

## Control Libre de Modelo basado en Modos Deslizantes Integrales para Robots Submarinos Subactuados<sup>☆</sup>

R. Raygosa-Barahona<sup>a,\*</sup>, E. Olguín-Díaz<sup>a</sup>, V. Parra-Vega<sup>a</sup>, L. A. Muñoz-Ubando<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Robótica y Manufactura Avanzada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ramos Arizpe, Coah., 25900 México

<sup>b</sup>Grupo Plenum & The Robotics Institute of Yucatán, Mérida, Yucatán, 97139 México

### Resumen

Se propone la combinación de una ley de control libre de modelo dinámico, en conjunto con una ley de guiado cinemático, para el seguimiento de trayectorias actuadas de un vehículo robótico submarino subactuado. El sistema en lazo cerrado da lugar a modos deslizantes integrales, libres de castaño, que garantizan la estabilidad exponencial local del seguimiento de las coordenadas actuadas con dinámica interna estable, bajo condiciones fáciles de encontrar en la práctica. La metodología del diseño se basa en una manipulación cuidadosa del modelo cuasilagrangiano de vehículos submarinos y de una ley de control que es independiente del modelo y sus parámetros, asumiendo acceso total del estado. Simulaciones comparativas considerando el PID convencional ilustran la factibilidad del control en las condiciones establecidas ante incertidumbres paramétricas y del modelo. *Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.*

**Palabras Clave:** Control Libre de Modelo, Modos Deslizantes Integrales, Sistemas Subactuados, Vehículo Submarino

### 1. Introducción

El modelo dinámico de un submarino remotamente operado, (AUV por sus siglas en inglés), es altamente no lineal y acoplado, requiriendo complejos procedimientos para estimar sus parámetros hidrodinámicos, Sagatun and Fossen (1991), por lo que en aplicaciones de laboratorio y en mayor medida en el campo, resulta imposible contar con un modelo exacto, o por lo menos con parámetros precisos. Por esta razón es necesario que la ley de control sea robusta ante incertidumbres del modelo y de sus parámetros, e idealmente se prefieren controles que sean independientemente de ellos. Éste hecho ha motivado el estudio y desarrollo de controladores libres de modelo, como el clásico PID o controles basados en técnicas robustas no lineales tipo modos deslizantes, Yoerger and Slotine (1991); Healey and Leonard (1993), sin embargo éstas requieren conocimiento del modelo, típicamente parametrizado en lo que se conoce como el regresor. Además, el modo deslizante discontinuo es imposible de implementar en la práctica debido a la gran inercia que presentan los AUVs, lo que requiere de alguna técnica que induzca un modo deslizante pero sin castaño. Por otro lado, el AUV es

típicamente subactuado, con lo que aumenta considerablemente la dificultad del diseño de control, Spong (1994); Olfati-Saber (2000), más aún si debe ser un control libre de modelo, porque la subactuación exige una dinámica interna estable, Byrnes and Isidori (1991). En éste artículo estudiamos modos deslizantes sin castaño que no requieren conocimiento del modelo dinámico, con análisis de la dinámica interna, y además incorporan la síntesis de trayectorias admisibles.

El diseño de control de AUVs consideró en un inicio sistemas omnidireccionales o desacoplados, asumiendo conocimiento exacto del modelo o basado en técnicas de control robusto para compensar incertidumbres. En Yoerger and Slotine (1991), la ley de control induce modos deslizantes discontinuos (de primer orden) y asumiendo conocimiento del modelo, mientras que Healey and Leonard (1993) considera un enfoque de interconexión de 3 subsistemas (el de profundidad, de inclinación y de orientación) cuyos acoplamientos son despreciados, con un control tipo Yoerger and Slotine (1991). En Perrier and Canudas de Wit (1996), se estudia la robustez con un término cúbico que mejora el desempeño en seguimiento, pero que requiere la completa actuación del sistema.

Para lidiar con el problema de la falta de un modelo fidedigno del AUV, Smallwood and Whitcomb (2001) presenta técnicas de identificación paramétricas y de modelo, además de un control lineal PD. Este trabajo es extendido en Smallwood and Whitcomb (2004) para una familia de controles no lineales con prestaciones similares. Recientemente, se reportó la esti-

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [r.raygosa@gmail.com](mailto:r.raygosa@gmail.com) (R. Raygosa-Barahona),  
[ernesto.olguin@cinvestav.edu.mx](mailto:ernesto.olguin@cinvestav.edu.mx) (E. Olguín-Díaz),  
[vparra@cinvestav.mx](mailto:vparra@cinvestav.mx) (V. Parra-Vega),  
[luisalbertomunozubando@gmail.com](mailto:luisalbertomunozubando@gmail.com) (L. A. Muñoz-Ubando)  
URL: [www.cinvestav.edu.mx](http://www.cinvestav.edu.mx) (R. Raygosa-Barahona)

mación experimental del modelo completo de un AUV actuado en Whitcomb and Stephen (2013), con prometedores resultados en lazo cerrado. En Tedrake (2010), se proponen técnicas de identificación y optimización para AUVs subactuados a un alto costo computacional.

Ante la incertidumbre del modelo y sus parámetros, se desarrolló la ley de control por modos deslizantes integrales (MDI), la cual es libre de modelo. Ésta consiste en la generación de una variedad de error extendido en donde se induce el modo deslizante integral, acción que elimina el castaño y garantiza, bajo ciertas condiciones, la convergencia exponencial del error, Parra-Vega et al. (2003). Es interesante notar que éste control resulta en un PID no lineal con claras implicaciones energéticas, ya que su diseño es basado en la pasividad de sistemas electromecánicos totalmente actuados y de base inercial fija. Tales condiciones fueron incorporadas en Olguín-Díaz and Parra-Vega (2007) para el caso no inercial de un AUV completamente actuado, incluyendo tareas de contacto como *docking*, sin considerar los efectos de transición del contacto.

Para AUVs subactuados, García-Valdovinos et al. (2009) y Chun Nan and Tong Ge (2012) consideran la ley de control presentada en Parra-Vega et al. (2003) de forma arbitraria, solamente para la parte actuada; sin demostrar siquiera estabilidad de la misma, mucho menos de la parte subactuada, aunque con interesantes resultados de simulación, mostrando una regulación robusta. En Raygosa-Barahona et al. (2011), se propone un enfoque similar pero para seguimiento de trayectorias, sintetizando las referencias deseadas con las Leyes de Guiado (LG) de Breivik and Fossen (2009), aunque sin análisis alguno de estabilidad del sistema de lazo cerrado. Resulta por demás emblemático reconocer la importancia de las LG, basadas en un enfoque puramente cinemático, comúnmente utilizadas en sistemas de mucha inercia como barcos y embarcaciones náuticas, ya que proporcionan trayectorias 3D saturadas al horizonte, asegurando con control cinemático la generación de trayectorias viables de las coordenadas actuadas. En Fossen (2011), se consideran LG con un control anidado (o *backstepping*, Krstic et al. (1995)) para un AUV subactuado, asumiendo conocimiento exacto del modelo dinámico vía el regresor, y derivadas del estado; con una viable extensión al caso adaptable.

### 1.1. Contribución

Se establece la extensión formal del control MDI para el AUV subactuado, presentado en Raygosa-Barahona et al. (2011), incluyendo condiciones explícitas de estabilidad del sistema en lazo cerrado, basadas en la prueba de estabilidad de la dinámica interna. La ley de control resultante es independiente del conocimiento del modelo dinámico y de sus parámetros (libre de modelo) y garantiza, bajo ciertas condiciones, la convergencia exponencial de las coordenadas actuadas. Simulaciones numéricas muestran la efectividad del control y la robustez de éste ante incertidumbres paramétricas y del modelo, y para propósitos ilustrativos, se realiza una comparación con un control PID.

### 1.2. Notación

Se denota  $\mathbb{R}$  para el conjunto de los números reales y los vectores con letras en negrillas. La matriz identidad  $I_n$  es de dimensión  $n$ . Los máximos y mínimos autovalores de una matriz son representados por  $\lambda_M$  y  $\lambda_m$ , respectivamente y  $R \in SO(3)$  representa matriz de rotación del grupo especial ortogonal de orden 3.  $\sigma_M(\cdot)$  se refiere al valor singular máximo, definido como  $\sigma_M(\cdot) = \sqrt{\lambda_M(AA^T)} = \|A\|$ , equivalente a la norma espectral.

El vector extendido de velocidades lineal  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  y angular  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  con respecto a un referencial  $\Sigma_0$  es denominado *twist*, mientras que un vector extendido de fuerzas  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$  y momentos  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$  es denominado *wrench*, donde

$$\text{Twist} : \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6; \quad \text{Wrench} : \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6;$$

Por convención, el referencial inercial  $\Sigma_0$  es definido con el eje  $z_0$  vertical, apuntando hacia abajo, quedando el eje  $x_0$  hacia al Norte y el eje  $y_0$  en la dirección que complete la regla de la mano derecha. El referencial no inercial  $\Sigma_v$ , asignado rígidamente al vehículo, es definido con el eje  $x_v$  apuntando hacia la parte frontal de éste y el eje  $z_v$  apuntando hacia el fondo de la nave, completando el marco ortonormal el eje  $y_v$  de acuerdo a la regla de la mano derecha, ver figura 1.

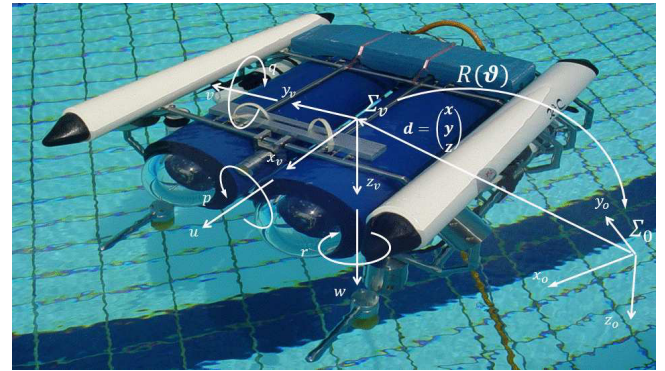


Figura 1: ROV: RRC II; del centro de Investigación en Robótica de la Universidad Tecnológica de Nanyang.

## 2. Modelo Dinámico del AUV Subactuado

El modelo dinámico cuasilagrangiano se obtiene en las llamadas coordenadas cuasilagrangianas, Meirovich (2003), las cuales son las coordenadas físicas del *twist* del vehículo (coordenadas de las velocidades lineal y angular)

$$\mathbf{v} = (u, v, w, p, q, r)^T \in \mathbb{R}^6$$

y no las derivadas temporales de la pose del vehículo (coordenadas generalizadas lagrangianas)

$$\boldsymbol{\eta} = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)^T \in SE(3)$$

Este último definido como la posición  $\mathbf{d} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$  del origen del referencial no inercial  $\Sigma_v$  del vehículo y de los

parámetros  $\boldsymbol{\theta} = (\phi, \theta, \psi)^T \in \mathcal{S}^3$  que definen orientación. Considerado en el formalismo de Kirchhoff, Fossen (2011), para el desarrollo de la dinámica a partir de la variación energética con las variables cuasilagrangianas, expresadas con coordenadas no inerciales correspondientes al referencial local del cuerpo rígido en movimiento, las ecuaciones resultantes para un AUV son las siguientes, Fossen (2011), incluyendo los efectos del fluido que le rodea, Olgúin-Díaz and Parra-Vega (2007),

$$M\dot{\boldsymbol{v}} + C(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + D(\cdot)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\zeta}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \quad (1a)$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (1b)$$

donde  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1^T, 0_3^T)^T \in \mathbb{R}^6$  y  $\zeta_1(\boldsymbol{d}) \in \mathbb{R}^3$  representan el campo de velocidad lineal del fluido alrededor del AUV y  $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\zeta}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \in \mathbb{R}^6$  es el *wrench* de perturbaciones debido a corrientes submarinas tal que desvanece en  $\boldsymbol{\zeta}$ , es decir  $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v}, 0, 0) = 0$ , Olgúin-Díaz et al. (2013). En este trabajo se asume que no hay perturbaciones de este tipo.

El operador cinemático  $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  está compuesto como

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{\theta}) & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{J}_\theta(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

donde  $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) \in SO(3)$  es la matriz de rotación, que transforma coordenadas del referencial no inercial del vehículo a coordenadas del referencial inercial; y  $\boldsymbol{J}_\theta(\boldsymbol{\theta})$  es el operador que mapea el vector de derivadas temporales de orientación  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  a la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  del referencial del vehículo, en coordenadas inerciales. Nótese que la norma espectral es  $\|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})\| = \sigma_M\{\boldsymbol{J}_\theta(\boldsymbol{\theta})\} = 1$ , y debido a las propiedades de  $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ , el operador  $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$  presenta singularidades si se utilizan ángulos de Euler.

El *wrench* de fuerzas y pares exógenos está representado por

$$\boldsymbol{F} = (X, Y, Z, L, M, N)^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^6$$

el cual está compuesto por una transformación de las fuerzas de control  $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$  proporcionadas por los impulsores, para  $p$  el número de actuadores del AUV, y  $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{6 \times p}$  representa la *matriz de repartición de empujes*, que para el caso subactuado tenemos que  $\text{rang}(\boldsymbol{B}) < 6$ , Olfati-Saber (2000). Así entonces, la matriz  $\boldsymbol{B}$  está en función de la posición de los impulsores en el referencial del vehículo. Para una configuración típica de un submarino de 3 impulsores, como la que se muestra en la figura 2, el origen del referencial del vehículo esta el plano de los impulsores horizontales y alineado con la línea imaginaria que une los centro de masa y flotabilidad del vehículo.

Dado que la matriz de inercia y de masa añadida  $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^T > 0$  es constante, simétrica y definida positiva, Fossen (2011), la energía cinética debido a la inercia del AUV y del fluido se expresa  $K = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{v} \geq 0$ . El *wrench* de Coriolis  $C(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$  modela las fuerzas centrífugas y de Coriolis, tanto inerciales como de masa añadida. Este vector es único y además es cuadrático en velocidad, por lo que se puede expresar como el producto de la velocidad por una matriz dependiente de la velocidad extendida. Esta regresión genera diferentes expresiones para la matriz de Coriolis'  $C(\boldsymbol{v})$ , y al menos una de ellas cumple con la propiedad de antisimetría, es decir que

$$C(\boldsymbol{v}) + C^T(\boldsymbol{v}) = 0 \quad (3)$$

La disipación debida a efectos hidrodinámicos es representada por la matriz definida positiva  $D(\boldsymbol{v}) > 0$ , de orden 6, cuyos elementos dependen de coeficientes de amortiguamiento hidrodinámico, tal que  $\boldsymbol{v}^T D(\cdot)\boldsymbol{v} > 0$ . Esto implica que el *wrench*  $\boldsymbol{F}_d = -D(\cdot)\boldsymbol{v}$  es el resultado de los efectos no conservativos y disipativos, lo cual es esencial para demostrar la propiedad de pasividad del AUV. En el caso del AUV totalmente sumergido, se suele aceptar la siguiente simplificación, Fossen (2011),  $D(\cdot) = -\text{diag}\{X_u + X_{u|u}|u|, Y_v + Y_{v|v}|v|, Z_w + Z_{w|w}|w|, K_p + K_{p|p}|p|, M_q + M_{q|q}|q|, N_r + N_{r|r}|r|\}$ .

El *wrench*  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^n$ , que modela las fuerzas de gravedad y empuje hidrostático, tiene cualquiera de las siguientes formas:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} (m - \rho V)\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{g}_0 \\ (m\boldsymbol{r}_g - \rho V\boldsymbol{r}_b) \times \boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{g}_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde la primera expresión proviene del gradiente lagrangiano de la energía potencial de gravedad y flotabilidad

$$U(\boldsymbol{\eta}) = -m\boldsymbol{g}_0^T (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{r}_g) + \rho V \boldsymbol{g}_0^T (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{r}_b) \quad (5)$$

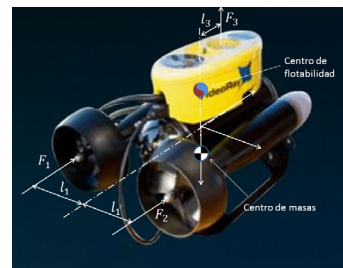
transformado al espacio de coordenadas cuasilagrangianas, Meirovich (2003); Fossen (2011); y la segunda expresión proviene directamente del análisis de cuerpo libre, donde el vector de la aceleración gravitacional  $\boldsymbol{g}_0 = (0, 0, 9.8)^T \text{ms}^{-2}$  es colineal al eje  $z_0$ . Las distancias  $\boldsymbol{r}_g = (x_g, y_g, z_g)^T$  y  $\boldsymbol{r}_b = (x_b, y_b, z_b)^T$  y los escalares  $\rho$  y  $V$  son, respectivamente, las posiciones del origen del referencial del AUV al centro de masa y al centro de flotabilidad; la densidad y volumen de agua desplazado.

El lado izquierdo de (1a) se puede reescribir como el producto de un regresor  $\boldsymbol{Y}_b(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , compuesto de funciones conocidas y de un vector<sup>1</sup>  $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^r$ , llamado *base*, de parámetros dinámicos del sistema, Antoneilli (2006):

$$M\dot{\boldsymbol{v}} + C(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + D(\cdot)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{Y}_b(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{\Theta} \quad (6)$$

Tal que la dinámica (1a) se puede reescribir como  $\boldsymbol{Y}_b(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ .

<sup>1</sup>En Antoneilli (2006) se estima que  $r > 10$ .



$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \\ l_1 & -l_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Figura 2: AUV modelo VIDEORAY PRO 3 XE GTO, de Oceanscan. Despreciando los efectos de carga de las hélices,  $\text{rank}(\boldsymbol{B}) = 3$ , dada por (2), donde la distancia  $l_1$  determina la localización simétrica de los impulsores longitudinales  $F_1$  y  $F_2$  a lo largo del eje lateral local  $y$ , y que son usados para controlar tanto la velocidad frontal  $u$  (*surge* a lo largo de  $x_v$ ) de forma colectiva, como para generar un giro de guiñada  $\psi$  (*yaw*, con velocidad  $r$  (*yaw rate*) alrededor de  $z_v$ ) de forma diferencial. El tercer impulsor  $F_3$  es utilizado para controlar la inmersión o profundidad  $z$ , a lo largo de  $z_0$ , o la velocidad vertical  $w$ , *dive* a lo largo de  $z_v$ .

En virtud de la naturaleza lagrangiana, existen constantes  $\beta_i > 0$  tales que se establecen las siguientes cotas, Olguín-Díaz and Parra-Vega (2007),

$$\begin{aligned} \beta_1 < \lambda_m(M) \leq \|M\| \leq \lambda_M(M) < \beta_2; \\ \|C(\mathbf{v})\| \leq \beta_3\|\mathbf{v}\|; \quad \|D(\cdot)\| \leq \beta_4\|\mathbf{v}\|; \quad \|\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\| < \beta_5 \end{aligned} \quad (7)$$

similar al robot manipulador de base fija completamente actuado, Parra-Vega et al. (2003); por lo que se deduce que el producto del regresor del sistema y el vector base están acotados como sigue:

$$\|\mathbf{Y}_b(\cdot)\Theta\| \leq \beta_2\|\dot{\mathbf{v}}\| + (\beta_3 + \beta_4)\|\mathbf{v}\|^2 + \beta_5$$

### 2.1. Separación de Coordenadas

El control de un AUV subactuado es frecuentemente realizado considerando al sistema completo como un conjunto de subsistemas interconectados, introduciendo simplificaciones arbitrarias para lograr acoplamiento simples o desacoplar los subsistemas, Fossen (2011). Más aun, por hipótesis de diseño, los movimientos de rotación alrededor de los ejes inerciales horizontales, llamados cabeceo o *roll* para  $x_0$  y alabeo o *pitch* para  $y_0$  se consideran hiperestables. Esto sugiere la necesidad de estudiar la estabilidad de la dinámica interna del AUV para establecer el comportamiento de todos los GdL, tanto actuados como no actuados. Para ello considere el siguiente resultado técnico parcial.

**Lema 2.1.** *Considere el modelo del AUV subactuado (1) sin perturbaciones del fluido y con  $B$  de rango completo por columnas  $\text{rang}(B(\boldsymbol{\theta})) = p < 6$ . Entonces, siempre existe un vector de coordenadas cuasilagrangianas transformadas  $\bar{\mathbf{v}}$  cuyas coordenadas pueden separarse en coordenadas no actuadas  $\mathbf{v}_u \in \mathbb{R}^{6-p}$  y coordenadas actuadas  $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^p$  bajo una transformación lineal  $T$  de rango completo ( $\text{rang}(T) = 6$ ), tal que*

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6; \quad \mathbf{v} \triangleq T\bar{\mathbf{v}}; \quad (8)$$

lo que permite reescribir el sistema AUV con la forma canónica de sistemas subactuados:

$$\bar{M}\dot{\bar{\mathbf{v}}} + \bar{C}(\mathbf{v})\bar{\mathbf{v}} + \bar{D}(\mathbf{v})\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (9)$$

*Demostración.* Considere la pseudoinversa por la izquierda  $B^+ = [B^T B]^{-1} B^T \in \mathbb{R}^{p \times 6}$  y la matriz  $S \triangleq \text{span}\{I - BB^+\} \in \mathbb{R}^{6 \times (6-p)}$ . Es claro entonces que  $S$  constituye una base del espacio nulo de  $B$  y que  $\text{rang}(S) = 6 - p$ , lo que implica que la transformación  $T$ , definida como

$$T \triangleq [S \quad B^{+T}],$$

es un operador invertible de rango completo  $\text{rang}(T) = 6$  tal que

$$T^T B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} S^T \\ B^T \end{bmatrix}; \Rightarrow \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^T \mathbf{v} \\ B^T \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Finalmente, note que (9) resulta de premultiplicar (1a) por  $T^T$  y sustituyendo (8) y su derivada, con las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= T^T M T > 0 & \bar{C} &= T^T [M\dot{T} + C T] \\ \bar{\mathbf{g}} &= T^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) & \bar{D} &= T^T D T > 0 \end{aligned}$$

por lo que las matrices de inercia y de disipación preservan la positividad definida, además la antisimetría de la matriz de Coriolis se preserva in virtud de (3), es decir,  $\bar{C} + \bar{C}^T = T^T M\dot{T} + \dot{T}^T M T + T^T [C + C] T = \dot{M}$ .  $\square$

El Lemma 2.1 permite establecer que (9) se tiene la siguiente separación por bloques:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \begin{bmatrix} M_{uu} & M_{ua} \\ M_{ua}^T & M_{aa} \end{bmatrix}; & \bar{C} &= \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{ua} \\ C_{au} & C_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_u \\ C_a \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{g}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{g}_u \\ \mathbf{g}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^T \mathbf{g} \\ B^T \mathbf{g} \end{pmatrix}; & \bar{D} &= \begin{bmatrix} D_{uu} & D_{ua} \\ D_{au} & D_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_u \\ D_a \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

por lo tanto, (9) se puede representar de cualquiera de las siguientes formas:

$$M_{uu}\dot{\mathbf{v}}_u + M_{ua}\dot{\mathbf{v}}_a + C_u(\mathbf{v})\mathbf{v} + D_u(\cdot)\mathbf{v} + \mathbf{g}_u(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (12a)$$

$$M_{ua}^T \dot{\mathbf{v}}_u + M_{aa}\dot{\mathbf{v}}_a + C_a(\mathbf{v})\mathbf{v} + D_a(\cdot)\mathbf{v} + \mathbf{g}_a(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{u} \quad (12b)$$

$$\text{ó } M_{uu}\dot{\mathbf{v}}_u + (C_{uu} + D_{uu})\mathbf{v}_u + \mathbf{g}_u(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{b}_u(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_a) \quad (13a)$$

$$M_{aa}\dot{\mathbf{v}}_a + (C_{aa} + D_{aa})\mathbf{v}_a + \mathbf{g}_a(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{b}_a(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_u) + \mathbf{u} \quad (13b)$$

donde  $\mathbf{b}_u(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_a) = -M_{ua}\dot{\mathbf{v}}_a - (C_{ua} + D_{ua})\mathbf{v}_a$  y  $\mathbf{b}_a(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_u) = -M_{ua}^T \dot{\mathbf{v}}_u - (C_{au} + D_{au})\mathbf{v}_u$ . Note que al igual que en (6), existen una regresión lineal para todas estas expresiones, en particular para (13) tenemos que

$$M_{uu}\dot{\mathbf{v}}_u + (C_{uu} + D_{uu})\mathbf{v}_u + \mathbf{g}_u(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Y}_{uu}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_u)\Theta \quad (14a)$$

$$\mathbf{b}_u(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_a) = \mathbf{Y}_{ua}(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_a)\Theta \quad (14b)$$

$$M_{aa}\dot{\mathbf{v}}_a + (C_{aa} + D_{aa})\mathbf{v}_a + \mathbf{g}_a(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Y}_{aa}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_a)\Theta \quad (14c)$$

$$\mathbf{b}_a(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_u) = \mathbf{Y}_{au}(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_u)\Theta \quad (14d)$$

donde cada regresor cumple *mutatis mutandis* con las propiedades de (6), para un único vector base  $\Theta$ .

Ahora necesitamos el siguiente resultado técnico para establecer las propiedades energéticas del sistema.

**Lema 2.2.** *Los subsistemas (13a) y (13b) en lazo abierto, es decir  $\mathbf{u} = 0$ , presentan por separado un mapeo pasivo entrada-salida, para el par  $\langle \mathbf{b}_x, \mathbf{v}_x \rangle$ , tal que se establece la siguiente desigualdad de pasividad*

$$\int \langle \mathbf{v}_x, \mathbf{b}_x \rangle dt < -\beta_x \quad (15)$$

para una constante positiva  $\beta_x > 0$ .

*Demostración.* De la positividad de las matrices  $\bar{M}$  y  $\bar{D}$ , de la antisimetría de  $\bar{C}$  y de la partición (11), tenemos que:

$$\begin{aligned} M_{uu} = M_{uu}^T > 0; & \quad C_{uu} + C_{uu}^T = \dot{M}_{uu}; & \quad D_{uu} > 0 \\ M_{aa} = M_{aa}^T > 0; & \quad C_{aa} + C_{aa}^T = \dot{M}_{aa}; & \quad D_{aa} > 0 \end{aligned} \quad (16)$$



lo que es suficiente para garantizar pasividad en ausencia de efectos potenciales, Brogliato et al. (2007). Note también que los efectos potenciales son añadidos dado que (4) y  $\bar{\mathbf{g}}$  en (11) establecen que existe una partición del vector de coordenadas generalizadas  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$  y un operador  $\bar{J}(\boldsymbol{\theta})$ , donde,

$$\bar{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_u \\ \boldsymbol{\eta}_a \end{pmatrix}; \quad \bar{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} J_u(\boldsymbol{\theta}) & 0 \\ 0 & J_a(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

tal que  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}}$ , es decir  $\mathbf{v}_u = J_u(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\eta}}_u$  y  $\mathbf{v}_a = J_a(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\eta}}_a$ . Así, el operador  $\bar{J}(\boldsymbol{\theta})$  tiene las mismas propiedades del operador cinemático  $J(\boldsymbol{\theta})$  dado por (1b). Consecuentemente, la transformación del vector de gravedad se puede calcular como sigue

$$\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}) = \bar{J}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial U}{\partial \bar{\boldsymbol{\eta}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_u(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{g}_a(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_u^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\eta}_u} \\ J_a^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\eta}_a} \end{pmatrix}$$

Lo cual sugiere reescribir la energía potencial como la suma de dos terminos parametrizados en las entradas de  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$  como sigue

$$U = U_u(\boldsymbol{\eta}) + U_a(\boldsymbol{\eta}) \quad (18)$$

con  $U_u \triangleq \int_0^t \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\eta}_u} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_u dt$  y  $U_a \triangleq \int_0^t \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\eta}_a} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_a dt$ . Entonces, existira un  $U_{x_0} > 0$  constante y suficientemente grande tal que obtenemos la siguiente función de almacenamiento de energía

$$\mathcal{V}_x = \frac{1}{2} \mathbf{v}_x^T M_x \mathbf{v}_x + U_x + U_{x_0} > 0$$

cuya derivada a lo largo de (13) resulta, para  $\mathbf{u} = 0$ ,

$$\dot{\mathcal{V}}_x = \mathbf{v}_x^T M_x \dot{\mathbf{v}}_x + \dot{U}_x = \mathbf{v}_x^T (\mathbf{b}_x - D_x \mathbf{v}_x)$$

en virtud de la antisimetría de los bloques diagonales de (16). Integrando obtenemos

$$\mathcal{V}_x(t) - \mathcal{V}_x(0) = \int \mathbf{v}_x^T \mathbf{b}_x dt - \int \mathbf{v}_x^T D_x \mathbf{v}_x dt$$

Finalmente, tomando en cuenta la positividad de (16) y  $\mathcal{V}_x(t) > 0$ , se establece que  $\beta_x > 0$  que mayora la expresión (15) para  $\beta_x = \mathcal{V}_x(0)$ , lo que establece entonces la pasividad de los subsistemas actuado y no actuado del AUV subactuado en lazo abierto.  $\square$

### 3. Diseño del Control por Modos Deslizantes Integrales para la Dinámica Actuada

Asumiendo que se tienen trayectorias deseadas admisibles y alcanzables dadas por  $\boldsymbol{\eta}_{da}, \dot{\boldsymbol{\eta}}_{da}, \mathbf{v}_{da} \in C^1$ , el objetivo de control es diseñar un control suave  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  tal que garantice tanto seguimiento exponencial de los grados de libertad actuados como estabilidad de todas las señales de lazo cerrado. Para tal fin y motivados por la eficacia y estabilidad del control libre de modelo que induce modos deslizantes integrales (MDI) para un sistema Euler-Lagrange de segundo orden con base no inercial, Olguín-Díaz and Parra-Vega (2007), considere el siguiente control para la dinámica actuada:

$$\mathbf{u} = -K_d \mathbf{s}_{ra} \quad \text{MDI} \quad (19)$$

donde  $K_d \in \mathbb{R}^{p \times p}$  una matriz definida positiva y  $\mathbf{s}_{ra}$  es una variedad de error extendido a nivel velocidad de las coordenadas actuadas cuasilagrangianas, definida por:

$$\mathbf{s}_{ra} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_{ra} \quad (20a)$$

$$\mathbf{v}_{ra} = \mathbf{v}_{da} - J_a(\cdot) K_\alpha \Delta \boldsymbol{\eta}_a + \mathbf{s}_{da} - K_\gamma \int_{t_0}^{t_f} \text{sgn}(\mathbf{s}_{qa}) dt \quad (20b)$$

$$\mathbf{s}_{qa} = \mathbf{s}_a - \mathbf{s}_{da} \quad (20c)$$

$$\mathbf{s}_{da} = \mathbf{s}_a(t_0) e^{-\kappa(t-t_0)} \quad (20d)$$

$$\mathbf{s}_a = \Delta \mathbf{v}_a + J_a(\cdot) K_\alpha \Delta \boldsymbol{\eta}_a \quad (20e)$$

con  $\kappa > 0$ , la función discontinua signo  $\text{sgn}(\cdot)$ , las matrices diagonales  $K_\alpha$  y  $K_\gamma$  definidas positivas de dimensión  $p$ , el error de coordenadas inerciales  $\Delta \boldsymbol{\eta}_a \triangleq \boldsymbol{\eta}_a - \boldsymbol{\eta}_{da} \in \mathbb{R}^p$  y el error de velocidad de las coordenadas actuadas cuasilagrangianas (no inerciales)  $\Delta \mathbf{v}_a \triangleq \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_{da} \in \mathbb{R}^p$ . Las funciones de posición deseada  $\boldsymbol{\eta}_{da}$  y de velocidad deseada  $\mathbf{v}_{da}$  son tales que  $\Delta \mathbf{v}_a = J_a(\cdot) \Delta \dot{\boldsymbol{\eta}}_a$ , localmente (en la vecinidad al origen) y  $J_a(\cdot)$  es el operador definido en (17).

Note dos aspectos relevantes en la definición de  $\mathbf{s}_{ra} \in \mathbb{R}^p$ . Primero que la variable  $\mathbf{s}_a$  es un error de seguimiento de las coordenadas actuadas; incluye el error de pose (coordenadas lagrangianas) y de velocidad (coordenadas cuasilagrangianas); Segundo que la variable  $\mathbf{s}_{da}$  es un desplazamiento del error de seguimiento con decaimiento exponencial, útil para eliminar la fase de acercamiento del modo deslizante  $\mathbf{s}_{qa} = 0$ ; lo que finalmente permite probar que  $\mathbf{v}_{ra} \in \mathbb{R}^p$  representa la referencia nominal de velocidad.

#### 3.1. Estabilidad de las coordenadas actuadas

**Lema 3.1.** *La variedad  $\mathbf{s}_{qa} = 0$  se constituye como una superficie deslizante para todo  $t$ , lo que implica que se establece convergencia local exponencial del error extendido  $\mathbf{s}_a$  si la matriz diagonal  $K_\gamma$  es suficientemente grande y la derivada de  $\mathbf{s}_{ra}$  es acotada. Por lo tanto,  $(\Delta \mathbf{v}_a, \Delta \boldsymbol{\eta}_a) \rightarrow (0, 0)$  converge asintóticamente.*

*Demostración.* Sustituyendo (20b)-(20e) en (20a), se obtiene

$$\mathbf{s}_{ra} = \mathbf{s}_{qa} + K_\gamma \int_{t_0}^{t_f} \text{sgn}(\mathbf{s}_{qa}) dt \quad (21)$$

cuya derivada es  $\dot{\mathbf{s}}_{ra} = \dot{\mathbf{s}}_{qa} + K_\gamma \text{sgn}(\mathbf{s}_{qa})$ . Considerando el producto interno  $\langle \mathbf{s}_{qa}, \dot{\mathbf{s}}_{ra} \rangle$  resulta la condición del modo deslizante:

$$\mathbf{s}_{qa}^T \dot{\mathbf{s}}_{qa} = -\mathbf{s}_{qa}^T K_\gamma \text{sgn}(\mathbf{s}_{qa}) + \mathbf{s}_{qa}^T \dot{\mathbf{s}}_{ra}$$

Así, si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\|\dot{\mathbf{s}}_{ra}\| < \epsilon$ , la ecuación anterior queda mayorada como

$$\mathbf{s}_{qa}^T \dot{\mathbf{s}}_{qa} \leq -(\lambda_m\{K_\gamma\} - \epsilon) \|\mathbf{s}_{qa}\|$$

De lo que se deduce que para una ganancia suficientemente grande  $\lambda_m\{K_\gamma\} > \epsilon$ , se induce un modo deslizante  $\mathbf{s}_{qa}(t) = 0$  en un tiempo finito  $t_s \leq \|\mathbf{s}_{qa}(t_0)\| / (\lambda_m\{K_\gamma\} - \epsilon)$  para cualquier condición inicial, y se sostiene para todo  $t \leq t_s$ . Así, considerando (20c) y (20d), resulta  $\mathbf{s}_{qa}(t) = 0$  para todo tiempo. Ello implica que localmente (en la vecinidad al origen)  $\mathbf{s}_{qa} = 0 \forall t$ , lo cual

implica, de (20c), que  $s_a \rightarrow 0$  con una tasa de convergencia exponencial dada por  $\kappa$ . En consecuencia, a partir de (20e) se tiene que  $\Delta v_a = J_a(\cdot)\Delta \dot{\eta}_a = -J_a(\cdot)K_\alpha \Delta \eta_a$  y dado que  $J_a(\cdot)$  es de rango completo localmente, se tiene  $\Delta \dot{\eta}_a = -K_\alpha \Delta \eta_a$ . Finalmente, esta cadena de implicaciones lleva a establecer la convergencia exponencial local de las coordenadas lagrangianas actuadas, es decir se ha probado que  $(\Delta \dot{\eta}_a, \Delta \eta_a) \rightarrow (0, 0)$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , y se concluye también que las coordenadas cuasilagrangianas actuadas  $\Delta v_a \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

Cabe notar que  $\|\dot{s}_{ra}\|$  es acotada si ambas señales  $\dot{v}_a$  y  $\dot{v}_{ra}$  también lo son. Para ésta última, considere que existen  $\beta_i > 0, i = 6, \dots, 9$  tales que la cota se verifica de (20b) aún ésta siendo discontinua:

$$\|v_{ra}\| \leq \beta_6 + \sigma_M \{J_a\} \lambda_M \{K_\alpha\} \|\Delta \eta_a\| + \lambda_M \{K_y\} I_p < \beta_8 \quad (22a)$$

$$\|\dot{v}_{ra}\| \leq \beta_7 + \sigma_M \{J_a\} \lambda_M \{K_\alpha\} \|\Delta v_a\| < \beta_9 \quad (22b)$$

La cota de  $\dot{v}_a$  debe resultar de la estabilidad del subsistema actuado. Para esto considere el sistema actuado (13b), parametrizado por (14c) y (14d), con una base desconocida de parámetros dinámicos  $\Theta$ . Considere también una variación  $Y_{aa}(\cdot)$  del regresor lineal, en términos de la referencia nominal  $v_{ra}$  y su derivada  $\dot{v}_{ra}$ :

$$M_{aa}\dot{v}_{ra} + C_{aa}(v)v_{ra} + D_{aa}(v)v_{ra} + g_a(\eta) = Y_{aa}(\eta_a, v, v_{ra}, \dot{v}_{ra})\Theta$$

De la diferencia con (13b) se obtiene la ecuación de error de lazo abierto, considerando perturbaciones nulas del fluido:

$$M_{aa}\dot{s}_{ra} + C_{aa}(v)s_{ra} + D_{aa}(v)s_{ra} = u - [Y_{aa}(\eta_a, v, v_{ra}, \dot{v}_{ra}) + Y_{au}(v, \dot{v}_u)]\Theta \quad (23)$$

En virtud de las cotas (7) de la dinámica en coordenadas originales y las cotas (22) de la referencia nominal; tenemos que existen funcionales  $\xi_a(t)$  y  $\xi_{ua}(t)$  dependientes del estado  $(\eta, v)$  tales que

$$\|Y_{aa}(\cdot)\Theta\| \leq \beta_2 \|\dot{v}_{ra}\| + (\beta_3 + \beta_4) \|v\| \|v_{ra}\| + \beta_5 \leq c_0 + c_1 \|v\| \leq \xi_a(t)$$

$$\|Y_{ua}(\cdot)\Theta\| \leq \beta_{10} \|\dot{v}_u\| + \beta_{uu} \|v\| \|v_u\| \leq \xi_{ua}(t)$$

Note que para esta última expresión, la cota está condicionada a la estabilidad de la dinámica no actuada; y surge debido a la pasividad de (13a), utilizando el lema 2.2, y del hecho que  $\|\dot{v}_u\| < \beta_{ua}$  y  $\|v_u\| < \beta_{13}$ . Finalmente se obtiene un regresor nominal  $Y_a(\cdot) \triangleq Y_{aa}(\cdot) + Y_{au}(\cdot)$ , que puede ser mayorado como  $\|Y_a(\cdot)\Theta\| \leq \xi_{ar}(t)$ , para  $\xi_{ar}(t) = \xi_a(t) + \xi_{au}(t)$ .

Sustituyendo (19) en (23), se obtiene la siguiente ecuación de error de lazo cerrado:

$$M_{aa}\dot{s}_{ra} + C_{aa}(v)s_{ra} + D_{aa}(v)s_{ra} = -K_d s_{ra} - Y_a(\cdot)\Theta \quad (24)$$

cuyas propiedades de estabilidad se detallan en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.** Considere (24), provisto que los errores iniciales son suficientemente pequeños, las ganancias  $K_d$  y  $K_y$  suficientemente grandes tales que  $\|K_d + D_{aa}\| > \xi_{ar}^2$  y  $\|K_y\| > \|\dot{s}_a\|$ ,

y que las coordenadas no actuadas sean estables. Entonces, se induce un modo deslizante integral en  $s_a = 0$ , tal que el error de seguimiento de las coordenadas actuadas converge local exponencialmente  $\Delta \eta = \eta_a - \eta_{da} \rightarrow 0$  y  $\Delta v_a = v_a - v_{da} \rightarrow 0$ .

*Demostración.* La prueba sigue paso a paso la prueba en Parra-Vega et al. (2003), la cual puede ser desarrollada *vis-a-vis* si se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} s_{ra}^T M_{aa} s_{ra};$$

y utilizando los lemas 2.1 y 2.2 y la propiedad de antisimetría de la matriz de Coriolis. Este procedimiento permite establecer la existencia de la cota de la aceleración  $\dot{v}_a$ , lo que, de acuerdo al lema 3.1, se demuestra que se induce un modo deslizante en  $s_a = J_a(\cdot)(\Delta \dot{\eta}_a + K_\alpha \Delta \eta_a) = 0$ . Por lo tanto, dado que  $rank(J_a) = p$ , se induce convergencia exponencial local de las coordenadas actuadas:  $(\Delta v_a, \Delta \dot{\eta}_a, \Delta \eta_a) \rightarrow (0, 0, 0)$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 3.2. Análisis de la Dinámica Interna

La Proposición 3.1 asume que la dinámica (residual) no actuada es estable. Esta *dinámica interna* (en lazo cerrado) se obtiene despejando  $\dot{v}_a$  de (12b) y sustituyendo en (12a), con el control (19):

$$M_{uu_0}\dot{v}_u + C_{uu_0}(v)v_u + D_{uu_0}(v)v_u + g_u(\eta) = \tau \quad (25)$$

donde la matriz constante  $M_{uu_0} = M_{uu} - M_{ua}M_{aa}^{-1}M_{ua}^T > 0$  es el complemento de Schur del bloque  $M_{aa}$  de la matriz  $\bar{M} > 0$  y

$$C_{uu_0} = C_{uu} - M_{ua}M_{aa}^{-1}C_{ua}$$

$$D_{uu_0} = D_{uu} - M_{ua}M_{aa}^{-1}D_{ua}$$

$$\tau = M_{ua}M_{aa}^{-1}(K_d s_{ra} + C_{aa}(v)v_a + D_{aa}(v)v_a + g_a) - C_{ua}(v)v_a - D_{ua}(v)v_a$$

Note que la entrada auxiliar  $\tau \in \mathbb{R}^{6-p}$  representa la excitación del sistema a través de la dinámica actuada y de la ley de control, y es acotada según la proposición 3.1, i.e.  $\|v_a\| < \beta_a$ , y cuya cota está dada por

$$\|\tau\| \leq \beta_{\tau_0} + \beta_{\tau_1} \|v_u\| \quad (26)$$

**Lema 3.2** (Dinámica interna del AUV bajo el control MDI). Considere el subsistema no actuado (25), excitado por el acoplamiento del subsistema actuado controlado por la ley (19). Asumiendo flotabilidad neutra y que existe razonablemente amortiguamiento hidrodinámico lo suficientemente grande, entonces la dinámica interna del AUV subactuado es globalmente estable, con el punto de equilibrio  $(\eta_u, v_u)^* = (\eta_u^*, \mathbf{0})$  dado por  $g_u(\theta^*) = \mathbf{0}$ , donde  $\theta^*$  corresponde a la orientación donde el vector definido desde el centro de flotabilidad al centro de masas está alineado y tiene la misma dirección que el vector de gravedad.

*Demostración.* Considere la dinámica del AUV subactuado (12) con el control MDI (19) y con estados para cada subsistema definidos como  $x_u = (\eta_u^T, v_u^T)^T \in \mathbb{R}^{12-2p}$  y  $x_a = (\eta_a^T, v_a^T)^T \in \mathbb{R}^{2p}$ . Los puntos de equilibrio de la dinámica no actuada quedan

definidos para  $(\mathbf{x}_u, \dot{\mathbf{x}}_u) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  como las raíces de  $\mathbf{g}_u(\theta^*) = S^T \mathbf{g}(\theta^*) = \mathbf{0}$ , las cuales provienen ya sea del espacio rango de  $S$  (equivalente al espacio nulo de  $S^T$  y por construcción al espacio nulo de  $B$ ) o de las raíces de  $\mathbf{g}(\theta^*) = \mathbf{0}$ . Note que estas raíces son también los puntos de equilibrio, en lazo abierto, de cualquier vehículo submarino, Leonard (1997) y se obtienen directamente de (4) implicando las condiciones de: 1) flotabilidad neutra, i.e.  $m = \rho V$ ; y 2) a la luz de la condición anterior, alineación de la línea del centro de flotabilidad al centro de masas del vehículo:  $\tilde{\mathbf{r}}_{bg} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_g$  colineal a la dirección de la aceleración de la gravedad, i.e.  $\tilde{\mathbf{r}}_{bg} \times R^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$ . Esta última condición indica la existencia de dos puntos de equilibrio de orientación de todo el sistema: *a*) con el centro de flotabilidad abajo del centro de masas y *b*) con el centro de flotabilidad arriba del centro de masas. En estas condiciones la energía potencial (5) se escribe como  $U(\boldsymbol{\eta}) = m\tilde{\mathbf{r}}_{bg} \cdot (R^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{g}_0)$ , la cual tiene valores máximo y mínimo dados respectivamente por los puntos de equilibrio *a*) y *b*).

Considere función la siguiente función global definida positiva

$$V_u = \frac{1}{2} \mathbf{v}_u^T M_{uu_0} \mathbf{v}_u + U_u(\boldsymbol{\eta}_u) + U_{0_u} \geq 0 \quad (27)$$

con  $U_u$  definida en (18) y

$$U_{0_u} = -U_u(\boldsymbol{\eta}_u^*) > 0 \quad (28)$$

tal que  $V_u(0) = 0$ . Note que sólo el punto de equilibrio *b*) cumple con la condición (28), y entonces (27) es una *Función de Lyapunov* para dicho punto de equilibrio. La derivada de (27) a lo largo de las trayectorias (25) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &= \mathbf{v}_u^T (\boldsymbol{\tau} - C_{uu_0}(\mathbf{v})\mathbf{v}_u - D_{uu_0}(\mathbf{v})\mathbf{v}_u - \mathbf{g}_u(\boldsymbol{\eta})) + \dot{\boldsymbol{\eta}}_u^T \frac{\partial U_u}{\partial \boldsymbol{\eta}_u} \\ &= \mathbf{v}_u^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{v}_u^T D_{uu}(\mathbf{v})\mathbf{v}_u + \mathbf{v}_u^T M_{ua} M_{aa}^{-1} [C_{au} + D_{au}] \mathbf{v}_u \end{aligned}$$

A la luz de 1) la existencia de las cotas establecidas en (7), 2) al acotamiento de  $\mathbf{v}_a$  debido a la proposición 3.1 y 3) a la cota de  $\boldsymbol{\tau}$  en (26); podemos establecer que la expresión anterior está mayorada como

$$\dot{V}_u \leq -(\lambda_M\{D_{uu}\} - \beta_c) \|\mathbf{v}_u\|^3 + \beta_{\tau_1} \|\mathbf{v}_u\|^2 + \beta_{\tau_0} \|\mathbf{v}_u\| \quad (29)$$

con  $\beta_{\tau_0} > 0, \beta_{\tau_1} > 0$  y

$$\beta_c = \frac{\sigma_M\{M_{ua}\}}{\lambda_m\{M_{aa}\}} (\sigma_M\{C_{au}\} + \sigma_M\{D_{au}\}) > 0$$

Siendo el término cúbico en (29) dominante cuando  $\mathbf{v}_u$  es grande, es claro que en un entorno altamente disipativo tal que

$$\lambda_M\{D_{uu}\} > \beta_c \quad (30)$$

entonces existirá un tiempo finito  $t_u \geq t_0$  tal que (29) es seminegativa definida. Por lo tanto surge una región de atracción  $\mathcal{M}_u$  centrada en el punto de equilibrio *b*), delimitada por un radio

$\delta = \frac{-\beta_{\tau_1} \pm \sqrt{\beta_{\tau_1}^2 - 4(\lambda_M\{D_{uu}\} - \beta_c)\beta_{\tau_0}}}{2(\lambda_M\{D_{uu}\} - \beta_c)}$ , tal que  $\dot{V}_u < 0$  fuera de  $\mathcal{M}_u$ . Esto indica que, bajo la condición de estabilidad (30),  $\mathbf{v}_u$  es acotada para toda  $\mathbf{v}_u(t_0) \in \mathcal{M}_u$ ; por lo tanto  $\|\mathbf{v}_u(t)\| \leq \delta \quad \forall t \geq t_u$ , lo que permite concluir que en éstas condiciones las variables no

actuadas de velocidad son tales que  $\mathbf{v}_u \in \mathcal{L}_\infty$ . Adicionalmente, evocando el Principio de Invariancia de LaSalle resulta que la dinámica interna (25) es globalmente estable en el sentido de Lyapunov, alrededor de una región de atracción centrada en el punto de equilibrio *b*). □

Note, que debido a la positividad definida de  $\bar{M} > 0$  y del complemento de Schur  $M_{uu_0} > 0$ , se tiene  $\lambda_m\{M_{uu}\}\lambda_m\{M_{aa}\} > \sigma_M^2\{M_{ua}\}$ . Así, los valores propios de  $M_{uu} = S^T M S$  y  $M_{aa} = B^+ M B^{+T}$  siendo del mismo orden de magnitud, se cumple que  $\sigma_M\{M_{ua}\}/\lambda_m\{M_{aa}\} \leq 1$ . Igualmente, debido a  $\bar{D} > 0 \Rightarrow D_{uu} - D_{ua} D_{aa}^{-1} D_{au} > 0$  y además si  $D = D^T$  entonces  $\lambda_m\{D_{uu}\}\lambda_m\{D_{aa}\} > \sigma_M^2\{D_{ua}\}$ , y de la misma manera se cumple  $\lambda_m\{D_{uu}\} > \sigma_M\{D_{ua}\}$ . De lo anterior queda claro que

$$\lambda_M\{D_{uu}\} \gg \frac{\sigma_M\{M_{ua}\}}{\lambda_m\{M_{aa}\}} \sigma_M\{D_{au}\}.$$

Por otro lado, las superficies de control de las coordenadas actuadas típicamente se diseñan tal que presentan bajo coeficiente de amortiguamiento hidrodinámico, a costa de un alto coeficiente de las superficies de los grados de libertad no actuados. Esto implica también que las variables no actuadas se mueven más lentamente que las actuadas, lo que disminuye la influencia de  $\sigma_M\{C_{au}\}$ , manteniendo por lo tanto la validez práctica de la condición (30).

### 3.3. Resultado Principal

Los lemas y la proposición dados, indican que el control (19)-(20) estabiliza localmente exponencialmente las coordenadas actuadas del AUV subactuado, con una dinámica interna residual estable dada por los grados de libertad no actuados. Enunciamos este resultado con el siguiente teorema:

**Teorema 3.1** (AUV subactuado con Control MDI). *Considere el AUV subactuado (1), sin perturbaciones del fluido, con el control (19)-(20) sobre el subsistema completamente actuado y trayectorias de consigna suaves, donde la coordenada lagrangiana alineada a la gravedad es actuada. Entonces, el sistema de lazo cerrado garantiza que se induce un modo deslizante en la variedad de error actuada, tal que local exponencialmente el error de seguimiento de las coordenadas actuadas convergen, con una dinámica subactuada estable, sujeta a que el amortiguamiento hidrodinámico sea suficientemente grande y cumpla con la condición (30).*

*Demostración.* La Proposición 3.1, apoyada en el lema 3.1, enuncia la existencia de modos deslizantes en el espacio de las coordenadas actuadas y la correspondiente convergencia exponencial local de la dinámica de error de la coordenadas actuadas, provisto que 1) el error de condiciones iniciales sea lo suficientemente pequeño y 2) la dinámica interna sea estable. Esta segunda condición se prueba en el lema 3.2, dónde la condición flotabilidad neutra es reemplazada con la condición de que la coordenada vertical sea actuada (alineada a la gravedad, con convergencia exponencial) y bajo la condición (30), es decir que el AUV opere en un entorno disipativo. **QED** □

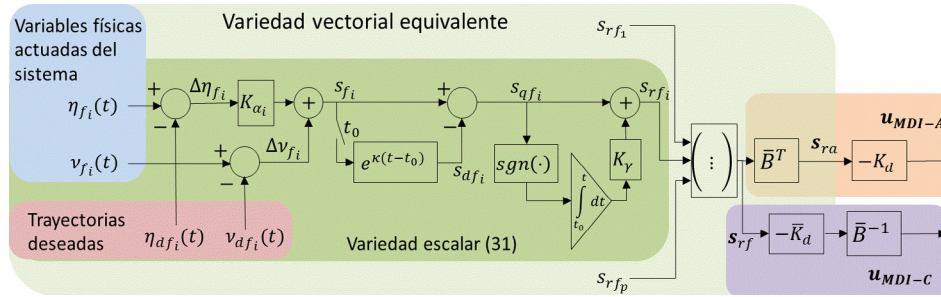


Figura 3: Diagrama de las leyes de control MDI-A y MDI-C

### 3.4. Consideraciones para la Implementación

La ley de control (19)-(20), que garantiza la convergencia exponencial de las coordenadas actuadas  $\mathbf{v}_a$  y  $\boldsymbol{\eta}_a$ , requiere el operador  $J_a(\boldsymbol{\theta})$ , en el cálculo de la referencia nominal  $\mathbf{v}_{ra}$ . Este operador, definido de la separación de coordenadas por el razonamiento en (17), puede ser calculado de la siguiente forma. Considere un proyector del espacio rango de  $B$ , equivalente al espacio nulo de  $S$ , como  $\bar{S} = \text{span}\{BB^+\} = \text{span}\{I - SS^T\}$  tal que  $\bar{B} = \bar{S}^T B$  es una matriz cuadrada de rango completo de dimensión  $p$ . Note que las coordenadas actuadas se obtienen de (10) como  $\mathbf{v}_a = B^T \mathbf{v}$  o bien de forma sucinta como  $\mathbf{v}_a = \bar{B}^T \mathbf{v}_f$ , donde  $\mathbf{v}_f \in \mathbb{R}^p$  son coordenadas actuadas físicas. Por otro lado, las coordenadas actuadas pueden también obtenerse de (1b) y (10) como  $\mathbf{v}_a = B^T J(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\eta}}$  y dependen de todo el vector de velocidad generalizada  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ , excepto en la vecindad del origen (cuando  $J \rightarrow I$ ), donde el mapeo puede ser expresado únicamente con las coordenadas afines a las direcciones actuadas, justamente como  $\mathbf{v}_a = J_a(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\eta}}_a$ , con

$$J_a(0) = \bar{B}^T \quad \Rightarrow \quad J_a(\cdot) = B^T \bar{S}$$

Si bien, este mapeo no es válido en todo el espacio de los parámetros de orientación y no puede emplearse con coordenadas absolutas, sí es válido con coordenadas relativas o errores de pose, como en el error de seguimiento (20e); debido a que siempre es posible establecer en todo momento un referencial inercial arbitrario para el cual las coordenadas de error de posición puedan ser mapeadas por el operador  $B^T \bar{S}$ . En estas circunstancias, es posible definir las siguientes variedades escalares independientes, de coordenadas físicas actuadas:

$$\begin{aligned} s_{fi} &= \Delta v_{fi} + K_{\alpha_i} \Delta \eta_{fi}; & s_{dfi} &= s_{fi}(t_0) e^{-\kappa(t-t_0)}; & s_{qfi} &= s_{fi} - s_{dfi}; \\ s_{rfi} &= s_{qfi} + K_{\gamma_i} \int_{t_0}^{t_f} \text{sgn}(s_{qfi}) dt \end{aligned} \quad (31)$$

a partir de las cuales se puede reconstruir la variedad vectorial (20) como

$$\mathbf{s}_{ra} = \bar{B}^T \mathbf{s}_{rf}, \quad \text{con} \quad \mathbf{s}_{rf} = \begin{pmatrix} s_{rf1} \\ \vdots \\ s_{rfp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

sin la dependencia del operador  $J_a$ ; y donde cada variedad escalar genera un modo deslizante integral, según el lema 3.1. Con-

secuentemente la ley de control MDI (19) puede tomar cualquiera de las siguientes formas:

$$\mathbf{u} = -K_d \bar{B}^T \mathbf{s}_{rf} \quad \text{MDI-A} \quad (32a)$$

$$= -\bar{B}^{-1} \bar{K}_d \mathbf{s}_{rf} \quad \text{MDI-C} \quad (32b)$$

donde  $\bar{K}_d = \bar{B} K_d \bar{B}^T > 0$ . Cabe resaltar que bajo la forma (32a), la ganancia  $K_d$  pondera la influencia de los modos deslizantes integrales de las coordenadas físicas actuadas sobre los actuadores; mientras que la forma (32b), la ganancia  $\bar{K}_d$  lo hace directamente sobre dichas coordenadas, tal como lo haría un control diseñado sobre las coordenadas físicas como sería un PID. Como se puede ver en la figura 3, la evaluación de las variedades escalares es casi tan simple como la de un control lineal.

## 4. Simulaciones

Como caso de estudio se consideró el AUV tipo RRC ROV II, de la figura 1. El simulador fue programado en Simulink con un integrador numérico ODE RK4 a paso fijo de  $h = 0.001$  ms. Los parámetros son los reportados en Chin et al. (2006), con centro de flotabilidad en  $\mathbf{r}_b = (0, 0, -0.048)$  m, justo por arriba del centro de masas en  $\mathbf{r}_g = (0, 0, 0)$  m. El AUV está equipado con tres impulsores para actuar las direcciones de desplazamiento frontal (*surge*), inmersión (*dive*) y acimut (*heading*), dejando subactuadas las direcciones de cabeceo (*roll*), el alabeo (*pitch*) y el desplazamiento lateral (*sway*). Así, la matriz de repartición de empujes  $B$  es definida como en (2), con  $l_1 = 0.5$  m y  $l_3 = 0.3$  m.

Aunque la dinámica de los actuadores no es considerada en el análisis de estabilidad, sí lo es para propósitos de simulación, con el modelo propuesto en Blanke et al. (2000), que incluye los pares de carga generados por las hélices de los propulsores y las saturaciones de los mismos.

Para simplificar el diseño de control y a la vez verificar su robustez ante incertidumbres del modelo se considera que el tercer impulsor está alineado a lo largo del eje local cenital  $z_v$ , es decir  $l_3 = 0$ . Acorde con esta configuración, las coordenadas actuadas físicas, las coordenadas generalizadas afines a estos movimientos y los errores son, respectivamente:

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} u+l_1 r \\ u-l_1 r \\ w \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_f = \begin{pmatrix} u \\ w \\ r \end{pmatrix}; \quad \Delta \boldsymbol{\eta}_a = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta \psi \end{pmatrix}$$



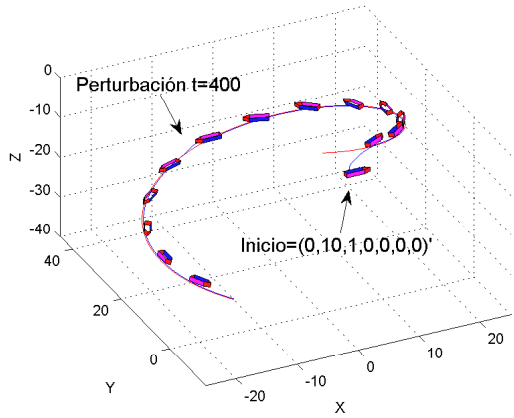


Figura 4: Seguimiento de trayectorias con el control MDI-A

Así, tenemos los siguientes operadores

$$J_a(0) = \bar{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2l_1} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2l_1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que los pares de carga de las hélices y el desplazamiento  $l_3 \neq 0$  del tercer impulsor inducen momentos al sistema, no contemplados en el diseño del control, alrededor de los tres ejes cartesianos no inerciales. Se aclara que no se incluye ningún lazo interno de control para los impulsores.

Debido a que el control de desplazamiento frontal se realiza a nivel de la velocidad, las ganancias para esta coordenada son forzadas de manera que el modo deslizante inducido en esta dirección no contemple el error de posición frontal  $\Delta x$ . Esto se puede lograr definiendo  $K_\alpha$  como diagonal y anulando el término correspondiente en esta coordenada.

La trayectoria propuesta es una helicoidal, mostrada en la Fig. 4 (línea roja) con un radio de  $A = 20.0 \text{ m}$  y frecuencia angular de  $k = 0.008 \text{ rad/s}$ , con una velocidad de inmersión de  $\dot{z} = 0.05 \text{ m/s}$  y con condiciones iniciales de posición y velocidad dadas por  $\eta_0 = (0, 10, 1, 0, 0, 0)^T$  y  $\nu_0 = \mathbf{0}^T$  (con unidades de metros para las distancias, radianes para las orientaciones,  $\text{m/s}$  para velocidad lineal y  $\text{rad/s}$  para la velocidad angular).

$$\begin{aligned} x_{csg}(t) &= A \sin(kt) \text{ m} & \phi_{csg}(t) &= 0 \text{ rad} \\ y_{csg}(t) &= A(1 - \cos(kt)) \text{ m} & \theta_{csg}(t) &= 0 \text{ rad} \\ z_{csg}(t) &= 0.05t \text{ m} & \psi_{csg}(t) &= kt \text{ rad} \end{aligned}$$

Para la generación de las trayectorias deseables admisibles se consideran las leyes de guiado (LG), dependientes del estado  $\mathbf{x} = (\eta^T, \nu^T)^T$ , de Breivik and Fossen (2009):

$$u_d(\mathbf{x}, t) = u_{csg}(t) \cos \chi_r \cos \nu_r + \gamma s \quad (33a)$$

$$z_d(t) = z_{csg}(t) \quad (33b)$$

$$\psi_d(\mathbf{x}, t) = \arctan \left( \frac{f_n(\chi_r, \nu_r, \chi_p, \nu_p)}{f_d(\chi_r, \nu_r, \chi_p, \nu_p)} \right) \quad (33c)$$

con

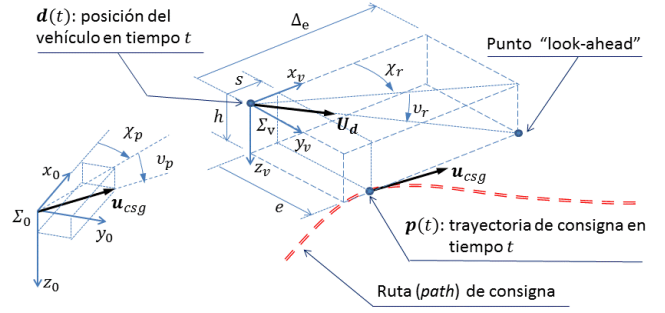


Figura 5: Variables del error del esquema look-ahead

$$\begin{aligned} f_n &= \sin \chi_p \cos \chi_r \cos \nu_p \cos \nu_r + \cos \chi_p \sin \chi_r \cos \nu_r - \sin \nu_p \sin \nu_r \sin \chi_p \\ f_d &= \cos \chi_p \cos \chi_r \cos \nu_p \cos \nu_r - \sin \chi_p \sin \chi_r \cos \nu_r - \sin \nu_p \sin \nu_r \cos \chi_p \end{aligned}$$

y con parámetros de guiado (ver Fig. 5) dados por  $\Delta_e = 2$  (largos del vehículo),  $\gamma = 0.1$  y dónde las variables  $\chi_r$  y  $\nu_r$  son los ángulos de los cosenos directores (horizontal y vertical respectivamente) del vector de “dirección”  $\mathbf{U}_d$ , definido en el esquema look-ahead, las variables  $\chi_p$  y  $\nu_p$  son los ángulos de los cosenos directores del vector de la velocidad de consigna  $\mathbf{u}_{csg} = (\dot{x}_{csg}, \dot{y}_{csg}, \dot{z}_{csg})^T$ , tangente a la trayectoria de consigna en el punto  $\mathbf{p}(t)$ , expresado en coordenadas del referencial inercial y  $s$  es el error de desplazamiento frontal. La velocidad frontal de consigna es  $u_{csg} = \|\mathbf{u}_{csg}\|$ ; y para este ejemplo, constante.

Finalmente, las simulaciones se realizaron durante un lapso de 700 segundos donde se introduce una perturbación “emparejada” (matched) con la entrada de control, en  $t = 400 \text{ s}$ , consistente en un escalón de 10 volts aplicado al impulsor  $F_2$ , modelando una falla en la electrónica del manejador de dicho impulsor.

Para fines comparativos se considera la ley de control PID

$$\mathbf{u} = \bar{B}^{-1} \left( -\hat{K}_d \dot{\delta} - \hat{K}_p \delta - \hat{K}_i \int_{t_0}^{t_f} \delta dt \right), \quad \text{con } \delta = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta z \\ \Delta \psi \end{pmatrix}$$

A fin de hacer equivalentes las condiciones del ctrl con los esquemas MDI (sin medición de aceleración) el control de velocidad frontal se implementa como PI, anulando la ganancia  $\hat{K}_d$  en esta coordenada.

La sintonización de las ganancias para estos tres esquemas se realizó de forma heurística con el fin de no depender del conocimiento de los parámetros del modelo, priorizando el tiem-

Tabla 1: Ganancias de los Controladores

Control	PID			$s_f, s_{df}, s_{rf}$		
	$\hat{K}_d$	$\hat{K}_p$	$\hat{K}_i$	$K_\alpha$	$K_\gamma$	$\kappa$
Velocidad $u$	0	20	1	0	0.1	1
Profundidad $z$	10	30	1	2	0.1	1
Acimut $\psi$	1	10	0.1	1	0.1	1

$$\text{MDI-A : } \quad K_d = \text{diag}(20, 20, 20);$$

$$\text{MDI-C : } \quad \bar{K}_d = \text{diag}(10, 20, 10)$$

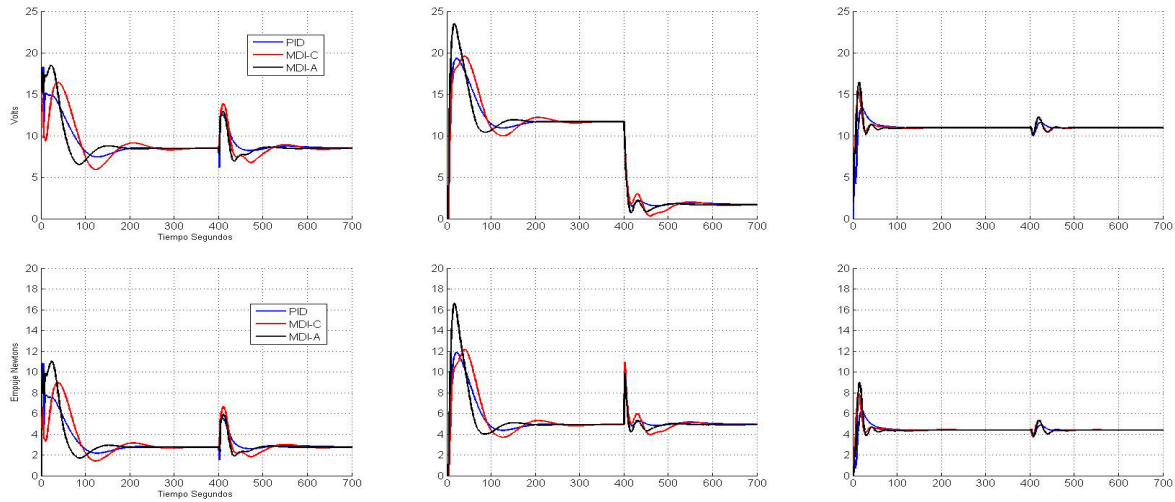


Figura 6: Señales de control (arriba) y fuerzas en los impulsores (abajo). De izquierda a derecha: impulsores 1,2 y 3 respectivamente. Control MDI-A en negro, MDI-C en rojo y PID en azul.

po de establecimiento y limitadas por la aparición de inestabilidad, debida al efecto de ventaneo o *wind-up*, producido por el efecto integral de las leyes de control y los límites de saturación de los actuadores (ver tabla 1). En particular, la sintonización de las ganancias para el esquema MDI-C sigue el procedimiento de Parra-Vega et al. (2003). Las ganancias del esquema MDI-A se obtuvieron del esquema anterior, tomando únicamente los valores diagonales de la transformación resultante de (32):  $K_d = \bar{B}^{-T} \bar{K}_d \bar{B}^{-1}$ , y modificándolas para mejorar los tiempos de establecimiento sin excitar el ventaneo. Las ganancias del esquema PID se establecieron a partir de las ganancias usadas en el esquema MDI-C, por las relaciones  $\hat{K}_d = \bar{K}_d$ ,  $\hat{K}_p = K_\alpha \bar{K}_d$  y  $\hat{K}_i = K_\gamma \bar{K}_d$ , Parra-Vega et al. (2003); y ajustándolas de forma heurística también para encontrar el mejor compromiso entre el tiempo de establecimiento sin excitar el ventaneo y las ganancias de los controles de orientación y velocidad frontal, que comparten los mismos actuadores.

#### 4.1. Resultados

En la Fig. 4 se aprecia el seguimiento (en azul) de la trayectoria admisible de consigna (en rojo) cuando el AUV es controlado con la ley MDI-A. Debido a que los controles MDI-C y PID obtienen resultados similares a esta escala, es necesario verificar las curvas de desempeño por coordenadas, Figs. 7 y 8, para apreciar las diferencias. En las figuras 6, 7 y 8 se presentan, de manera comparativa, los resultados de las tres leyes de control, con la ley de control MDI-A en negro, la ley de control MDI-C en rojo y la ley PID en azul.

En la Fig. 6 se muestran las señales de control para cada uno de los impulsores y el empuje suministrado por cada uno de ellos. El primer transitorio se produce debido a las condiciones iniciales del error correspondiente, observándose que el impulsor 1 tiene menor magnitud que el impulsor 2, debido a que este último queda del lado exterior de la trayectoria helicoidal, por lo que necesita mayor empuje para generar el momento

necesario para girar. El segundo transitorio en  $t = 400s$  se debe a la “falla” del manejador del impulsor 2, lo que produce un aumento instantáneo de la fuerza debido a un “cambio del modelo” visto por el impulsor. Nótese que las 3 leyes de control compensan adecuadamente el “error en el modelo”, al reducir correctamente la señal de control.

En la Fig. 7 (arriba) se muestran las trayectorias deseadas LG. En los casos de velocidad frontal y orientación acimutal, a diferencia de la profundidad, las trayectorias deseadas son diferentes para cada caso debido a su dependencia del estado. Nótese que siendo la misma función cinemática para los tres controles dinámicos mostrados, éstas convergen con tiempos diferentes, ya que el esquema LG ajusta la velocidad de la trayectoria deseada para corregir el error de posición. A partir de estas trayectorias deseadas se generan los errores de las coordenadas físicas actuadas, mostradas en la Fig. 7 (abajo). En el caso de la velocidad frontal, cuya consigna es constante, el PI muestra un mejor desempeño que el MDI-C, tanto en valor máximo como en tiempo de establecimiento del error de *velocidad*. Con respecto al MDI-A, la diferencia no es tan clara, ya que si bien se obtiene un menor valor máximo de error, el tiempo de establecimiento es mayor. En los casos de error de profundidad y orientación, donde el problema de seguimiento (trayectoria temporal) está definido a nivel de posición, ambos esquemas MDI muestran un notorio mejor desempeño que el PID, tanto en el error máximo como en el tiempo de establecimiento. Este último muy superior con los esquemas MDI. La misma situación se aprecia al presentarse la perturbación en el impulsor. Entre los esquemas MDI-A y MDI-C, se puede apreciar, en el error de velocidad frontal, que el esquema MDI-A mantiene tanto un menor error como un menor tiempo de desempeño.

Finalmente la Fig. 8 muestra la evolución de las coordenadas no actuadas donde los esquemas MDI son claramente superiores al PID en el desplazamiento lateral, aunque menos claros en las coordenadas de alabeo y cabeceo. Note que estas dos

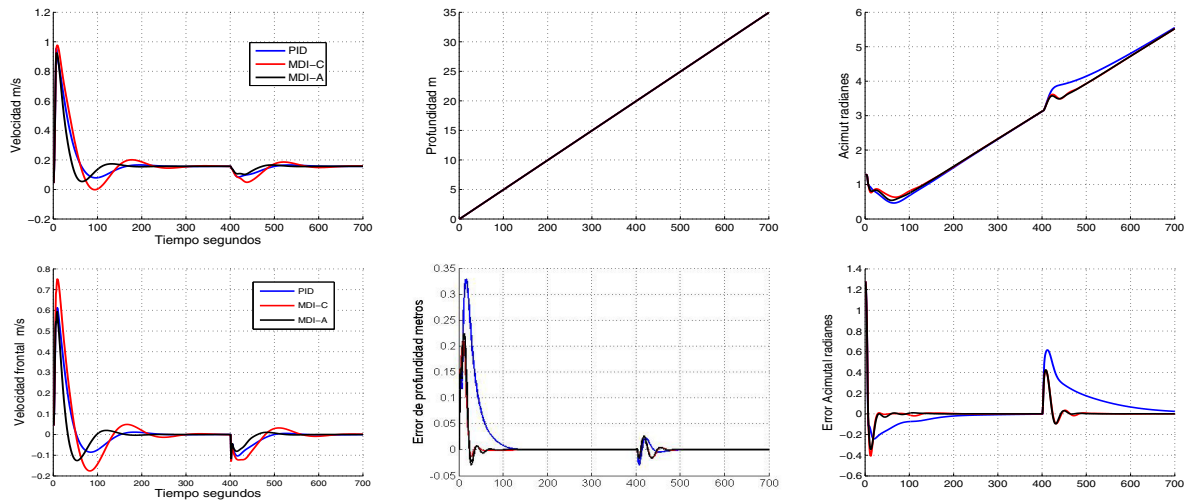


Figura 7: Trayectorias deseadas admisibles de coordenadas físicas actuadas (arriba) y evolución del error  $\delta$  correspondiente (abajo). De izquierda a derecha: Velocidad frontal de referencia  $u_d$  m/s, Profundidad deseada  $z_d$  m y acimut deseado  $\psi_d$  rad. Control MDI-A en negro, MDI-C en rojo y PID en azul.

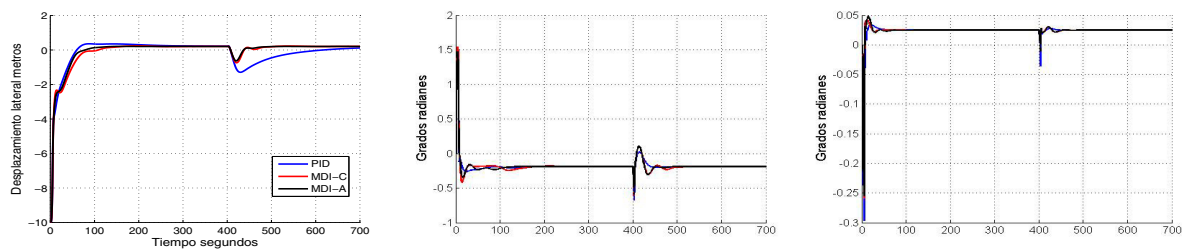


Figura 8: Evolución de las coordenadas no actuadas. De izquierda a derecha: Error de desplazamiento lateral  $e(t)$  m, Alabeo  $\phi(t)$  rad y Cabeceo  $\theta(t)$  rad. Control MDI-A en negro, MDI-C en rojo y PID en azul.

coordenadas no actuadas no convergen al origen como lo hacen las coordenadas actuadas o la señal de error del desplazamiento lateral (no actuado), aunque sí se mantienen acotadas dentro de una región de atracción como lo establece el lema 3.2. La convergencia de la coordenada no actuada del desplazamiento lateral se debe a las leyes de guiado que utilizan esta coordenada en la retroalimentación cinemática. De esta manera, la dinámica interna del sistema con ambos lazos de control sólo contiene las coordenadas de orientación no actuadas.

En el caso de estudio se puede apreciar que el esquema MDI-A tiene, en general, un mejor desempeño que el MDI-C ya que con ganancias más pequeñas converge más rápido y genera errores más pequeños. El comparativo contra un clásico control PID muestra que los tres esquemas compensan incertidumbre paramétrica (*offset* del tercer impulsor) y del modelo (dinámica no lineal no afín y efectos de carga de los impulsores), aún sujeto a perturbaciones emparejadas al control, mostrando robustez ante estas variaciones. Además aunque para coordenadas controladas a nivel de velocidad no hay una ventaja evidente en los transitorios, sí la hay por parte de los esquemas MDI para las coordenadas controladas a nivel de posición u orientación.

## 5. Conclusiones

Un análisis del modelo cuasilagrangiano de vehículos submarinos permite expresar el modelo del submarino subactuado como el acoplamiento dinámico de dos subsistemas uno de los cuales es no actuado y otro completamente actuado. La pasividad independiente de estos subsistemas garantiza que si las coordenadas actuadas permanezcan acotadas, también lo harán las coordenadas no actuadas, de lo cual se deduce que un control suficientemente robusto ante incertidumbres o perturbaciones paramétricas o de modelo puede estabilizar el sistema actuado.

Un control de modos deslizantes integrales en el subsistema actuado estabiliza exponencialmente dicho subsistema, cuya validez es local debido a las condiciones de existencia del modo deslizante, y bajo la condición que la dinámica interna sea estable. Si bien esta propuesta no estabiliza asintóticamente las coordenadas no actuadas; como lo hacen otras leyes de control más complejas como el control anidado (o *backstepping*) -el cual estabiliza todas las coordenadas a un costo computacional y de implementación muy alto al requerir conocimiento exacto del modelo (y su regresor), de algunas de sus derivadas parciales y las derivadas del estado- el enfoque propuesto no ignora

la dinámica interna, inducida por la ley de control sobre el subsistema no actuado y no depende del conocimiento del modelo. El análisis establece que ésta es globalmente estable alrededor del punto de equilibrio de estabilidad rotacional si se cumple una condición de disipatividad, que es fácil de encontrar en la práctica debido al entorno acuático, naturalmente disipativo, y se cuenta con flotabilidad neutra, ya sea natural del sistema o inducida como coordinada actuada.

Por otro lado, es posible reescribir la ley de control con trayectorias y coordenadas físicas actuadas, al definir variedades escalares con las mismas propiedades que la variedad vectorial original, con la ventaja de eliminar la dependencia de un operador cinemático difícil de definir, resultando dos esquemas donde el control multivariable acoplado se pondera de manera diferente sobre el espacio de los actuadores o sobre el espacio de las coordenadas físicas actuadas.

El uso de leyes de guiado cinemático que cumplen con la condición de generar trayectorias suaves permite la reducción de la dimensión de las trayectorias de consigna cinemáticas a la dimensión de las señales de control y adicionalmente, al usar parte del estado no actuado en la retroalimentación cinemática, reduce la dinámica interna del sistema.

Así, consideramos que este enfoque constituye una alternativa práctica, ya que garantiza seguimiento exponencial de la dinámica actuada con un bajo costo computacional; por lo que estas propuestas MDI-A y MDI-C adquieren relevancia dado su simplicidad (ver Fig. 3), en comparación con la complejidad de la planta a controlar.

## English Summary

### Model Free Control Based on Integral Sliding Modes for Underactuated Underwater Robots.

#### Abstract

A combination of a model-free control law at the dynamic level and a guidance law at the kinematic level is proposed for the tracking of an underactuated underwater robot vehicle. The closed-loop system gives rise to chattering-free integral sliding modes for local exponential tracking of actuated coordinates, while ensuring a global stable internal dynamics under certain conditions easy to meet in practice. The design methodology relies on a careful manipulation of the quasi-lagrangian model of the underwater vehicle with a control law that is independent of dynamic model and its parameters assuming full access to the state. Comparative simulations versus a PID show the feasibility and robust behavior under parametric and model uncertainties.

**Keywords:** Model-Free Control, Integral Sliding Mode Control, Underactuated Systems, Underwater Vehicles.

#### Agradecimientos

Proyecto realizado parcialmente con financiamiento de los contratos #133346, #174597 y #21969 de CONACyT de México.

## Referencias

- Antoneilli, G., 2006. Underwater Robots. Springer.
- Blanke, M., Lindegaard, K. P., Fossen, T. I., 2000. Dynamic model for thrust generation of marine propellers. presented at the Proc. IFAC Conf. Manoeuvring of Marine Craft. Aalborg Denmark, Aug. 2000, pp. 23-25.
- Breivik, M., Fossen, T., 2009. Guidance laws for autonomous underwater vehicles. In: Intelligent Underwater Vehicles. I-Tech Education and Publishing (A. V. Inzartsev, Ed.), Vienna.
- Brogliato, B., Lozano, R., Maschke, B., Egeland, O., 2007. Dissipative systems analysis and control: theory and applications, 2nd Edition.
- Byrnes, C., Isidori, A., October 1991. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control 36 (10).
- Chin, C., Lau, M., Low, E., Set, G., 2006. Software for modelling and simulation of a remotely-operated vehicle. Int. J. Simul. Model 5 (3), 114–125.
- Chun Nan, Tong Ge, 2012. Model-free high order sliding controller for underwater vehicle with transient process. Advanced Materials Research 591-593.
- Fossen, T., 2011. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control. John Wiley and Sons LTD, Institut for teknisk kybernetikk NTNU.
- Healey, A., Leonard, D., July 1993. Multivariable sliding mode control for autonomous diving and steering of unmanned underwater vehicles. IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol. 18, No. 3, July 18 (3).
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I., Kokotovich, P., 1995. Nonlinear and Adaptive Control Design. John Wiley and Sons.
- Leonard, N., 1997. Stability of a bottom-heavy underwater vehicle. Automatica 33 (3), 331–346.
- Meirovich, L., 2003. Methods of Analytical Dynamics. Dover Publications, New York.
- Olfati-Saber, R., February 2000. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with applications to robotics and aerospace vehicles. Ph.D. thesis, M.I.T., Massachusetts.
- Olgún-Díaz, E., Arechavaleta, G., Jarquin, G., Parra-Vega, V., December 2013. A passivity-based model-free force-motion control of underwater vehicle-manipulator systems. IEEE Transactions on Robotics 29 (6), 1469–1484.
- Olgún-Díaz, E., Parra-Vega, V., 2007. On the force/posture control of a constrained submarine robot. In: 4th International Conference on Informatics in Control, Robotics and Automation, Conference Proceedings.
- Parra-Vega, V., Arimoto, S., Li, Y.-H., Hirzinger, G., Akella, P., December 2003. Dynamic sliding pid control for tracking of robot manipulators. IEEE Transactions on Robotic and Automation 19 (6), 967–976.
- Perrier, M., Canudas de Wit, C., 1996. Experimental comparison of pid vs. pid plus nonlinear controller for subsea robots. In: Autonomous Robots. pp. 195–212.
- Raygosa-Barahona, R., Parra-Vega, V., Olgún-Díaz, E., Muñoz-Ubando, A., October 2011. A model-free backstepping with integral sliding mode control for underactuated rovs. In: Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 8th International Conference on. pp. 1–7.
- Sagatun, S., Fossen, T., 1991. Lagrangian formulation of underwater vehicles dynamics. In: Proceedings on International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, IEEE. Norway.
- Smallwood, D. A., Whitcomb, L. L., 2001. Preliminary experiments in the adaptive identification of dynamically positioned underwater robotic vehicles. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. pp. 1803–1810.
- Smallwood, D. A., Whitcomb, L. L., 2004. Model-based dynamic positioning of underwater robotic vehicles: Theory and experiment. IEEE Journal of Oceanic Engineering 29, 1.
- Spong, M., 1994. Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. In: Intelligent Robots and Systems '94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS '94. Vol. 1. pp. 314–321 vol.1.
- Tedrake, R., March 2010. Underactuated Robotics. MIT Press.
- García-Valdovinos, L.G., Salgado, T., Torres, H., 2009. Model-free high order sliding mode control for rov: Station-keeping approach. In: Proceedings of the MTS/IEEE Oceans, pp. 1–7.
- Whitcomb, L., Stephen, M., 2013. Preliminary experiments in fully actuated model based control with six degree-of-freedom coupled dynamic plant models for underwater vehicles. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- Yoerger, D., Slotine, J., 1991. Adaptive sliding control of an experimental underwater vehicle. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation.