



## Análisis de estabilidad de controladores borrosos tipo Mamdani mediante el cálculo del exponente de Lyapunov

Leonardo-Alonso Martínez Rivera, Omar López-Ortega\*, Omar-Arturo Domínguez Ramírez

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Área Académica de Computación y Electrónica  
Carretera Pachuca-Tulancingo, Km 4.5, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México

### Resumen

Determinar la estabilidad de los controladores, ya sea mediante simulaciones o mediante técnicas analíticas, es vital en su diseño e implantación. El método analítico de estabilidad en el sentido de Lyapunov requiere encontrar una función candidata, como criterio suficiente pero no necesario para tal fin. Esta función candidata es elusiva para los controladores borrosos. Se propone, como posible solución a este problema, cuantificar la estabilidad de los controladores borrosos mediante el exponente de Lyapunov (EL) calculado numéricamente. Las series de tiempo de las cuales se calculan los exponentes de Lyapunov son obtenidas de la salida de diversos controladores borrosos tipo Mamdani en lazo cerrado con la dinámica de la planta no lineal estabilizada en una región de operación admisible. Los experimentos fueron llevados al cabo mediante la implantación del método numérico en la plataforma MATLAB, integrándolo con datos provenientes de la simulación de diversos controladores borrosos. La planta a controlar es el sistema carro-péndulo invertido modelado con la formulación Euler - Lagrange. En cada experimento se obtuvo la serie de tiempo correspondiente a la señal de control y se calculó el exponente de Lyapunov. Aunque se observan variaciones en magnitud, el exponente calculado resulta negativo en todos los casos. Esto indica que los controladores difusos tipo Mamdani empleados son sistemas disipativos. Como trabajo futuro se esboza el empleo del EL en control adaptable. *Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.*

**Palabras Clave:** Estabilidad, Exponente de Lyapunov, Control Borroso, Bases de Reglas Mamdani, Series de Tiempo

### 1. Introducción

Determinar la estabilidad de los controladores, ya sea mediante simulaciones o mediante técnicas analíticas, es vital en su diseño e implantación. Si un controlador llegara a perder la estabilidad, (debido a las condiciones propias de la dinámica de la planta y/o incertidumbres del entorno) resultaría riesgoso para los sub-sistemas involucrados. En el campo del control no lineal el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov es una técnica ampliamente favorecida para determinar la estabilidad de los controladores. Debido a que los controladores borrosos son un caso particular de los controladores no-lineales, es posible analizar su estabilidad empleando conceptos de dicha teoría, tal como se argumenta en (Al-Hadithi et al., 2007).

De acuerdo con (Haykin and Veen, 2003) (pp. 708) el método directo de Lyapunov es una generalización del concepto de

energía asociado con un sistema mecánico: un sistema mecánico es estable si su energía es una función decreciente del tiempo obligando, de este modo, a un equilibrio natural o inducido a través de una ley de control. En el método directo (o analítico) se necesita formular una función escalar similar a la energía, denominada función candidata de Lyapunov, y corroborar que ésta disminuya con el tiempo. La generalidad del método directo de Lyapunov lo hace aplicable a todo tipo de sistemas retro-alimentados no lineales. Sin embargo, la existencia de la función de Lyapunov es suficiente pero no necesaria para comprobar la estabilidad de los controladores.

La función candidata de Lyapunov es elusiva, en la mayoría de los casos, para los controladores borrosos. Debido a ello, se propone en este artículo cuantificar la estabilidad de los controladores borrosos mediante el cálculo del exponente de Lyapunov (EL). El concepto del exponente de Lyapunov es una generalización del análisis de estabilidad lineal en presencia de perturbaciones ya no mediante soluciones en el estado estacionario sino con una perspectiva dependiente del tiempo. El exponente de Lyapunov ha sido usado para estudiar sistemas dinámicos

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [leonardo\\_654\\_2@hotmail.com](mailto:leonardo_654_2@hotmail.com)  
(Leonardo-Alonso Martínez Rivera), [lopezo@uaeh.edu.mx](mailto:lopezo@uaeh.edu.mx) (Omar López-Ortega), [omar@uaeh.edu.mx](mailto:omar@uaeh.edu.mx) (Omar-Arturo Domínguez Ramírez)

no lineales y es, probablemente, la métrica más aceptada para detectar caos, estimar las dimensiones de atractores, y calcular la entropía de un sistema (Dieci and Van Vleck, 2005).

La definición del exponente característico de Lyapunov ( $\lambda$ ) es:

$$\lambda = CE(f(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|f(t)\|. \quad (1)$$

Para obtener el exponente característico de Lyapunov es necesario definir la dinámica no lineal o la ecuación de estados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ \dot{x} &= A(t)x \\ x_{t+1} &= A(t)x_t \end{aligned} \quad (2)$$

Donde  $f(x)$  es una función vectorial y  $\dot{x} = A(t)x$  es un sistema lineal no autónomo. Se asume, además, que la función  $A(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  está acotada y la constituyen elementos no lineales. Ver (M. and L. M., 2005) para más detalles. Las definiciones anteriores permiten calcular el exponente de Lyapunov si se conoce la función que representa al sistema. Por ejemplo, aplicándolas al mapeo logístico  $x = xr(1-x)$ , se obtiene  $\dot{x} = f(x) = r - 2xr$ . De este modo es posible calcular el exponente de Lyapunov para dicho sistema:

$$\lambda = CE(f(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|r - 2xr\| \quad (3)$$

De modo general, para calcular el exponente de Lyapunov es necesario representar a un sistema dinámico continuo en un espacio de fases  $n$ -dimensional con el fin de observar la evolución de largo plazo de una hiper-esfera infinitesimal a partir de sus condiciones iniciales. En su evolución, la hiper-esfera se convierte en un hiper-elipsoide debido a la naturaleza deformante del flujo. Es decir, los exponentes de Lyapunov están relacionados con la naturaleza expansiva o contractiva del sistema dinámico en el espacio de fases.

El exponente de Lyapunov mide la divergencia o convergencia exponencial promedio de las iteraciones de la derivada alrededor de la órbita de  $x$ . El signo del exponente de Lyapunov indica la propiedad de estabilidad del sistema dinámico. Si el signo de todos los exponentes de Lyapunov (espectro de Lyapunov) son negativos, entonces las trayectorias desde todas las direcciones en el espacio de fases convergen a un punto de equilibrio. En este caso el sistema es exponencialmente estable alrededor de un punto de equilibrio y el atractor del sistema es un punto fijo. El punto de equilibrio es en realidad una esfera de radio  $r \rightarrow 0$  con centro en el punto de equilibrio. De lo anterior se deduce que cualquier sistema dinámico continuo dependiente del tiempo que no tenga un punto fijo en el espacio de fases tendrá más de un exponente de Lyapunov igual a cero. Sin embargo, para que el sistema sea disipativo la suma de todos los exponentes de Lyapunov debe ser negativa. Si la trayectoria del sistema dinámico en espacio de fases forma un lazo cerrado, el sistema ejecuta un movimiento periódico y representa un ciclo límite estable. Si el mayor exponente de Lyapunov es cero

el sistema es neutralmente estable y presenta la estabilidad de Lyapunov. Si un exponente de Lyapunov es cero mientras que los demás son negativos, entonces todas las trayectorias en el espacio de fases convergen excepto una de ellas (Yang and Wu, 2010).

Un atractor es el conjunto al que el sistema evoluciona después de un tiempo largo. Las órbitas que inician desde cualquier punto de este conjunto convergen de modo arbitrario a un punto dado que pertenece al conjunto. En el atractor, las trayectorias que le sean suficientemente próximas han de permanecer próximas incluso si son ligeramente perturbadas.

El exponente de Lyapunov  $\lambda$  puede ser calculado mediante el análisis numérico de series de tiempo. Al respecto, el método empleado en esta investigación para determinar el exponente de Lyapunov fue propuesto por Michael T. Rosenstein, James J. Collins y Carlo J. De Luca (Rosenstein et al., 1993):

Se reconstruye el comportamiento del controlador en espacio de fases con el método del retardo a partir de la serie de tiempo. La trayectoria está dada por una matriz  $\mathbf{X}$  donde cada renglón es un vector de espacio de fases tal que

$$\mathbf{X} = ( X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_M )^T, \quad (4)$$

donde  $X_i$  es el estado del sistema en el tiempo  $i$ . Para una serie de tiempo de  $N$  puntos,  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , cada  $X_i$  está dada por

$$X_i = ( x_i \quad x_{i+J} \quad \cdots \quad x_{i+(m-1)J} ), \quad (5)$$

siendo  $J$  el retardo de reconstrucción y  $m$  la dimensión in-crustada. Por lo tanto,  $\mathbf{X}$  es una matriz de  $M \times m$ . Además, las constantes anteriores están relacionadas por

$$M = N - (m - 1)J, \quad (6)$$

en donde el valor de  $m > 2n$  es definido de acuerdo con el teorema de Takens,  $n$  el número de ecuaciones o estados.

Una vez reconstruida la dinámica, se buscan los puntos más cercanos en la trayectoria con ayuda de la norma Euclidiana. El exponente mayor de Lyapunov se calcula como la tasa promedio de separación entre dichos puntos. El exponente mayor de Lyapunov se calcula con

$$d(t) = Ce^{\lambda_j t}, \quad (7)$$

donde  $d(t)$  es el promedio de divergencia en el tiempo  $t$  y  $C$  una constante que normaliza la separación inicial de dos puntos más cercanos, se asume que el  $j$ -ésimo par de puntos cercanos diverge aproximadamente a la misma velocidad dada por el exponente mayor de Lyapunov.

Aplicando el logaritmo natural a la Ecuación 7 se obtiene:

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t), \quad (8)$$

con lo que  $\ln d_j(i)$  es un conjunto aproximadamente igual al valor de  $\lambda_1$  para  $j = 1, 2, \dots, M$ . El exponente mayor de Lyapunov es calculado con la siguiente ecuación:

$$\lambda = \langle \ln d_j(i) \rangle, \quad (9)$$

denotando  $\langle \rangle$  el promedio de todos los valores de  $j$ .

Se recomienda obtener una cantidad superior a las 1000 muestras. En nuestro caso, el cálculo se realizó con  $2000 \approx N \approx 20000$ . Debido a que el número de estados  $n = 1$ ,  $m = 3$ .

Dicho método es empleado para analizar sistemas no lineales mediante la serie de tiempo resultante de su comportamiento operativo. La ventaja radica en que con un número relativamente pequeño de muestras logra reconstruir adecuadamente la serie de tiempo en espacio de fases. Nosotros aprovechamos las ventajas de este enfoque y obtenemos series de tiempo asociadas al comportamiento de controladores borrosos tipo Mamdani en lazo cerrado con la dinámica de la planta no lineal. De las series de tiempo obtenidas se calculan los exponentes de Lyapunov correspondientes con el fin de analizar la estabilidad de cada uno de los controladores que generan dichas series.

Los experimentos fueron realizados mediante la implantación del método numérico en la plataforma MATLAB, integrándolo con datos provenientes de la simulación de diversos controladores borrosos. La planta a controlar es el sistema carro-péndulo invertido, cuyo modelado fue realizado mediante el enfoque Euler - Lagrange (Aracil and Gordillo, 2005). La estructura general del diseño experimental se presenta en la Figura 1.

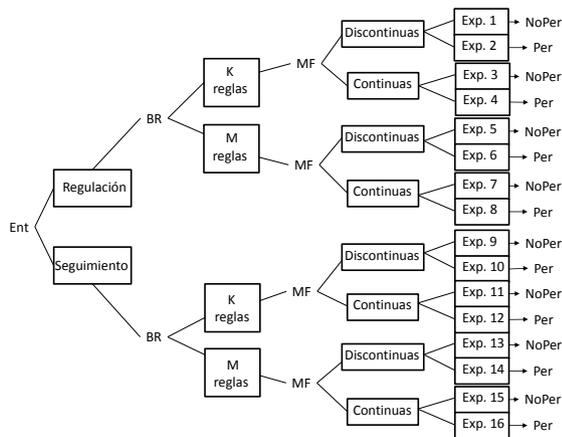


Figura 1: Estructura del diseño experimental

Se tienen dos tipos de tareas. La primera consiste en colocar al péndulo en posición vertical (punto de equilibrio inestable). La segunda tarea es el seguimiento de una trayectoria. Para cada tarea se crearon dos estructuras de controladores borrosos, en las cuales se modifica la cantidad de reglas presentes en cada Base de Reglas (BR). La base de reglas 1 **BR1** consiste en 11 regiones en el error, 5 regiones en la derivada del error y 5 regiones en la salida con un total de 55 reglas. La segunda base de reglas **BR2** consiste en 7 regiones para la señal de error, 5 regiones para la derivada del error y 5 regiones en la salida, totalizando 35 reglas. Los controladores borrosos se implantaron con funciones de pertenencia (MF) continuas (funciones sigmoideas y gaussianas) y discontinuas (funciones triangulares y trapezoidales). Finalmente, la planta fue controlada en presencia de perturbaciones y en ausencia de ellas. En total, se realizaron 16 experimentos para obtener la señal de control en cada una de las situaciones planteadas.

Específicamente, en este artículo se ejemplifican los experimentos 3 y 4: La base de reglas contiene  $K = 55$  reglas, las variables de entrada son la señal de error y la derivada del error, mientras que la variable de salida es la señal de control medida en Newtons. Las tres variables fueron particionadas empleando conjuntos definidos mediante funciones continuas. La tarea consiste en llevar al carro-péndulo invertido a una posición de referencia, en presencia y ausencia de perturbaciones.

El artículo está organizado de la siguiente forma. Los trabajos relacionados se presentan en la Sección 2. Enseguida, se describe el diseño experimental (Sección 3). Los resultados obtenidos se presentan en la Sección 4 junto con la interpretación de los mismos. Las conclusiones y el trabajo futuro se discuten en la Sección 5.

## 2. Trabajos relacionados

Las técnicas más usadas para el análisis de estabilidad de controladores borrosos han sido presentadas en (Al-Hadithi et al., 2007). Dicha referencia incluye un apartado sobre la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Se enfatiza el análisis de estabilidad a través de la función candidata de Lyapunov, sin que se haga mención sobre métodos que empleen al exponente de Lyapunov. De modo similar, se presenta en (Yen and Langari, 1999) un capítulo dedicado al análisis de estabilidad de sistemas borrosos mediante el método analítico de Lyapunov.

Por otro lado, el análisis de estabilidad de controladores empleando  $e^{Lr}$  es un método sobre el cual no abundan reportes de investigación. Sin embargo, se ha reportado el análisis de estabilidad de un sistema mecánico i.e. bípedo, mediante la obtención del exponente de Lyapunov sobre la serie de tiempo de un controlador conmutado de retroalimentación de estados PD (Yang and Wu, 2010). El mayor exponente de Lyapunov reportado tiene un valor de  $-10.33$ , lo cual evidencia la estabilidad del controlador. En dicho trabajo la serie de tiempo es transformada hacia un espacio de fases bidimensional. Por otro lado, empleando el método de Rosenstein et al, el espacio de fase es tridimensional y sí es posible obtener el atractor resultante. Sin embargo, con el método propuesto en Yang and Wu (2010) se obtiene el espectro de los exponentes de Lyapunov, aunque el mayor exponente de Lyapunov determina la estabilidad de un sistema.

También se ha reportado el análisis de estabilidad mediante el exponente de Lyapunov para un sistema mecánico de múltiples cuerpos rígidos (Awrejcewicz and Kudra, 2005). Se enfatiza en dicho reporte las ventajas de emplear métodos numéricos sobre el comportamiento real del sistema ante la dificultad inherente de encontrar la función candidata de Lyapunov para sistemas con elevadas interacciones. En dicho trabajo, las trayectorias en el espacio de fase representan atractores claramente definidos.

Se ha propuesto emplear el exponente de Lyapunov para analizar cuantitativamente la estabilidad de sistemas de control continuos cuando los términos discontinuos (función *signum*) se reemplaza por funciones continuas (tangente hiperbólica) y así evitar efectos indeseables como el *chattering* en la señal de control (Wu et al., 2005). En dicho reporte la ley de control

continua presenta dos términos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  asociados a la función tangente hiperbólica. Para encontrar los valores adecuados de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  éstos se relacionan con el exponente de Lyapunov con el fin de encontrar la región de estabilidad óptima. La plataforma experimental empleada es un manipulador robótico.

En lo que concierne a métodos numéricos para el cálculo del exponente característico de Lyapunov, destaca uno de los trabajos pioneros reportado en (Wolf et al., 1985), el cual toma como entrada series de tiempo. También ha sido reportado un método híbrido para la determinación del exponente de Lyapunov, el cual es descrito en (Beyn and Lust, 2009). Otros métodos para determinar el exponente de Lyapunov están reportados en (Kantz, 1994), (Brown et al., 1991). Se propone un método para calcular los exponentes de Lyapunov dominantes de sistemas dinámicos no-lineales en varias dimensiones aplicando la teoría de la reducción de modelos (Yang et al., 2013). Al ser métodos numéricos, existen errores inherentes, según se analiza tanto en (Dieci and Van Vleck, 2005) como en (Eckmann and Ruelle, 1992). Se reporta en (Maus and Sprott, 2013) el cálculo de los exponentes de Lyapunov mediante redes neuronales. Las ventajas de este enfoque, según los autores del reporte, es que ayudan a eliminar ruido presente en las series de tiempo.

Otra de las aplicaciones del exponente de Lyapunov tiene que ver con la predicción del comportamiento de un sistema medido a través de las series de tiempo, como se reporta en (Zhang et al., 2004). La serie de tiempo se reconstruye en espacio de fases, y el exponente de Lyapunov se emplea como parámetro cuantitativo para predecir un punto aún desconocido en el espacio de fases. El espacio de fases se vuelve a llevar al dominio del tiempo una vez que el valor estimado es calculado. El exponente de Lyapunov se emplea también como medida de predicción en (Lin et al., 1993). De modo similar, en (Brujin et al., 2012) los exponentes de Lyapunov determinan estabilidad local y se correlacionan con la estabilidad global en el caminar de bípedos. Los exponentes de Lyapunov describen las condiciones suficientes y necesarias para determinar la estabilidad asintótica, por lo que se describen en (Verdejo et al., 2012) diversos métodos numéricos para el cálculo de los mismos junto con su aplicación para determinar la estabilidad de sistemas de potencia. La estabilidad transitoria en sistemas de potencia se determina mediante el cálculo de los exponentes de Lyapunov (Wadduwage et al., 2013). Los autores de dicha investigación argumentan que el exponente de Lyapunov sirve para determinar si un sistema de potencia se encuentra la región de estabilidad operacional, mencionando que una de las ventajas es el corto espacio temporal requerido para predecir la estabilidad de la planta. Otro trabajo encontrado en el cual se emplea el exponente de Lyapunov como predictor de estados críticos en una planta es descrito en (Oberst and Lai, 2015). En este contexto, existe un valor que determina el momento en el que los discos de frenado se encuentran en una región próxima a la zona de rompimiento mecánico.

Por lo anterior es posible afirmar que, a pesar de la existencia de métodos para determinar el exponente característico de Lyapunov y, aunque éste sea una medida válida para corroborar la estabilidad de un sistema por medio de la curva  $e^{at}$ , no se ha recurrido frecuentemente a este cálculo para analizar la

estabilidad de los controladores borrosos.

### 3. Control borroso para el carro-péndulo invertido

La dinámica del péndulo ha sido estudiada ampliamente, por ejemplo, se presenta un modelo dinámico en (Ogata, 1987). Sin embargo el modelo del carro-péndulo invertido con el cual interactúa el controlador borroso fue tomado de (Aracil and Gordillo, 2005), en donde se presenta un modelo matemático que no toma en cuenta la fricción articular, a diferencia del modelo dinámico presentado en (Ogata, 1987). El modelado dinámico se describe a continuación.

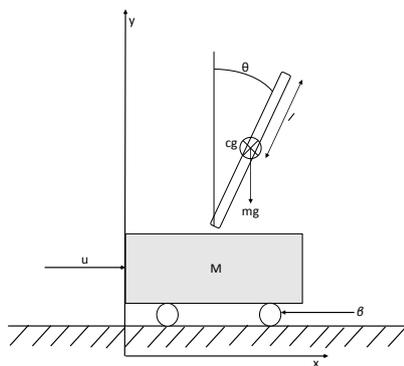


Figura 2: Diagrama del carro-péndulo invertido

Partiendo de la representación esquemática de la Figura 2,  $M$  es la masa del carro,  $m$  la masa de la barra y  $l$  la distancia en el punto medio de la barra que asume la condición de centro de gravedad  $cg$  (coinciden centro de gravedad y centroide), con fricción dinámica  $\beta \dot{x}$ , que para el caso de estudio de considera despreciable. Tomando el centro de gravedad de la barra, podemos medir su desplazamiento en el plano (x-y) como sigue:

$$x_{cg} = x + l \sin(\theta),$$

$$y_{cg} = l \cos(\theta),$$

mediante la formulación Euler-Lagrange:

$$u_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_i} L - \frac{\partial}{\partial \theta_i} L,$$

$$L = \sum_{i=1}^n (K_i - U_i),$$

donde  $K_i$  es la energía cinética,  $U_i$  es la energía potencial,  $\theta_i$  la variable articular y  $u_i$  las entradas al sistema, la velocidad del centro de gravedad es:

$$V_{cg} = \sqrt{\dot{x}_{cg}^2 + \dot{y}_{cg}^2}$$

Al ser  $x$  la traslación actuada y  $\theta$  la rotación subactuada, el Lagrangiano del sistema es:



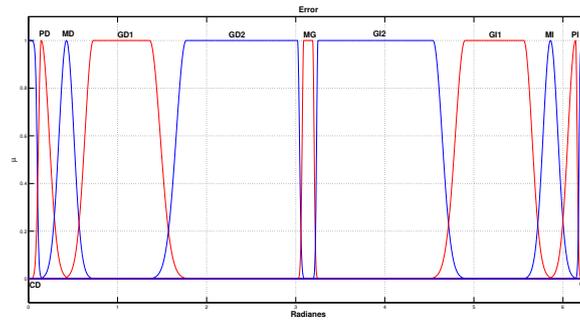


Figura 4: Regiones difusas para la señal de error (Radianes).

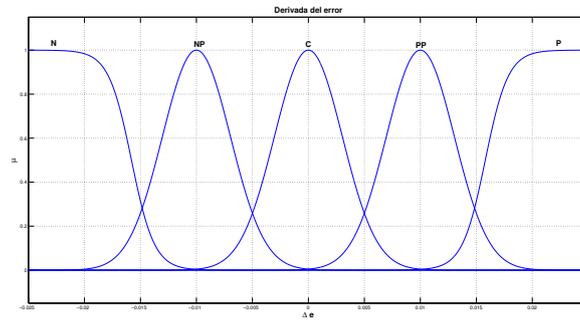


Figura 5: Regiones difusas para la derivada del error (Radianes sobre segundo).

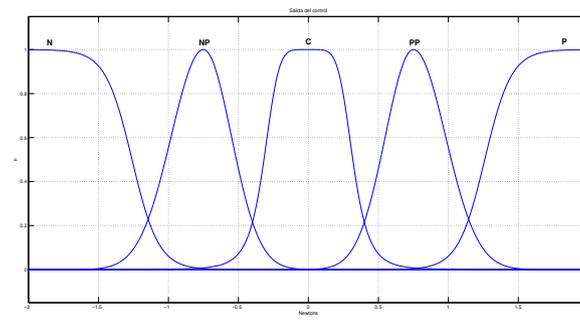


Figura 6: Regiones difusas para la señal de control (Newtons).

	<b>CD</b>	<b>PD</b>	<b>MD</b>	<b>GD1</b>	<b>GD2</b>	<b>MG</b>	<b>GI2</b>	<b>GI1</b>	<b>MI</b>	<b>PI</b>	<b>CI</b>
<b>N</b>	N	N	C	NP	N	N	N	C	NP	N	N
<b>NP</b>	NP	C	PP	NP	N	N	N	C	NP	N	NP
<b>C</b>	C	P	PP	C	C	N	C	C	NP	N	C
<b>PP</b>	PP	P	PP	C	PP	P	P	PP	NP	C	PP
<b>P</b>	P	P	PP	C	P	P	P	PP	C	P	P

Tabla 2: Base de reglas

definidas empleando funciones gaussianas y sigmoideas, en ausencia de perturbaciones. Es decir, se presentan los resultados correspondientes al experimento 3 del diseño experimental.

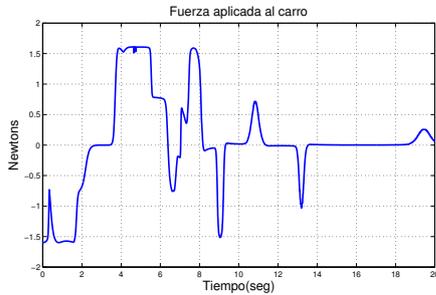


Figura 7: Señal de salida del controlador borroso (Newtons). 55 reglas. Regiones gaussianas y sigmoideas. Planta sin perturbación

La Figura 8 muestra el comportamiento del péndulo invertido regulado con el controlador borroso con regiones gaussianas y sigmoideas, en ausencia de perturbaciones.

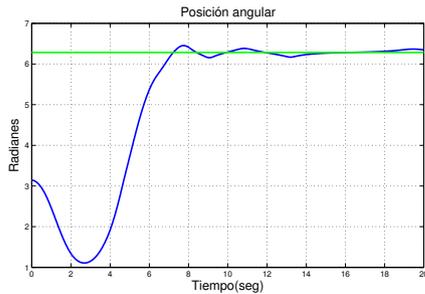


Figura 8: Comportamiento del péndulo invertido regulado con el controlador borroso. 55 reglas. Regiones gaussianas y sigmoideas. Sin perturbación

La Figura 9 muestra a la señal de control en espacio de fases, asociada al controlador borroso en cuestión.

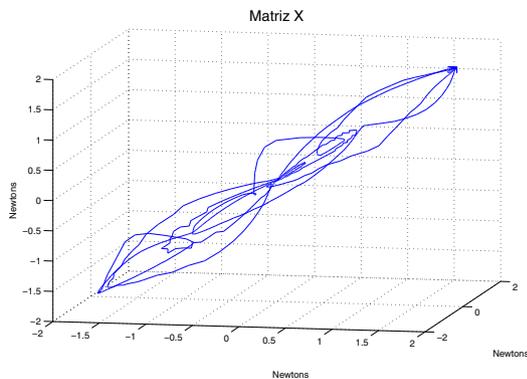


Figura 9: Señal del control borroso en espacio de fases. 55 reglas. Regiones gaussianas y sigmoideas. Planta sin perturbación

La Figura 10 muestra el exponente característico de Lyapunov resultante de aplicar un controlador borroso al carro-péndulo invertido con regiones gaussianas y sigmoideas, en ausencia de perturbación.

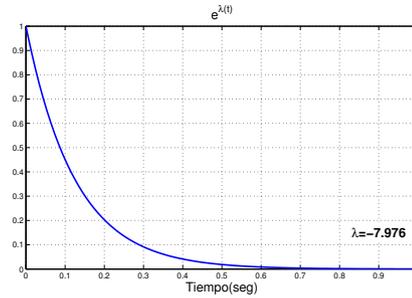


Figura 10: Exponente de Lyapunov del controlador borroso. Regiones gaussianas y sigmoideas. Planta sin perturbación

#### 4.2. Sistema perturbado

En esta sección se presentan los resultados del controlador borroso tipo Mamdani aplicado al sistema carro-péndulo invertido, en tarea de regulación, con 55 reglas, cuyas regiones son definidas empleando funciones gaussianas y sigmoideas, en presencia de perturbaciones. Es decir, se presentan los resultados correspondientes al experimento 4 del diseño experimental.

La perturbación es aplicada como un cambio  $\theta_p(t)$  que modifica la posición del péndulo a través de una señal armónica simple, como se muestra en la Figura 11. De este modo el error se ve afectado no sólo por la dinámica de la planta sino también por la señal de perturbación, la cual se observa en la Figura 12.

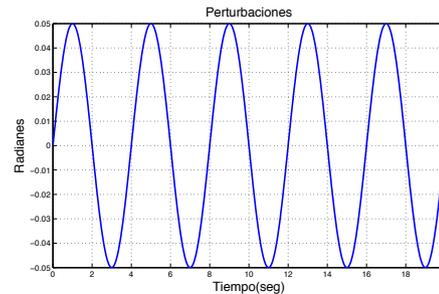


Figura 11: Señal de perturbación

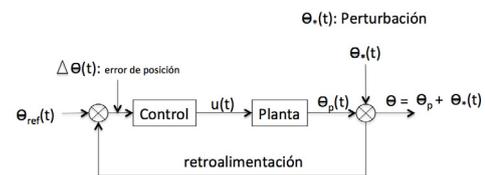


Figura 12: Esquema de perturbación

La Figura 13 muestra la señal del controlador borroso cuando el péndulo invertido está sujeto a perturbaciones.

La Figura 14 muestra el comportamiento del péndulo invertido cuando éste es regulado con el controlador borroso referido. La planta es sometida a perturbaciones.

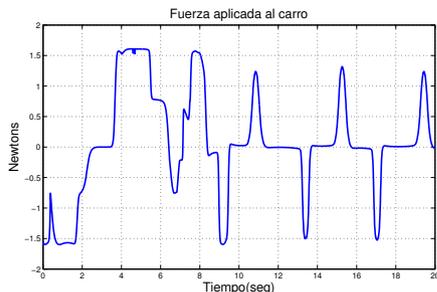


Figura 13: Señal de salida del controlador borroso (Newtons). 55 reglas. Regiones gaussianas y sigmoidales. Dinámica con perturbación

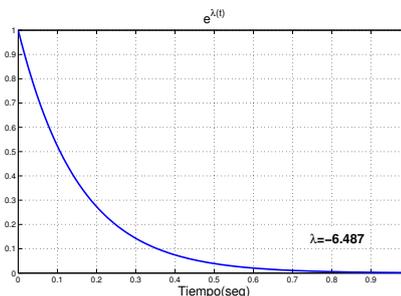


Figura 16: Exponente de Lyapunov del controlador borroso. 55 reglas. Regiones gaussianas y sigmoidales. Con perturbación

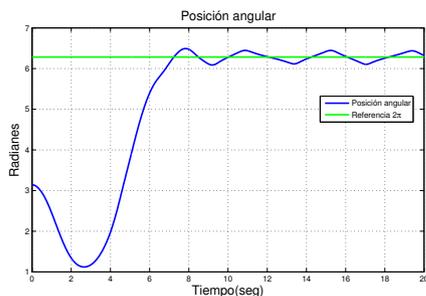


Figura 14: Comportamiento del péndulo invertido regulado con controlador borroso. 55 reglas. Regiones gaussianas y sigmoidales. Planta con perturbación

La Figura 15 muestra la señal del controlador borroso en espacio de fases cuando el péndulo-invertido es sometido a perturbaciones.

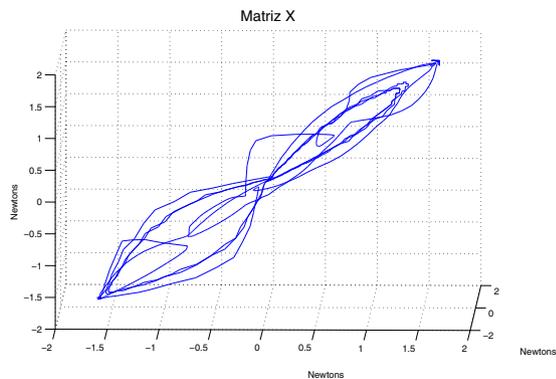


Figura 15: Señal de salida del controlador borroso en espacio de fases. 55 reglas. Regiones gaussianas y sigmoidales. Con perturbación

La Figura 16 muestra  $\lambda$  para el controlador borroso con 55 reglas, definidas mediante regiones gaussianas y sigmoidales, cuando el péndulo invertido está sujeto a perturbaciones.

### 4.3. Exponente de Lyapunov para controlador no lineal

En esta sección se presentan los resultados del controlador con retroalimentación del estado presentado en (Aracil and Gordillo, 2005), en donde se propone un estrategia de control basada en el amortiguamiento y la inyección de energía a un

péndulo invertido. Se presentan los resultados cuando la ley de control realiza tarea de regulación, sin que la planta esté sometida a perturbaciones.

La ley de control no lineal, en lazo cerrado con la dinámica de la Ecuación 13, es definida de la forma siguiente:

$$u = 2\alpha \text{sen}(x_1) + \bar{\varphi}x_2 \cos(x_1) - \varepsilon_2 \text{sat}\left(\frac{\lambda x_3}{\varepsilon_2}\right), \quad (14)$$

con  $\text{sat}(*) = \text{sgn}(*)$ , y  $0 < \varepsilon_2 \ll 1$ ,  $\text{sgn}(*) \approx \tanh(\beta*)$  con  $\beta=50$ . La función de conmutación utilizada en la inyección de energía y que evita la existencia de modos deslizantes, es definida como:

$$\bar{\varphi}(x_1, x_2) \triangleq \begin{cases} K(Hd(x_1, x_2)) - \frac{1}{4a} - \varepsilon & ; \cos(x_1) < \frac{1}{2a} \\ K & ; \cos(x_1) \geq \frac{1}{2a} \end{cases} \quad (15)$$

El Hamiltoniano  $Hd(x_1, x_2) = \cos(x_1) - a\cos(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$  permite calcular la condición de conmutación en función de su magnitud, donde  $\alpha, \lambda, K$  y  $\varepsilon$  corresponden a ganancias de control. La ley de control estabiliza el carro-péndulo con excelente desempeño y permite realizar un estudio comparativo confiable con las técnicas de control borrosas.

La figura 17 representa la señal de control aplicada al sistema carro-péndulo invertido. De dicha señal se obtienen tanto la señal de control en espacio de fases (Figura 19) como el valor del exponente de Lyapunov (Figura 20). La señal de posición del péndulo invertido controlado con el esquema presentado en (Aracil and Gordillo, 2005) se ilustra en la Figura 18.

### 4.4. Análisis de resultados

La Tabla 3 contiene el condensado de resultados para los 16 experimentos llevados al cabo con los controladores borrosos tipo Mamdani, así como la comparación con el controlador presentado en (Aracil and Gordillo, 2005).

Los resultados presentados a lo largo del presente artículo sugieren lo siguiente:

- Los exponentes de Lyapunov obtenidos con los controladores borrosos tipo Mamdani son más negativos que los obtenidos con el controlador presentado por (Aracil and Gordillo, 2005).

Tabla 3: Condensado de resultados

Experimento No.	Descripción	Muestras de la serie de tiempo (N)	$\lambda$
1	Referencia, 55 reglas, funciones discontinuas sin perturbaciones	2001	-8.956
2	Referencia, 55 reglas, funciones discontinuas con perturbaciones	2015	-7.018
3	Referencia, 55 reglas, funciones continuas sin perturbaciones	2004	-7.976
4	Referencia, 55 reglas, funciones continuas con perturbaciones	2005	-6.487
5	Referencia, 35 reglas, funciones discontinuas sin perturbaciones	2004	-7.312
6	Referencia, 35 reglas, funciones discontinuas con perturbaciones	2007	-6.285
7	Referencia, 35 reglas, funciones continuas sin perturbaciones	2004	-6.246
8	Referencia, 35 reglas, funciones continuas con perturbaciones	2005	-5.846
9	Seguimiento, 55 reglas, funciones discontinuas sin perturbaciones	2008	-9.283
10	Seguimiento, 55 reglas, funciones discontinuas con perturbaciones	2001	-7.884
11	Seguimiento, 55 reglas, funciones continuas sin perturbaciones	2001	-7.264
12	Seguimiento, 55 reglas, funciones continuas con perturbaciones	2002	-8.292
13	Seguimiento, 35 reglas, funciones discontinuas sin perturbaciones	2001	-7.926
14	Seguimiento, 35 reglas, funciones discontinuas con perturbaciones	2001	-8.281
15	Seguimiento, 35 reglas, funciones continuas sin perturbaciones	2001	-6.23
16	Seguimiento, 35 reglas, funciones continuas con perturbaciones	2001	-6.612
17	Referencia, Ley de control presentada en (Aracil and Gordillo, 2005), sin perturbaciones	2003	-4.222
18	Referencia, Ley de control presentada en (Aracil and Gordillo, 2005), con perturbaciones	2003	-4.325

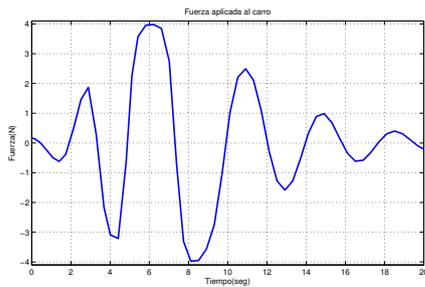


Figura 17: Señal de control a la salida del controlador no lineal. Tarea de regulación. Sin perturbaciones.

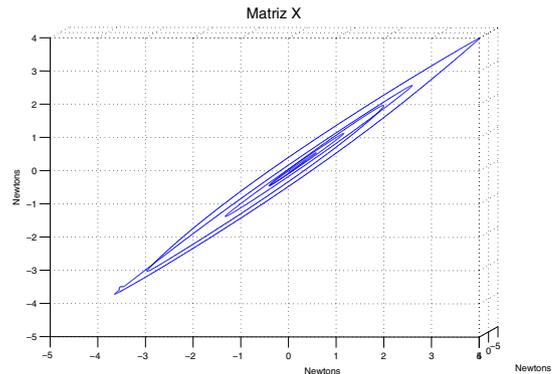


Figura 19: Señal de control en espacio de fases del controlador no lineal. Tarea de regulación. Sin perturbaciones.

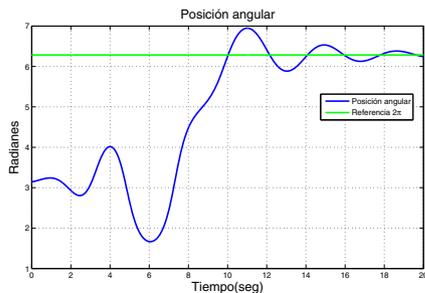


Figura 18: Señal de posición del péndulo invertido bajo control no lineal. Tarea de regulación. Sin perturbaciones.

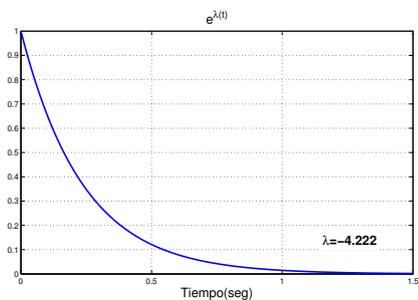


Figura 20: Exponente de Lyapunov asociado a la señal de control obtenida del controlador no lineal en tarea de regulación. Sin perturbaciones.

- En el caso de los controladores borrosos tipo Mamdani, las trayectorias en el espacio de fases convergen a un punto de atracción (Figuras 9 y 15). En el espacio de fases, la señal del controlador borroso tipo Mamdani es atraída hacia un punto por el que pasa la curva cerrada, formando una órbita periódica estable. Además, el exponente de Lyapunov es negativo. Ambas condiciones evidencian la existencia de estabilidad exponencial.
- La señal de perturbación aplicada a la planta provoca que la señal de control borroso tarde más tiempo en estabilizarse, como puede apreciarse en las Figuras 10 y 16.
- Es posible apreciar, en las Figuras 10 y 16, la condición de estabilidad resultado de la convergencia en el equilibrio inestable a pesar de la presencia de perturbaciones inducidas. La robustez observada en las Figuras 7 y 13 se evidencia en la presencia del exponente de Lyapunov negativo cuyo valor es muy cercano al obtenido con el mismo controlador en ausencia de perturbaciones.
- Las trayectorias en el espacio de fases del controlador no lineal presentado en (Aracil and Gordillo, 2005) forman un atractor ordinario con estructura sencilla (Figura 19). Este hecho, junto con el valor negativo del Exponente de Lyapunov, indica que dicho controlador es disipativo y puede inferirse que exhibe estabilidad asintótica.
- El radio máximo desde el punto de atracción hacia el punto más extremo del atractor, para las Figuras 9 y 15, es menor que el radio máximo del atractor resultante al aplicar la ley de control no lineal observado en la Figura 19.
- En presencia de perturbaciones, el controlador borroso tipo Mamdani evidencia que todas las trayectorias en el espacio de fase son atraídas hacia un punto fijo (Figura 15). Esto indica que dicho controlador presenta estabilidad exponencial.
- De los experimentos 1 al 8 se aprecia que la mayor cantidad de reglas en los controladores borrosos induce un exponente de Lyapunov más negativo para la tarea de regulación.
- De los experimentos 1 al 8, al comparar controladores con el mismo número de reglas, se aprecia que las bases de reglas con funciones discontinuas presentan un exponente de Lyapunov más negativo que aquellas conteniendo funciones continuas.
- De los experimentos 9 al 16 se aprecia que la mayor cantidad de reglas en los controladores borrosos induce un exponente de Lyapunov más negativo para la tarea de seguimiento.

La teoría formal asociada a los puntos anteriores puede estudiarse en (Yen-chi'ien, 1986). El teorema de Könings (pp 25 - 26) contempla el concepto de estabilidad alrededor de un punto de equilibrio: Sea  $\bar{s} = f(s)$  una transformación continua que

contiene un segmento  $l$ , y sea  $s^*$  un punto fijo de esta transformación. Si existe una vecindad de  $s^*$  pequeña (sobre  $l$ ) tal que, para cada punto  $s$  dentro de  $l$ , la secuencia de puntos  $s_1 = f(s)$ ,  $s_2 = f(s_1)$ ,  $\dots$ ,  $s_{n+1} = f(s_n)$  siempre converge hacia  $s^*$ , entonces  $s^*$  es estable en esta transformación.

## 5. Conclusiones y trabajo futuro

El análisis de los controladores borrosos tipo Mamdani analizados en el presente artículo permite verificar su estabilidad en el punto de equilibrio inducido a pesar de los cambios súbitos en la dinámica de la planta. Las condiciones de una planta no lineal como el carro-péndulo invertido son constituidas por la dinámica inercial, Coriolis, gravedad y fricción articular. A ello hay que adicionarle la presencia de no linealidades y sus efectos. Con el tipo de controladores borrosos propuestos en este artículo, estas afectaciones disminuyen. El exponente de Lyapunov calculado a partir de la señal de control es un reflejo de las ventajas planteadas por los controladores borrosos. Para aplicarse en un sistema de control adaptable en donde se tomen muestras en línea, es necesario determinar el número de muestras óptimos con el cual el Exponente de Lyapunov calculado sea una métrica fiable del rendimiento del sistema. Este tipo de cálculos requiere un esquema de control en tiempo real. Ambos puntos son retos científicos y tecnológicos para el avance de sistemas de control fiables.

Como se resume en la sección de Trabajos Relacionados, es posible emplear el exponente de Lyapunov como medida cuantitativa para la predicción de valores futuros en un sistema. Esta idea es prometedora para sistemas con retardo, en donde técnicas de predicción son empleadas para compensar los retrasos, tal como se presenta en (Santos et al., 2012). También es posible emplear el exponente de Lyapunov como una medida auto-referenciada de la estabilidad de una planta tal que se retro-alimente para la adaptabilidad del control. Es esta línea de investigación encontramos un trabajo reportado por (Burkholder and Litster, 2015), donde emplean al exponente de Lyapunov como diagnóstico en tiempo real del estado del controlador, logrando detectar la presencia de perturbaciones y haciendo el cambio a un nuevo esquema de control 100 mili segundos antes de ocurrir una situación catastrófica. Esto se logra cuando el exponente de Lyapunov cruza un umbral crítico determinado experimentalmente.

Esta experiencia puede ser aplicada a las plantas que presentamos en este artículo, de modo que el exponente de Lyapunov sirva como medida de alerta para realizar la conmutación a un controlador más robusto. Los resultados que presentamos en la Tabla 3 sugieren que un controlador borroso con 35 reglas es estable, pero que su medida de estabilidad se deteriora en presencia de perturbaciones. Este cambio hacia un exponente de Lyapunov más positivo se deberá detectar para realizar la conmutación hacia un controlador que contenga una mayor cantidad de reglas. De este modo, el coste computacional asociado a un controlador con más reglas sólo se justifica ante la presencia de perturbaciones con el objetivo de sacar a la planta de una zona crítica.

Otra línea de experimentación a explorar en un futuro es la determinación de estabilidad es controladores borrosos tipo Takagi - Sugeno y su comparación con los controladores borrosos tipo Mamdani.

### English Summary

#### Stability analysis of fuzzy controllers through the computation of the Lyapunov Exponent

##### Abstract

In order to design and implement any type of controller, their stability analysis is pivotal. At this regard, Lyapunov's analytical method consists in finding a candidate function as a sufficient but not necessary condition to validate the stability of the controller. In the case of fuzzy controllers such a candidate function is not always found, leading to an uncertainty about their stability. To overcome this problem, we propose to employ the Lyapunov Exponent in order to determine whether fuzzy controllers are stable. The Lyapunov exponent is calculated through a numerical method on the time series obtained experimentally by having the fuzzy controller in closed loop with the plant dynamics. In this paper, the plant is the inverted pendulum, which is a benchmark plant to test complex control laws. Sixteen experiments were carried by modifying the rule base structure of Mamdani fuzzy controllers, which were also tested under normal and disturbed conditions. In all the cases, the Lyapunov Exponent is negative, indicating that the analyzed Mamdani controllers are indeed dissipative systems. Future applications on adaptive control are presented because the Lyapunov serves as a quantitative metric to determine controllers' performance.

##### Keywords:

Stability Analysis, Lyapunov Exponent, Fuzzy Controllers, Mamdani Rule Base.

### Referencias

- Al-Hadithi, B. M., Matía, F., Jiménez, A., Abril 2007. Análisis de estabilidad de sistemas borrosos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 4 (2), 7 – 25.
- Aracil, J., Gordillo, F., Abril 2005. El péndulo invertido: Un desafío para el control no lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 2 (2), 8 – 19.
- Awrejcewicz, J., Kudra, G., 2005. Stability analysis and lyapunov exponents of a multi-body mechanical system with rigid unilateral constraints. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications* 63, 909 – 918.
- Beyn, W.-J., Lust, A., 2009. A hybrid method for computing lyapunov exponents. *Numerische Mathematik* 113, 357 – 375.
- Brown, R., Bryant, P., Abardabel, H.-D., 1991. Computing the lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series. *Physical Reviews A* 43, 2787 – 2806.
- Brujin, S. M., Bregmn, D. j., Meijer, O. G., Beek, P. J., van Dien, J. H., 2012. Maximum lyapunov exponents as predictors of global gait stability: A modelling approach. *Medical Engineering and Physics* 34, 428 – 436.
- Burkholder, Michael, B., Litster, S., 2015. Stabilization of power electrolyte fuel cell voltage with reduced-order lyapunov exponent feedback and corrective pressure perturbations. *Journal of Power Sources* 275, 408 – 418.
- Dieci, L., Van Vleck, E. S., 2005. On the error in computing lyapunov exponents by qr methods. *Numerische Mathematik* 101, 619 – 642.
- Eckmann, J. P., Ruelle, D., May 1992. Fundamental limitations for estimating dimensions and lyapunov exponents in dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 56 (2-3), 185–187.
- Haykin, S., Veen, B. V., 2003. *Señales y Sistemas*. Limusa Wiley, México.
- Kantz, H., 1994. A robust method to estimate the maximal lyapunov exponent of a time series. *Physical Letters A* 185 (1), 77–87.
- Lin, Z.-S., Liu, J., Hua, X.-H., Zhang, F.-Q., 1993. Lyapunov exponent model of long term forecast. *Chaos, Solitons and Fractals* 3 (4), 431 – 437.
- M., A., L. M., S., 2005. Local lyapunov exponents and characteristics of fixed periodic points embedded within a chaotic attractor. *Journal of Zhejiang University Science* 6A, 296 – 304.
- Maus, A., Sprott, J., 2013. Evaluating lyapunov exponent spectra with neural networks. *chaos, Solitons and Fractals* 51, 13 – 21.
- Oberst, S., Lai, J., 2015. A statistical approach to estimate the lyapunov spectrum in disc break squeal. *Journal of Sound and Vibration* 334, 120 – 135.
- Ogata, K., 1987. *Dinámica de Sistemas*. Prentice Hall, México.
- Rosenstein, M. T., Collins, J. J., De Luca, C. J., May 1993. A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 65 (1-2), 117–134.
- Santos, O., Rodríguez-Guerrero, L., López-Ortega, O., 2012. Experimental results of a control time delay system using optimal control. *Optimal control. Applications and Methods* 33, 100 – 113.
- Verdejo, H., Vargas, L., Kliemann, W., 2012. Stability of linear stochastic systems via lyapunov exponents and applications to power systems. *Applied Mathematics and Computation* 18, 11021 – 11032.
- Wadduwage, D. P., Qiong Wu, C., Annakage, U. D., 2013. Power system transient stability analysis via the concept of lyapunov exponents. *Electric Power System research* 104, 183 – 192.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., Vastano, J. A., July 1985. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16 (3), 285–317.
- Wu, Q., Sepehri, N., Sekhvat, P., Peles, S., 2005. On design of continuous lyapunov's feedback control. *Journal of the Franklin Institute* 342 (6), 702 – 723.
- Yang, C., Wu, Q., Jan 2010. On stability analysis via lyapunov exponents calculated from a time series using nonlinear mapping. *Nonlinear Dynamics* 59 (1-2), 239–257.
- Yang, C. J., Zhu, W. D., Ren, G. X., 2013. Approximate and efficient calculation of dominant lyapunov exponents of high-dimensional nonlinear dynamic systems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 18, 3271 – 3277.
- Yen, J., Langari, R., 1999. *Fuzzy Logic: Intelligence, control and information*. Pearson, USA.
- Yen-chi'ien, 1986. *Theory of Limit Cycles*. American Mathematical Society, USA.
- Zhang, J., Lam, K., Yan, W., Gao, H., Li, Y., 2004. Time series prediction using lyapunov exponents in embedding phase space. *Computers and Electrical Engineering* 30 (1), 1 – 15.