}_2 es proporcional a $-\tau$, que es la variable de control, es posible realizar el cambio de \dot{x}_2 por $-\tau$ en la ecuación (6) dando como resultado:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2 (-\tau). \quad (7)$$

Ahora bien, para garantizar estabilidad asintótica del punto de equilibrio se debe satisfacer que $\dot{V} < 0$. Sin embargo, el algoritmo se hace más complejo en el sentido de que computacionalmente se deben verificar más condiciones sobre x_1 y x_2 en (7) para garantizar $\dot{V} < 0$, lo que implica un aumento automático en el número de reglas de la base de reglas difusas y por ende un mayor número de cálculos para obtener resultados de inferencia, lo cual afecta el desempeño o incluso llega a imposibilitar el hacer implementaciones para hacer experimentación en tiempo real. Entonces, se diseñará el controlador difuso

tal que $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$ o:

$$x_1 x_2 + x_2 (-\tau) \leq 0. \quad (8)$$

La condición (8) es necesaria y suficiente para garantizar estabilidad, en forma local al menos, del punto de equilibrio (cf. Khalil (2002)). El Lema de Barbalat (Khalil (2002)) o principio de invarianza (Khalil (2002)) se pueden utilizar para garantizar estabilidad asintótica.

Por inspección, al probar los signos de cada variable de estado, se puede deducir esquemáticamente el estado cualitativo del sistema para cada situación, y por ende, encontrar condiciones para garantizar satisfacer (8). La Tabla 1 representa este proceso de manera resumida.

Tabla 1: Condiciones para satisfacer $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$ según estado del sistema.

x_1	x_2	τ
negativo	negativo	negativo tal que $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$
negativo	positivo	cero
positivo	negativo	cero
positivo	positivo	positivo tal que $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$

A partir de la Tabla 1 se puede construir la base de reglas difusas para el sistema de inferencia (controlador difuso) de la siguiente manera:

1. SI x_1 es *negativo* Y x_2 es *negativo*, ENTONCES τ es *negativo grande*,
2. SI x_1 es *negativo* Y x_2 es *positivo*, ENTONCES τ es *cero*,
3. SI x_1 es *positivo* Y x_2 es *negativo*, ENTONCES τ es *cero*,
4. SI x_1 es *positivo* Y x_2 es *positivo*, ENTONCES τ es *positivo grande*.

La forma de las funciones de membresía han sido obtenidas de manera heurística y se prefirieron funciones no lineales sobre las lineales buscando obtener una respuesta suave. A partir de la Tabla 1, las entradas x_1 y x_2 se granulan (automáticamente) en dos etiquetas lingüísticas denominadas *negativo* y *positivo*. Para este caso particular se han seleccionado las funciones de membresía sigmoideas x_{neg} y x_{pos} , definidas de manera respectiva como

$$x_{neg} = \frac{1}{1 + \exp\{1.45x\}} \quad (9)$$

y

$$x_{pos} = \frac{1}{1 + \exp\{-1.45x\}}, \quad (10)$$

que representan el signo que puede tomar una variable de estado. En ambos casos las funciones son simétricas con respecto a cero, ver Figura 2.

El dominio de las funciones de entrada es $[-2\pi, 2\pi]$, se ha elegido este dominio con el propósito de que contenga cualquier posición posible dentro de un círculo completo. Es importante notar que se diseñó para considerar el dominio completo de definición para x_1 y x_2 , aun sabiendo que el área de trabajo del

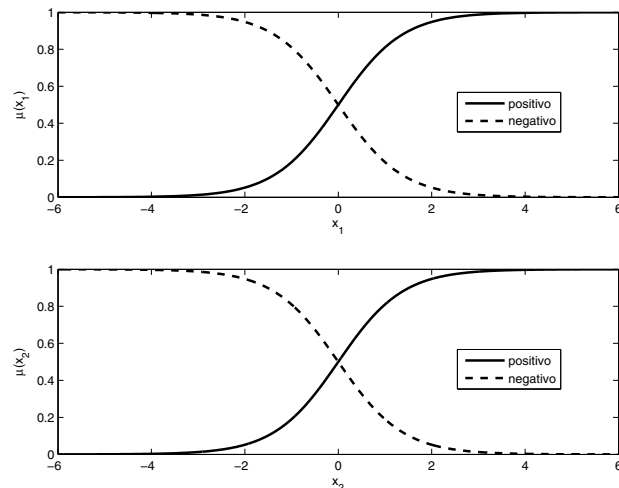


Figura 2: Funciones de membresía que representan las variables lingüísticas de entrada para x_1 y x_2 .

controlador será en la vecindad del punto de equilibrio superior.

Para las funciones de membresía de salida se han elegido funciones gaussianas que representan las expresiones lingüísticas “negativo grande”:

$$\tau_{neg-grande} = \exp\{-(x-5)^2\}, \quad (11)$$

“cero”, definida como

$$\tau_{cero} = \exp\{-x^2\}, \quad (12)$$

y “positivo grande”, definida como

$$\tau_{pos-grande} = \exp\{-(x+5)^2\}. \quad (13)$$

Nótese que la elección del término lingüístico “grande” para las partes negativa y positiva de las funciones de membresía de salida se elige en concordancia con el hecho de que en otras estrategias de control como PID o modos deslizantes se considera que las ganancias deben ser “suficientemente grandes” para garantizar el objetivo de control. La Figura 3 muestra una representación visual de las funciones de membresía de la salida del sistema difuso.

El dominio y posición central de cada función gaussiana ha sido elegida para brindar el máximo par de torsión al mecanismo en los márgenes de la vecindad del punto de equilibrio, además de acotar las entradas de control al mecanismo con la finalidad de no saturar los actuadores. Nótese además que por las definiciones de (11)–(13), se garantiza traslape en las funciones de membresía de salida, y estas formas no lineales se deben a la búsqueda de suavidad en la respuesta. Para la defusificación se usa centroide.

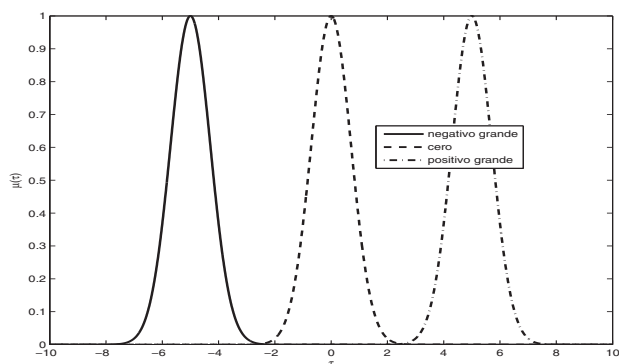


Figura 3: Funciones de membresía que representan las variables lingüísticas de salida “negativo grande”, “cero”, y “positivo grande”.

3.3. Revisión de estabilidad asintótica local

Para este fin considérese el sistema no lineal en espacio de estados (3)-(4). Debido a que las funciones de membresía fueron construidas asumiendo que $\tau = -\dot{x}_2$, entonces (4) puede escribirse como:

$$\dot{x}_2 = \frac{h}{J_1 - J_2} x_1 - \frac{f_c}{J_1 - J_2} \text{sign}(x_2) + \frac{1}{J_1 - J_2} \dot{x}_2, \quad (14)$$

por lo tanto

$$\dot{x}_2 - \frac{1}{J_1 - J_2} \dot{x}_2 = \frac{h}{J_1 - J_2} x_1 - \frac{f_c}{J_1 - J_2} \text{sign}(x_2), \quad (15)$$

o de manera similar

$$\left[1 - \frac{1}{J_1 - J_2}\right] \dot{x}_2 = \frac{h}{J_1 - J_2} x_1 - \frac{f_c}{J_1 - J_2} \text{sign}(x_2). \quad (16)$$

Simplificando (16) se obtiene

$$(J_1 - J_2 - 1)\dot{x}_2 = hx_1 - f_c \text{sign}(x_2), \quad (17)$$

y entonces (3)-(4) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{h}{J_1 - J_2 - 1} \sin(x_1) - \frac{f_c}{J_1 - J_2 - 1} \text{sign}(x_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Resulta pertinente mencionar que se usó la propiedad $\sin(x_1 + \pi) = -\sin(x_1)$ y desde el punto de vista práctico los valores de los parámetros de inercia son mucho menores a uno es decir $J_1 - J_2 \ll 1$.

Para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado para (18), considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{h}{|J_1 - J_2 - 1|} (1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2} x_2^2. \quad (19)$$

La derivada temporal de $V(x)$ a lo largo de la solución de (18) viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{h}{|J_1 - J_2 - 1|} \sin(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= -\frac{f_c}{|J_1 - J_2 - 1|} |x_2| \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Definase el conjunto invariante más grande $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$ tal que $\dot{V}(x) = 0$ como

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{N} : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{N} : x_1 \in \mathcal{N}, x_2 = 0\}. \quad (21)$$

Para que una solución $x(t) \in \mathbb{R}^2$ pertenezca a \mathcal{D} para todo $t \geq 0$ es necesario y suficiente que $x_2(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto también se debe satisfacer que $\dot{x}_2 = 0$ para todo $t \geq 0$. Tomando esto en consideración entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ 0 &= -\frac{h}{|J_1 - J_2 - 1|} \sin(x_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Por lo tanto $x(0) = 0 \in \mathcal{D}$ es la única condición inicial en \mathcal{D} para la cual $x(t) \in \mathcal{D}$ para todo $t \geq 0$. Entonces invocando el principio de invarianza de La Salle (Khalil (2002)) se puede garantizar estabilidad asintótica en forma local del origen del sistema (18).

4. Resultados

En esta Sección se muestran los resultados obtenidos en la simulación del sistema con el controlador difuso diseñado en la Sección 3. Como el diseño presentado en la Sección 3 no depende del modelo matemático del sistema (1), y por lo tanto mucho menos de los parámetros nominales correspondientes, para verificar la funcionalidad y robustez del controlador propuesto se presentan resultados de: Simulaciones sin fricción en la Sección 4.1, simulaciones con fricción en la Sección 4.2 y experimentos en la Sección 4.3. Además, en la Sección 4.4 se presenta una discusión de los resultados obtenidos.

Los parámetros del modelo de la planta son $J_1 = 4.572 \times 10^{-3}$, $J_2 = 2.495 \times 10^{-5}$, $h = 0.3544$, $f_c = 88 \times 10^{-5}$ N·m y $f_s = 88 \times 10^{-5}$ N·m/s/rad. Las condiciones iniciales utilizadas para todas las simulaciones son $x_1(0) = 0.4$ rad y $x_2(0) = 0$ rad/s.

4.1. Resultados de simulación para planta sin fricción

Se presentan resultados de simulación considerando al sistema (1) libre de fricción, es decir $f_c = f_s = 0$. La Figura 4 muestra que los errores x_1 y x_2 convergen a cero de manera asintótica. En la Figura 5 se muestra el comportamiento de la función de Lyapunov (5) y su derivada temporal (6). Nótese que (5) permanece positiva y que (6) permanece negativa cuando x_1 y x_2 son diferentes de cero y que son cero cuando x_1 y x_2 alcanzan el origen, con lo cual se verifica que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable. Finalmente, la Figura 6

muestra la evolución de la señal de control aplicada a la planta (1), y como se puede ver $|\tau|$ decrece a lo largo del tiempo.

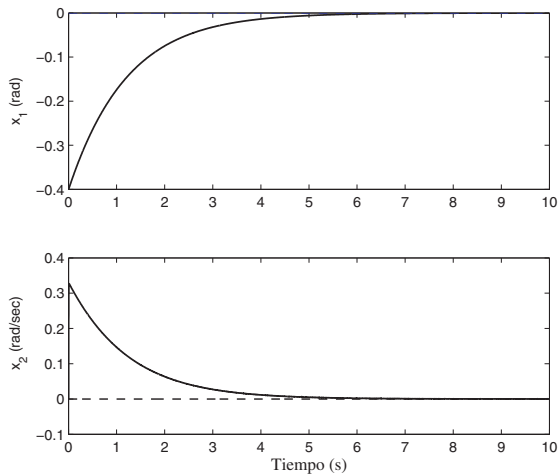


Figura 4: Dinámica de x_1 y x_2 para el sistema (1) sin fricción.

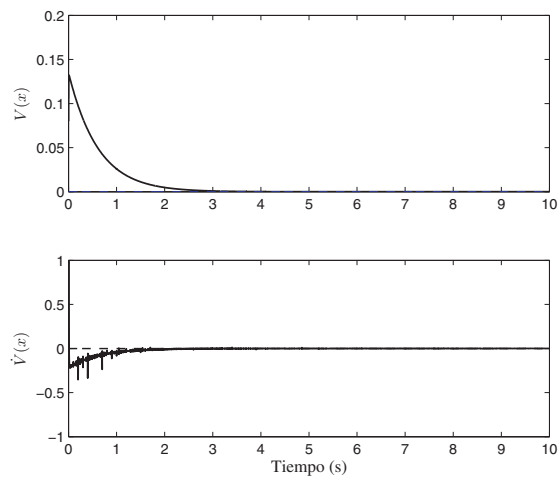


Figura 5: Dinámica de (5) y (6) para el sistema (1) sin fricción.

4.2. Resultados de simulación para planta con fricción

En este apartado se presentan resultados de simulación bajo la presencia de fricción en el sistema (1). La Figura 7 presenta el comportamiento de los estados x_1 y x_2 con respecto al tiempo, las cuales, como se espera, convergen a cero de manera asintótica. La Figura 8 muestra la evolución de la función de Lyapunov (5) y su derivada temporal (6). Nótese que (5) permanece positiva y que (6) permanece negativa cuando x_1 y x_2 son diferentes de cero y que son cero cuando x_1 y x_2 alcanzan el origen, con lo cual se verifica que el sistema en lazo cerrado

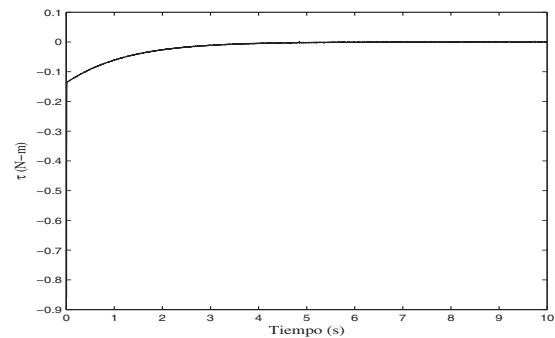


Figura 6: Entrada de control τ para el sistema (1) sin fricción.

es asintóticamente estable a pesar de la presencia de fricción. Como verificación adicional, la Figura 9 muestra el comportamiento de la señal de control aplicada al sistema (1), y como se puede ver $|\tau|$ decrece de manera asintótica al valor aproximado de 0.0125 N·m debido a la presencia de fricción.

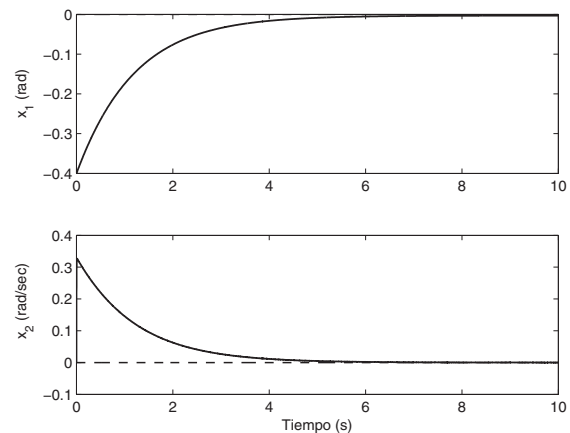


Figura 7: Respuesta de los errores x_1 y x_2 para el sistema (1) con fricción.

4.3. Resultados experimentales

Los experimentos se realizaron en el sistema *Mechanics Control Kit* de QUANSER[®] mientras que el controlador difuso fue programado en MATLAB/FUZZY LOGIC TOOLBOX[®] y el sistema en lazo cerrado en MATLAB/SIMULINK[®]. El tiempo de muestreo fue $\Delta t = 15$ ms. Debido a que se propone resolver el problema de regulación sobre el punto de equilibrio inestable y no el problema de swing up, se lleva manualmente al sistema a un punto cercano al punto de equilibrio inestable, y es entonces el momento en el cual entra en funcionamiento el controlador difuso propuesto, resolviendo satisfactoriamente el problema en cuestión. La plataforma experimental se muestra en la Figura 10, para la cual $J_1 = 4,572 \times 10^{-3}$, $J_2 = 2,495 \times 10^{-5}$, y $h = 0,3544$ (ver Iriarte et al. (2013)). El

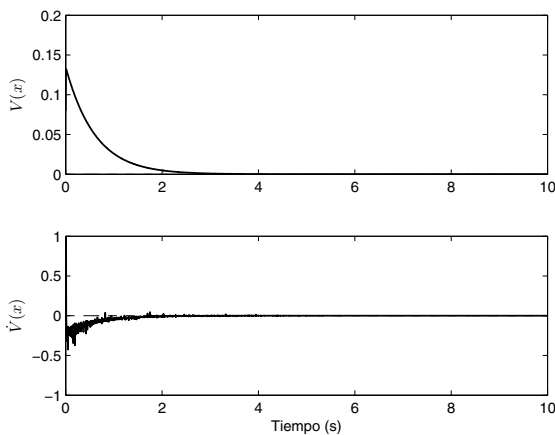
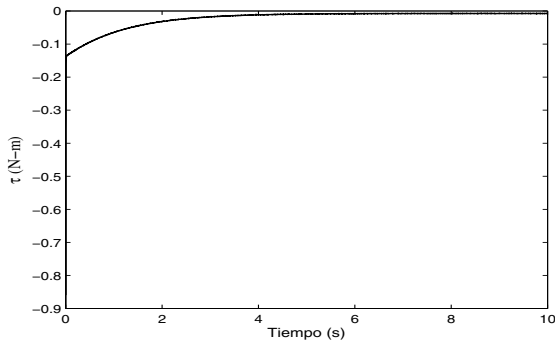


Figura 8: Comportamiento de (5) y (6) para el sistema (1) con fricción.

Figura 9: Entrada de control τ para el sistema (1) con fricción.

coeficiente de fricción viscosa es $f_v = 8,80 \times 10^{-5}$ y fue definido aplicando el procedimiento reportado en Kelly et al. (2000). La resolución de cada encoder es de 1000 conteos/revolución. El amplificador del motor acepta entradas de control en un rango de ± 10 V.

La Figura 11 presenta el comportamiento de las variables de estado x_1 y x_2 con respecto al tiempo, las cuales, como se espera, convergen a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Durante el experimento el sistema fué sometido a perturbaciones tipo impulsivas en instantes de tiempo cercanos a los 12, 14 y 16 segundos, y como se puede observar, el sistema resulta ser robusto a perturbaciones externas.

Así mismo se muestra la dinámica de (5) y (6) en la Figura 12, y como se puede ver tanto (5) como (6) tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$, con lo cual se garantiza que el sistema en lazo cerrado es estable en sentido de Lyapunov. Como verificación adicional la Figura 13 muestra la dinámica de la señal de control aplicada al sistema (1), y como se puede ver $\tau \rightarrow 0$ mientras que $t \rightarrow \infty$.

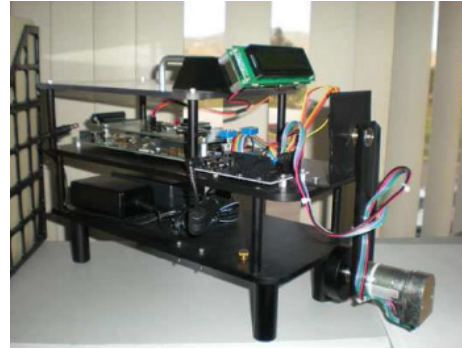
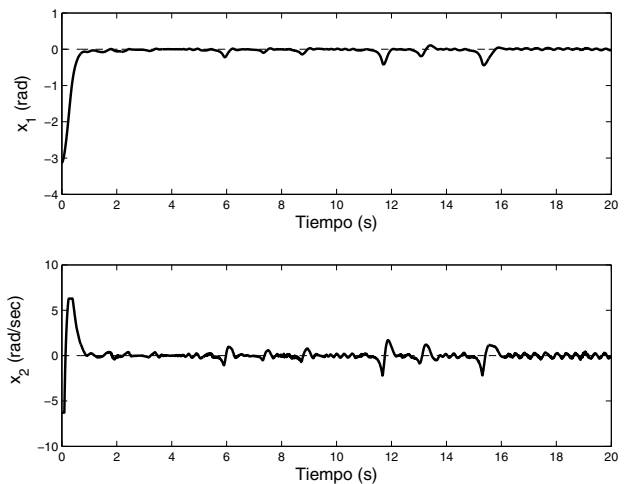


Figura 10: Péndulo de rueda inercial.

Figura 11: Dinámica de x_1 y x_2 en resultados experimentales.

4.4. Discusión de resultados

Como se puede observar de la Sección 4.1 a la Sección 4.3, el sistema de control difuso diseñado en la Sección 3 además de ser estable en lazo cerrado, resulta robusto ya que es capaz de resolver el problema de regulación del sistema (1) (i) en condiciones ideales libre de fricción, (ii) en presencia de fricción y (iii) en experimentos que consideran perturbaciones externas.

5. Conclusiones

El propósito principal de este trabajo era el de diseñar un controlador difuso tipo Mamdani para el problema de estabilización de un péndulo de rueda inercial. Las reglas difusas fueron obtenidas mediante la síntesis difusa de Lyapunov garantizando estabilidad asintótica. El proceso de diseño permitió mantener el uso de la heurística al mínimo, incluso obteniendo la base de reglas difusas y la granulación de las variables de entrada y salida a partir de la misma teoría de estabilidad de Lyapunov. Los resultados de simulación y experimentales permiten concluir que el sistema propuesto resulta ser estable y robusto.

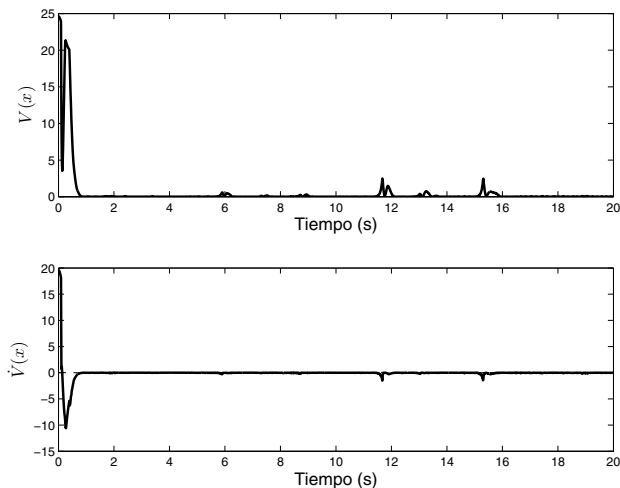


Figura 12: Dinámica de (5) y (6) en resultados experimentales.

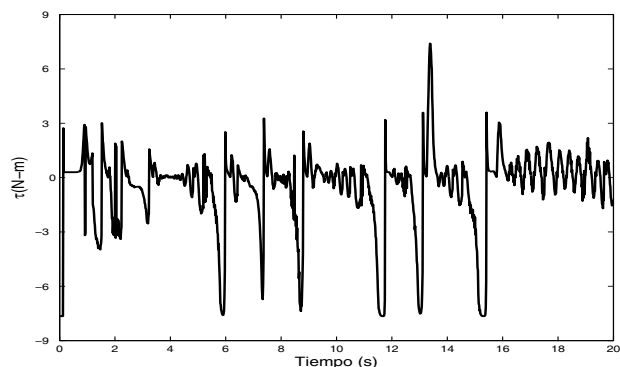


Figura 13: Entrada de control τ en resultados experimentales.

English Summary

Design of a fuzzy controller via fuzzy Lyapunov synthesis for the stabilization of an inertial wheel pendulum

Abstract

In this paper was presented the design of a Mamdani type fuzzy controller to solve the stabilization problem for an inertial wheel pendulum. The fuzzy rule base are designed following the fuzzy Lyapunov synthesis, which guarantee the local asymptotic stability of the closed-loop system, by using a Lyapunov function whose time-derivative is negative semidefinite, while the use of heuristics is minimized in the design process. Moreover, the design of the fuzzy rule base is simplest than the hard task of solve the nonlinear differential equations traditionally used to model control systems. Deserves special emphasis the fact that the design is made without a mathematical model of the inertia wheel pendulum.

Keywords:

Fuzzy control, Lyapunov stability, Underactuated system.

Agradecimientos

Este artículo ha sido parcialmente financiando por el Tecnológico Nacional de México con los proyectos 5862.16-P, 5867.16-P, PRODEP ITTIJ-CA-8 y CONACYT 268364.

Referencias

- Andary, S., Chemori, A., Krut, S., 2009. Control of the underactuated inertia wheel inverted pendulum for stable limit cycle generation. *Advanced Robotics* 23 (15), 1999–2014.
- Andrievsky, B., 2011. Global stabilization of the unstable reaction-wheel pendulum. *Automation and Remote Control* 72 (9), 1981–1993.
- Becerikli, Y., Celik, B. K., 2007. Fuzzy control of inverted pendulum and concept of stability using java application. *Mathematical and Computer Modelling* 46 (1,2), 24 – 37.
- Brockett, R., 1983. *Differential Geometric Control Theory*. Birkhäuser, Boston, Ch. Asymptotic stability and feedback stabilization, pp. 181–191.
- Castillo, O., Aguilar, L., Cazarez, N., Cardenas, S., 2008. Systematic design of a stable type-2 fuzzy logic controller. *Applied Soft Computing* 8 (3), 1274 – 1279.
- Castillo, O., Cazarez, N., Aguilar, L., Rico, D., 2006. Intelligent control of dynamic systems using type-2 fuzzy logic and stability issues. *International Mathematical Forum* 1 (28), 1371–1382.
- Cazarez-Castro, N. R., Aguilar, L. T., Castillo, O., 2010. Fuzzy logic control with genetic membership function parameters optimization for the output regulation of a servomechanism with nonlinear backlash. *Expert Systems with Applications* 37 (6), 4368 – 4378.
- Hernández, V. M., 2003. A combined sliding mode-generalized pi control scheme for swinging up and balancing the inertia wheel pendulum. *Asian Journal of Control* 5 (4), 620–625.
- Iriarte, R., Aguilar, L. T., Fridman, L., 2013. Second order sliding mode tracking controller for inertia wheel pendulum. *Journal of the Franklin Institute* 350 (1), 92–106.
- Kelly, R., Llamas, J., Campa, R., Aug 2000. A measurement procedure for viscous and coulomb friction. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on* 49 (4), 857–861.
- Khalil, H. K., 2002. *Nonlinear Systems*, 3rd Edition. Prentice Hall, EEUU.
- Korotnikov, V., 1998. *Partial Stability and Control*, 1st Edition. Springer-Birkhäuser Basel, EEUU.
- Lyapunov, A., 1892. The general problem of the stability of motion (in russian). Phd, Univ. Kharkov.
- Mamdani, E., Assilian, S., 1975. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies* 7 (1), 1–13.
- Margaliot, M., Langholz, G., 1999. Fuzzy lyapunov-based approach to the design of fuzzy controllers. *Fuzzy Sets and Systems* 106 (1), 49–59.
- Martinez-Soto, R., Rodriguez, A., Castillo, O., Aguilar, L. T., 2012. Gain optimization for inertia wheel pendulum stabilization using particle swarm optimization and genetic algorithms. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control* 8 (6), 4421–4430.
- Ng, W. M., Chang, D. E., Song, S.-H., 2013. Four representative applications of the energy shaping method for controlled lagrangian systems. *Journal of Electrical Engineering and Technology* 8 (6), 1579–1589.
- Qaiser, N., Iqbal, N., Hussain, A., Qaiser, N., 2006. Stabilization of non-linear inertia wheel pendulum system using a new dynamic surface control based technique. In: *Engineering of Intelligent Systems, 2006 IEEE International Conference on*, pp. 1–6.
- Qaiser, N., Iqbal, N., Hussain, A., Qaiser, N., 2007. Exponential stabilization of the inertia wheel pendulum using dynamic surface control. *Journal of Circuits, Systems and Computers* 16 (01), 81–92.
- Ye, H., Wang, H., Wang, H., Nov 2007. Stabilization of a pvtol aircraft and an inertia wheel pendulum using saturation technique. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 15 (6), 1143–1150.
- Yi, J., Yubazaki, N., 2000. Stabilization fuzzy control of inverted pendulum systems. *Artificial Intelligence in Engineering* 14 (2), 153 – 163.