

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica
y de Materiales



TESIS DOCTORAL

Modelado analítico-numérico y caracterización
experimental de silenciadores de escape híbridos

Presentada por:
Dirigida por:

Manuel José Martínez Bordes
Dr. Francisco David Denia Guzmán
Dr. Francisco Javier Fuenmayor Fernández

Valencia, abril de 2010

Esta Tesis Doctoral ha sido posible gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación y la cofinanciación de FEDER (proyecto DPI2007-62635).



TESIS DOCTORAL

Modelado analítico-numérico y caracterización
experimental de silenciadores de escape híbridos

que para optar al grado de doctor Ingeniero Industrial

presenta

Manuel José Martínez Bordes

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la Universidad
Politécnica de Valencia

Directores: Dr. Francisco David Denia Guzmán
Dr. Francisco Javier Fuenmayor Fernández

Valencia, abril de 2010

TESIS DOCTORAL

Modelado analítico-numérico y caracterización experimental de silenciadores de escape híbridos

Presentada por: Manuel José Martínez Bordes
Dirigida por: Dr. Francisco David Denia Guzmán
Dr. Francisco Javier Fuenmayor Fernández

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. Antonio José Torregrosa Huguet
VOCALES: Dra. D^a. Juana María Mayo Núñez
Dr. D. Jorge Luis Parrondo Gayo
Dr. D. Jordi Romeu Garbí
SECRETARIO: Dr. D. José Albelda Vitoria

Valencia, abril de 2010

Resumen

Esta Tesis se enfoca en el desarrollo e implementación de métodos eficaces de diseño y modelado acústico de silenciadores híbridos de motores de combustión interna, a través de herramientas de tipo analítico y numérico. Debido a la creciente preocupación de la sociedad en la degradación medioambiental, traducida en legislaciones medioambientales cada vez más severas, en la cual el ruido proveniente de los vehículos se ha convertido en una fuente importante de contaminación, es necesario el desarrollo de técnicas de diseño y modelado de silenciadores rápidas, fiables y de bajo coste computacional que permitan obtener resultados precisos.

La Tesis está organizada de manera que se comienza realizando una exposición de los fundamentos de métodos tradicionales de análisis acústico, como los modelos de onda plana. Se resalta la importancia de los materiales absorbentes como agentes atenuadores de ruido y se definen sus propiedades y características más importantes. Seguidamente se procede con la descripción y desarrollo de modelos mediante el empleo de técnicas numéricas como el método de Elementos Finitos. A continuación se plantean modelos a través de la utilización de técnicas modales multidimensionales que servirán como herramientas de diseño. Por último, se realizan ensayos de caracterización acústica de materiales absorbentes y se validan experimentalmente los modelos teóricos estudiados.

Los modelos de onda plana y la representación matricial asociada han sido los tradicionalmente utilizados. Sin embargo, la fiabilidad de sus resultados se limita a rangos de frecuencia reducidos y no tienen en cuenta los efectos tridimensionales de la propagación. Se evidencia la necesidad de la búsqueda de otras metodologías de modelado que tengan en cuenta dichos efectos tridimensionales, que a la vez sean aplicadas a un extenso rango de frecuencias y a una gama de geometrías de mayor complejidad.

Las metodologías multidimensionales pueden clasificarse en dos grandes grupos: las basadas en métodos numéricos convencionales, tales como el método de los Elementos de Contorno y el de Elementos Finitos y las apoyadas en técnicas modales analíticas. De los métodos numéricos el más utilizado hoy en día es el método de Elementos Finitos, que al ser enfocado hacia el campo de la Acústica, resulta ser muy versátil al permitir analizar geometrías con secciones transversales arbitrarias teniendo en cuenta la incorporación de los efectos convectivos debidos a la existencia de flujo medio. El método de los Elementos de Contorno es también adecuado pero presenta desventajas a la hora de abordar

problemas con efectos convectivos, materiales absorbentes y superficies perforadas. El método de Elementos Finitos se aplica a la resolución de la ecuación de ondas convectiva, presentando en esta Tesis la formulación en presión. Es interesante observar el comportamiento acústico de los silenciadores al ser modificadas sus principales características geométricas. También resulta relevante comparar los resultados proporcionados por el método de Elementos Finitos y los aportados por los modelos de onda plana. Esta técnica numérica (al igual que el método de los Elementos de Contorno) posee un elevado coste computacional el cual aumenta a medida que crece el número de grados de libertad del modelo pudiendo ocasionar en algunas fases de análisis la inviabilidad de su aplicación.

Debido a que en el modelado de silenciadores el tiempo de procesamiento de datos es un factor decisivo, los esfuerzos se deben centrar en reducir el coste computacional proporcionando a su vez una predicción del comportamiento acústico suficientemente precisa. Para ello, una posible estrategia consiste en el desarrollo de técnicas modales analíticas multidimensionales que puedan ser aplicadas a las configuraciones geométricas más interesantes comercialmente. Esto constituye el aspecto medular de la Tesis y se fundamenta en el planteamiento analítico modal de la ecuación de ondas asociada a conductos de geometría rectangular, circular y anular que puedan considerar la presencia de material absorbente. De entre las técnicas modales multidimensionales existentes se hace énfasis en el método de Integración Directa y la técnica de Ajuste Modal. Ambas técnicas proporcionan resultados similares al método de Elementos Finitos, con un coste computacional menor, siendo la técnica de Ajuste Modal la que presenta una convergencia más rápida.

La realización de medidas experimentales complementa el análisis teórico presentado a lo largo de la Tesis. Por ello el planteamiento de un sistema de medida, que simule las características reales, es fundamental en la obtención de los datos necesarios para su estudio y comparación de las predicciones teóricas. De la amplia bibliografía existente se evalúan algunos de los métodos experimentales más utilizados que permiten estimar las propiedades acústicas de silenciadores y componentes que serán integrantes de los sistemas acústicos. En el caso específico de los silenciadores híbridos investigados en esta Tesis, se determinan los parámetros más relevantes del material absorbente que forman parte de ellos tales como la impedancia característica \tilde{Z} y el número de onda \tilde{k} .

Palabras clave: acústica, ecuación de ondas, Elementos Finitos, medida experimental, modelos analíticos, modelos numéricos, técnica de Ajuste Modal, silenciadores, silenciadores híbridos.

Abstract

This Thesis focuses on the development and implementation of effective methods for the acoustic modelling and design of hybrid mufflers for internal combustion engines, through analytical and numerical tools. Due to the increasing concern of society in environmental degradation, increasingly severe environmental laws have been dictated, in which the noise from vehicles has become a major source of pollution. It is then customary to develop rapid, reliable and low cost computer modelling and design techniques of mufflers that can produce accurate results.

The Thesis is organized so that it begins by making a presentation of the principles of traditional methods of acoustic analysis, as plane wave models. It highlights the importance of absorbent materials as noise attenuation elements and their properties and most important features are defined. It then proceeds with the description and development of models by using numerical techniques such as the Finite Element method. Models are then developed by the use of multidimensional modal techniques, which will finally serve as design tools. Finally, tests are performed for the acoustic characterization of absorbent materials and the theoretical models studied are experimentally validated.

The plane wave models and the associated matrix representation have been traditionally used. The reliability of their results, however, is limited to the low frequency range and the three-dimensional effects of propagation are not taken into account. The Thesis highlights the need for finding alternative modelling methodologies that account for these three-dimensional effects, which are in turn applied to a wide range of frequencies and a variety of more complex geometries.

Multidimensional methodologies can be classified into two groups: those based on conventional numerical methods such as the Boundary Element method and the Finite Element method and those supported by analytical techniques. The most widely numerical method used is the Finite Element method. In the field of Acoustics, this turns out to be very versatile to allow for the consideration of geometries with arbitrary cross section, while taking into account the convective effects due to the existence of mean flow. The Boundary Element method is also suitable but has disadvantages when dealing with convective effects, absorbent materials and perforated surfaces. The Finite Element method is applied to the resolution of the convective wave equation, presented in this Thesis with a pressure formulation. It is interesting to observe the acoustic performance of

mufflers while their main geometric characteristics are modified. It is also pertinent to compare the results provided by the Finite Element method and those achieved by the plane wave models. This former numerical technique (as well as the Boundary Element method) has a high computational cost which increases as the number of degrees of freedom of the model grows. This may cause problems regarding its suitability during certain analysis stages.

Due to the fact that the data processing time is a decisive factor in the acoustic modelling of mufflers, efforts should be focused on reducing the computational cost, providing a sufficiently precise prediction of the acoustic behaviour. For this, a possible strategy is the development of multidimensional analytical modal techniques that can be applied to commercially interesting configurations. This is the core of the Thesis, which is based on an analytical modal approach of the wave equation associated with rectangular, circular and annular ducts, including the presence of absorbent material. Among the existing multidimensional modal techniques, the Thesis emphasizes the Direct Integration method and Mode Matching technique. Both techniques provide similar results to the Finite Element method with a lower computational cost, the Mode Matching technique providing the faster convergence.

The performance of experimental measurements complements the theoretical analysis presented throughout the Thesis. Thus the approach of a measurement system, which reproduces the actual characteristics, is essential in obtaining the necessary data for examination and comparison of theoretical predictions. From the extensive literature, assessment is carried out of some of the most widely extended experimental methods used for estimating the acoustic properties of mufflers and other components of the acoustic systems. In the specific case of the hybrid mufflers investigated in this Thesis, the most relevant parameters of the absorbent material, such as the characteristic impedance \tilde{Z} , and the wavenumber \tilde{k} , are determined.

Keywords: acoustics, wave equation, Finite Elements, experimental measurement, analytical models, numerical models, Mode Matching technique, mufflers, hybrid mufflers.

Resum

Esta Tesi s'enfoca en el desenvolupament i implementació de mètodes eficaços de disseny i modelatge acústic de silenciadors híbrids de motors de combustió interna, mitjançant eines de tipus analític i numèric. Degut a la creixent preocupació de la societat en la degradació mediambiental, traduïda en legislacions mediambientals cada vegada més severes, en la qual el soroll provinent dels vehicles s'ha convertit en una font important de contaminació, és necessari el desenvolupament de tècniques de disseny i modelatge de silenciadors ràpides, fiables i de baix cost computacional que permeten obtenir resultats precisos.

La Tesi està organitzada de manera que es comença realitzant una exposició dels fonaments de mètodes tradicionals d'anàlisi acústica, com els models d'ona plana. Es ressalta la importància dels materials absorbents com a agents atenuadors de soroll i es defineixen les seues propietats i característiques més importants. Seguidament es procedeix amb la descripció i desenvolupament de models mitjançant tècniques numèriques com el mètode d'Elements Finitos. A continuació es plantegen models a través de la utilització de tècniques modals multidimensionals que serviran com a eines de disseny. Finalment, es realitzen assajos de caracterització acústica de materials absorbents i es validen experimentalment els models teòrics estudiats.

Els models d'ona plana i la representació matricial associada han sigut els tradicionalment utilitzats. No obstant, la fiabilitat dels seus resultats es limita a intervals de freqüència reduïts i no consideren els efectes tridimensionals de la propagació. S'evidencia la necessitat de la recerca d'altres metodologies de modelatge que consideren els efectes tridimensionals, que al mateix temps siguin aplicades a un extens interval de freqüències i a una varietat de geometries de major complexitat.

Les metodologies multidimensionals poden classificar-se en dos grans grups: les basades en mètodes numèrics convencionals, tals com el mètode dels Elements de Contorn i el d'Elements Finitos i les recolzades en tècniques modals analítiques. Dels mètodes numèrics el més utilitzat hui en dia és el mètode d'Elements Finitos, que al ser enfocat cap al camp de l'Acústica, resulta ser molt versàtil al permetre analitzar geometries amb seccions transversals arbitràries i amb la incorporació dels efectes convectius deguts a l'existència de flux mig. El mètode dels Elements de Contorn és també adequat però presenta desavantatges a l'hora d'abordar problemes amb efectes convectius, materials absorbents i superfícies perforades. El mètode d'Elements Finitos s'aplica a la resolució de

l'equació d'ones convectiva, presentant en esta Tesi la formulació en pressió. És interessant observar el comportament acústic dels silenciadors al ser modificades les seues principals característiques geomètriques. També resulta rellevant comparar els resultats proporcionats pel mètode d'Elements Finitos i els aportats pels models d'ona plana. Esta tècnica numèrica (igual que el mètode dels Elements de Contorn) posseïx un elevat cost computacional el qual augmenta a mesura que creix el nombre de graus de llibertat del model, el que pot limitar en algunes fases d'anàlisi la seua aplicabilitat.

Pel fet que en el modelatge de silenciadors el temps de processament de dades és un factor decisiu, els esforços s'han de centrar a reduir el cost computacional proporcionant al mateix temps una predicció del comportament acústic prou precisa. Per a això, una possible estratègia consistix en el desenvolupament de tècniques modals analítiques multidimensionals que puguen ser aplicades a les configuracions geomètriques més interessants comercialment. Açò constituïx l'aspecte medul·lar de la Tesi i es fonamenta en el plantejament analític modal de l'equació d'ones associada a conductes de geometria rectangular, circular i anular que puguen considerar la presència de material absorbent. D'entre les tècniques modals multidimensionals existents es fa èmfasi en el mètode d'Integració Directa i la tècnica d'Ajust Modal. Ambdós tècniques proporcionen resultats semblants al mètode d'Elements Finitos, amb un cost computacional menor, i és la tècnica d'Ajust Modal la que presenta una convergència més ràpida.

La realització de mesures experimentals complementa l'anàlisi teòrica presentada al llarg de la Tesi. Per això el plantejament d'un sistema de mesura, que simule les característiques reals, és fonamental en l'obtenció de les dades necessàries per al seu estudi i comparació de les prediccions teòriques. De l'àmplia bibliografia existent s'avaluen alguns dels mètodes experimentals més utilitzats que permeten estimar les propietats acústiques de silenciadors i components que seran integrants dels sistemes acústics. En el cas específic dels silenciadors híbrids investigats en esta Tesi, es determinen els paràmetres més rellevants del material absorbent que formen part d'ells tals com la impedància característica \tilde{Z} i el nombre d'ona \tilde{k} .

Paraules clau: acústica, equació d'ones, Elements Finitos, mesura experimental, models analítics, models numèrics, tècnica d'Ajust Modal, silenciadors, silenciadors híbrids.

A mis padres, hermana y esposa

Agradecimientos

A toda mi familia.

A mis directores Francisco Denia y Javier Fuenmayor, pues sin su apoyo y confianza no se habría llevado a cabo este proyecto.

A José Albelda por sus sabios consejos y asesoría durante el desarrollo del mismo.

A Andrés, Mabel, Fares, Vicente, Mohamed, Antoine, Paloma, Fede, Nidal, los mejores compañeros de trabajo y verdaderos amigos.

A todos mis compañeros y amigos del departamento, nombrarlos aquí sería casi imposible, pues son todos.

Índice General

Capítulo 1. Motivación y antecedentes	7
1.1. Introducción	9
1.2. Objetivos	9
1.3. Estructura de la Tesis	12
Capítulo 2. Fundamentos acústicos	15
2.1. Introducción	17
2.2. Ecuación de ondas.....	17
2.2.1. Medio móvil.....	23
2.2.2. Medio en reposo.....	26
2.3. Acústica unidimensional de conductos	27
2.3.1. Medio en reposo.....	27
2.3.2. Medio móvil.....	30
2.4. Modelos de onda plana. Representación matricial	33
2.4.1. Generalidades.....	33
2.4.2. Conductos.....	35
2.4.3. Expansiones y contracciones.....	40
2.4.4. Conductos extendidos	42
2.5. Placas y tubos perforados.....	44
2.5.1. Impedancia acústica	45
2.5.2. Resultados disponibles	
2.6. Materiales absorbentes	51
2.6.1. Introducción	52
2.6.2. Caracterización del material.....	57
2.6.3. Consideraciones adicionales	58
2.6.3.1. Efecto en la impedancia de conductos perforados	58
2.6.3.2. Medio móvil.....	61
2.7. Silenciadores	63
2.7.1. Silenciadores sin disipación	64
2.7.2. Silenciadores con disipación	
2.8. Atenuación sonora en silenciadores	66
2.8.1. Consideraciones energéticas	67
2.8.2. Índices de atenuación sonora en silenciadores	68
2.9. Aplicaciones.....	69
2.9.1. Configuraciones sin disipación	70

2.9.1.1. Cámara de expansión simple	70
2.9.1.2. Cámara de expansión con conductos extendidos	72
2.9.1.3. Resonador concéntrico	74
2.9.2. Configuraciones con disipación.....	83
2.9.2.1. Silenciador concéntrico con material absorbente	84
2.9.2.2. Silenciador con material absorbente y conductos extendidos .	89
2.9.2.3. Silenciador con material absorbente y resonadores laterales...	93
2.9.2.4. Silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales	95
2.10. Limitaciones	97
2.11. Conclusiones	100
Capítulo 3. Modelado acústico de silenciadores mediante Elementos Finitos	103
3.1. Introducción.....	105
3.2. Aplicación del MEF a la ecuación de ondas convectiva.....	107
3.2.1. Problema acústico.....	108
3.2.2. Campo de velocidades	111
3.2.3. Vector de carga.....	112
3.2.3.1. Vector de carga	112
3.2.3.2. Imposición de la condición de impedancia	113
3.2.4. Obtención de la atenuación.....	114
3.3. Subdominios acoplados. Placas y tubos perforados	115
3.3.1. Medio en reposo	115
3.3.2. Medio móvil	118
3.3.2.1. Continuidad de velocidad.....	120
3.3.2.2. Continuidad de desplazamiento.....	121
3.3.2.3. Continuidad de gradiente de presión	123
3.4. Modelado de la propagación en materiales absorbentes.....	124
3.4.1. Medio en reposo	124
3.4.2. Medio móvil	127
3.5. Aplicaciones	130
3.5.1. Configuraciones sin disipación.....	130
3.5.1.1. Cámara de expansión simple	130
3.5.1.2. Cámara de expansión con conductos extendidos	132
3.5.1.3. Resonador concéntrico	133
3.5.2. Silenciadores con disipación.....	134
3.5.2.1. Silenciador concéntrico con material absorbente	135
3.5.2.2. Silenciador con material absorbente y conductos extendidos	137
3.5.2.3. Silenciador con material absorbente y resonadores laterales.	138
3.5.2.4. Silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales	140

3.5.2.5. Silenciador disipativo con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida.....	141
3.5.3. Flujo medio	143
3.5.3.1. Resonador concéntrico sin material absorbente.....	143
3.5.3.2. Resonador concéntrico con material absorbente.....	144
3.6. Conclusiones	145
Capítulo 4. Modelado acústico de silenciadores híbridos mediante técnicas modales multidimensionales.....	147
4.1. Introducción	149
4.2. Acústica tridimensional de conductos sin material absorbente	150
4.2.1. Medio en reposo.....	150
4.2.1.1. Conductos rectangulares	151
4.2.1.2. Conductos circulares.....	157
4.2.1.3. Conductos anulares	163
4.2.2. Medio móvil.....	166
4.3. Acústica tridimensional de conductos con material absorbente	171
4.3.1. Acoplamiento transversal de regiones. Medio en reposo	171
4.3.1.1. Método de la secante.....	177
4.3.1.2. Método de Newton-Raphson	179
4.3.1.3. Comparación de métodos.....	181
4.4. Técnicas modales multidimensionales	184
4.4.1. Antecedentes	184
4.4.2. Métodos de acoplamiento en discontinuidades geométricas	186
4.4.2.1. Cambios de sección	186
4.4.2.2. Conductos extendidos.....	187
4.4.2.3. Placas perforadas	187
4.4.2.4. Sección de entrada y salida.....	188
4.4.2.5. Método de integración en subdominios	189
4.4.2.6. Método con integración ponderada (Ajuste Modal)	194
4.4.2.7. Condiciones de contorno.....	195
4.4.2.8. Obtención del sistema de ecuaciones.....	196
4.4.3. Comparación entre métodos.....	199
4.4.3.1. Silenciador con material absorbente	199
4.4.3.1.1. Método de integración en subdominios (Integración Directa)	
4.4.3.1.2. Método de Ajuste Modal.....	
4.4.3.2. Silenciador con material absorbente y conductos extendidos	203
4.4.3.2.1. Método de Integración por subdominios (Integración Directa)	204
4.4.3.2.2. Método de Ajuste Modal.....	210
4.4.4. Conclusiones	213

4.5. Modelado y estudio detallado de silenciadores híbridos	215
4.5.1. Silenciador con material absorbente	215
4.5.1.1. Variación de la resistividad	215
4.5.1.2. Variación de la porosidad.....	216
4.5.1.3. Variación de las dimensiones externas del silenciador.....	217
4.5.2. Silenciador con material absorbente y conductos extendidos.....	218
4.5.2.1. Efecto de los conductos extendidos.....	218
4.5.2.2. Efecto de la porosidad en las superficies perforadas	224
4.5.2.3. Efecto de la resistividad	224
4.5.2.4. Efecto de las dimensiones del silenciador	227
4.5.3. Silenciador con material absorbente y resonadores laterales.....	228
4.5.3.1. Efecto de la longitud de las cámaras laterales	235
4.5.3.2. Efecto de la variación de la resistividad y la porosidad	238
4.5.3.3. Efecto de la variación de las dimensiones externas.....	238
4.5.4. Silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales.....	241
4.5.4.1. Efecto de la variación de longitud de las cámaras laterales, longitud del anillo externo y cámara disipativa.....	248
4.5.4.2. Efecto de la resistividad	252
4.5.4.3. Efecto de la porosidad	253
4.5.4.4. Efecto de la variación de las dimensiones externas.....	254
4.5.4.5. Efecto de la variación del radio interno.....	256
4.5.5. Silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida	257
4.5.5.1. Efecto de la variación de la longitud de las cámaras laterales.....	265
4.5.5.2. Efecto de la variación de la porosidad.....	267
4.5.5.3. Efecto de la variación de la resistividad	268
4.5.5.4. Efecto de la variación de las áreas anulares	269
4.6. Conclusiones	270
Capítulo 5. Medida experimental	273
5.1. Introducción.....	275
5.2. Caracterización del material absorbente	275
5.2.1. Método de las Dos Cavidades	276
5.2.1.1. Sistema experimental	284
5.2.1.2. Calibración del sistema	286
5.2.2. Método de las Dos Fuentes.....	287
5.2.2.1. Sistema experimental	292
5.2.3. Método de la Matriz de Transferencia	293
5.2.3.1. Cálculo de los coeficientes de transmisión y reflexión	295
5.2.3.2. Cálculo del número de onda complejo, impedancia característica compleja y velocidad acústica compleja	296

5.2.3.3. Sistema experimental	297
5.2.4. Medida de materiales	297
5.2.4.1. Influencia de la densidad	298
5.2.4.2. Influencia del espesor	302
5.2.4.3. Comparación entre métodos	305
5.2.5. Ajustes de curvas de comportamiento.....	306
5.3. Caracterización del silenciador en ausencia de flujo medio.....	312
5.3.1. Introducción	312
5.3.2. Método de la función de transferencia	313
5.3.3. Sistema experimental	317
5.3.4. Calibración del sistema	318
5.3.5. Medida de silenciadores	320
5.3.5.1. Silenciador con conductos extendidos	320
5.3.5.2. Silenciador con resonadores laterales	323
5.3.5.3. Silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida.....	325
5.4. Conclusiones	327
Capítulo 6. Conclusiones y desarrollos futuros	329
6.1. Conclusiones y aportaciones	331
6.2. Desarrollos futuros.....	332
Bibliografía.....	334

Capítulo 1. Motivación y antecedentes

Resumen del capítulo:

En este capítulo se expone la problemática asociada al ruido proveniente del funcionamiento de motores de combustión interna alternativos. Se justifica el desarrollo de herramientas eficaces que permitan el modelado y el cálculo de la atenuación acústica de silenciadores híbridos, con bajo coste computacional y gran precisión, las cuales puedan ser aplicadas a las diferentes fases del diseño. Se describe la estructura empleada para el logro de los objetivos planteados.

1.1. Introducción

Dada la creciente preocupación de la sociedad sobre la degradación medioambiental y específicamente por la contaminación acústica proveniente de los vehículos que utilizan motores de combustión interna alternativos, se hace necesario considerar un aspecto importante que es el diseño de los silenciadores de escape.

De acuerdo a una reciente publicación de la Unión Europea cerca del 40% de la población de los países de la Unión están expuestos a ruidos de tráfico de vehículos del orden de los 55 dB(A) y el 20% a ruidos que superan los 65 dB(A). Más del 30% está expuesto a ruidos que superan los 55 dB(A) durante la noche [117].

Las principales fuentes de contaminación acústica en la sociedad actual provienen de los vehículos a motor que representan aproximadamente el 80% de las existentes, seguido de las industrias con un 10%, los ferrocarriles con 6% y finalmente el 4% restante de los lugares de ocio y talleres de pequeña producción.

El parque automotor genera continuamente un ruido intenso. Además del ruido provocado por el escape de los motores debe tenerse en cuenta el generado por el rozamiento de los neumáticos con la calzada. Adicionalmente, la construcción de autovías y circunvalaciones han multiplicado el efecto del tráfico rodado y el sonido que éste genera.

1.2. Objetivos

Debido a que la mayor proporción de contaminación acústica procede de vehículos a motor resulta fundamental para los productores de automóviles y de componentes, en concreto los fabricantes de silenciadores, reducir los tiempos en las fases de estudio, modelado, diseño, desarrollo de prototipos y ensayos de éstos. También es importante disminuir los costes relacionados con estas operaciones y minimizar la dependencia respecto a la disponibilidad de componentes, proporcionando capacidad de reacción ante eventuales cambios en las especificaciones. Para poder satisfacer estos requerimientos, es imprescindible aplicar técnicas de diseño que permitan el desarrollo de modelos predictivos multidimensionales que posibiliten la obtención de la estimación del comportamiento acústico de silenciadores con suficiente precisión y con

reducidos costes computacionales. También es necesario desarrollar técnicas experimentales, que obviando los ensayos en motor, permitan la realización de medidas rápidas del sistema acústico, en función de sus características geométricas.

Los modelos predictivos multidimensionales pueden ser clasificados en dos grandes grupos: los basados en métodos numéricos tales como los métodos de Elementos Finitos y Elementos de Contorno, y los fundamentados en técnicas analíticas. De las técnicas numéricas cabe resaltar que el método de Elementos Finitos es muy versátil cuando se estudian geometrías con secciones transversales complicadas y se agregan los efectos convectivos debidos al flujo medio. Por este motivo es una técnica ampliamente extendida en el análisis del comportamiento acústico de silenciadores. Por otra parte, el método de Elementos de Contorno tiene ciertas desventajas asociadas a la incorporación de los efectos convectivos, modelado de heterogeneidades, etc. En el campo de las técnicas analíticas se destacan aquellas basadas en expansiones modales multidimensionales. Por ejemplo, el método de Ajuste Modal es una técnica basada en la utilización de los modos de propagación. Consiste en plantear las condiciones de compatibilidad de los campos acústicos de presión y de velocidad axial en cada una de las discontinuidades geométricas y aplicar un método de residuos ponderados con funciones de peso iguales a los propios modos.

Los métodos mixtos, de reciente utilización, conjugan una metodología numérica, como el método de Elementos Finitos, para la obtención de los modos transversales, y el método de Ajuste Modal para determinar la solución axial que satisfaga las condiciones de contorno en las discontinuidades de la sección. Las condiciones de contorno pueden incorporar la presencia de material absorbente y conductos perforados en la sección transversal del silenciador. La técnica de Colocación por Puntos puede ser empleada como alternativa a la técnica de Ajuste Modal cuando la sección transversal del silenciador se complica.

Para el logro de los requerimientos inicialmente descritos y con el fin de permitir la simulación realista del comportamiento acústico del silenciador, se plantea el desarrollo de los siguientes objetivos:

- Implementar modelos analíticos de comportamiento acústico de silenciadores híbridos basados en técnicas de Ajuste Modal. Conformarán la principal aproximación al objetivo planteado. Los modelos permitirán la obtención precisa del campo acústico en el interior del silenciador híbrido, considerando la posible existencia de flujo medio y sus efectos asociados. Los requerimientos computacionales deberán ser menores a los solicitados por las técnicas numéricas aplicadas al caso tridimensional. Tanto los ensayos experimentales como el método de Elementos Finitos

permitirán validar los resultados obtenidos por medio de técnicas de Ajuste Modal.

- Llevar a cabo un estudio paramétrico detallado para analizar el efecto que producen variaciones geométricas tales como presencia de componentes perforados, extensiones y resonadores laterales en el comportamiento de silenciadores híbridos. Un silenciador híbrido combina las características de un silenciador reactivo, que emplea los fenómenos de reflexión de ondas para atenuar y de un silenciador disipativo, que utiliza materiales absorbentes para disipar la energía acústica. Los elementos perforados son parte fundamental de los silenciadores empleados hoy en día. Además de formar parte de la estructura del silenciador, su presencia modifica el comportamiento acústico. La variación de la porosidad, el diámetro de los orificios y el espesor de la placa perforada son los parámetros más importantes a tener en cuenta. Los resonadores laterales, generalmente, pueden introducir fuertes resonancias acústicas que favorezcan la atenuación del ruido, si bien en ocasiones inducen pérdidas de carga y ruido de flujo. Estas características son a menudo aprovechadas para la mejora de la atenuación acústica a bajas y medias frecuencias. Los conductos extendidos se caracterizan por presentar un comportamiento acústico similar al anterior. A muy baja frecuencia el comportamiento acústico puede ser mejorado añadiendo conductos extendidos adicionales concéntricos superpuestos. El flujo medio puede modificar el comportamiento acústico de un silenciador, sobre todo en componentes como los elementos perforados y el material absorbente. Generalmente, en los silenciadores híbridos, el conducto perforado es un cilindro central, rodeado de material absorbente. De esta forma, el material absorbente ya no está directamente expuesto a los gases de escape y es protegido frente al arrastre y rotura generados por el flujo y las altas temperaturas provenientes del motor. El flujo medio modifica la impedancia de los elementos perforados, incrementando la parte resistiva y disminuyendo la parte reactiva.
- Caracterizar experimentalmente tanto el comportamiento acústico de silenciadores híbridos en ausencia de flujo medio como los materiales absorbentes utilizados en su interior. Se plantea la obtención de los parámetros de Delany y Bazley para una variedad de materiales fibrosos disponibles. Una vez determinados se incorporarán al modelo propuesto para ser validado por medio del índice de pérdidas de transmisión, TL .

1.3. Estructura de la Tesis

La estructura de la Tesis se basa en seis capítulos que abarcan: a) fundamentos de la teoría acústica y modelos unidimensionales, b) modelado acústico de silenciadores mediante Elementos Finitos, c) modelado acústico de silenciadores utilizando técnicas modales multidimensionales y d) caracterización experimental.

En el Capítulo 1 se describen los objetivos planteados y la organización de la Tesis.

En el Capítulo 2 se exponen los principios de la teoría acústica aplicada a conductos y silenciadores, considerando los modelos tradicionales de onda plana. Gran parte de la nomenclatura utilizada a lo largo de esta Tesis se define en este capítulo. Se describen propiedades básicas de placas y tubos perforados, así como los materiales utilizados para la disminución del ruido detallando sus características más importantes. Se explican las propiedades más importantes de las tipologías de silenciador, teniendo en cuenta las configuraciones con disipación, sin disipación e híbridas. Se presentan los índices de atenuación sonora empleados para caracterizar acústicamente un silenciador y se destacan las limitaciones del modelo unidimensional.

En el Capítulo 3 se describe el modelado multidimensional de silenciadores por medio de técnicas numéricas como el método de Elementos Finitos. Se parte de la ecuación de ondas y su solución es planteada en base a dicho método. Para las tipologías de silenciadores en que existen regiones con diferentes medios de propagación se detalla el acoplamiento entre ellas. Con vistas a proporcionar una validación de las herramientas analíticas desarrolladas en la Tesis, se obtiene la descripción de la atenuación acústica de algunos de los silenciadores analizados en este trabajo.

El Capítulo 4 constituye el objeto principal de la Tesis. Está dedicado al modelado del comportamiento acústico de silenciadores por medio de métodos analíticos modales de tipo multidimensional. Inicialmente se describe el planteamiento analítico modal de la solución de la ecuación de ondas teniendo en cuenta los modos de presión transversales y los correspondientes números de onda. Se estudia el fenómeno de propagación en conductos de secciones transversales usuales en silenciadores comerciales, tales como rectangulares, circulares y anulares. En el caso en que existan diferentes medios de propagación en la sección transversal se detallan los procedimientos propuestos para realizar el acoplamiento acústico. Una vez definida la solución acústica modal transversal, se describen las principales técnicas de acoplamiento entre secciones

para obtener el campo acústico completo en el interior del silenciador. Así, se detallan técnicas tales como el método de excitación puntual, el método del pistón y la técnica de Ajuste Modal. Esta última es la utilizada en esta Tesis, que se aplica de forma exhaustiva a diferentes geometrías de silenciadores híbridos, con el fin de obtener el comportamiento acústico de los mismos.

El Capítulo 5 tiene como finalidad la descripción de técnicas experimentales utilizadas para la caracterización acústica de silenciadores así como los elementos que los componen, tales como materiales absorbentes. El conocimiento de las propiedades acústicas de dichos materiales permite su incorporación en los modelos de cálculo desarrollados. Dichas propiedades se obtienen mediante ensayos experimentales de muestras de materiales absorbentes y posteriormente se ajustan a modelos matemáticos adecuados. Se hace una descripción del banco de ensayos existente en el que se realizan las medidas experimentales que proporcionan los índices de Pérdidas de Transmisión, TL , de los silenciadores contemplados en la Tesis. Los resultados experimentales se utilizan para validar los resultados obtenidos mediante los modelos de cálculo.

En el Capítulo 6 se exponen las conclusiones del trabajo realizado así como la indicación de posibles líneas de investigación futuras para seguir mejorando las herramientas presentadas en el modelado de silenciadores.

Capítulo 2. Fundamentos acústicos

Resumen del capítulo:

En este capítulo se describen los conceptos fundamentales relativos al fenómeno de propagación de ondas. Inicialmente se plantea la deducción de la ecuación de ondas para un medio en reposo y para un medio móvil. Asumiendo la hipótesis de propagación unidimensional se desarrolla la solución de la ecuación de ondas. Con el fin de comprender el fenómeno de atenuación sonora en silenciadores, se estudian algunas configuraciones geométricas importantes y se analiza la influencia que ejercen sobre la atenuación los elementos que los componen, partiendo para ello, de un modelo unidimensional basado en el planteamiento de matrices de transferencia. Posteriormente los resultados del comportamiento acústico obtenidos se contrastan con otros modelos numéricos.

2.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo es exponer los fundamentos de la teoría acústica en los cuales se asientan los contenidos de esta Tesis. Inicialmente se plantea la deducción de la ecuación de ondas, considerando las ecuaciones de continuidad, de equilibrio dinámico y de la energía. Puesto que las ondas pueden desplazarse en un medio en reposo o en movimiento, se examinan las hipótesis correspondientes a cada caso. A continuación, se desarrolla la solución de la ecuación de ondas suponiendo propagación unidimensional. Se presenta el modelo de onda plana como solución de la ecuación de ondas analizando, por un lado, la propagación de ondas en un medio en reposo y por otro en un medio móvil. Hay que destacar que los modelos de onda plana pueden representarse mediante matrices de transferencia. En particular se presentan las matrices de transferencia en conductos, expansiones, contracciones y en conductos extendidos. Las placas y tubos perforados constituyen componentes que se emplean para la atenuación del ruido. Se define el concepto de impedancia acústica de una superficie perforada y se examinan algunos de los modelos de impedancia existentes en la bibliografía. Otros elementos son los materiales absorbentes, de los cuales se enumeran sus principales propiedades. Hay que tener en cuenta que dichos materiales pueden alterar considerablemente el fenómeno de propagación de ondas y por tanto se hace necesario definir propiedades acústicas tales como la densidad y la velocidad acústicas efectivas. Se estudia el efecto que ejercen los materiales absorbentes en la impedancia acústica de las superficies perforadas. Con respecto a los fenómenos de atenuación sonora en silenciadores, se mencionan las categorías en las que se clasifican reseñando sus características. A continuación se exponen los principales índices de atenuación acústica: el índice de Pérdidas de Inserción, el índice de Pérdidas de Transmisión y la Diferencia de Nivel. Finalmente, con objeto de aplicar los conceptos teóricos descritos se propone la obtención del índice de Pérdidas de Transmisión (TL) para los silenciadores que se contemplan en la Tesis.

2.2. Ecuación de ondas

Una onda es una perturbación que a partir de un estado de equilibrio se propaga con el tiempo de una región del espacio a otra. La velocidad de propagación queda determinada por las propiedades mecánicas del medio. A medida que una onda avanza desde una determinada posición impulsa el aire de delante de ella y lo comprime. Al mismo tiempo, presenta una expansión en la parte

inmediatamente posterior, y el aire se precipita a llenar este espacio vacío tal como puede observarse en la Figura 2.1. De este modo, la compresión del aire se transfiere a partes distantes y el aire se pone en movimiento en forma de ondas sonoras [101].

En el análisis de la atenuación acústica de silenciadores se destacan dos modelos fundamentales: el modelo fluidodinámico general y el modelo acústico lineal [35, 79]. El primero de ellos, no lineal, se resume brevemente, y el segundo es el que se adopta en esta Tesis debido a que incorpora las características fundamentales que se pretende modelar.

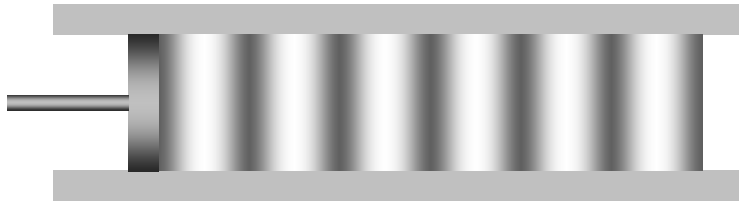


Figura 2.1 Sección longitudinal de un cilindro que contiene gas. Se observan las compresiones y expansiones del gas.

De acuerdo al modelo fluidodinámico, un sistema se define por medio de tres ecuaciones simultáneas [79]:

Ecuación de continuidad: la ecuación de continuidad para un volumen de control afirma que la rapidez de aumento de la masa dentro de un volumen de control es igual a la rapidez neta del flujo hacia adentro del volumen de control

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2.1)$$

Para coordenadas cartesianas tridimensionales la ecuación de continuidad (2.1) se aplica a un elemento con un volumen de control $dx dy dz$, donde los componentes de la velocidad en las direcciones x , y y z son u , v , w , respectivamente, y ρ es la densidad. Considerando un flujo a través de las caras normales a la dirección x , el flujo en la cara derecha, hacia afuera, es

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{dx}{2} \right] dy dz \quad (2.2)$$

y en la cara izquierda, hacia adentro, el flujo es

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{dx}{2} \right] dydz \quad (2.3)$$

El flujo neto a través de estas dos caras es

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx dy dz \quad (2.4)$$

Las otras dos direcciones producen expresiones similares. Por tanto, el flujo neto de masa hacia afuera es

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dx dy dz \quad (2.5)$$

expresión que toma lugar en la parte derecha de la ecuación (2.1). La parte izquierda de (2.1) para un elemento se convierte en

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (2.6)$$

Al utilizar estas dos expresiones en la ecuación (2.1), después de dividir por el elemento diferencial de volumen y tomando el límite, la expresión de continuidad en un punto se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.7)$$

la cual debe cumplirse para todo punto en régimen permanente o no permanente, compresible o incompresible.

La ecuación (2.7) escrita en forma vectorial es

$$\nabla \cdot \rho \vec{u} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.8)$$

donde el vector de velocidad \vec{u} está dado por $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ y el operador ∇ se define como $\nabla = \partial/\partial x\vec{i} + \partial/\partial y\vec{j} + \partial/\partial z\vec{k}$.

El operador D/Dt es la derivada material o derivada de Stokes [51] dada por la expresión

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.9)$$

escrita vectorialmente como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla(\vec{u}) \quad (2.10)$$

La ecuación de continuidad (2.8) no es lineal debido a que el segundo término de la misma implica el producto de la velocidad de la partícula y de la densidad instantánea, ambas variables acústicas. Para un pequeño cambio de densidad tal que $\rho = \rho_0(1 + \delta)$, $|\delta| \ll 1$, y añadiendo la restricción de que la amplitud de las ondas es relativamente pequeña se cumple

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla \vec{u} = 0 \quad (2.11)$$

que es la ecuación de continuidad linealizada ya que ρ_0 se asume constante en el espacio y tiempo.

Ecuación de equilibrio dinámico: conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos newtonianos expresan el equilibrio dinámico de las fuerzas inerciales, volumétricas, de presión y viscosas [35]

$$\begin{aligned} \rho a_x = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \rho a_y = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \rho a_z = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde F_x, F_y, F_z son fuerzas volumétricas, μ corresponde a la viscosidad dinámica y ζ es el segundo coeficiente de viscosidad, de valor cero para gases monoatómicos. Las aceleraciones en los ejes x, y, z son, respectivamente, $a_x = Du/Dt, a_y = Dv/Dt$ y $a_z = Dw/Dt$.

Ecuación de la energía: para flujos no isotermos en que la viscosidad depende de la temperatura, las ecuaciones de equilibrio dinámico y de continuidad están acopladas con la ecuación de la energía, de modo que deben ser resueltas simultáneamente. Así pues, la ecuación de la energía se representa como [35]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \phi_d - \nabla^T \bar{q}_r \\ & = \frac{\partial}{\partial x} (pu) + \frac{\partial}{\partial y} (pv) + \frac{\partial}{\partial z} (pw) + \frac{\rho}{2} \frac{D}{Dt} (u^2 + v^2 + w^2) + \rho \frac{DE}{Dt} \end{aligned} \quad (2.15)$$

observándose el equilibrio existente entre energía entrante, energía saliente y energía acumulada. En la ecuación k representa la conductividad térmica, T la temperatura, Q el calor generado por el fluido por unidad de volumen, E la energía interna, \bar{q}_r el vector de flujo de radiación de calor y ϕ_d la función de disipación. Esta función, disipación mecánica o viscosa, está dada por [35, 51]:

$$\begin{aligned} \phi_d = 2\mu & \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

El valor de λ es $\zeta - 2/3\mu$ y se denomina también segundo coeficiente de viscosidad, siendo para un gas monoatómico equivalente a $-2/3\mu$. Para fluidos no viscosos $\phi_d = 0$. El problema queda completamente especificado al incluir tres ecuaciones adicionales: la ecuación de estado, la de energía interna y la de viscosidad [35]. De forma general,

$$\rho = \rho(p, T) \quad (2.17)$$

$$E = E(p, T) \quad (2.18)$$

$$\mu = \mu(p, T) \quad (2.19)$$

En la obtención de la solución de un problema general de flujo se plantea la búsqueda de los campos de velocidades u, v, w , de presión p , de temperatura T ,

de densidad ρ , de energía interna E y de viscosidad μ partiendo de un dominio dado, de las propiedades del fluido, de las ecuaciones (2.7)-(2.19) y de un conjunto de condiciones de contorno iniciales. Por tanto, la solución requeriría resolver ocho ecuaciones con ocho incógnitas, situación compleja cuya dificultad aumentaría debido a que las fuerzas actuantes o la temperatura pueden deformar el contorno del dominio [35]. La solución de este tipo de problemas es compleja y está fuera del alcance de la Tesis.

En el modelo acústico lineal la obtención de la ecuación de ondas o de la ecuación de Helmholtz, en el caso de comportamiento armónico, resulta de linealizar y combinar las ecuaciones de continuidad, equilibrio dinámico y constitutivas del fluido. Como hipótesis de partida del proceso de linealización se plantea que las variaciones de presión, densidad y velocidad, en el caso de medio en movimiento, de las partículas es pequeño respecto al valor medio o de equilibrio. Esto supone una limitación de la aplicación de la ecuación de ondas debiéndose restringir a fenómenos acústicos de baja amplitud. En el caso de caracterización de silenciadores es útil ya que los sistemas de excitación no suelen superar los 140 dB(A) [35].

Las hipótesis de partida asociadas a la obtención de la ecuación de ondas son brevemente [35]:

- La propagación de una onda se realiza en un gas perfecto.
- El proceso de propagación de ondas se considera adiabático: puesto que hay un intercambio insignificante de energía térmica entre las partículas de un fluido su entropía permanece casi invariable, por tanto, en una perturbación acústica los elementos no intercambian energía. En efecto, durante el proceso de compresión de un fluido se origina una elevación de su temperatura e inversamente, en la expansión, una disminución de la misma. En cierto instante de tiempo el avance de una onda longitudinal produciría la conducción de calor desde una condensación a una expansión próxima, situada a media longitud de onda $\lambda/2$. De la conductividad térmica del fluido dependerá la cantidad de calor transmitida por unidad de tiempo y de área. En el oído humano dado el intervalo de frecuencias para el cual es sensible, de 20 a 20000 hercios, la mayoría de las perturbaciones acústicas tienen una longitud de onda λ demasiado grande y una conductividad térmica lo suficientemente pequeña para producir transmisión de calor de forma apreciable, por tanto, la propagación de ondas se considera un proceso adiabático. Si además el proceso es isoentrópico se verifica la ecuación de estado adiabático para un gas perfecto.

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (2.20)$$

en la que γ representa el cociente de calores específicos c_p y c_v a presión y volumen constantes, respectivamente. Como la entropía permanece constante $|s| \ll 1$ se comprueba la relación

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (2.21)$$

- Se asumen pequeñas variaciones de las funciones de presión, densidad y velocidad de partícula para poder linealizar el problema. Superponiendo una amplitud acústica pequeña, se tiene

$$\rho_T = \rho_0 + \rho \quad (2.22)$$

$$p_T = p_0 + p \quad (2.23)$$

$$\bar{u}_T = \bar{u}_0 + \bar{u} \quad (2.24)$$

donde ρ , p y \bar{u} son valores pequeños frente al valor medio.

2.2.1. Medio móvil

De forma general, el fluido tiene una velocidad media no nula dando lugar a la conocida ecuación de ondas convectiva. Como la hipótesis de fluido ideal desprecia los efectos de la viscosidad, las ecuaciones de Navier-Stokes (2.12)-(2.14) se expresan como

$$\rho_T \frac{Du_T}{Dt} = \rho_T F_x - \frac{\partial p_T}{\partial x} \quad (2.25)$$

$$\rho_T \frac{Dv_T}{Dt} = \rho_T F_y - \frac{\partial p_T}{\partial y} \quad (2.26)$$

$$\rho_T \frac{Dw_T}{Dt} = \rho_T F_z - \frac{\partial p_T}{\partial z} \quad (2.27)$$

conocidas como ecuaciones de Euler. Escritas en forma vectorial

$$\rho_T \frac{D\bar{u}_T}{Dt} = \rho_T \bar{F} - \nabla p_T \quad (2.28)$$

En fluidos con coeficientes de conductividad térmica pequeños, la temperatura del fluido permanecerá aproximadamente invariable al paso de una onda acústica. Teniendo en cuenta que el coeficiente de conductividad isotérmico κ_T es

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho_T} \left(\frac{\partial \rho_T}{\partial p_T} \right)_T \quad (2.29)$$

para gases con entropía estable se cumple

$$\left(\frac{\partial \rho_T}{\partial p_T} \right)_s = \rho \kappa_s \quad (2.30)$$

Las perturbaciones en un medio isoentrópico viajan a través del fluido a la velocidad de propagación de una onda c_0 relativa al fluido que está dada por [85]

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_s \rho_T}} \quad (2.31)$$

La sustitución de (2.31) en (2.30) proporciona

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p_T}{\partial \rho_T} \right)_s = \gamma R T_0 \quad (2.32)$$

donde T_0 es la temperatura absoluta ambiente. A partir de ciertas consideraciones termodinámicas puede deducirse que

$$\frac{Dp_T}{Dt} = c_0^2 \frac{D\rho_T}{Dt} \quad (2.33)$$

En función de la definición de derivada sustancial, ecuación (2.9), la ecuación de continuidad (2.8) también puede escribirse como

$$\frac{D\rho_T}{Dt} + \rho_T \nabla^T \bar{u}_T = 0 \quad (2.34)$$

Combinando las ecuaciones (2.33) y (2.34) se obtiene

$$\frac{Dp_T}{Dt} + c_0^2 \rho_T \nabla^T \bar{u}_T = 0 \quad (2.35)$$

En la ecuación de Euler (2.28) al despreciar los términos gravitatorios y los que implican disipación de energía acústica debido a turbulencias, corrientes y efectos viscosos, se transforma en

$$\rho_T \frac{D\bar{u}_T}{Dt} = -\nabla p_T \quad (2.36)$$

y la expresión (2.35) al ser derivada respecto al tiempo se escribe como

$$\frac{D^2 p_T}{Dt^2} + \frac{D}{Dt} (c_0^2 \rho_T \nabla^T \bar{u}_T) = 0 \quad (2.37)$$

Como se han supuesto pequeñas variaciones de presión, velocidad y densidad, las ecuaciones lineales que gobiernan las perturbaciones acústicas se determinan a partir de los términos de primer orden en las expansiones de las ecuaciones no lineales de partida. Para las ecuaciones (2.25)-(2.27) resulta

$$\rho_0 \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0 \quad (2.38)$$

$$\rho_0 \left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \quad (2.39)$$

$$\rho_0 \left(u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0 \quad (2.40)$$

Puesto que ρ_0 y c_0 son constantes y considerando que el campo de flujo medio es estacionario, al sustituir la expresión (2.37) en (2.36) se obtiene la ecuación de ondas convectiva [35]

$$\begin{aligned} \nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} + 2\rho_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

cuyas variables son la velocidad acústica \bar{u} y la presión acústica del campo de flujo medio p . Para el caso de flujo medio uniforme se tiene en cuenta solamente el primer término de la ecuación de ondas convectiva (2.41)

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (2.42)$$

Si la velocidad es interpretada como el gradiente de una función escalar, se tiene,

$$\bar{u} = \nabla\Phi \quad (2.43)$$

donde Φ representa el potencial de velocidad acústica [23, 84]. En función de este potencial como única variable se obtiene

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2\Phi}{Dt^2} = 0 \quad (2.44)$$

y la relación entre presión acústica y velocidad potencial es

$$p = -\rho_0 \frac{D\Phi}{Dt} \quad (2.45)$$

En virtud de la ecuación (2.43) el campo de velocidades de flujo medio puede determinarse a partir del potencial de flujo medio, Φ_0 , que satisface la ecuación de Laplace [35]

$$\nabla^2\Phi_0 = 0 \quad (2.46)$$

2.2.2. Medio en reposo

Al considerar nula la velocidad del medio, $\bar{u}_T = \bar{u}$, en las expresiones (2.38)-(2.40) $\nabla p_0 = 0$, por tanto, la expresión lineal de la ecuación (2.35) es

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \nabla^T \bar{u} = 0 \quad (2.47)$$

y la ecuación de Euler (2.36) resulta en

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.48)$$

Al combinar las expresiones anteriores se obtiene la ecuación de ondas sin flujo

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.49)$$

la cual dependerá de la perturbación acústica de presión p . A partir de la ecuación de ondas convectiva, realizando el cambio $\bar{u}_0 = 0$ se llega a este mismo resultado. Admitiendo comportamiento armónico la presión se expresa como $p =$

$P e^{j\omega t}$, y sustituyendo en la ecuación de ondas se consigue la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 P + k_0^2 P = 0 \quad (2.50)$$

en la que $k_0 = \omega/c_0$ es el número de onda, P la amplitud de la presión acústica compleja (función de las coordenadas), $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular y j la unidad imaginaria.

En ausencia de flujo medio la formulación en potencial de velocidad acústica proporciona una expresión equivalente a (2.45)

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.51)$$

2.3. Acústica unidimensional de conductos

Una vez deducida la ecuación de ondas, el siguiente paso consiste en encontrar su solución. Se plantea la hipótesis de propagación unidimensional, siendo ésta la suposición más utilizada tradicionalmente en la obtención de la ecuación de ondas. La propiedad característica de las ondas planas es que las variables acústicas como el desplazamiento de partícula, densidad, presión, entre otras, tienen la misma amplitud en el plano perpendicular a la dirección de propagación, permitiendo analizar situaciones en las que existe flujo medio. Se consideran dos casos, con el medio de propagación en reposo y en movimiento.

2.3.1. Medio en reposo

Una onda acústica, que se desplaza a lo largo de un eje z , y cuya longitud de onda λ es mayor que las dimensiones transversales del conducto es una onda plana y su desplazamiento es unidimensional. Las perturbaciones de presión acústica p y de velocidad acústica \bar{u} son similares en todos los puntos de la sección transversal del conducto [79], cuyos valores representan una pequeña fracción de las variables ambientales, razón por la cual la onda se propaga sin cambios en su forma [86]. Al tener en cuenta comportamiento armónico, $p = P e^{j\omega t}$, la solución de la ecuación de Helmholtz (2.50) se escribe como

$$P(z) = P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z} \quad (2.52)$$

El primer término representa una onda propagándose en la dirección $+z$, denominada componente progresiva, con frecuencia $\omega/2\pi$ y longitud de onda $\lambda =$

$2\pi/k = 2\pi c_0/\omega$ y el segundo término es la propagación de una onda en la dirección $-z$, denominada componente regresiva, que tiene la misma frecuencia y longitud de onda. En consecuencia, la presión acústica en cualquier punto del eje z es la resultante de la combinación de las componentes progresiva y regresiva. Los coeficientes P^+ y P^- se calculan a partir de las condiciones de contorno existentes en el conducto.

De la ecuación de Euler (2.48) puede escribirse para la velocidad acústica, $u = Ue^{j\omega t}$,

$$U = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.53)$$

que al asumir comportamiento armónico, se expresa como

$$U(z) = U^+ e^{-jk_0z} + U^- e^{jk_0z} \quad (2.54)$$

de modo que igualando (2.53) y (2.54)

$$(U^+ e^{-jk_0z} + U^- e^{jk_0z}) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (P^+ e^{-jk_0z} - P^- e^{jk_0z}) \quad (2.55)$$

Considerando la definición de impedancia acústica Z como la relación entre la presión acústica en un medio y la velocidad de la partícula

$$Z = \frac{P}{U} \quad (2.56)$$

la velocidad acústica es también expresada, en términos de impedancia acústica, como

$$U = \frac{P}{Z} \quad (2.57)$$

por tanto, la expresión (2.55) está definida en función de la impedancia acústica, cuyas componentes son

$$U^+ = \frac{P^+}{\rho_0 c_0} = \frac{P^+}{Z_0} \quad \text{y} \quad U^- = -\frac{P^-}{\rho_0 c_0} = -\frac{P^-}{Z_0} \quad (2.58)$$

y $Z_0 = \rho_0 c_0$ es la impedancia característica del medio, magnitud real producto de dos propiedades características del medio. La velocidad también puede ser expresada en términos del flujo másico V . En efecto, la velocidad de una onda

plana desplazándose a lo largo de un conducto de sección transversal S estará dada por

$$U = \frac{V}{\rho_0 S} \quad (2.59)$$

es decir,

$$V(z) = \frac{\rho_0 S}{\rho_0 c_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z}) = \frac{1}{Y_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z}) \quad (2.60)$$

siendo la impedancia característica del conducto

$$Y_0 = \frac{c_0}{S} \quad (2.61)$$

En la propagación de ondas acústicas se observa la existencia de disipación de energía acústica que por lo general, en el caso de un medio en reposo, tiene un valor pequeño, pero que puede ser considerado en el modelo de onda plana. En efecto y como se analizará en la sección 2.6 tales pérdidas se asocian con la viscosidad en un medio de propagación, conductividad térmica y procesos de relajación molecular. En el medio viscoso tanto el número de onda como la impedancia característica del conducto se convierten en números complejos [35, 65, 85, 90]. En el medio viscoso la ecuación de Helmholtz puede reescribirse como [65]

$$\left(\nabla^2 + \hat{k}^2\right) \hat{p} = 0 \quad (2.62)$$

donde \hat{p} es la presión acústica y \hat{k} es el número de onda complejo en el medio viscoso. El número de onda \hat{k} es definido por la expresión [65]

$$\hat{k} = k + j\alpha_0 = (k_0 + \alpha_0) + j\alpha_0 \quad (2.63)$$

Sin tener en cuenta el tiempo de relajación τ (disminución de la amplitud de la presión en la condensación a un valor $1/e$ de su amplitud inicial) y considerando el radio R del conducto, el coeficiente de atenuación viscotérmico α_0 se obtiene por medio de la expresión

$$\alpha_0 = \frac{1}{Rc_0} \left(\frac{\omega\mu}{2\rho_0} \right)^{1/2} \quad (2.64)$$

Si adicionalmente se consideran las pérdidas de energía térmica a través de las paredes del conducto [86]

$$\alpha_0 = \frac{1}{Rc_0} \left(\frac{\omega\mu}{2\rho_0} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma Pr}} \right) \quad (2.65)$$

donde, para ambas ecuaciones, μ es la viscosidad dinámica, Pr el número de Prandtl definido como $\mu c_p / \kappa$, c_p el calor específico a presión constante y κ la conductividad térmica. El coeficiente de atenuación viscotérmica es proporcional a la frecuencia y a la viscosidad del medio. En los gases es mayor al aumentar la temperatura.

La solución de la ecuación de ondas en términos de presión es

$$P(z) = \left(P^+ e^{-\alpha_0 z - jkz} + P^- e^{\alpha_0 z + jkz} \right) \quad (2.66)$$

y en función del flujo másico

$$V(z) = \frac{1}{Y} \left(P^+ e^{-\alpha_0 z - jkz} - P^- e^{\alpha_0 z + jkz} \right) \quad (2.67)$$

donde Y es definida por [79]

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{k_0} + j \frac{\alpha_0}{k_0} \right) \quad (2.68)$$

2.3.2. Medio móvil

En un medio en movimiento cuya velocidad es uniforme e igual a U_{fm} se supondrá que una onda acústica se propaga a una velocidad c . La velocidad absoluta de la onda progresiva respecto a un sistema de referencia fijo es $U_{fm} + c_0$ y la de la onda regresiva $U_{fm} - c_0$. Este hecho, en el que las ondas son transportadas aguas abajo por el fluido en movimiento, es conocido como efecto convectivo [35]. Asumiendo propagación unidimensional y teniendo en cuenta el efecto convectivo la derivada total es

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_{fm} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.69)$$

Combinando con las ecuaciones de continuidad y de momento, respectivamente,

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \rho_0 \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.70, 2.71)$$

se obtiene la ecuación de ondas convectiva

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2U_{fm} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} + (U_{fm}^2 - c_0^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (2.72)$$

Definiendo al número de Mach M como U_{fm}/c_0 al sustituir en (2.72) y asumiendo comportamiento armónico

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{2M}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.73)$$

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2jMk_0 \frac{\partial P}{\partial z} + k_0^2 P = 0 \quad (2.74)$$

La solución buscada se expresa como

$$P(z) = P^+ e^{\frac{jk_0 z}{1+M}} + P^- e^{\frac{jk_0 z}{1-M}} \quad (2.75)$$

La ecuación de Euler (2.36) es ahora

$$\rho_0 \left(j\omega U + U_{fm} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.76)$$

Por medio de la ecuación de Euler (2.76) y (2.55) se obtiene la velocidad de la partícula

$$U(z) = \frac{1}{Z_0} \left(P^+ e^{\frac{jk_0 z}{1+M}} - P^- e^{\frac{jk_0 z}{1-M}} \right) \quad (2.77)$$

la cual expresada en términos de flujo másico es

$$V(z) = \frac{I}{Y_0} \left(P^+ e^{\frac{jk_0 z}{1+M}} - P^- e^{\frac{jk_0 z}{1-M}} \right) \quad (2.78)$$

Las impedancias características del medio Z_0 y del conducto Y_0 son análogas a las evaluadas para el medio en reposo.

Como consecuencia de la existencia de flujo medio se pueden producir pérdidas debido a la fricción entre moléculas generadas por la turbulencia del flujo y efectos convectivos, especialmente en discontinuidades geométricas. Prosiguiendo el desarrollo realizado por Munjal [79], empleando la expresión (2.32) y combinándola junto con las expresiones (2.70) y (2.71), la ecuación de ondas unidimensional es

$$\frac{D^2 p}{Dt^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2(\xi U + c_0 \alpha) \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (2.79)$$

El número de onda se define mediante la expresión

$$\beta^\pm \approx \mp \left(\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1 \pm M} \right) \quad (2.80)$$

que relaciona los efectos de la atenuación viscotérmica α_0 , el número de Mach M , el número de onda con medio en reposo k , y ξ que vincula el factor de fricción de Froude F y el diámetro D del conducto por medio de la expresión $\xi = F/2D$. El factor de fricción de Froude relaciona la caída de presión axial en una longitud equivalente al diámetro del conducto y la energía cinética del fluido a su entrada. Para el cálculo de este número en silenciadores se propone la fórmula de Lee [35, 79]

$$F = 0.0072 + \frac{0.612}{Re^{0.35}}, \quad Re < 4 \cdot 10^5 \quad (2.81)$$

en la que el número de Reynolds Re es $U_{fm} D \rho_0 / \mu$. Por tanto, la presión acústica se expresa como

$$P(z) = P^+ e^{-\left(\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1+M}\right)z} + P^- e^{\left(\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1-M}\right)z} \quad (2.82)$$

El flujo másico es

$$V(z) = \frac{1}{Y} \left(P^+ e^{-\left(\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1+M}\right)z} - P^- e^{\left(\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1-M}\right)z} \right) \quad (2.83)$$

y la impedancia del conducto

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{\alpha_0 + \xi M}{k_0} + j \frac{\alpha_0 + \xi M}{k_0} \right) \quad (2.84)$$

La atenuación aeroacústica en un medio en movimiento es la suma de las contribuciones de los efectos viscotérmicos y de la fricción del flujo turbulento [79]. Las constantes de atenuación viscotérmicas son

$$\alpha^\pm = \frac{\alpha(M)}{1 \pm M} = \frac{\alpha_0 + \xi(M)}{1 \pm M} \quad (2.85)$$

también función del número de Mach. De la expresión (2.78) separando las constantes de atenuación viscotérmicas se obtienen los números de onda

$$k^{\pm} = \frac{k}{1 \pm M} = \frac{k_0 + \alpha_0}{1 \pm M} \quad (2.86)$$

Los factores $1 \pm M$ representan la influencia del efecto convectivo causado por el flujo medio tanto a las constantes de atenuación como a los números de onda. $\alpha(M)$, similar para ondas que se desplazan en ambas direcciones, equivale a la parte real de la constante de atenuación aeroacústica para un medio en movimiento.

Con el fin de evaluar el coeficiente de atenuación aeroacústico en el planteamiento existen simplificaciones, en particular, en la ecuación (2.79) que es el resultado de la combinación de ecuaciones unidimensionales de la continuidad y cantidad de movimiento. Las ecuaciones (2.82)-(2.84) representan una aproximación de la propagación de ondas en un medio no estacionario viscoso.

2.4. Modelos de onda plana. Representación matricial

Una vez obtenida la solución de la ecuación de ondas se procede, en función de la teoría unidimensional, a la aplicación de métodos matriciales que permitirán obtener el comportamiento acústico de los elementos que componen un silenciador. La respuesta acústica global de un sistema de escape depende de las características relevantes de la fuente de generación de ruido, la influencia de las condiciones externas y los elementos que se dispongan en el sistema de evacuación de gases de escape [35]. Considerando la hipótesis de onda plana se plantea la matriz de transferencia, o matriz de cuatro polos, como representación de los parámetros de un elemento acústico [79] que relaciona las variables de estado a ambos lados de un componente de un sistema acústico. Una adecuada ordenación de las matrices correspondiente al conjunto de los elementos que componen un silenciador permitirá el establecimiento de su respuesta acústica global.

2.4.1. Generalidades

La Figura 2.2 representa un sistema acústico formado por una fuente de ruido, un silenciador y una salida. El sistema puede ser modelado como una serie de discontinuidades geométricas conectadas por conductos, y pese a que el campo acústico es multidimensional [63], en las zonas de unión de los componentes se asume la hipótesis de onda plana. En la definición matricial de un elemento

acústico las variables de estado son la presión P y la velocidad acústica U y la matriz de transferencia relaciona la presión y velocidad acústica entre los planos de entrada y salida de un elemento. Matricialmente

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.87)$$

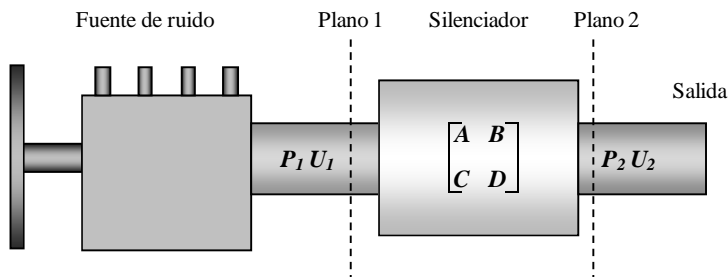


Figura 2.2 Esquema de un sistema acústico.

La perturbación en un punto dado del conducto, definida por el vector de estado $\{P_1 \ U_1\}^T$, está relacionada con la perturbación en otro punto, aguas abajo del primero, especificada por el vector de estado $\{P_2 \ U_2\}^T$ por medio de una matriz de transferencia que vincula los vectores de estado de los planos 1 y 2. La matriz de transferencia define cualquier elemento que constituya parte de un sistema que cumpla la condición de onda plana.

Puesto que las matrices de transferencia relacionan dos vectores de estado asociados a puntos concretos, una propiedad fundamental consiste en la posibilidad de multiplicar ordenadamente las matrices obtenidas para cada componente con el fin de obtener la matriz de transferencia de un sistema acústico más complejo.

La obtención de los cuatro polos del sistema $[T]$ se realiza aplicando al sistema acústico dos conjuntos de condiciones de contorno independientes. La imposición de una presión de excitación unitaria en el plano de entrada y la condición $P_2 = 0$ en el plano de salida equivale a la presión atmosférica. La condición $U_2 = 0$ en el mismo plano es similar a un extremo cerrado por una pared rígida [17]. Por medio de este procedimiento los componentes de la matriz de la ecuación (2.87) son

$$\begin{aligned}
 A &= \left. \frac{P_1}{P_2} \right|_{U_2=0} & B &= \left. \frac{P_1}{U_2} \right|_{P_2=0} \\
 C &= \left. \frac{U_1}{P_2} \right|_{U_2=0} & D &= \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{P_2=0}
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

2.4.2. Conductos

Las predicciones de la propagación de ondas acústicas planas a lo largo de un conducto reactivo son de gran relevancia en el estudio y diseño de aplicaciones acústicas en la industria, transporte y medio ambiente. La teoría acústica lineal es apropiada para el estudio de la propagación de ondas a través de un conducto de sección transversal uniforme.

Las condiciones acústicas a lo largo del conducto se describen por medio de los valores complejos de las amplitudes de las ondas incidentes y reflejadas. La presión y velocidad acústicas para ondas armónicas en el tiempo dadas por las expresiones (2.52) y (2.55)

$$P(z) = P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z} \tag{2.89}$$

$$U(z) = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z}) \tag{2.90}$$

son las relaciones que se utilizan para la obtención de la matriz de transferencia de un conducto. En prácticamente casi todas las circunstancias, a excepción de una salida anecoica, el movimiento de la onda acústica en un conducto es el resultado de la interferencia de la energía de las ondas incidentes viajando desde la fuente de ruido y de parte de la energía de las ondas reflejadas provenientes de una discontinuidad. Como consecuencia, a una frecuencia dada y en ausencia de flujo medio, el patrón de distribución de presiones acústicas a lo largo del conducto puede permanecer estático y estar relacionado con las propiedades reflexivas de la terminación [85].

Si en el conducto de longitud L y sección transversal uniforme S , Figura 2.3, se aplica una excitación en presión P_e arbitraria, por conveniencia de valor unidad, la imposición de la condición de contorno $U_2 = 0$ implica

$$P(z=0) = P_1 = P^+ + P^- = P_e = 1 \tag{2.91}$$

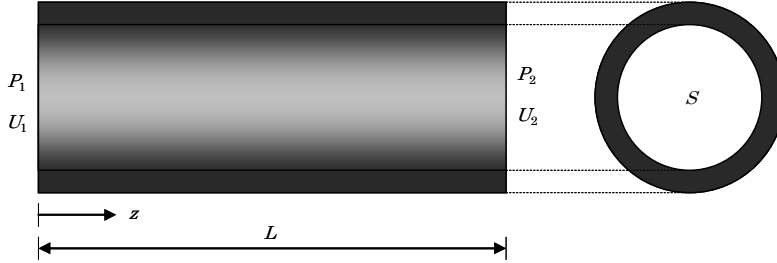


Figura 2.3 Conducto de sección constante arbitraria.

$$U(z = L) = U_2 = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0L} - P^- e^{jk_0L}) = 0 \quad (2.92)$$

De la expresión (2.52)

$$P^+ = 1 - P^- \quad (2.93)$$

Sustituyendo en (2.55)

$$U_2 = \left((1 - P^-) e^{-jk_0L} - P^- e^{jk_0L} \right) = 0 \quad (2.94)$$

Desarrollando la expresión y despejando P^+ , P^-

$$P^+ = \frac{\cos(k_0L) + j \operatorname{sen}(k_0L)}{2 \cos(k_0L)} \quad (2.95)$$

$$P^- = \frac{\cos(k_0L) - j \operatorname{sen}(k_0L)}{2 \cos(k_0L)} \quad (2.96)$$

De (2.88) se consiguen los términos A y C de la matriz de transferencia

$$A = \left. \frac{P_1}{P_2} \right|_{U_2=0} = \cos(k_0L) \quad (2.97)$$

$$C = \left. \frac{U_1}{P_2} \right|_{U_2=0} = \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0L)$$

Imponiendo la segunda condición de contorno $P_2 = 0$, los términos B y D de la matriz de transferencia son hallados mediante un procedimiento análogo.

$$P(z = 0) = P_1 = P^+ + P^- = P_e = 1 \quad (2.98)$$

$$P(z=L) = P_2 = (P^+ e^{-jk_0L} + P^- e^{jk_0L}) = 0 \quad (2.99)$$

De (2.52)

$$P_2 = ((1 - P^-) e^{-jk_0L} + P^- e^{jk_0L}) = 0 \quad (2.100)$$

Desarrollando la expresión y despejando P^+ , P^-

$$P^+ = \frac{\text{sen}(k_0L) - j\cos(k_0L)}{2\text{sen}(k_0L)} \quad (2.101)$$

$$P^- = \frac{\text{sen}(k_0L) + j\cos(k_0L)}{2\text{sen}(k_0L)} \quad (2.102)$$

De este modo

$$B = \left. \frac{P_1}{U_2} \right|_{P_2=0} = jZ_0 \text{sen}(k_0L) \quad (2.103)$$

$$D = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{P_2=0} = \cos(k_0L)$$

En consecuencia, la matriz de transferencia de un conducto es

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0L) & jZ_0 \text{sen}(k_0L) \\ \frac{1}{Z_0} \text{sen}(k_0L) & \cos(k_0L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

Considerando el flujo másico

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0L) & jY_0 \text{sen}(k_0L) \\ \frac{1}{Y_0} \text{sen}(k_0L) & \cos(k_0L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

En presencia de flujo medio se procede similarmente. Dado que el número de onda para flujo no viscoso es [79]

$$k \approx \frac{k_0}{1 - M^2} \quad (2.106)$$

la presión y velocidad acústicas, así como el flujo másico, se expresan por

$$P(z) = e^{jMkz} (P^+ e^{-jkz} + P^- e^{jkz}) \quad (2.107)$$

$$U(z) = \frac{1}{Z_0} e^{jMkz} (P^+ e^{-jkz} - P^- e^{jkz}) \quad (2.108)$$

$$V(z) = \frac{1}{Y_0} e^{jMkz} (P^+ e^{-jkz} - P^- e^{jkz}) \quad (2.109)$$

En función de la velocidad acústica la matriz de transferencia se formula por

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix}_{z=0} = e^{-jMkz} \begin{bmatrix} \cos(kz) & jZ_0 \sin(kz) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(kz) & \cos(kz) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{bmatrix}_{z=L} \quad (2.110)$$

y con el flujo másico

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{bmatrix}_{z=0} = e^{-jMkz} \begin{bmatrix} \cos(kz) & jY_0 \sin(kz) \\ \frac{j}{Y_0} \sin(kz) & \cos(kz) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ V_2 \end{bmatrix}_{z=L} \quad (2.111)$$

Como ejemplo de lo desarrollado se presenta un gráfico con la representación de las funciones que componen la matriz de transferencia. Para ello se ha supuesto un conducto de longitud L de 0.60 m teniendo en cuenta valores de flujo medio de $M = 0, 0.1$ y 0.2 .

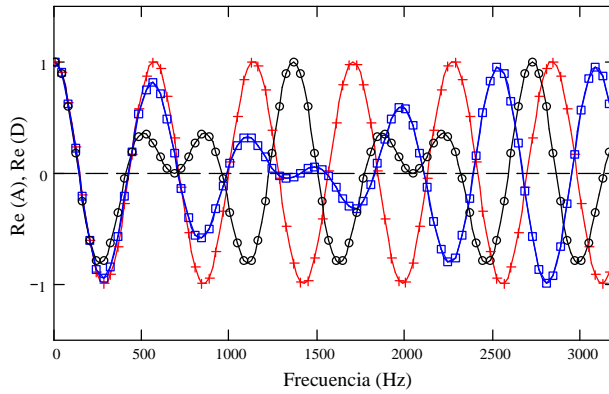


Figura 2.4 Parte real de los polos A y D. Polo A: —, $M = 0$; —, $M = 0.1$; —, $M = 0.2$. Polo D: + + +, $M = 0$; □□□, $M = 0.1$; ○○○, $M = 0.2$.

En las Figuras 2.4 a 2.7 se observa que, en ausencia de flujo medio, las partes imaginarias de las funciones A y D son nulas, al igual que las partes reales de B y C . La presencia de flujo medio produce desfases en estas ondas modificando su valor inicial nulo al igual que en las partes inicialmente no nulas [35].

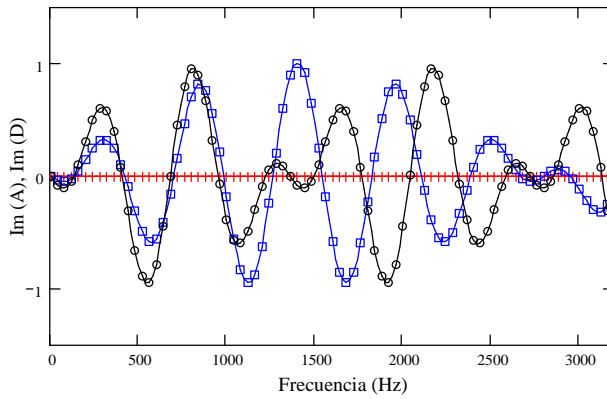


Figura 2.5 Parte imaginaria de los polos A y D . Polo A : —, $M = 0$; —, $M = 0.1$; —, $M = 0.2$. Polo D : + + + +, $M = 0$; □□□□, $M = 0.1$; ○○○○, $M = 0.2$.

Otra posibilidad consiste en evaluar los coeficientes de presión transmitida y reflejada para cada discontinuidad, satisfaciendo las condiciones de contorno asociadas. En base a ello, se calcula la matriz de cuatro polos para cada componente del sistema. En el Capítulo 5, en la sección correspondiente a la Matriz de Transferencia se aborda este planteamiento.

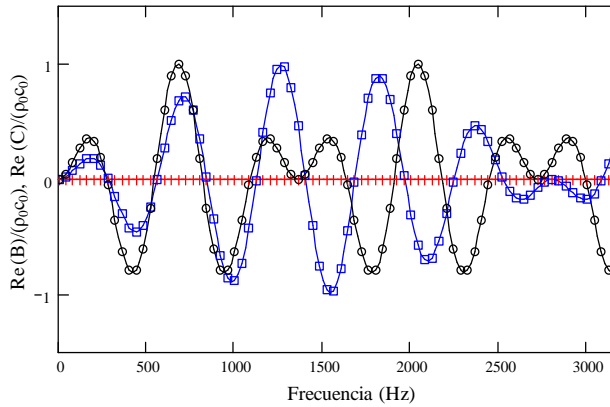


Figura 2.6 Parte real de los polos B y C . Polo B : —, $M = 0$; —, $M = 0.1$; —, $M = 0.2$. Polo C : + + + +, $M = 0$; □□□□, $M = 0.1$; ○○○○, $M = 0.2$.

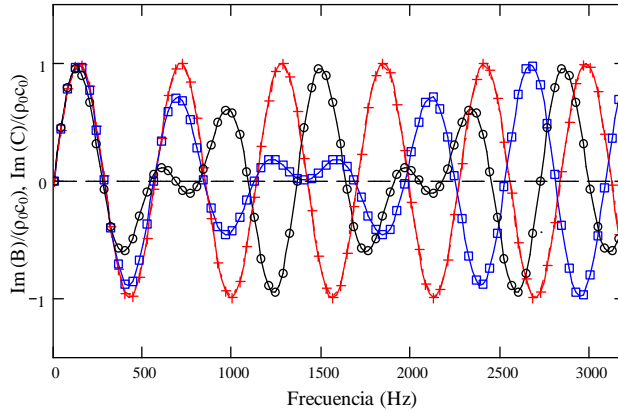


Figura 2.7 Parte imaginaria de los polos B y C . Polo B : —, $M = 0$; —, $M = 0.1$; —, $M = 0.2$. Polo C : + + +, $M = 0$; □ □ □, $M = 0.1$; ○ ○ ○, $M = 0.2$.

2.4.3. Expansiones y contracciones

Los cambios de sección bruscos en conductos conllevan la variación de la dirección y velocidad de la propagación de las ondas. En un volumen de control que incluya algún tipo de discontinuidad geométrica deben satisfacerse, para el flujo medio y fluctuaciones acústicas asociadas a la onda, las condiciones de conservación de masa, energía y momento, junto con las condiciones de contorno asociadas a las fronteras del volumen de control.

La Figura 2.8 muestra un conducto de sección transversal S_1 unido a otro de sección transversal S_2 , para el caso de una expansión, y el conducto de sección S_2 unido a otro de sección S_3 , para una contracción. Hay que destacar que, pese a la consideración de la hipótesis de onda plana, en la vecindad de una discontinuidad se generan modos de alto orden debido a la continuidad de los campos de presión y velocidad los cuales pueden ser disipados rápidamente si las dimensiones transversales del conducto no son suficientemente grandes respecto a la longitud de la onda excitada [63]. De esta forma, si se asume que la superficie S_2 se coloca a una distancia tal que esté alejada de las fluctuaciones producidas por el cambio de sección, la propagación en este plano será en forma de ondas planas donde la velocidad U se supone constante.

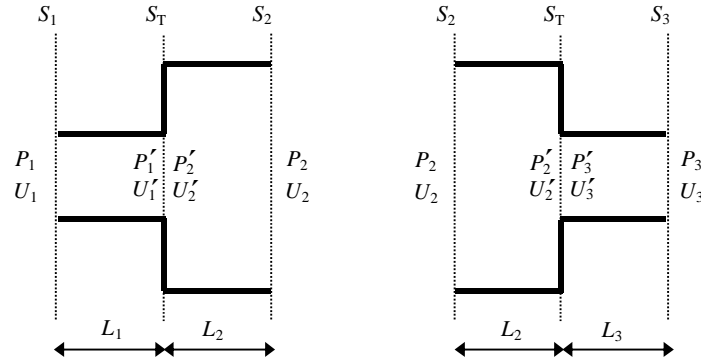


Figura 2.8 Esquemas de expansión y contracción de un conducto.

A efectos de cálculo se asume que, tanto la presión como el flujo másico, a ambos lados de la discontinuidad no cambian

$$P_1' = P_2' \tag{2.112}$$

$$\rho_0 S_1 U_1' = \rho_0 S_2 U_2' \tag{2.113}$$

La relación matricial entre ambos vectores de estado es

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ U_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2' \\ U_2' \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

Teniendo en cuenta el flujo másico en los vectores de estado

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ V_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2' \\ V_2' \end{bmatrix} \tag{2.115}$$

Los fenómenos multidimensionales generados en una discontinuidad pueden ser determinados, a bajas frecuencias, en función de la corrección de longitud. De este modo, la expresión (2.108) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ V_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega I_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2' \\ V_2' \end{bmatrix} \tag{2.116}$$

donde I_r es la inercia [92] de la discontinuidad que depende de su geometría y frecuencia, hecho descrito en [35, 74, 92, 93], y al realizar la analogía a circuitos

eléctricos para el caso de fluidos no viscosos, Munjal [79] lo relaciona con una impedancia colocada en serie, obteniendo la expresión

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ V_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2' \\ V_2' \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

Multiplicando ordenadamente las matrices correspondientes a cada conducto se genera la relación entre las variables de la sección de entrada S_1 y de salida S_2

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jZ_0 \operatorname{sen}(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jZ_0 \operatorname{sen}(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

Se comprueba fácilmente que en la contracción ($S_2 > S_3$) se cumple

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jZ_0 \operatorname{sen}(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_3}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_3) & jZ_0 \operatorname{sen}(k_0 L_3) \\ \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L_3) & \cos(k_0 L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

2.4.4. Conductos extendidos

La Figura 2.9 muestra el esquema de un conducto extendido, el cual representa un volumen de control, limitado por el plano de entrada S_1 , plano de salida S_3 y las paredes rígidas. La característica resaltante en este tipo de cambios de sección es la presencia de un conducto que se encaja en el interior de la cámara. La cavidad anular se comporta como un resonador, donde a determinadas frecuencias se producen resonancias. Debido a la característica de la geometría, la obtención de la matriz de transferencia se simplifica sustituyendo la velocidad acústica por el flujo másico.

Al tratar con el modelo de onda plana se asume que la presión acústica es similar en el plano de la transición del conducto extendido y la cámara S_T , por lo tanto,

$$P_1' = P_2' = P_3' \quad (2.120)$$

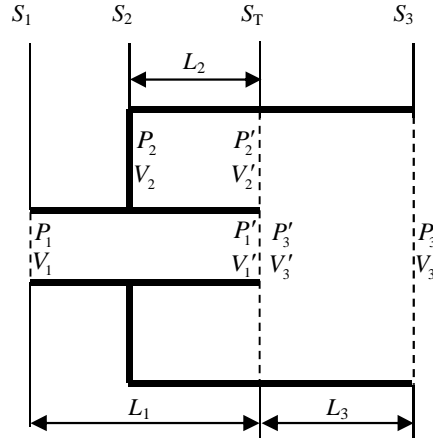


Figura 2.9 Esquema de un conducto extendido.

donde P_1 y V_1 corresponden a la presión acústica y flujo másico a la entrada del volumen de control, superficie S_1 , y P_3 y V_3 a la salida de dicho volumen, en el plano S_3 . Por otra parte, la condición de continuidad de flujo másico supone, para el plano S_T , plano de transición,

$$V'_1 = V'_2 + V'_3 \tag{2.121}$$

El comportamiento acústico en el plano S_T se representa por medio de una impedancia local [35, 79] cuyo valor es

$$Z_2 = \frac{P_2}{V_2} \tag{2.122}$$

La representación de P_2 y de V_2 por medio de la matriz de cuatro polos es

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jY_2 \sin(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Y_2} \sin(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_2 \\ V'_2 \end{bmatrix} \tag{2.123}$$

donde el flujo másico V'_2 en el plano S_2 es cero e $Y_2 = c_0/S_2 = c_0/(S_3 - S_1)$. En base a estos valores la impedancia local es

$$Z_2 = \frac{P_2' \cos(k_0 L_2)}{P_2' \frac{j}{Y_2} \sin(k_0 L_2)} = -jY_2 \cot(k_0 L_2) \quad (2.124)$$

A partir del valor de la impedancia conocido, la matriz de transferencia del volumen de control puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jY_1 \sin(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Y_1} \sin(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_3) & jY_3 \sin(k_0 L_3) \\ \frac{j}{Y_3} \sin(k_0 L_3) & \cos(k_0 L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

en la que $Y_1 = c_0/S_1$ y $Y_3 = c_0/S_3$.

Como se destacó anteriormente, la característica de este tipo de configuraciones es la aparición de picos de resonancia. Ello implica que a ciertas frecuencias la impedancia local Z_2 deba anularse y para ello ha de cumplirse

$$\cot(k_0 L_2) = 0 \quad (2.126)$$

cuyo argumento se anula para valores

$$k_0 L_2 = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.127)$$

o de forma equivalente, teniendo en cuenta la longitud de onda λ

$$\frac{L_2}{\lambda} = \frac{(2n+1)}{4} \quad (2.128)$$

2.5. Placas y tubos perforados

Las superficies perforadas son utilizadas para la atenuación acústica del sonido generado por fuentes tales como motores, compresores o sistemas de ventilación [44] y forman parte fundamental de los silenciadores utilizados en los motores de automóviles. Generalmente los conductos perforados consisten en un número de pequeños orificios colocados bastante cerca unos de otros. Los tubos perforados además, guían el flujo, disminuyen las pérdidas por flujo y mejoran la calidad del

ruido generado en los cambios bruscos de sección. Cuando se compara con un circuito eléctrico las superficies perforadas se combinan en serie o en paralelo con otros elementos [41, 44]. Como se verá en posteriores capítulos, los conductos perforados pierden influencia en el comportamiento acústico del silenciador a medida que aumenta la porosidad.

El parámetro más importante del modelado de placas y tubos perforados es la impedancia acústica. Es una función compleja que depende de tres parámetros principales [64]: el campo acústico, indicando si el flujo es tangencial o transversal, el nivel de presión acústica y la geometría y distribución de los elementos perforados que tiene en cuenta a su vez la porosidad, forma y tamaño de los orificios, espesor de la pared de la placa perforada y distancia entre orificios.

2.5.1. Impedancia acústica

La impedancia acústica Z_p de una superficie perforada se define como la relación de la diferencia de presión acústica entre ambas partes de la superficie y la velocidad acústica que la atraviesa

$$Z_p = \frac{P_e - P_s}{\bar{U}} = R_0 + jX_0 \quad (2.129)$$

donde P_e es la presión acústica a la entrada de un orificio, P_s la presión acústica a la salida del mismo y \bar{U} es la velocidad acústica promedio que atraviesa el orificio. La impedancia acústica es expresada en términos de resistencia R_0 , parte real de la impedancia acústica, y reactancia X_0 , parte imaginaria de la impedancia acústica.

En régimen lineal, en aplicaciones donde los niveles de presión acústica son considerados bajos, la impedancia acústica se relaciona linealmente con la diferencia de presión entre ambos lados de la superficie perforada. Un aumento de la presión acústica implica un incremento de la amplitud de la velocidad y variaciones del desfase a través de los orificios resultando una aproximación al comportamiento no lineal. Medidas experimentales realizadas en orificios demuestran un comportamiento cuadrático [56]. En estos casos la impedancia acústica depende de la velocidad a través de los orificios [44, 56].

Pese a la existencia de numerosos modelos de impedancia con resultados divergentes, un modelo sencillo y comúnmente utilizado es el propuesto por Sullivan y Crocker [106] definido por medio de la expresión

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{1}{\sigma} (6 \cdot 10^{-3} + j k_0 (t_h + 0.75 d_h)) \quad (2.130)$$

en la que ρ_0 es la densidad del aire, c_0 es la velocidad del sonido en el aire, k_0 el número de onda, t_h el espesor de la placa perforada, d_h el diámetro de los orificios y σ la porosidad de la superficie perforada. En régimen lineal la parte real o resistiva, asociada a las pérdidas, evidencia pocos cambios permaneciendo invariable. De (2.130)

$$R_0 = \left(\frac{2.49}{\sigma} \right) \quad (2.131)$$

La parte imaginaria o reactiva, dependiente de la frecuencia y de las características geométricas de la placa perforada, se determina por medio de la relación

$$X_0 = \rho_0 \omega \frac{1}{\sigma} (t_h + 0.75 d_h) \quad (2.132)$$

La porosidad ejerce una considerable influencia en ambos términos de la ecuación (2.130) actuando de manera inversamente proporcional a la impedancia acústica. Para evitar la sobreestimación de la impedancia asociada a este modelo, se utiliza un factor de corrección $F(\sigma)$ que tiene en cuenta la interacción entre orificios, traduciéndose en una reducción de la parte reactiva de la impedancia [41]

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{1}{\sigma} (6 \cdot 10^{-3} + j k_0 (t_h + 0.75 d_h F(\sigma))) \quad (2.133)$$

La parte reactiva [106] emplea un valor teórico de corrección de longitud de 0.75 que puede aumentar a 0.85 si se considera el concepto de radiación de un orificio [79]. El factor de corrección $F(\sigma)$ es calculado por medio de fórmulas como la de Ingard

$$F(\sigma) = 1 - 0.7\sqrt{\sigma} \quad (2.134)$$

o la de Fok

$$F(\sigma) = 1 - 1.41\sqrt{\sigma} + 0.34(\sqrt{\sigma})^3 + 0.07(\sqrt{\sigma})^5 \quad (2.135)$$

La Figura 2.10 muestra la comparación entre ambos modelos. La placa perforada tiene una porosidad $\sigma = 8\%$, un espesor $t_h = 0.0009$ m, y diámetro de orificios $d_h = 0.00249$ m.

En régimen no lineal [56, 106] el incremento de la presión acústica a valores superiores a 120 dB(A) (el nivel de presión acústica en los motores de combustión interna puede superar los 140 dB(A) [44]) involucra un aumento no lineal de la resistencia mientras que la reactancia tiende a disminuir, también de forma no lineal, pero en bastante menor grado comparado con la resistencia.

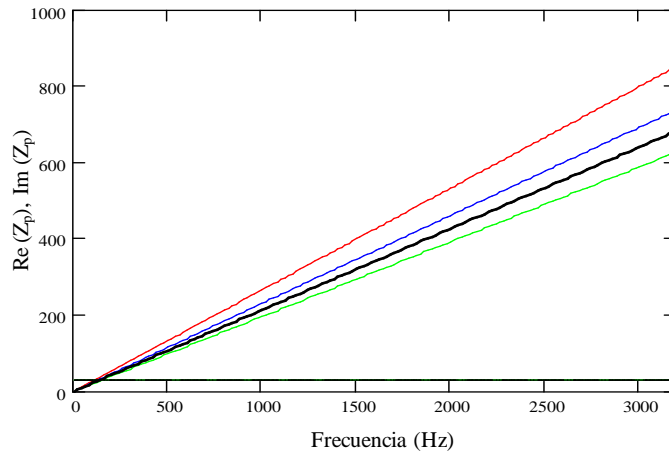


Figura 2.10 Comparación de modelos de impedancia de elementos perforados:
 —, parte real. Parte imaginaria: —, sin interacción de orificios; —, Ingard;
 —, Fok; —, promedio Ingard y Fok.

La consideración de flujo medio dificulta la obtención de la impedancia a través de los elementos perforados, por ello, en ocasiones, se recurre a la realización de medidas experimentales que permitan obtener modelos empíricos del comportamiento del flujo a través de los orificios. En las superficies perforadas expuestas al flujo medio tangente, definido por el número de Mach M , se generan turbulencias que modifican notablemente la impedancia local [73] alterando el patrón de distribución de la energía acústica a través de los orificios a causa de los efectos convectivos.

La resistencia de los orificios, en cualquier distribución perforada, se incrementa a medida que aumenta el flujo medio mientras que la reactancia tiende a disminuir ligeramente.

Basándose en un modelo empírico, Garrison [47] obtuvo la siguiente expresión

$$Z_p = (1 + 1.9M)R_0 + j(1 - 1.65M)\chi_0 \quad (2.136)$$

donde R_0 y χ_0 son la resistencia y reactancia, respectivamente, y M el número de Mach tangencial del flujo sobre el orificio.

Rao y Munjal [89] ensayaron los efectos del flujo medio en algunas variedades de conductos perforados aplicando condiciones de velocidad de flujo tangente similares a las existentes en los silenciadores de automóviles. La expresión empírica que determina la impedancia acústica bajo estas situaciones es

$$Z_p = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left((7.337 \cdot 10^{-3} (1 + 72.23M)) + j \left(2.2245 \cdot 10^{-5} \frac{\omega}{2\pi} (1 + 51t_h)(1 + 204d_h) \right) \right) \quad (2.137)$$

en la que el flujo medio afecta la parte resistiva del modelo. Los rangos definidos para la validez de esta expresión son $0.05 \leq M \leq 0.2$ para la velocidad del flujo tangente, $0.03 \% \leq \sigma \leq 0.1 \%$ para la porosidad, $1 \leq t_h \leq 3$ mm para el espesor de la superficie perforada y $1.75 \leq d_h \leq 7$ mm para el diámetro de los orificios.

Sullivan [108], basado en el modelo empírico de Garrison, modificó su modelo de impedancia sin flujo (2.130) en otro que lo considerase incluyendo en la componente resistiva la velocidad normal. Este efecto es similar al de un conducto perforado cerrado en un extremo donde el flujo es forzado a salir a través de los orificios y la velocidad presenta dos componentes: una componente tangente a la superficie, de valor máximo a la entrada y nula a la salida, y una componente normal o transversal \bar{U}_0 considerada uniforme [35, 108]

$$Z_p = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left(\frac{2.57\bar{U}_0}{c_0} + jk_0(t_h + 0.75d_h) \right) \quad (2.138)$$

Una expresión empírica desarrollada por Bauer [10] relaciona adicionalmente los efectos viscosos del medio y del número de Mach M en la modificación de la parte resistiva de la impedancia acústica

$$Z_p = \rho_0 c_0 \left(\left(\left(\frac{\sqrt{8\mu\rho_0\omega}}{\rho_0 c_0 \sigma} \right) \left(1 + \frac{t_h}{d_h} \right) + \frac{0.3M}{\sigma} + \frac{1.15(\bar{U}_0/c_0)}{\sigma} \right) + j \left(\frac{k_0(t_h + 0.25d_h)}{\sigma} \right) \right) \quad (2.139)$$

donde μ es la viscosidad dinámica del medio.

Jayaraman y Yam [58] modifican el modelo de impedancia de Sullivan y Crocker (2.130) al considerar al flujo medio tangente como parte influyente en la variación de la parte resistiva de la impedancia acústica.

$$Z_p = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left(\frac{0.514 d_h M}{l \sigma} + j 4.8 \cdot 10^{-5} f \right) \quad (2.140)$$

en la que f es la frecuencia. De esta expresión cabe destacar la magnitud M/l , el gradiente axial del número de Mach, que disminuye desde un valor máximo a la entrada del conducto perforado a un valor mínimo a la salida [50].

Otro grupo de expresiones que tienen en cuenta la variación de la parte resistiva de la impedancia acústica en función de la resistencia al flujo R_f y del factor de corrección de longitud δ/δ_0 son las propuestas por Kooi y Sarin [71], Cummings [30] y Kirby y Cummings [68]. Kooi y Sarin plantean

$$\frac{R_f c_0}{f d_h} = \left(5 - \frac{t_h}{d_h} \right) \left(9.9 \frac{u_*}{f d_h} - 3.2 \right) \frac{1}{4} \quad (2.141)$$

donde R_f corresponde a la resistencia promedio al flujo en el área del orificio y u_* la velocidad de fricción. El factor de corrección de longitud lo obtienen por medio de

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 0.92 - 0.75 \frac{u_*}{f t_h} + 0.11 \left(\frac{u_*}{f t_h} \right)^2, \quad 0.2 \leq \frac{u_*}{f t_h} \leq 3.5 \quad (2.142)$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = -0.04, \quad \frac{u_*}{f t_h} > 3.5 \quad (2.143)$$

en la que δ representa la corrección de longitud en presencia de flujo medio y δ_0 la corrección de longitud en ausencia de flujo medio. Cummings [30] expresa R_f como

$$\frac{R_f c_0}{f d_h} = \left(12.52 \left(\frac{t_h}{d_h} \right)^{-0.32} - 2.44 \right) \left(\frac{u_*}{f d_h} \right) - 32 \quad (2.144)$$

y el factor de corrección de longitud como

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1, \quad \frac{u_*}{ft_h} \leq 0.12 \frac{d_h}{t_h} \quad (2.145)$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(1 + 0.6 \frac{t_h}{d_h}\right) e^{\left(-\left(\frac{u_*}{ft_h} - 0.12 \frac{d_h}{t_h}\right) / \left(0.25 + \frac{t_h}{d_h}\right)\right)} - 0.6 \frac{t_h}{d_h}, \quad \frac{u_*}{ft_h} > 0.12 \frac{d_h}{t_h} \quad (2.146)$$

Kirby y Cummings al modificar la parte resistiva obtienen

$$\frac{R_f c_0}{fd_h} = \left(26.16 \left(\frac{t_h}{d_h}\right)^{-0.619} - 20\right) \left(\frac{u_*}{fd_h}\right) - 4.055 \quad (2.147)$$

y transformando el factor de corrección de longitud se llega a

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1, \quad \frac{u_*}{ft_h} \leq 0.18 \frac{d_h}{t_h} \quad (2.148)$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(1 + 0.6 \frac{t_h}{d_h}\right) e^{\left(-\left(\frac{u_*}{ft_h} - 0.18 \frac{d_h}{t_h}\right) / \left(1.8 + \frac{t_h}{d_h}\right)\right)} - 0.6 \frac{t_h}{d_h}, \quad \frac{u_*}{ft_h} > 0.18 \frac{d_h}{t_h} \quad (2.149)$$

Para estos tres últimos casos la parte resistiva de la impedancia acústica R_0 es la suma de la resistencia al flujo R_f y de las pérdidas viscosas R_v debidas al flujo turbulento, por tanto

$$R_0 = \rho_0 c_0 (R_f + R_v) \quad (2.150)$$

donde

$$R_v = \frac{\sqrt{8\nu\omega}}{c_0} \frac{t_h}{d_h} \quad (2.151)$$

y ν representa la viscosidad cinemática. La parte reactiva de la impedancia acústica X_0 es dependiente del factor de corrección de longitud δ/δ_0

$$X_0 = \rho_0 \omega \left(t_h + \frac{\delta}{\delta_0} (0.85 d_h)\right) \quad (2.152)$$

Debido a la diferencia de parámetros tenidos en cuenta entre los dos grupos de impedancias, Lee e Ih [73] los integran en una sola expresión empírica cuya parte resistiva, normalizada, es

$$R_0 = \rho_0 c_0 \frac{a_0}{\sigma} (1 + a_1 |f - f_0|) (1 + a_2 M) (1 + a_3 d_h) (1 + a_4 t_h) \quad (2.153)$$

donde $a_0 = 3.94 \cdot 10^{-4}$, $a_1 = 7.84 \cdot 10^{-3}$, $a_2 = 14.9$, $a_3 = 296$ y $a_4 = -127$. De esta parte resistiva el factor más importante lo constituye la frecuencia crítica f_0 que está en función de la velocidad del flujo medio M y del diámetro del orificio d_h

$$f_0 = \phi_1 \frac{1 + \phi_2 M}{1 + \phi_3 d_h} \quad (2.154)$$

en la que los coeficientes son $\phi_1 = 412$, $\phi_2 = 104$, $\phi_3 = 274$. Estos valores son obtenidos en base a un análisis de regresión no lineal de resultados de pruebas experimentales que consideraron a f_0 , M y d_h . La frecuencia crítica es la frecuencia en la que la resistividad alcanza un valor mínimo que suele ser cercano a cero y a partir de esa frecuencia la resistividad oscila en torno a ese valor. La parte reactiva está influenciada principalmente por la velocidad de flujo medio y la frecuencia

$$X_0 = \rho_0 c_0 \frac{b_0}{\sigma} (1 + b_1 d_h) (1 + b_2 t_h) (1 + b_3 M) (1 + b_4 f) \quad (2.155)$$

donde $b_0 = -6 \cdot 10^{-3}$, $b_1 = 194$, $b_2 = 432$, $b_3 = -1.72$ y $b_4 = -6.62 \cdot 10^{-3}$. Por lo general la parte reactiva aumenta cuando lo hace la frecuencia y disminuye cuando se incrementa la velocidad del flujo M . El rango de valores válidos para cada uno de estos parámetros son, para la frecuencia, $60 \leq f \leq 4000$ Hz, para la velocidad de flujo, $0 \leq M \leq 0.2$, para el diámetro de orificios, $2 \leq d_h \leq 9$ mm, para el espesor del conducto, $1 \leq t_h \leq 5$ mm y para la porosidad $2.79\% \leq \sigma \leq 22.3\%$.

2.6. Materiales absorbentes

Los materiales absorbentes o porosos son ampliamente utilizados en una gran variedad de aplicaciones para mejorar la atenuación sonora. La principal función de los materiales absorbentes es la reducción de la propagación de ondas, esto es, la disminución de la energía acústica del sonido [13]. Los materiales comúnmente empleados son las fibras naturales, artificiales y espumas poliméricas.

En un silenciador, el material absorbente que envuelve uno o varios conductos perforados puede caracterizarse a menudo como una estructura isótropa en la que internamente existen cavidades o poros interconectados distribuidos aleatoriamente, en el que el aire puede moverse a través de ellos [91]. El paso del aire a través de una estructura porosa, bajo condiciones de flujo medio, generalmente se define mediante una trayectoria tortuosa. Si el flujo no es turbulento el volumen de aire que atraviesa el material es directamente

proporcional a la diferencia de presión que origina el flujo. La atenuación acústica se produce en parte por el reflejo de la onda acústica, y por otra debido a las pérdidas viscosas en los intersticios.

Dependiendo del método utilizado en la fabricación de los silenciadores disipativos la variación de la densidad del material absorbente puede generar heterogeneidad, anisotropía en las fibras y variación de sus propiedades acústicas [13].

El uso de silenciadores disipativos se ha visto limitado debido a la degradación del material absorbente causado por las altas temperaturas de los gases de escape provenientes del motor y por arrastre del material. Sin embargo, durante los últimos años, la mejora de las propiedades de estos materiales ha propiciado que el empleo de los silenciadores disipativos se haya ampliado.

2.6.1. Introducción

Las propiedades más importantes de los materiales absorbentes pueden resumirse principalmente en la resistencia específica al flujo, densidad del material, porosidad, elasticidad y orientación de las fibras.

La resistencia específica al flujo o resistividad es una de las magnitudes más significativas en la caracterización acústica de materiales absorbentes. Se define como la relación de la presión a ambos lados de una muestra de material absorbente y el producto de la velocidad a través de la muestra por el espesor de la misma, medida en rayl/m

$$R = \frac{\Delta p}{\Delta T u} \quad (2.156)$$

donde R es la resistencia específica al flujo o resistividad (rayl/m), Δp es la diferencia de presión a ambos lados de la muestra porosa (Pa), ΔT corresponde al espesor (m) y u es la velocidad a través de la muestra (m/s). Este último parámetro se obtiene por medio de la relación entre el flujo volumétrico V (m³/s) y el área de la sección transversal de fibra que atraviesa S (m²)

$$u = \frac{V}{S} \quad (2.157)$$

La resistividad depende del tamaño de las fibras del material, de su forma y orientación, de la porosidad y de la uniformidad de su distribución.

La porosidad de un material absorbente es el cociente entre el volumen de los espacios libres de la muestra porosa y el volumen total

$$\Omega = \frac{V_a}{V_m} \quad (2.158)$$

en la que Ω es la porosidad (%), V_a corresponde al volumen del aire o fluido que ocupa los espacios libres y V_m es el volumen total de la muestra de material poroso.

Debido a que los espacios entre fibras es pequeño, a bajas frecuencias se observa un comportamiento isotérmico ya que durante la fase de compresión del gas se intercambia calor entre el aire y las fibras. En cambio, a altas frecuencias el intercambio de calor se reduce pues el tiempo de la compresión es menor, generándose entonces un comportamiento adiabático conllevando a una variación del volumen del aire producido por un cambio en la presión acústica [13]

$$\Delta P = -\kappa_p \frac{\Delta V}{V} \quad (2.159)$$

donde ΔV es el incremento del volumen del aire producido por el incremento de la presión acústica ΔP (Pa) del total del volumen de aire considerado y κ_p corresponde al módulo de compresibilidad volumétrico del aire en los poros, que varía desde 1.0 a 1.4 veces el valor de la presión atmosférica, dependiendo si la compresión del aire dentro del material es isotérmica o adiabática [12].

Otra propiedad de los materiales absorbentes corresponde a la densidad efectiva del aire, u otro fluido, ρ_p que se refiere a la variación de densidad del conjunto aire-estructura (fluido) del material absorbente en función de la frecuencia. A baja frecuencia las fibras del material oscilan junto al aire actuando como parte del mismo y a alta frecuencia las fibras permanecen estáticas.

El material poroso modifica el flujo del gas y su compresibilidad. La velocidad del fluido a través de los poros no es uniforme y su dirección depende de la tortuosidad del medio poroso. En el límite de la interfase material poroso-conducto principal la componente normal de la velocidad media de fluido u es continua [78]. La ecuación de continuidad para u sigue siendo válida si se considera que para un volumen determinado de material poroso se promedia el tamaño de los poros y la densidad del fluido que ocupa una fracción Ω del material poroso es $(\rho_0 + \rho)$. Teniendo en cuenta estos aspectos la ecuación de continuidad de primer orden es

$$\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_0 \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.160)$$

La relación entre el cambio de densidad ρ y presión acústica está dada por la expresión $\rho = -\kappa_p \rho_0 p$. Al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$\kappa_p \Omega \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot \vec{u} \quad (2.161)$$

El módulo de compresibilidad volumétrica κ_p a altas frecuencias es 1.4 veces la presión atmosférica y equivale al coeficiente de compresibilidad adiabático κ_s . A bajas frecuencias, κ_p es cercano a la presión atmosférica y se relaciona con el coeficiente de compresibilidad isotérmico κ_T . En algunos casos, κ_T varía en función de la frecuencia f . Expresando la presión acústica en función de ondas armónicas simples $p = P e^{j\omega t}$ la ecuación anterior se escribe como

$$j\omega \kappa_p \Omega p = \nabla \cdot \vec{u} \quad (2.162)$$

La porosidad del medio modifica la velocidad de la onda. Reemplazando ρ_T por $\rho_p \Omega$ en la ecuación (2.31) la velocidad acústica en los poros es [78]

$$c_p = \sqrt{\frac{1}{\kappa_p \rho_p \Omega}} \quad (2.163)$$

La velocidad acústica en los poros c_p es mayor que la velocidad de propagación en el aire c_0 si la porosidad del material absorbente Ω es pequeña. En cambio si el término $\rho_p \Omega$ es mayor que ρ_0 , la velocidad acústica en los poros será menor a la de propagación en el aire.

Reescribiendo la expresión (2.161) en función de (2.163) y de $p = P e^{j\omega t}$ se obtiene

$$\left(\frac{j\omega}{\rho_p c_p^2} \right) p = \nabla \cdot \vec{u} \quad (2.164)$$

La ecuación del movimiento debe tener en cuenta las consecuencias de la aceleración del fluido a través de los poros. En efecto, la presencia de materiales porosos genera cambios en las propiedades inerciales del fluido y variación de la fricción. Por tanto, la representación de las propiedades inerciales del fluido en los poros se define en función de la densidad efectiva del fluido ρ_p dependiente de la frecuencia ω , de la densidad del material poroso ρ_m , de la densidad del fluido externo al medio poroso ρ_0 , al factor estructural κ , porosidad del material Ω y de la resistividad R . Matemáticamente [12]

$$\rho_p = \frac{\rho_0 \kappa}{1 + \frac{R_1^2}{\left(\rho_m \omega \left(1 + \rho_0 \frac{(\kappa-1)}{\rho_m} \right) \right)^2}} \left(\frac{R_1^2}{\left(\rho_m \omega \left(1 + \rho_0 \frac{(\kappa-1)}{\rho_m} \right) \right)^2} \left(\Omega + \frac{\rho_m}{\kappa \rho_0} \right) + \frac{1}{\left(1 + \rho_0 \frac{(\kappa-1)}{\rho_m} \right)} \right) \quad (2.165)$$

A baja frecuencia el valor de la densidad efectiva tiende a $(\rho_m + \rho_0 \kappa \Omega)$, indicando que la interacción entre fluido y material poroso es equivalente a un solo elemento. A alta frecuencia ρ_p es aproximadamente igual a $\rho_0 \kappa$ verificándose

$$(\rho_p \rightarrow \rho_0 \kappa) > \rho_0 \quad (2.166)$$

Para los materiales comúnmente utilizados la densidad efectiva varía de 5.5 veces a 1 respecto a la densidad del aire.

El cambio de la fricción del flujo a través de los poros se expresa por medio de la resistencia al flujo R o resistividad definida anteriormente por la expresión (2.156). La ecuación de movimiento inicial

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = -\nabla p \quad (2.167)$$

que al ser escrita en términos de una onda armónica simple

$$j\omega \rho_0 \vec{u} = \nabla p \quad (2.168)$$

se transforma, al ser añadidos los términos inerciales y resistivos, en [78]

$$\rho_p \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + R\vec{u} + \nabla p = 0 \quad (2.169)$$

Esta expresión en forma de ondas armónicas simples es

$$j\omega \rho_p \left(1 + j \frac{R}{\rho_p \omega} \right) \vec{u} - \nabla p = 0 \quad (2.170)$$

Teniendo en cuenta que el potencial de velocidad acústica es definido por $\vec{u} = -\nabla\phi$ sustituyendo en la ecuación (2.167) la presión se expresaría como

$$p = \rho_p \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + R\phi \quad (2.171)$$

y derivando

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_p \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right) + R \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \quad (2.172)$$

Al reemplazar esta última expresión en (2.161) resulta

$$\nabla^2\phi = \kappa_p \Omega \left(\rho_p \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right) + R \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \right) \quad (2.173)$$

en la que el último término de la relación representa las pérdidas por fricción.

Al introducir el término de densidad efectiva compleja del fluido en los poros $\tilde{\rho}$

$$\tilde{\rho} = \rho_p \left(1 + j \frac{R}{\rho_p \omega} \right) \quad (2.174)$$

y el término coeficiente de compresibilidad efectiva del fluido en los poros $\tilde{\kappa} = \kappa_p \Omega$, la sustitución en la expresión (2.163) proporciona la velocidad acústica efectiva

$$\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\rho}\tilde{\kappa}}} = c_p \left(1 + j \frac{R}{\rho_p \omega} \right)^{-1/2} \quad (2.175)$$

Nuevamente utilizando el potencial de velocidad acústica y las expresiones (2.164), (2.168)

$$\frac{j\omega}{\tilde{\rho}\tilde{c}^2} p = \nabla \cdot \vec{u} \quad p = j\omega\tilde{\rho}\phi \quad (2.176, 2.177)$$

se puede escribir la ecuación de ondas para ondas armónicas simples como

$$\nabla^2\Phi + \left(\frac{\omega}{\tilde{c}} \right)^2 \Phi = 0 \quad (2.178)$$

La densidad y velocidades efectivas son cantidades complejas debido al término de fricción R . A altas frecuencias la parte imaginaria de ambas es menor a la unidad y la parte real es ligeramente mayor que la densidad y velocidad del fluido a la entrada del silenciador. Dada una onda plana de frecuencia $\omega/(2\pi)$, viajando en la dirección positiva de x representada por la expresión

$$\phi = A e^{j\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)} = A e^{j(\tilde{k}x - \omega t)} \quad (2.179)$$

el número de onda \tilde{k} en el material absorbente puede determinarse por medio de la expresión

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\rho_p \kappa_p \Omega} \left(1 + j \frac{R}{\rho_p \omega} \right)^{1/2} \quad (2.180)$$

que a altas frecuencias tiende a $\omega \sqrt{\rho_p \kappa_p \Omega}$ y a bajas frecuencias a $\sqrt{\omega \kappa_p \Omega R}$. Para otros tipos de ondas es posible su utilización mediante el empleo de la transformada de Fourier.

2.6.2. Caracterización del material

La caracterización acústica de materiales absorbentes suele realizarse mediante el uso de dos modelos, el modelo macroscópico de comportamiento de materiales y el modelo poroelástico. El primero de ellos conocido también como modelo de dos parámetros considera que el material absorbente puede caracterizarse por medio del número de onda \tilde{k} e impedancia acústica compleja \tilde{Z} [111]. Se aplica al análisis de materiales de tipo fibroso, de baja rigidez y en los que existe una significativa interacción entre la estructura sólida y los espacios ocupados por el aire u otro gas. Básicamente los materiales utilizados por la industria en la fabricación de silenciadores son del tipo fibroso. El segundo modelo, el poroelástico, está basado en las teorías de Biot [14] y adaptado por Allard [6] al problema acústico. Este modelo es empleado para caracterizar materiales absorbentes de tipo espuma, en los que la contribución de la rigidez en la parte estructural es elevada [91]. Delany y Bazley [34] realizaron estudios experimentales abarcando una extensa gama de materiales absorbentes de los que obtuvieron expresiones analíticas que podían definir la impedancia \tilde{Z} y el número de onda \tilde{k} en función de la frecuencia y de la resistencia al flujo estacionario. Posteriormente varios autores [83, 95, 96] en base a este planteamiento, llevaron a cabo numerosos estudios del comportamiento acústico global de silenciadores con materiales absorbentes. Las expresiones son [34]

$$\tilde{Z} = Z_0 \left[\left(1 + a_5 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_6} \right) + j \left(a_7 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_8} \right) \right] \quad (2.181)$$

$$\tilde{k} = k_0 \left[\left(1 + a_3 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_4} \right) + j \left(a_1 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_2} \right) \right] \quad (2.182)$$

donde $Z_0 = \rho_0 c_0$ representa la impedancia característica del medio, $k_0 = 2\pi f/c_0$ es el número de onda en el aire, f la frecuencia y R la resistividad del material absorbente. Adicionalmente otras propiedades, dependientes de las expresiones anteriores, que complementan la caracterización del material absorbente son: la velocidad acústica compleja y la densidad compleja definidas por

$$\tilde{c} = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{Z}}{\tilde{c}} = \frac{\tilde{Z}\tilde{k}}{\omega} \quad (2.183, 2.184)$$

2.6.3. Consideraciones adicionales

2.6.3.1. Efecto en la impedancia de conductos perforados

Las superficies perforadas estructuralmente proporcionan rigidez al silenciador y evitan el desprendimiento del material absorbente. Desde el punto de vista acústico el efecto más significativo es aumentar la reactancia, o parte imaginaria, de la impedancia acústica de la superficie debido a la circulación de aire a través de los orificios [18, 55].

Los estudios realizados para determinar la impedancia acústica de elementos perforados en contacto con materiales porosos en ausencia de flujo medio pueden resumirse en tres grandes categorías: trabajos analíticos, experimentales y semiempíricos.

El principal objetivo de los trabajos analíticos es el de determinar el efecto que ejercen los materiales absorbentes en la impedancia de los elementos perforados. Inicialmente Bolt [16] centró su investigación en la variación del valor de la reactancia de elementos perforados en contacto con material absorbente. Indicó que el aumento del número de orificios en contacto con el material absorbente tendía a mejorar el coeficiente de absorción a bajas frecuencias, en cambio, a altas frecuencias observó una tendencia inversa. Ingard y Bolt [55] mostraron que la combinación de material absorbente y elementos perforados eran equivalentes a un resonador de Helmholtz. Dejando un espacio libre entre la

superficie perforada y el material absorbente Callaway [18] e Ingard [57] lograron incrementar el valor de la parte resistiva de la impedancia.

Los trabajos empíricos combinan las propiedades acústicas de las superficies perforadas y de los materiales absorbentes para la obtención del coeficiente de absorción de los materiales absorbentes. Callaway y Ramer [18] demostraron que el espacio de aire entre la superficie perforada y el material absorbente aumenta el coeficiente de absorción aún incluso con valores pequeños de porosidad. En el trabajo de Davern [33] se consideró el efecto que ejercía la porosidad, el espesor de la placa perforada, la densidad del material absorbente, el espacio libre y el contacto entre el material absorbente y superficies perforadas sobre el coeficiente de absorción del material absorbente.

Los estudios semiempíricos se orientan a establecer las características de la interacción superficie perforada-material absorbente, destacando el cálculo la impedancia de las superficies perforadas y la posterior caracterización del material absorbente. En este sentido Kirby y Cummings [68] desarrollan para el cálculo de la impedancia de elementos perforados en contacto con material absorbente una formulación semiempírica a bajas frecuencias que tiene en cuenta la presencia de flujo medio tangente y descarta la interacción entre orificios. Este modelo combina la formulación empírica de caracterización de materiales absorbentes propuesta por Delany y Bazley [34] con el modelo teórico microestructural [6] a bajas frecuencias. De este modo, las expresiones que determinan la constante de propagación $\tilde{\Gamma}$ e impedancia característica \tilde{Z} son definidas por

$$\tilde{\Gamma} = j\sqrt{\gamma_0 q^2(\omega)} \left\{ \frac{(\ln(1-\Omega) + 1 + 2\Omega)\Omega \ln(1-\Omega) + \Omega^2 + 3\Omega^3/2 + \Omega^4/3}{(\ln(1-\Omega) + \Omega + \Omega^2/2)^2} - \left(\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \right) Pr - j \frac{\Omega}{2\pi \xi_f q_0^2 s^2(\omega)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.185)$$

$$\frac{\tilde{Z}}{\rho_0 c_0} = \sqrt{\frac{q^2(\omega)}{\gamma_0 \Omega^2}} \left\{ \frac{(\ln(1-\Omega) + 1 + 2\Omega)\Omega \ln(1-\Omega) + \Omega^2 + 3\Omega^3/2 + \Omega^4/3}{(\ln(1-\Omega) + \Omega + \Omega^2/2)^2} - \left(\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \right) Pr - j \frac{\Omega}{2\pi \xi_f q_0^2 s^2(\omega)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.186)$$

en los que los factores de tortuosidad $q^2(\omega)$ y de forma $s^2(\omega)$ son, respectivamente,

$$q^2(\omega) = \frac{\left((1 + a_3 \zeta_f^{a_4}) (1 + a_5 \zeta_f^{a_6}) - a_1 a_7 \zeta_f^{(a_2 + a_8)} \right) \left(\ln(1 - \Omega) + \Omega + \Omega^2 / 2 \right)^2}{\left(\ln(1 - \Omega) + 1 + 2\Omega \right) \ln(1 - \Omega) + \Omega + 3\Omega^2 / 2 + \Omega^3 / 3} \quad (2.187)$$

$$s^2(\omega) = \frac{q^2(\omega)}{2\pi \zeta_f q_0^2 \left(a_1 \zeta_f^{a_2} (1 + a_5 \zeta_f^{a_6}) + a_7 \zeta_f^{a_8} (1 + a_3 \zeta_f^{a_4}) \right)} \quad (2.188)$$

donde a_1, \dots, a_8 son los coeficientes de Delany y Bazley obtenidos experimentalmente. La impedancia acústica adimensional es calculada por la expresión

$$\zeta_p = \frac{1}{\sigma} \left\{ \zeta_p' - j 0.425 k_0 d_h + \frac{0.425 d_h \tilde{Z} \tilde{\Gamma}}{\rho_0 c_0} \right\} \quad (2.189)$$

La impedancia adimensional de un orificio ζ_p' en ausencia de material absorbente medida experimentalmente se puede escribir como

$$\zeta_p' = \frac{1}{\rho_0 c_0} (R_0 + j X_0) \quad (2.190)$$

donde la resistencia del orificio es calculada por

$$R_0 = \left(1 + \frac{t_h}{d_h} \right) \sqrt{\frac{8 k_0 \mu}{c_0}} \quad (2.191)$$

y la reactancia por

$$X_0 = j k_0 (0.25 d_h + t_h) \quad (2.192)$$

expresión parecida a la formulada por Bauer [10] excluyendo los efectos del flujo medio. Sin embargo, esta relación es válida en el rango de bajas frecuencias. En efecto, a partir de

$$f_{max} = 0.43 \frac{c_0}{r_2} \left\{ 1 - 0.06 \frac{S_2}{S_1} \right\} \quad (2.193)$$

se observan diferencias en los resultados al ser contrastada con el método de elementos finitos. En el trabajo de Selamet *et al.* [95, 100] se adapta la metodología de Kirby y Cummings en la modificación de la expresión de impedancia desarrollada por Sullivan y Crocker (2.130) en el caso de contacto

con material absorbente. La siguiente formulación es empleada en el rango de frecuencias utilizada en esta Tesis [37]

$$\tilde{\xi}_p = \frac{1}{\sigma} \left(6 \cdot 10^{-3} + j k_0 \left(t_h + 0.425 \left(1 + \frac{\tilde{Z}}{Z_0} \frac{\tilde{k}}{k_0} \right) d_h F(\sigma) \right) \right) \quad (2.194)$$

donde $F(\sigma)$ es el factor de corrección debido a la interacción entre orificios.

2.6.3.2. Medio móvil

La presencia de flujo medio en la entrada del silenciador induce un campo de flujo dentro del material absorbente de pequeña magnitud pero que en ocasiones puede modificar el comportamiento acústico del mismo. Considerando que el material absorbente es homogéneo y tiene propiedades isotrópicas, el flujo medio puede generar anisotropía y heterogeneidades.

Si bien el conocimiento del comportamiento acústico de las superficies perforadas en presencia de flujo tangente se sigue ampliando, está establecido que la existencia de flujo medio, tangente o normal, incrementa la resistencia y disminuye la reactancia de la impedancia en comparación al caso sin flujo. En el trabajo de Kirby y Cummings [68] se desarrollan las expresiones ya estudiadas adaptadas al caso con flujo medio, (2.147)-(2.149). Heurísticamente se asume que los efectos hidrodinámicos del flujo tangente en la resistencia y reactancia del orificio de la superficie de contacto con el flujo son despreciables debido a la presencia de material absorbente. Sustituyendo en (2.189) se determina la impedancia acústica con la presencia de flujo medio.

2.6.3.3. Resultados disponibles

A fines de comparar el efecto de la presencia de superficies perforadas en el comportamiento acústico de un silenciador se exponen los resultados experimentales de la atenuación acústica de un silenciador cuyas dimensiones se detallan en la Tabla 2.1 y que se muestra en la Figura 2.11. La Figura 2.12 indica el comportamiento acústico con superficies perforadas de elevada porosidad, $\sigma = 80\%$, expresado mediante el índice de atenuación acústica denominado Índice de Pérdidas de Transmisión o, según su abreviatura en inglés, *TL*, Transmission Loss. La Figura 2.13 exhibe la atenuación acústica cuando existen superficies perforadas en las que porosidad σ es de 11% en el conducto central y en las superficies perforadas. El diámetro de los conductos perforados d_h es de 0.0035 m, y el espesor t_h de 0.0003 m.

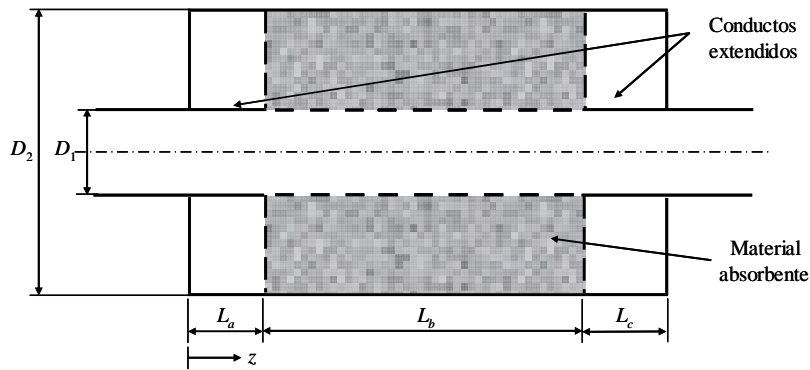


Figura 2.11 Silenciador con conductos extendidos parcialmente relleno de material absorbente y superficies perforadas.

Geometría	Long. silenciador L_T (m)	Long. extendido entrada L_a (m)	Long. cámara central L_b (m)	Long. extendido salida L_c (m)	Porosidad de las superficies perforadas σ (%)		
					lateral entrada	conducto central	lateral salida
1	0.2	0.075	0.1	0.025	80	80	80
2	0.2	0.075	0.1	0.025	11	11	11

Tabla 2.1 Dimensiones de un silenciador disipativo parcialmente relleno de material absorbente. Resistividad del material absorbente $R = 4896$ rayl/m, $R_1 = 0.0268$ m, $R_2 = 0.0886$ m.

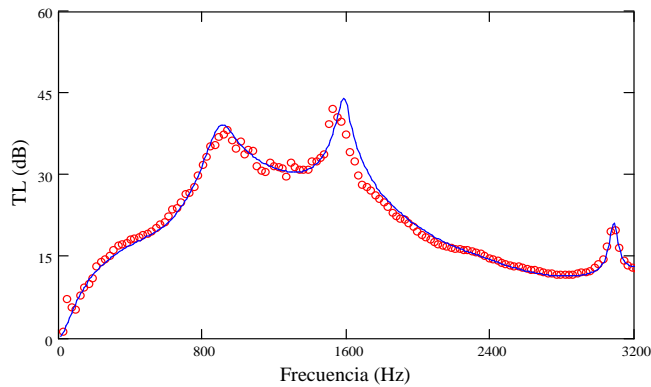


Figura 2.12 Índice de Pérdidas de Transmisión, TL , de un silenciador disipativo parcialmente relleno de material absorbente con porosidad $\sigma = 80\%$. Geometría 1: oooooo, experimental; —, MEF.

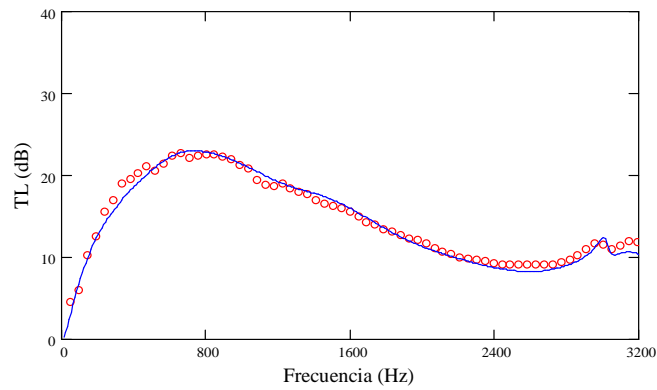


Figura 2.13 Índice de Pérdidas de Transmisión, TL , de un silenciador disipativo parcialmente relleno de material absorbente con porosidad $\sigma = 11\%$. Geometría 2: $\circ\circ\circ\circ$, experimental; —, MEF.

El índice de atenuación acústica de ambas figuras se ha contrastado con los resultados proporcionados por métodos numéricos como el método de Elementos Finitos. Por lo expuesto en las figuras los resultados generados mediante ambos métodos muestran una buena concordancia.

2.7. Silenciadores

Un silenciador es un elemento que forma parte de los sistemas de escape de gases de un motor de combustión interna. Conectado a una fuente de ruido reduce la transmisión del sonido disminuyendo su nivel sonoro y permitiendo el libre flujo de aire hacia la atmósfera. En el proceso de diseño de silenciadores, cuyo principal objetivo es minimizar la potencia acústica transmitida desde la fuente y la transmisión a través del sistema acústico, deben atenderse los siguientes criterios [13, 85]:

- El criterio acústico, en el que se especifica la atenuación mínima requerida para un determinado rango de frecuencias. En efecto, dadas las restricciones en materia medioambiental deben tenerse en cuenta los límites máximos de ruido permitidos.
- El criterio aerodinámico y de operación, presentando una mínima caída de carga a través del silenciador a partir de unas condiciones de flujo y temperatura.

- El criterio geométrico y de instalación, definiendo el volumen permisible del silenciador, su longitud, diámetro, peso, posición y las posibles restricciones geométricas de su instalación en el sistema de escape.

Los sistemas de escape de gases, utilizados en tractores, plantas de generación de electricidad, propulsión de barcos, además de los automóviles deben experimentar por un lado, una mejora continua en la atenuación acústica que permita satisfacer los cada vez más severos objetivos medioambientales de reducción de ruido y emisiones de sustancias contaminantes, y por otro, optimizar la potencia y rendimiento del motor.

La emisión de ruido proveniente de los gases de escape puede ser modificada por medio del diseño geométrico del silenciador, al cual pueden ser incorporados elementos como materiales absorbentes, superficies perforadas, conductos extendidos, entre otros, con el fin de reducir el sonido radiado a la atmósfera.

Los silenciadores se suelen dividir principalmente en dos grandes categorías: silenciadores disipativos y silenciadores reactivos, aunque no existe una barrera en la que se pueda expresar un concepto de silenciador puramente disipativo o puramente reactivo ya que todos los silenciadores atenúan por medio de la disipación y reflexión de la energía acústica. Existe una tercera categoría denominada híbrida que combina las características disipativas de los silenciadores con material absorbente y las propiedades reactivas y de resonancia de los silenciadores sin fibra, proporcionando la mejora de la atenuación acústica a ciertas frecuencias.

2.7.1. Silenciadores sin disipación

En los silenciadores sin disipación la atenuación acústica está relacionada con la configuración geométrica produciéndose en unos, fenómenos de reflexión de ondas y en otros, fenómenos de resonancia. Los silenciadores en los que se observan fenómenos de reflexión se denominan silenciadores reactivos y en ellos parte de la energía incidente es devuelta a la fuente debido a la reflexión de ondas, resultado de la existencia de cambios de sección y otras particularidades geométricas. Los resonadores son silenciadores en los que la atenuación acústica se basa en fenómenos en los que el fluido entra en resonancia, proceso que requiere parte de la energía e impide que ésta se propague. La atenuación suele ser elevada en frecuencias de excitación propias. Fuera del rango de frecuencias de excitación propias debe recurrirse a otros mecanismos de atenuación. Ejemplos comunes de silenciadores reactivos lo constituyen la cámara de expansión simple, compuesta por un conducto de entrada, una cámara de

expansión central y un conducto de salida, Figura 2.14 (a) y la cámara con doble salida, Figura 2.14 (c), con dos conductos de salida. En el silenciador de cámara reversa los conductos de entrada y salida se sitúan en un mismo plano de la cámara de expansión, Figura 2.14 (b).

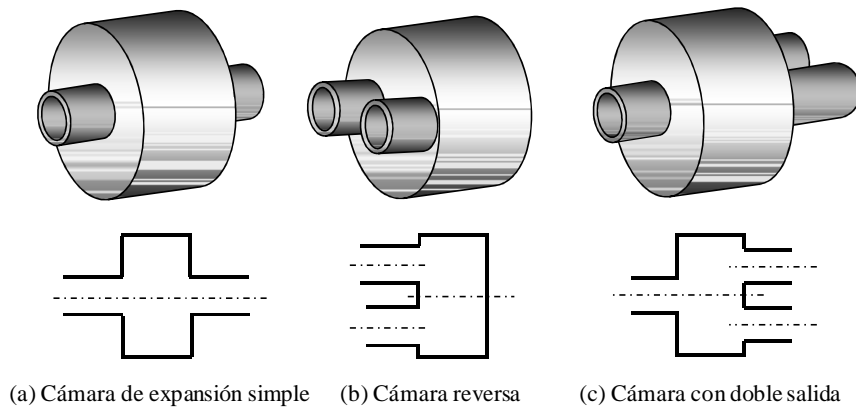


Figura 2.14 Ejemplos de configuraciones reactivas.

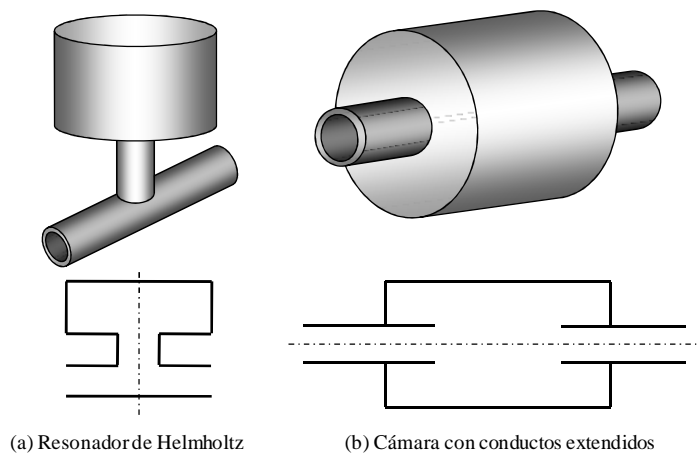


Figura 2.15 Ejemplos de resonadores.

El resonador de Helmholtz es el ejemplo usual de los resonadores. En él se produce una efectiva atenuación acústica a bajas frecuencias y la resonancia se origina por una combinación de la unión del cuerpo o cavidad y el cuello, Figura 2.15 (a). Otro modelo de resonador es el silenciador con conductos extendidos

los cuales penetran parcialmente en la cámara central y, por medio de una apropiada selección de sus longitudes, la resonancia se presenta a las frecuencias de interés, Figura 2.15 (b).

2.7.2. Silenciadores con disipación

En los silenciadores disipativos, Figura 2.16, la atenuación acústica es producida por la utilización de materiales absorbentes de gran superficie específica, generalmente en forma de fibra. La atenuación del ruido se presenta en un amplio rango de frecuencias tendiendo a incrementarse a medida que aumenta la misma. A diferencia de los silenciadores reactivos, hay disipación de energía acústica a medida que la onda se propaga a través del fluido en contacto con la fibra absorbente, aunque pueden existir en el silenciador efectos reactivos debido a la presencia de expansiones y contracciones, por ejemplo. La atenuación acústica aumenta con la densidad de compactación del material, su resistividad al flujo y otras propiedades acústicas.

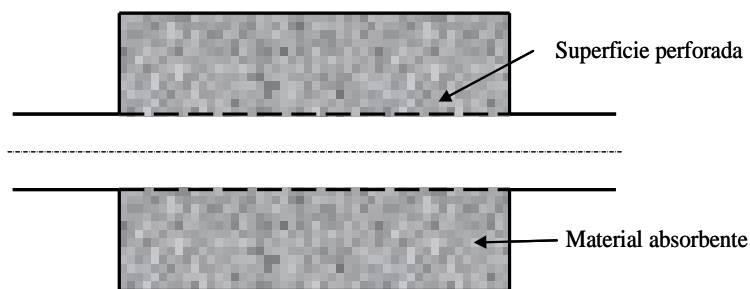


Figura 2.16 Silenciador disipativo.

Otra característica que facilita la implementación de silenciadores disipativos es la relación de la atenuación con el volumen de material absorbente. Sin embargo, un inconveniente añadido es que estos materiales tienden a deteriorarse debido al ensuciamiento y desintegración generados por el contacto de los gases calientes provenientes del motor. La introducción de otros elementos acústicos tales como placas y tubos perforados puede, en algunos casos, aumentar la atenuación además de proporcionar la suficiente rigidez al silenciador y evitar el arrastre del material absorbente debido al flujo de los gases.

2.8. Atenuación sonora en silenciadores

La atenuación sonora es la disminución de la potencia acústica de una onda sonora que se propaga entre dos puntos de un sistema acústico. Se puede

expresar mediante diferentes índices de medida tales como índice de Pérdidas de Inserción, IL , de Pérdidas de Transmisión, TL , o de Diferencia de Nivel, LD , y depende de las características del propio silenciador y en general de la fuente de ruido y de la impedancia de la terminación del sistema acústico.

2.8.1. Consideraciones energéticas

En un conducto en el que se propaga una onda acústica en presencia de flujo medio con velocidad U_{fm} y asumiendo comportamiento armónico, los valores de interés se obtienen a partir del promediado temporal de los campos acústicos instantáneos a lo largo de un periodo $2\pi/\omega$. La intensidad acústica I , definida como la energía que atraviesa una sección transversal de un conducto por unidad de tiempo y superficie se expresa por medio de

$$I = \langle pu \rangle + \frac{U_{fm}}{\rho_0} \langle p\rho \rangle + U_{fm} \rho_0 \langle u^2 \rangle + U_{fm}^2 \langle u\rho \rangle \quad (2.195)$$

donde el signo $\langle \rangle$ indica promediado temporal en el periodo y ρ es la componente de la perturbación de la densidad. Reescrita en función del número de Mach M y eliminando el término de perturbación de la densidad a través de la expresión (2.32)

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p_T}{\partial \rho_T} \right)_s$$

se obtiene

$$I = \langle pu \rangle + \frac{M}{\rho_0 c_0} \langle p^2 \rangle + M \rho_0 c_0 \langle u^2 \rangle + M^2 \langle pu \rangle \quad (2.196)$$

La potencia acústica W asociada a la onda se calcula integrando la intensidad en la sección transversal,

$$W = \int_S I \, dS = \int_S \left(\langle pu \rangle + \frac{M}{\rho_0 c_0} \langle p^2 \rangle + M \rho_0 c_0 \langle u^2 \rangle + M^2 \langle pu \rangle \right) dS \quad (2.197)$$

Asumiendo comportamiento armónico se puede escribir

$$P e^{j\omega t} = (P^+ + P^-) e^{j\omega t} = \left(|P^+| e^{j\alpha_p} + |P^-| e^{j\alpha_r} \right) e^{j\omega t} \quad (2.198)$$

$$U e^{j\omega t} = \frac{1}{\rho_0 c_0} (P^+ - P^-) e^{j\omega t} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(|P^+| e^{j\alpha_p} - |P^-| e^{j\alpha_r} \right) e^{j\omega t} \quad (2.199)$$

y realizando la integración temporal a lo largo del período $T = 2\pi/\omega$ de la ecuación (2.197) se tiene

$$W = W(M) = \frac{S}{2\rho_0 c_0} \left(|P^+|^2 (1+M)^2 - |P^-|^2 (1-M)^2 \right) \quad (2.200)$$

distinguiéndose la potencia asociada a la onda progresiva, P^+ , y a la onda regresiva, P^- . En ausencia de flujo medio simplemente $M = 0$.

2.8.2. Índices de atenuación sonora en silenciadores

El rango de amplitudes e intensidades de las señales acústicas que pueden observarse y medirse es muy amplio. Existen tres índices básicos de medida de atenuación sonora en silenciadores que se expresan en decibelios (dB) [15]:

- Índice de Pérdidas de Inserción, IL : definido como la diferencia entre dos niveles de potencia acústica (también puede ser presión e intensidad acústica) medidos en un mismo punto antes y después de que un silenciador haya sido insertado entre el punto de medida y la fuente de ruido. W_{ref} es la potencia acústica sin silenciador y W la potencia acústica con silenciador. De este modo

$$IL = 10 \log \left(\frac{W_{ref}}{W} \right) \quad (2.201)$$

- Índice de Pérdidas de Transmisión, TL : es la relación entre la potencia acústica que incide en el silenciador y la potencia acústica transmitida por éste cuando se utiliza una salida anecoica. El índice es independiente de la fuente de ruido [79]. S_1 y S_2 son las áreas de los conductos de entrada y salida respectivamente, P_1^+ la presión incidente y P_2^+ la presión transmitida. En ausencia de flujo medio las pérdidas de transmisión se obtienen por medio de la expresión

$$TL = 10 \log \left(\frac{S_1 |P_1^+|^2}{S_2 |P_2^+|^2} \right) = 20 \log \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{P_1^+}{P_2^+} \right| \right) \quad (2.202)$$

Debido a que este índice no depende de la interacción acústica con otros elementos de un sistema acústico, será empleado para evaluar el comportamiento acústico de los silenciadores a lo largo de la Tesis.

- Diferencia de Nivel, LD : referido a la diferencia de los niveles de presión acústica medidos en la fuente de generación de ruido (aguas arriba del silenciador) y en la salida (aguas abajo del silenciador). No es necesaria una terminación anecoica en la salida del silenciador [79]. Siendo P_1 la presión aguas arriba y P_2 la presión aguas abajo, la diferencia de nivel se calcula por la relación

$$LD = 20 \log \left(\left| \frac{P_1}{P_2} \right| \right) \quad (2.203)$$

2.9. Aplicaciones

Con la finalidad de mostrar el comportamiento acústico de algunos silenciadores se procede a la evaluación del índice de Pérdidas de Transmisión, TL , en base a la hipótesis de propagación unidimensional. Por medio del método de la Matriz de Transferencia, la matriz que relaciona las variables a la entrada y salida del silenciador, denotadas como subíndices 1 y 2, se representa mediante la expresión

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.204)$$

Descomponiendo en ondas incidentes y reflejadas y teniendo en cuenta las ecuaciones (2.52) y (2.55)

$$P_1 = P_1^+ + P_1^- \quad (2.205)$$

$$U_1 = \frac{1}{\rho_0 c_0} (P_1^+ - P_1^-) \quad (2.206)$$

por lo tanto

$$P_1^+ = \frac{P_1 + \rho_0 c_0 U_1}{2} \quad (2.207)$$

Al tener salida anecoica

$$P_2 = P_2^+ = \rho_0 c_0 U_2 \quad (2.208)$$

Dada la definición de TL en la expresión (2.202)

$$TL = 10 \log \left(\frac{S_1 |P_1^+|^2}{S_2 |P_2^+|^2} \right) = 20 \log \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{P_1 + \rho_0 c_0 U_1}{2 \rho_0 c_0 U_2} \right| \right] \quad (2.209)$$

De acuerdo a (2.204) se tiene finalmente

$$TL = 20 \log \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| A + \frac{B}{\rho_0 c_0} + \rho_0 c_0 C + D \right| \right] \quad (2.210)$$

2.9.1. Configuraciones sin disipación

Como ejemplo ilustrativo se obtendrá el TL de tres tipologías de silenciadores comúnmente utilizadas: una cámara de expansión simple, Figura 2.17, otra con conductos internos extendidos, Figura 2.19, y una última con un conducto central perforado, Figura 2.21, empleando el método de la Matriz de Transferencia.

2.9.1.1. Cámara de expansión simple

En la Figura 2.17 se muestra una cámara de expansión simple,

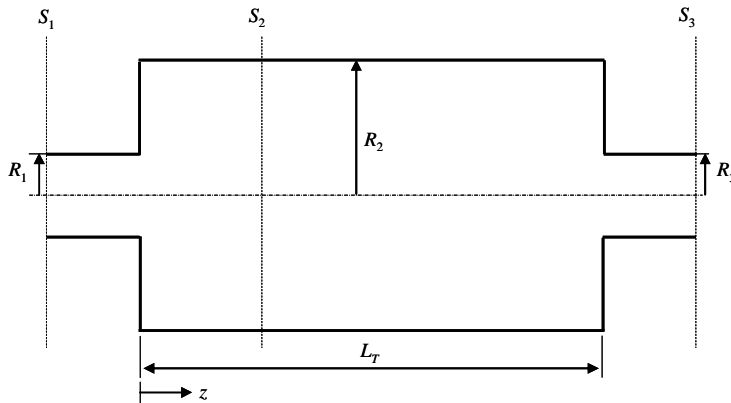


Figura 2.17 Cámara de expansión simple.

Las secciones transversales de entrada y salida son respectivamente S_1 y S_3 y la sección transversal de la cámara S_2 . Se observa en primer lugar la presencia de un conducto de entrada, cuya matriz de cuatro polos es M_1 , seguido de una expansión brusca en la que su matriz de transferencia se denota por M_2 . La cámara central tiene una matriz M_3 , la contracción otra matriz M_4 y el conducto

de salida una matriz M_5 . Multiplicando ordenadamente las matrices de los elementos que componen el silenciador y de los cambios de sección, la relación entre las variables de entrada y salida es

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.211)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_3}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.212)$$

Desarrollando y aplicando la definición de TL expresada en la ecuación (2.202) se logra la relación

$$TL = 10 \log \left[\frac{m_2}{4m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) + \frac{m_2}{4m_1} (m_1^2 - 1) \left(1 - \frac{1}{m_2^2} \right) \sin^2(k_0 L_0) \right] \quad (2.213)$$

siendo $m_1 = S_2/S_1$ y $m_2 = S_2/S_3$.

El TL de una cámara de expansión simple es una sucesión de cúpulas de atenuación de anchura constante y bandas de paso tal como se aprecia en la Figura 2.18, donde se presentan los TL de las configuraciones geométricas expuestas en la Tabla 2.2.

Geometría	$R_1 = R_3$ (m)	R_2 (m)	Longitud L_r (m)	R_2/R_1
1	0.0245	0.1	0.50	4.081
2	0.0245	0.1	0.25	4.081
3	0.0245	0.05	0.125	2.041

Tabla 2.2 Dimensiones relevantes de pruebas de cámara de expansión simple.

Los valores máximos de estas cúpulas aparecen a intervalos periódicos cuyas frecuencias están dadas por

$$f = \frac{(2n+1)c_0}{4L_2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.214)$$

Las bandas de paso tienen una frecuencia asociada de valor

$$f = \frac{nc_0}{2L_2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.215)$$

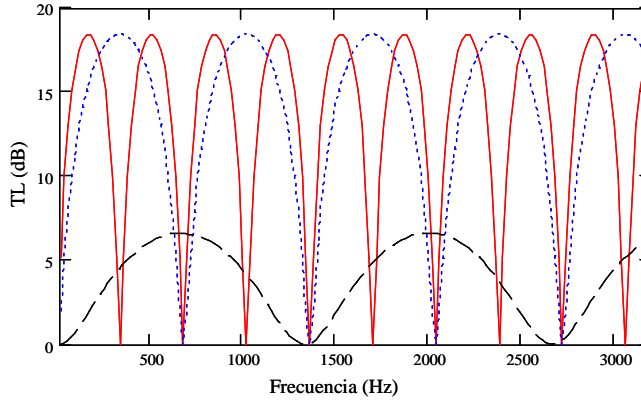


Figura 2.18 TL de cámara de expansión simple: —, geometría 1; - - - -, geometría 2; — · — ·, geometría 3.

De estas expresiones se concluye que el aumento de la longitud de la cámara proporciona un mayor número de cúpulas en un intervalo de frecuencias determinado y la relación de los radios cámara-conducto es proporcional a la amplitud máxima de atenuación.

2.9.1.2. Cámara de expansión con conductos extendidos

El silenciador con conductos extendidos, mostrado en la Figura 2.19, se ha dividido en cinco regiones formadas por los conductos extendidos de entrada y salida, la cámara y dos anillos alrededor de los conductos extendidos. Siguiendo el procedimiento aplicado en el ejemplo anterior (en este caso con flujo másico en lugar de velocidad), multiplicando ordenadamente las matrices de los elementos que componen el silenciador se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{S_2}{jc_0 \cot(k_0 L_a)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{S_4}{jc_0 \cot(k_0 L_c)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_5 & B_5 \\ C_5 & D_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.216)$$

donde $S_2 = S_3 - S_1$ y $S_4 = S_3 - S_5$.

En la Figura 2.20 se observa cómo influye la longitud de los conductos extendidos en la aparición de los picos de resonancia. Puede apreciarse que la sucesión de los picos de resonancia ocurre a las frecuencias dadas por la expresión (2.127). Así, para las geometrías 1 y 2 los picos de resonancia tienen lugar a 850 Hz, 2550 Hz y así sucesivamente, de acuerdo al valor de n . En la geometría 3 el primer pico sucede a 1133.33 Hz y el segundo sigue a 3400 Hz. También se observa la influencia de la razón de los radios de la cámara y de los conductos de entrada y salida, R_2/R_1 , en la amplitud de la atenuación. Como se estudiará en próximos capítulos una apropiada selección de las longitudes de los conductos extendidos contribuirá a una mejora sustancial del comportamiento acústico del silenciador, cuyo TL viene dado por

$$TL = 20 \log \left(\frac{1}{4m} \left| (m+1 + j(m-1) \tan(k_0 L_a)) \right. \right. \\ \left. \left. (m+1 + j(m-1) \tan(k_0 L_c)) e^{jk_0 L_b} \right. \right. \\ \left. \left. - (m-1)^2 (1 - j \tan(k_0 L_a)) (1 - j \tan(k_0 L_c)) e^{-jk_0 L_b} \right| \right) \quad (2.217)$$

donde $m = S_3/S_1$. En la Tabla 2.3 se detallan las dimensiones del silenciador utilizado.

Geometría	Long. extend. entrada L_a (m)	Long. cámara central L_b (m)	Long. extend. salida L_c (m)	$R_1 = R_3$ (m)	R_2 (m)
1	0.1	0.2	0.1	0.0245	0.06
2	0.1	0.2	0.1	0.0245	0.0822
3	0.075	0.25	0.075	0.0245	0.0822

Tabla 2.3 Dimensiones de silenciador con conductos extendidos.

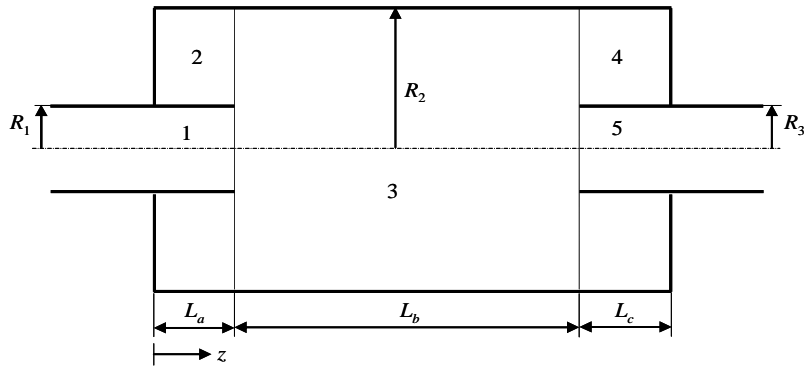


Figura 2.19 Silenciador con conductos extendidos.

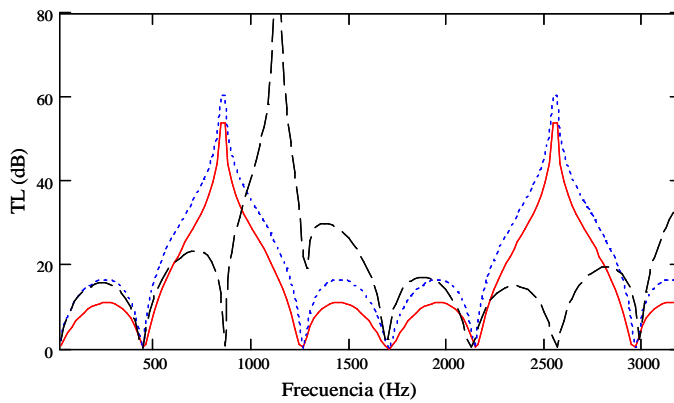


Figura 2.20 TL de silenciador con conductos extendidos: —, geometría 1; - - - -, geometría 2; — · — ·, geometría 3.

2.9.1.3. Resonador concéntrico

Los pasos seguidos para la obtención de la matriz de transferencia que permita modelar el comportamiento acústico de este silenciador se han desarrollado de acuerdo a la metodología aportada por Munjal [79]. Como se muestra en la Figura 2.21 los orificios del conducto perforado están uniformemente distribuidos a lo largo del conducto central cuya impedancia se denota como Z_p . Se asume la presencia de flujo medio y conductos de sección uniforme.

En base al modelo de Sullivan y Crocker [106], las ecuaciones de continuidad (2.34) y de equilibrio dinámico (2.36) para las secciones de conducto y cámara comunicados por medio de orificios se expresan respectivamente por

$$U_{fm1} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{4\rho_0}{D_1} U = -j\omega\rho_1 \quad (2.218)$$

$$\rho_0 \left(j\omega U_1 + U_{fm1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial z} \quad (2.219)$$

y para la cámara

$$U_{fm2} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{4D_1\rho_0}{D_2^2 - D_1^2} U = -j\omega\rho_2 \quad (2.220)$$

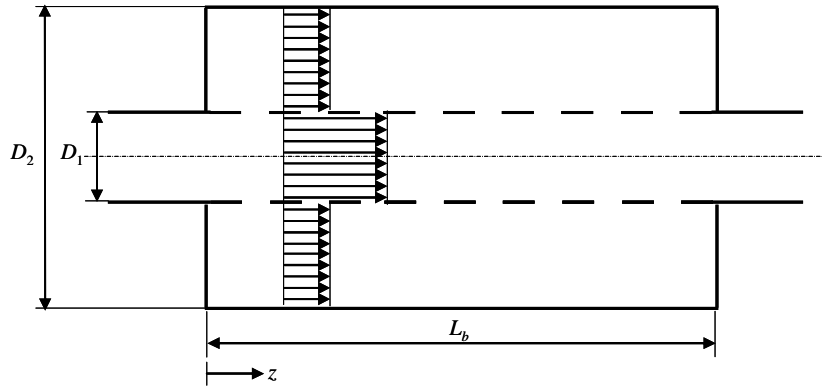


Figura 2.21 Resonador concéntrico con flujo medio.

$$\rho_0 \left(j\omega U_2 + U_{fm2} \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (2.221)$$

D_1 y D_2 representan los diámetros del conducto y de la cámara, respectivamente, ρ_0 , U_{fm1} y U_{fm2} son los valores promedio de densidad y velocidad de flujo medio, U_1 , U_2 , P_1 , P_2 , ρ_1 y ρ_2 son las perturbaciones acústicas y U es la velocidad acústica radial en la superficie del conducto perforado. Asumiendo la hipótesis de continuidad de velocidad radial [35] la velocidad a través de los orificios se determina por

$$U(z) = \frac{P_1(z) - P_2(z)}{Z_p} \quad (2.222)$$

donde Z_p adopta el modelo establecido en la ecuación (2.133) en el caso de no haber flujo medio y material absorbente, ecuación (2.194) en el caso de presencia de material absorbente y (2.153)-(2.155) para la existencia de material absorbente y flujo medio.

En la deducción de la ecuación de ondas se supuso que el proceso es isentrópico, luego al eliminar las densidades ρ_1, ρ_2 y las velocidades U_1, U_2, U , se obtiene la expresión

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 \\ \alpha_5 D + \alpha_6 & D^2 + \alpha_7 D + \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.223)$$

en la que $D = \partial/\partial z$ y los restantes términos equivalen a

$$\alpha_1 = -\frac{jM_1}{1-M_1^2} \left(\frac{k_a^2 + k_0^2}{k_0} \right) \quad \alpha_2 = \frac{k_a^2}{1-M_1^2} \quad (2.224)$$

$$\alpha_3 = -\frac{jM_1}{1-M_1^2} \left(\frac{k_a^2 - k_0^2}{k_0} \right) \quad \alpha_4 = -\left(\frac{k_a^2 - k_0^2}{1-M_1^2} \right) \quad (2.225)$$

$$\alpha_5 = -\frac{jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_b^2 - k_0^2}{k_0} \right) \quad \alpha_6 = -\left(\frac{k_b^2 - k_0^2}{1-M_2^2} \right) \quad (2.226)$$

$$\alpha_7 = -\frac{jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_b^2 + k_0^2}{k_0} \right) \quad \alpha_8 = \frac{k_b^2}{1-M_2^2} \quad (2.227)$$

$$k_a^2 = k_0^2 - \frac{j4k_0\rho_0c_0}{D_1Z_p} \quad k_b^2 = k_0^2 - \frac{j4k_0d_1\rho_0c_0}{(D_2^2 - D_1^2)Z_p} \quad (2.228)$$

Al ser un sistema de ecuaciones lineal, desacoplado se consigue un sistema equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_6 & \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.229)$$

siendo un sistema de ecuaciones del tipo $[A]\{P'\} + [B]\{P\} = 0$. Asumiendo soluciones exponenciales, se plantea un problema de valores y vectores propios

en el que la matriz correspondiente es $-[A]^{-1}[B]$. La solución buscada $\{P\}$ expresada en variables propias ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$) es de la forma

$$\{P\} = [\Psi]\{\Gamma\} \quad (2.230)$$

y $[\Psi]$ es la matriz que contiene los vectores propios. Siendo las soluciones exponenciales de la forma $\Gamma_i = C_i e^{\beta_i z}$, al sustituir estos términos y normalizando la primera fila de la matriz de los vectores propios a la unidad

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \Psi_{1,i} C_i e^{\beta_i z} = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\beta_i z} \quad (2.231)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \Psi_{2,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.232)$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^4 \Psi_{3,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.233)$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^4 \Psi_{4,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.234)$$

Para calcular U_1 y U_2 en función de las presiones se requiere la utilización de las ecuaciones (2.219) y (2.221) que establecen la relación entre ambos campos acústicos. De este modo

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 K_i e^{\beta_i z} \quad (2.235)$$

y deben evaluarse los coeficientes K_i . Al sustituir las ecuaciones (2.235) y (2.231) en la ecuación de equilibrio dinámico (2.219) los coeficientes K_i vienen dados por

$$K_i = -\frac{C_i}{j\rho_0\omega + \rho_0\beta_i U_{fm1}} \quad (2.236)$$

Por tanto, la velocidad en el conducto se expresaría como

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{j\rho_0\omega + \rho_0\beta_i U_{fm1}} e^{\beta_i z} \quad (2.237)$$

Ya que las componentes de la segunda columna de la matriz de vectores propios no son la unidad se repite este desarrollo para el cálculo de la velocidad de la cámara resultando

$$U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\Psi_{2,i} C_i}{j\rho_0\omega + \rho_0\beta_i U_{fm2}} e^{\beta_i z} \quad (2.238)$$

Estas expresiones pueden simplificarse al multiplicarlas por la impedancia característica del medio

$$\rho_0 c_0 U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{jk_0 + M_1 \beta_i} e^{\beta_i z} \quad (2.239)$$

$$\rho_0 c_0 U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\Psi_{2,i} C_i}{jk_0 + M_2 \beta_i} e^{\beta_i z} \quad (2.240)$$

Conociendo la relación entre las variables de los extremos se obtiene la matriz de transferencia del conducto perforado. Expresando la dependencia de z en función de las constantes C_j

$$\begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ \rho_0 c_0 U_1(z) \\ \rho_0 c_0 U_2(z) \end{Bmatrix} = [A(z)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.241)$$

La matriz $[A(z)]$ se calcula por medio de las expresiones (2.233), (2.234), (2.239) y (2.240). En las secciones inicial ($z = 0$) y final ($z = L$) del conducto perforado

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [A(L)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.242)$$

Igualando estas expresiones

$$[A(0)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.243)$$

Reordenando

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)][A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.244)$$

La matriz de transferencia relacionará las variables acústicas de entrada y salida del silenciador $\{P_1(0) \ U_1(0)\}^T$ y $\{P_1(L) \ U_1(L)\}^T$ respectivamente. La relación buscada es

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & \rho_0 c_0 T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.245)$$

Los términos de la matriz de transferencia son [79]

$$\begin{aligned} T_a &= T_{11} + A_1 A_2 & T_b &= T_{13} + B_1 A_2 \\ T_c &= T_{31} + A_1 B_2 & T_d &= T_{33} + B_1 B_2 \end{aligned} \quad (2.246)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{T_{41}}{F_1} & B_1 &= -\frac{T_{43}}{F_1} \\ A_2 &= T_{21} & B_2 &= T_{32} \end{aligned} \quad (2.247)$$

$$F_1 = T_{42} \quad (2.248)$$

Los términos T_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$ son los términos de la matriz $[T]$ de la expresión (2.245). Aplicando (2.210) se obtiene el TL del silenciador.

A continuación se muestran unos ejemplos de lo expuesto teniendo en cuenta un flujo medio M de 0, 0.1 y 0.2. La Tabla 2.4 expone las dimensiones de las geometrías del silenciador analizadas en las que el espesor del conducto perforado, t_h , es de 0.0009 m y el diámetro de los orificios, d_h , de 0.00249 m. La porosidad, σ , tiene valores de 2, 8, 16 y 100% (cámara de expansión simple).

Geometría	Diámetro conducto $D_1(\text{m})$	Diámetro cámara $D_2(\text{m})$	Longitud cámara $L_b(\text{m})$	Longitud silenciador $L_T(\text{m})$	Porosidad σ (%)
1	0.049	0.1644	0.3	0.3	2
2	0.049	0.1644	0.3	0.3	8
3	0.049	0.1644	0.3	0.3	16
4	0.049	0.1644	0.3	0.3	100

Tabla 2.4. Dimensiones relevantes de un silenciador concéntrico.

La Figura 2.22 exhibe el comportamiento acústico de las geometrías 1 a 4 obtenido por medio del modelo de onda plana. Los resultados indican que la incorporación de conductos perforados de baja porosidad logra un aumento de la atenuación a bajas frecuencias. La mejora de la atenuación a frecuencias más elevadas requiere emplear una mayor porosidad de dichos conductos.

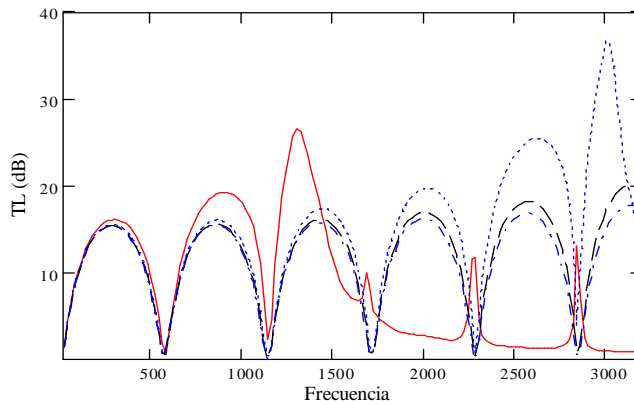


Figura 2.22. TL de un silenciador concéntrico sin flujo medio. Variación de la porosidad: —, geometría 1; ·····, geometría 2; — — —, geometría 3; - - - -, geometría 4.

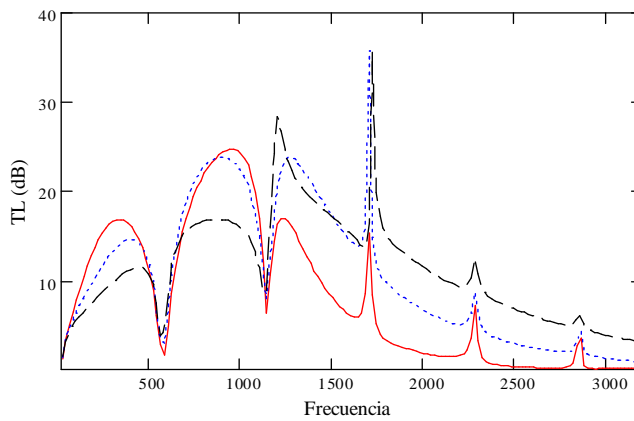


Figura 2.23 TL de silenciador concéntrico con flujo medio. Geometría 1: —, $M = 0.1$; ·····, $M = 0.15$; — — —, $M = 0.2$.

En la Figura 2.23 se observa que la velocidad de flujo medio disminuye la atenuación en los rangos de baja frecuencia. También se comprueba el aumento

del valor mínimo de las bandas de paso, debido a la disipación asociada al conducto perforado y al efecto convectivo.

Si al silenciador de la Figura 2.21 se le añaden conductos extendidos a la entrada y la salida, tal como se muestra en la Figura 2.24, se obtiene un silenciador con tubos extendidos y conducto central perforado.

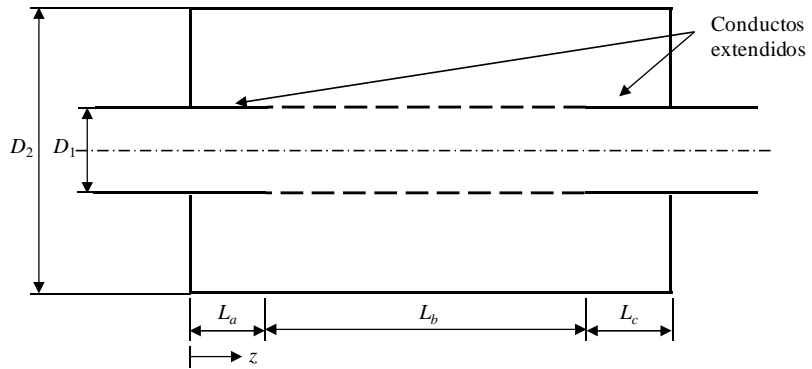


Figura 2.24 Silenciador con conductos extendidos y superficie perforada.

La obtención del TL de este silenciador sigue un procedimiento similar al planteado entre las ecuaciones (2.218)-(2.244). Imponiendo las condiciones adecuadas que permitan la eliminación de los campos acústicos pertenecientes a la cámara y empleando la información de la sección 2.4.4 se tiene,

$$Z_2(0) = \frac{P_2(0)}{-U_2(0)} = j\rho_0 c_0 \cot(k_0 L_a) \quad (2.249)$$

$$Z_2(L) = \frac{P_2(L)}{-U_2(L)} = j\rho_0 c_0 \cot(k_0 L_c) \quad (2.250)$$

donde se ha tenido en cuenta el sentido de la velocidad utilizado. La relación buscada es, nuevamente,

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & \rho_0 c_0 T_b \\ \frac{T_c}{\rho_0 c_0} & T_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.251)$$

y los términos de la matriz de transferencia se calculan por medio de las igualdades [79]

$$\begin{aligned} T_a &= T_{11} + A_1 A_2 & T_b &= T_{13} + B_1 A_2 \\ T_c &= T_{31} + A_1 B_2 & T_d &= T_{33} + B_1 B_2 \end{aligned} \quad (2.252)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{X_1 T_{21} - T_{41}}{F_1} & B_1 &= \frac{X_1 T_{23} - T_{43}}{F_1} \\ A_2 &= T_{21} + X_2 T_{14} & B_2 &= T_{32} + X_2 T_{34} \end{aligned} \quad (2.253)$$

$$F_1 = T_{42} + X_2 T_{44} - X_1 (T_{22} + X_2 T_{24}) \quad (2.254)$$

$$X_1 = -j \tan(k_0 L_a) \quad X_2 = j \tan(k_0 L_c)$$

De nuevo, los términos T_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$ equivalen a los términos de la matriz $[T]$ definida en la expresión (2.245). Utilizando la fórmula (2.210) se obtiene el TL de este silenciador.

La Tabla 2.5 muestra las dimensiones de las geometrías del silenciador analizadas. Se asumen los mismos valores de espesor de la placa perforada, t_h , y del diámetro de los orificios, d_h , que en la sección anterior.

Geometría	Diámetro conducto D_1 (m)	Diámetro cámara D_2 (m)	Long. extend. entrada L_a (m)	Long. cámara central L_b (m)	Long. extend. salida L_c (m)	Long. silenciador L_T (m)	Porosidad σ (%)
1	0.049	0.1644	0.05	0.20	0.05	0.30	2
2	0.049	0.1644	0.05	0.20	0.05	0.30	8
3	0.049	0.1644	0.05	0.20	0.05	0.30	16
4	0.049	0.1644	0.05	0.20	0.05	0.30	100

Tabla 2.5 Dimensiones relevantes de silenciador con conductos extendidos y superficie perforada. Espesor superficie perforada, $t_h = 0.0009$ m. Diámetro de los orificios de la superficie perforada, $d_h = 0.00249$ m.

Los resultados expuestos en la Figura 2.25 señalan, a frecuencias centrales, un aumento del pico de atenuación a medida de la porosidad de la superficie perforada aumenta. El lugar de aparición del pico de atenuación en este rango de frecuencias es debido a la longitud de los conductos extendidos de entrada y de salida. La geometría 4 donde la porosidad σ es del 100% equivale a un silenciador con conductos extendidos sin superficie perforada.

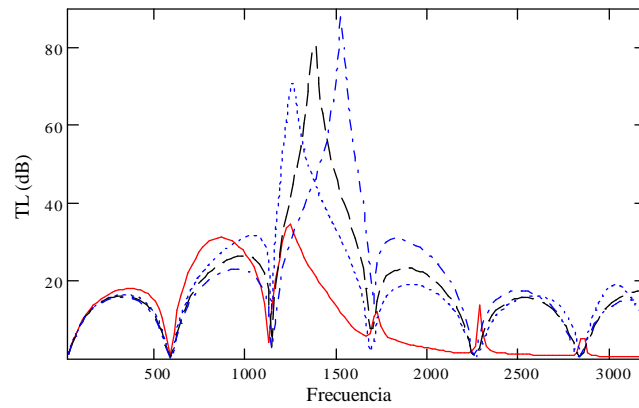


Figura 2.25 TL de un silenciador con conductos extendidos y superficie perforada. —, geometría 1; ·····, geometría 2; — — —, geometría 3; — — —, geometría 4.

La Figura 2.26 indica el comportamiento acústico de este silenciador cuando circula flujo medio. Se comprueba que el aumento de la velocidad de flujo medio disminuye la atenuación acústica a bajas frecuencias.

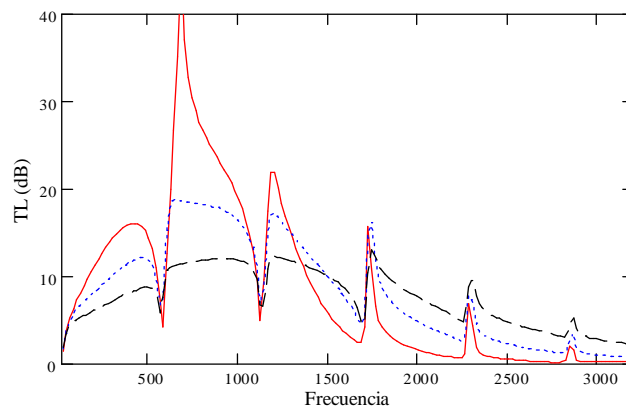


Figura 2.26 TL de un silenciador con conductos extendidos y superficie perforada con flujo medio. Geometría 1: —, $M = 0.1$; ·····, $M = 0.15$; — — —, $M = 0.2$.

2.9.2. Configuraciones con disipación

Los silenciadores con material absorbente disponen, en general, de conductos perforados que cumplen básicamente dos importantes funciones: proteger el material del arrastre ocasionado por los gases y aumentar la rigidez del

silenciador. De este modo, los silenciadores disipativos a analizar disponen todos de conductos perforados.

2.9.2.1. Silenciador concéntrico con material absorbente

Para modelar el silenciador con material absorbente en la región exterior al conducto perforado, se seguirá un planteamiento similar al expuesto en la sección 2.9.1.3 teniendo en cuenta algunas modificaciones referidas a la existencia de material absorbente. La Figura 2.27 muestra un esquema de un silenciador disipativo.

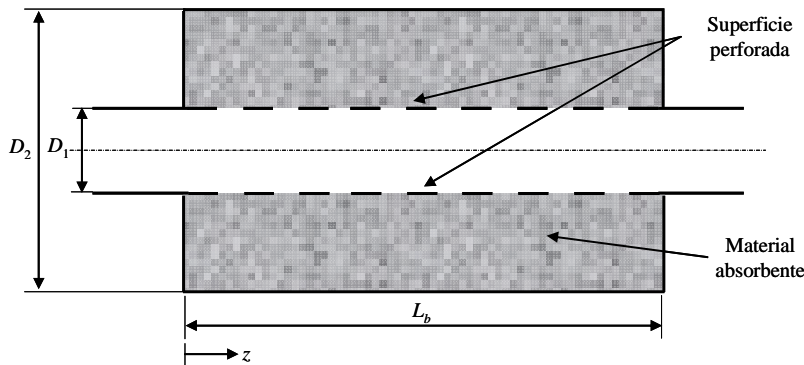


Figura 2.27 Silenciador con material absorbente y conducto central perforado.

En una sección cualquiera de la cámara disipativa las ecuaciones de continuidad y equilibrio dinámico, en secciones de conducto y cámara que estén comunicados por medio de orificios, se expresan para el conducto,

$$\rho_0 \left(j\omega U_1 + U_{fm1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P_1}{\partial z} \quad (2.255)$$

y para la cámara [116]

$$U_{fm2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \tilde{p} \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{4D_1 \tilde{p}}{D_2^2 - D_1^2} U = - j\omega \tilde{p} \quad (2.256)$$

$$\tilde{p} \left(j\omega U_2 + U_{fm2} \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (2.257)$$

Como se indicó en el caso anterior, D_1 y D_2 y representan los diámetros del conducto y de la cámara, respectivamente, ρ_0 y U_{fm1} son la densidad promedio y

la velocidad de flujo axial en el centro del conducto, $\tilde{\rho}$ y U_{fm2} constituyen los valores de densidad del material absorbente y velocidad de flujo axial en el mismo, que se asume nula, U_1 , U_2 , P_1 , P_2 , ρ_1 y $\tilde{\rho}_2$ son las perturbaciones acústicas en la velocidad de partícula axial, presión y densidad en el centro del conducto y material absorbente, respectivamente y U es la velocidad radial a través de los orificios. Nuevamente, asumiendo la hipótesis de continuidad de velocidad radial y teniendo la misma condición en los orificios que en el caso anterior

$$U(z) = \frac{P_1(z) - P_2(z)}{\tilde{Z}_p} \quad (2.258)$$

donde la impedancia \tilde{Z}_p debe adaptarse a la presencia de material absorbente. Siguiendo un procedimiento análogo al realizado con el resonador concéntrico se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} D^2 + a_1 D + a_2 & a_3 D + a_4 \\ a_5 & D^2 + a_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.259)$$

en el que $D = \partial/\partial z$. Los restantes términos son

$$a_1 = -\frac{1}{1-M_1^2} \left(j2k_0 M_1 + \frac{4M_1 \rho_0 c_0}{D_1 \tilde{Z}_p} \right) \quad a_2 = \frac{1}{1-M_1^2} \left(\tilde{k}^2 - \frac{4jk_0 \rho_0 c_0}{D_1 \tilde{Z}_p} \right) \quad (2.260)$$

$$a_3 = -\frac{1}{1-M_1^2} \left(\frac{4M_1 \rho_0 c_0}{D_1 \tilde{Z}_p} \right) \quad a_4 = \frac{1}{1-M_1^2} \left(\frac{4jk_0 \rho_0 c_0}{D_1 \tilde{Z}_p} \right) \quad (2.261)$$

$$a_5 = \frac{4D_1}{D_2^2 - D_1^2} \left(\frac{j\tilde{\rho} k_0 c_0}{\tilde{Z}_p} \right) \quad a_6 = \tilde{k}^2 - \frac{4D_1}{D_2^2 - D_1^2} \left(\frac{j\tilde{\rho} k_0 c_0}{\tilde{Z}_p} \right) \quad (2.262)$$

donde $k_0 = \omega/c_0$ y $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$ representan los números de onda en el aire y en el material absorbente, respectivamente.

El sistema equivalente es

$$\begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_3 & -a_2 & -a_4 \\ 0 & 0 & -a_5 & -a_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (2.263)$$

similar al sistema de ecuaciones del tipo $\{P'\} = [A]\{P\}$.

Expresando la solución buscada $\{P\}$ en variables propias ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$)

$$\{P\} = [\Psi]\{\Gamma\} \quad (2.264)$$

y $[\Psi]$ es la matriz que contiene los vectores propios. Considerando que $\Gamma_i = C_i e^{\beta_i z}$ puede escribirse

$$P_1 = \sum_{i=1}^4 \Psi_{1,i} C_i e^{\beta_i z} = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\beta_i z} \quad (2.265)$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^4 \Psi_{2,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.266)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \Psi_{3,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.267)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \Psi_{4,i} C_i e^{\beta_i z} \quad (2.268)$$

donde los vectores se han normalizado a primera componente unidad. Para el cálculo de U_1 y de U_2 en función de las presiones se utilizan las ecuaciones (2.255) y (2.257) que relacionan ambos campos acústicos. Escribiendo

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 K_i e^{\beta_i z} \quad (2.269)$$

deben evaluarse los coeficientes K_i . Al sustituir las ecuaciones (2.265) y (2.269) en la ecuación de equilibrio dinámico (2.219) se obtiene

$$K_i = -\frac{C_i}{j\rho_0\omega + \rho_0\beta_i U_{jml}} \quad (2.270)$$

donde la velocidad en el conducto se expresaría por

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{j\rho_0\omega + \rho_0\beta_i U_{fm1}} e^{\beta_i z} \quad (2.271)$$

Procediendo de similar manera para el cálculo de la velocidad en la cámara y teniendo en cuenta que las componentes de la segunda columna de la matriz de vectores propios son diferentes de la unidad, resulta

$$U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\Psi_{2,i} C_i}{j\tilde{\rho}\omega + \tilde{\rho}\beta_i U_{fm2}} e^{\beta_i z} \quad (2.272)$$

Al multiplicar las velocidades por la impedancia característica del aire y despreciando el flujo medio en el interior del material

$$\rho_0 c_0 U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{jk_0 + M_1 \beta_i} e^{\beta_i z} \quad (2.273)$$

$$\rho_0 c_0 U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\Psi_{2,i} C_i \rho_0 c_0}{j\tilde{k}} e^{\beta_i z} \quad (2.274)$$

Conociendo la relación entre las variables de los extremos del conducto se obtiene la matriz de transferencia del conducto perforado. Expresando la dependencia de z en función de las constantes C_i

$$\begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ \rho_0 c_0 U_1(z) \\ \rho_0 c_0 U_2(z) \end{Bmatrix} = [A(z)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.275)$$

donde la matriz $[A(z)]$ se determina a partir de las expresiones (2.265) y (2.268). Planteando para las secciones inicial ($z = 0$) y final ($z = L$) del conducto perforado

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)] [A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.276)$$

La matriz de transferencia que relaciona las variables acústicas a la entrada y a la salida del elemento en estudio es

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.277)$$

Los términos de esta matriz son calculados por medio de las expresiones

$$A = T_{11} - T_{12} \frac{T_{41}}{F} \quad B = T_{13} - T_{12} \frac{T_{43}}{F} \quad (2.278)$$

$$C = T_{31} - T_{32} \frac{T_{41}}{F} \quad D = T_{33} - T_{32} \frac{T_{43}}{F} \quad (2.279)$$

$$F = T_{42}$$

Los términos de la matriz $[T]$ referida en la expresión (2.277) quedan definidos por T_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$. A partir de la matriz de transferencia en (2.277) y aplicando la fórmula (2.210) se consigue el TL de este silenciador. Las pruebas efectuadas en función de la resistividad se resumen en la Tabla 2.6.

Geometría	Diámetro conducto D_1 (m)	Diámetro cámara D_2 (m)	Long. cámara L_b (m)	Long. silenciador L_T (m)	Resistividad R (rayl/m)
1	0.049	0.1644	0.25	0.25	0
2	0.049	0.1644	0.25	0.25	1000
3	0.049	0.1644	0.25	0.25	4896
4	0.049	0.1644	0.25	0.25	17378

Tabla 2.6 Pruebas de un silenciador con material absorbente y conductos perforados. Variación de la resistividad. Porosidad de la superficie perforada $\sigma = 8\%$.

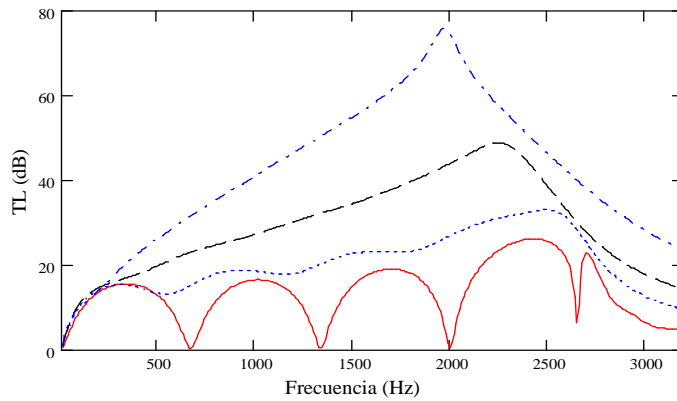


Figura 2.28 TL silenciador con material absorbente: —, geometría 1; - - - -, geometría 2; — — —, geometría 3; - · - ·, geometría 4.

El TL exhibido en la Figura 2.28 muestra que el comportamiento acústico del silenciador mejora a medida que se incrementa la resistividad y la densidad de compactación del material absorbente.

2.9.2.2. Silenciador con material absorbente y conductos extendidos

La Figura 2.29 muestra un silenciador con conductos extendidos, conductos perforados y material absorbente.

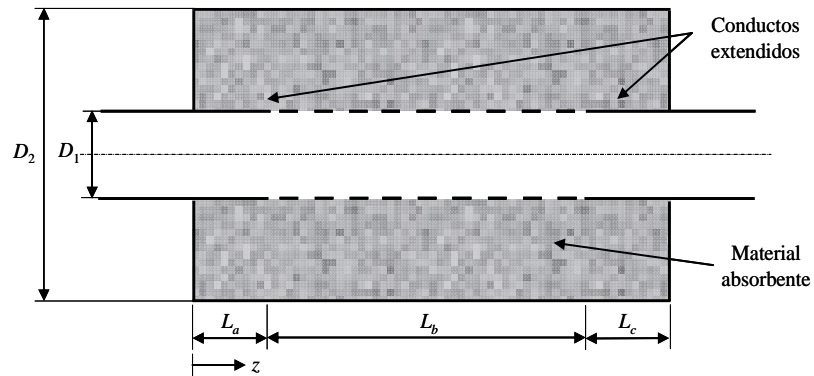


Figura 2.29 Silenciador con material absorbente y conductos extendidos.

A partir del planteamiento analizado en la sección anterior y aplicando las condiciones adecuadas que permitan la eliminación de los campos acústicos pertenecientes a la cámara y empleando la información de la sección 2.4.4 se tiene,

$$Z_2(0) = \frac{P_2(0)}{-U_2(0)} = j\tilde{\rho}\tilde{c} \cot(\tilde{k}L_a) \quad (2.280)$$

$$Z_2(L) = \frac{P_2(L)}{-U_2(L)} = j\tilde{\rho}\tilde{c} \cot(\tilde{k}L_c) \quad (2.281)$$

donde nuevamente se ha considerado el sentido de la velocidad utilizado. Como en el caso anterior la matriz de transferencia que relaciona las variables acústicas a la entrada y a la salida del elemento en estudio es

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.282)$$

Los términos de esta matriz son calculados a partir de las expresiones

$$A = T_{11} + (T_{12} + T_{14} X_1) \frac{X_2 T_{21} - T_{41}}{F} \quad B = T_{13} + (T_{12} + T_{14} X_1) \frac{X_2 T_{23} - T_{43}}{F} \quad (2.283)$$

$$C = T_{31} + (T_{32} + T_{34} X_1) \frac{X_2 T_{21} - T_{41}}{F} \quad D = T_{33} + (T_{32} + T_{34} X_1) \frac{X_2 T_{23} - T_{43}}{F}$$

en las que

$$\begin{aligned} X_1 &= -j \tan(\tilde{k} L_a) \\ X_2 &= -j \tan(\tilde{k} L_c) \end{aligned} \quad (2.284)$$

$$F = T_{42} + X_1 T_{44} - X_2 (T_{22} + X_1 T_{24})$$

Como en los casos anteriores, los términos de la matriz $[T]$ referida en la expresión (2.282) quedan determinados por T_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$. De la matriz de transferencia en (2.282) y utilizando (2.210) se calcula el TL del silenciador.

Los ejemplos de este tipo de silenciador se resumen en la Tabla 2.7

Geometría	Diámetro conducto D_1 (m)	Diámetro cámara D_2 (m)	Long. extendido entrada L_a (m)	Long. cámara central L_b (m)	Long. extendido salida L_c (m)	Long. silenciador L_T (m)	Resistividad R (rayl/m)
1	0.049	0.1644	0.025	0.20	0.025	0.25	0
2	0.049	0.1644	0.025	0.20	0.025	0.25	1000
3	0.049	0.1644	0.025	0.20	0.025	0.25	4896
4	0.049	0.1644	0.025	0.20	0.025	0.25	17378

Tabla 2.7 Pruebas de silenciador con material absorbente y conductos extendidos. Variación de la resistividad. Porosidad de la superficie perforada $\sigma = 8\%$.

En la Figura 2.30 se muestran los resultados del comportamiento acústico de este tipo de silenciador. Para la geometría 1 es posible apreciar el comportamiento reactivo de esta geometría, mientras que el material absorbente de las geometrías 2 y 3 modifica esta tendencia observándose mejoras de la atenuación en los rangos de media y alta frecuencia. Las limitaciones del modelo de onda plana impiden analizar con mayor precisión el comportamiento disipativo del silenciador en los citados rangos de frecuencia. Al comparar el efecto de la presencia de un conducto perforado y material absorbente en la Figura 2.31 se comprueba que la incorporación de conductos perforados mejora la atenuación

del silenciador y además la inserción de material absorbente contribuye a eliminar las bandas de paso. En la Tabla 2.8 se resumen las dimensiones relevantes.

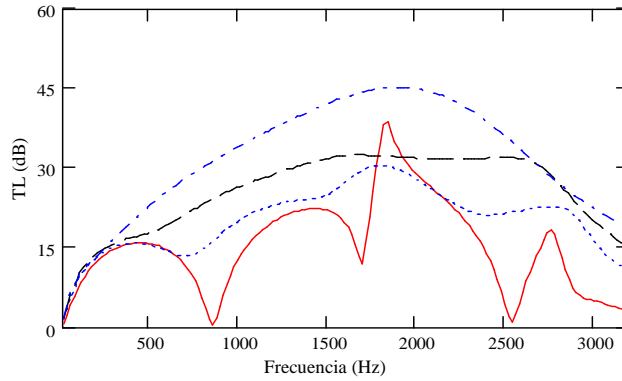


Figura 2.30 TL silenciador con material absorbente y conductos extendidos: —, geometría 1; - - -, geometría 2; — · —, geometría 3; - · - · -, geometría 4.

Geometría	Diámetro conducto D_1 (m)	Diámetro cámara D_2 (m)	Long. cámara L_b (m)	Long. silenciador L_T (m)	Resistividad R (rayl/m)	σ (%)
5	0.049	0.1644	0.20	0.20	0	100
6	0.049	0.1644	0.20	0.20	0	8
7	0.049	0.1644	0.20	0.20	4896	8

Tabla 2.8 Dimensiones relevantes de cámara de una expansión simple, añadiendo un conducto perforado y material absorbente.

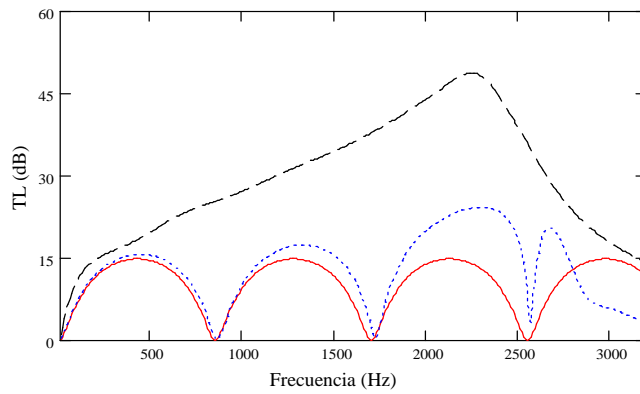


Figura 2.31 Efecto de la presencia del conducto perforado y material absorbente en la atenuación acústica: —, geometría 5; - - -, geometría 6; — · —, geometría 7.

En la Figura 2.32 se aprecia una configuración híbrida con conductos extendidos en el que no existe material absorbente alrededor de los conductos extendidos de entrada y de salida.

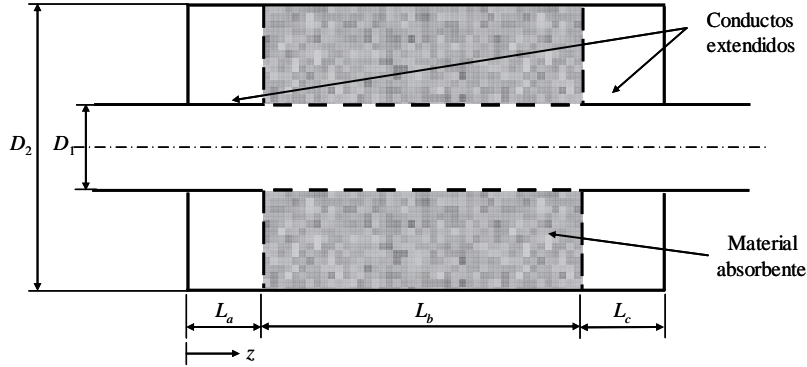


Figura 2.32 Esquema de silenciador con conductos extendidos, superficie perforada parcialmente relleno de material absorbente. $\sigma = 100\%$ en placas laterales.

El cálculo de la atenuación es similar al caso anterior con la diferencia de que a la hora de imponer las condiciones de contorno ha de tenerse en cuenta el número de onda y la densidad del aire. De esta forma, tal y como en (2.249) y (2.250) se tiene,

$$Z_2(0) = \frac{P_2(0)}{-U_2(0)} = j\rho_0 c_0 \cot(k_0 L_a) \quad (2.285)$$

$$Z_2(L) = \frac{P_2(L)}{-U_2(L)} = j\rho_0 c_0 \cot(k_0 L_c) \quad (2.286)$$

y, también

$$\begin{aligned} X_1 &= -j \tan(k_0 L_a) \\ X_2 &= -j \tan(k_0 L_c) \end{aligned} \quad (2.287)$$

$$F = T_{42} + X_1 T_{44} - X_2 (T_{22} + X_1 T_{24})$$

La multiplicación ordenada de las matrices correspondiente a cada elemento es equivalente a la expresión (2.251). Los resultados de las pruebas efectuadas en un silenciador cuyas dimensiones son las establecidas en la Tabla 2.7 se exhiben en la Figura 2.33.

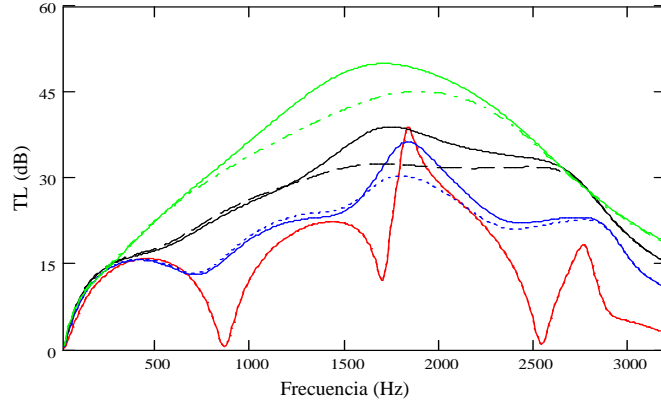


Figura 2.33 TL de silenciadores con conductos extendidos parcialmente rellenos de material absorbente. Variación de la resistividad. Geometría 1: —, sin fibra; geometría 2: —, relleno, - - -, parcialmente relleno; geometría 3: —, relleno, - - -, parcialmente relleno; geometría 4: —, relleno, - - -, parcialmente relleno.

La Figura 2.33 muestra que el comportamiento acústico de los silenciadores con conductos extendidos parcialmente rellenos es, por una parte reactivo, debido a la existencia de zonas sin relleno de fibra alrededor de los conductos extendidos, y por otra parte, disipativo. A altas frecuencias, los silenciadores con mayor relleno de fibra tienen mejor atenuación acústica. No obstante, la atenuación acústica de estos silenciadores es superada por la de los silenciadores disipativos concéntricos debido a la existencia de una mayor cantidad de fibra absorbente.

2.9.2.3. Silenciador con material absorbente y resonadores laterales

La Figura 2.34 presenta la configuración geométrica correspondiente a un silenciador con cámaras laterales, superficies perforadas y material absorbente. Para este silenciador la multiplicación ordenada de las matrices correspondientes a cada elemento proporciona

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_1}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} A_5 & B_5 \\ C_5 & D_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_6 & B_6 \\ C_6 & D_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_1}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_7 & B_7 \\ C_7 & D_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_7 \\ U_7 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.288)$$

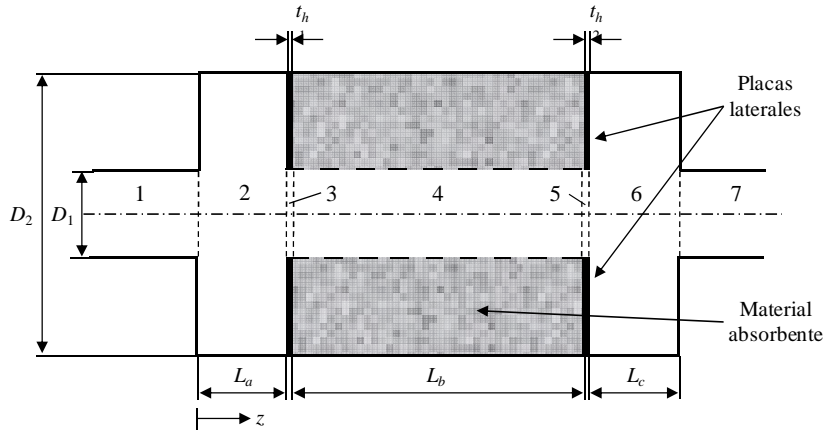


Figura 2.34 Silenciador con material absorbente y cámaras laterales.

Los términos de la matriz correspondiente al conducto perforado y material absorbente, región 4, equivalen a los descritos en las expresiones (2.282) y (2.283). Las dimensiones relevantes de las geometrías estudiadas se sintetizan en la Tabla 2.9.

Geometría	Diámetro conducto D_1 (m)	Diámetro cámara D_2 (m)	Long. cámara entrada L_a (m)	Long. cámara central L_b (m)	Long. cámara salida L_c (m)	Long. silenciador L_T (m)	Resistividad R (rayl/m)
1	0.049	0.1644	0.06	0.13	0.06	0.25	0
2	0.049	0.1644	0.06	0.13	0.06	0.25	1000
3	0.049	0.1644	0.06	0.13	0.06	0.25	4896
4	0.049	0.1644	0.06	0.13	0.06	0.25	17378

Tabla 2.9 Dimensiones de las geometrías empleadas. Porosidad del conducto perforado, $\sigma = 8\%$.

Los resultados expuestos en la Figura 2.35 indican el carácter reactivo del comportamiento acústico de un silenciador sin material absorbente y sin superficies perforadas, geometría 1, y la modificación de la atenuación al insertar estos elementos, geometrías 2 y 3. Se observa una mejora de la atenuación en los rangos de media y alta frecuencia aunque, nuevamente, el modelo de onda plana restringe un estudio más riguroso del comportamiento acústico en estos rangos de frecuencias.

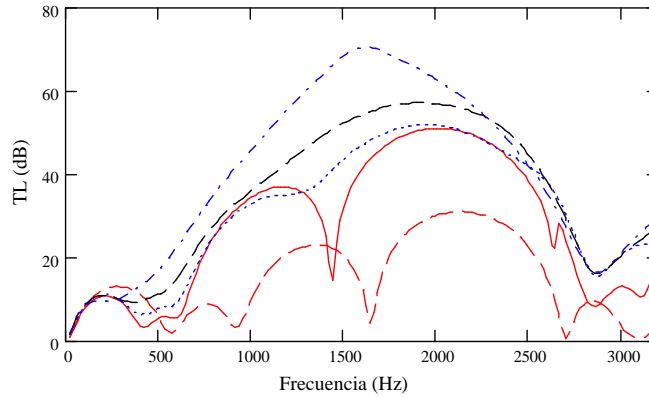


Figura 2.35 *TL* de silenciador con material absorbente y resonadores laterales:
 - - -, geometría 1 ($\sigma = 100\%$); — — —, geometría 1; - - - - -, geometría 2;
 — — —, geometría 3; - - - - -, geometría 4.

2.9.2.4. Silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales

En la Figura 2.36 se muestra la geometría correspondiente a un silenciador con cámara anular, cámaras laterales y material absorbente. En este caso, para la obtención de la matriz de transferencia se tiene en cuenta el flujo másico. Para el silenciador exhibido en la Figura 2.36, el planteamiento matricial es

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_5 & B_5 \\ C_5 & D_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_6 & B_6 \\ C_6 & D_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_7 & B_7 \\ C_7 & D_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_8 & B_8 \\ C_8 & D_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_8 \\ V_8 \end{Bmatrix} \quad (2.289)$$

donde Z_3 es la impedancia local correspondiente a la cámara anular externa y es equivalente a (2.124)

$$Z_3 = -jY_3 \cot(k_0 L_c)$$

y el *TL*, considerando flujo másico, se calcula por medio de la expresión [79]

$$TL = 20 \log \left(\left(\frac{Y_1}{Y_8} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{A + \frac{B}{Y_1} + Y_8 C + \left(\frac{Y_8}{Y_1} \right) D}{2} \right| \right) \quad (2.290)$$

en la que $Y_1 = Y_8 = c_0/S_1$.

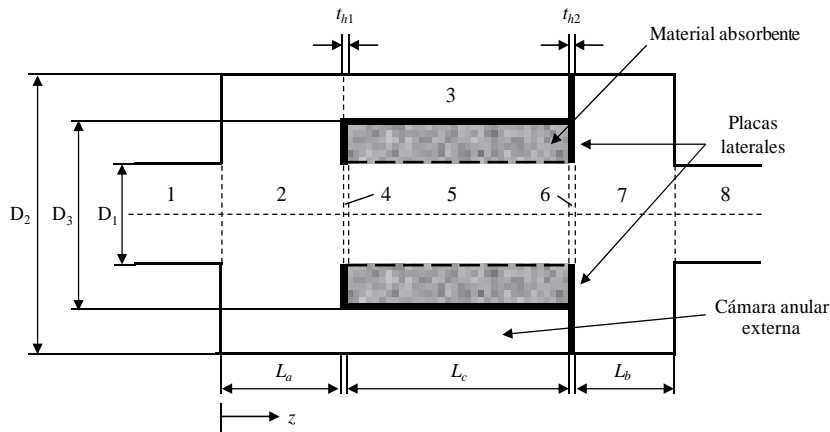


Figura 2.36 Silenciador con material absorbente, cámara anular y cámaras laterales.

En la evaluación de la matriz correspondiente a la región con superficie perforada y material absorbente, región 5, debe tenerse en cuenta que los coeficientes de la matriz de vectores propios se calculan con el diámetro D_3 y aplicando (2.282) y (2.283) se determinan los componentes de la matriz. El resumen de las pruebas efectuadas se indica en la Tabla 2.10.

Geometría	Diámetro orificio D_1 (m)	Diámetro exterior D_2 (m)	Diámetro cámara D_3 (m)	Long. cámara entrada L_a (m)	Long. cámara central L_b (m)	Long. cámara salida L_c (m)	Long. silenciador L_T (m)	Resistividad R (rayl/m)
1	0.049	0.1644	0.1444	0.025	0.175	0.05	0.25	0
2	0.049	0.1644	0.1444	0.025	0.175	0.05	0.25	1000
3	0.049	0.1644	0.1444	0.025	0.175	0.05	0.25	4896
4	0.049	0.1644	0.1444	0.025	0.175	0.05	0.25	17378
5	0.049	0.1644	0.12	0.05	0.15	0.05	0.25	4896

Tabla 2.10 Dimensiones de silenciadores con material absorbente, cámara anular y cámaras laterales. Variación de la resistividad. Porosidad conducto perforado, $\sigma = 8\%$.

En la Figura 2.37 se presentan los resultados de las pruebas realizadas. Como en el caso anterior, la ausencia de material absorbente y superficies perforadas proporciona un comportamiento acústico reactivo, geometría 1. La atenuación

acústica es mejorada en los rangos de media y alta frecuencia al incorporar material absorbente y superficies perforadas. También se observa una sucesión de picos de resonancia cuya frecuencia de aparición se relaciona con la longitud de la cámara anular.

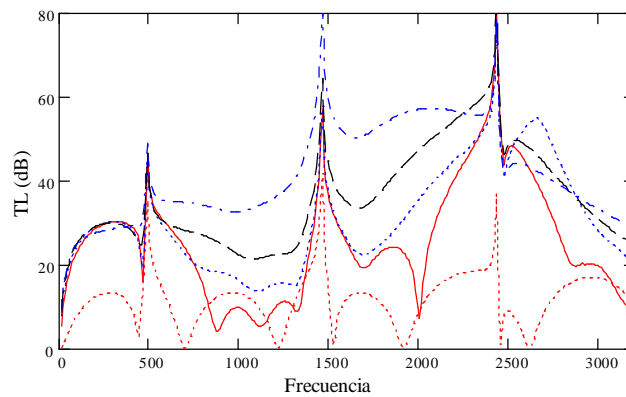


Figura 2.37 TL de silenciador con material absorbente, cámara anular y cámaras laterales:
 - - - - , geometría 1 ($\sigma=100\%$); — — — — , geometría 1; - - - - , geometría 2;
 - - - - , geometría 3; — — — — , geometría 4.

2.10. Limitaciones

En una discontinuidad geométrica el campo acústico es multidimensional, generándose modos de alto orden. Por tanto, ante cambios bruscos de sección la solución ofrecida por el método de onda plana es aproximada. Otra limitación se refiere a que el modelo de onda plana proporciona los mismos resultados con independencia de la geometría de la sección transversal.

Los resultados obtenidos a lo largo del capítulo se pueden comparar con otros modelos más precisos, como Elementos Finitos, de forma que se puedan evidenciar las limitaciones del método de onda plana. En un silenciador de cámara de expansión simple puede comprobarse que los resultados de ambos modelos coinciden en un rango limitado de frecuencias y una vez superado comienzan las discrepancias debidas a la generación de modos de alto orden, situación que el modelo de onda plana no puede predecir, Figura 2.38.

Geometría	Diámetro conducto D_1 (m)	Diámetro cámara D_2 (m)	Long. silenciador L_T (m)
1	0.049	0.1644	0.2572

Tabla 2.11 Dimensiones de una cámara de expansión simple.

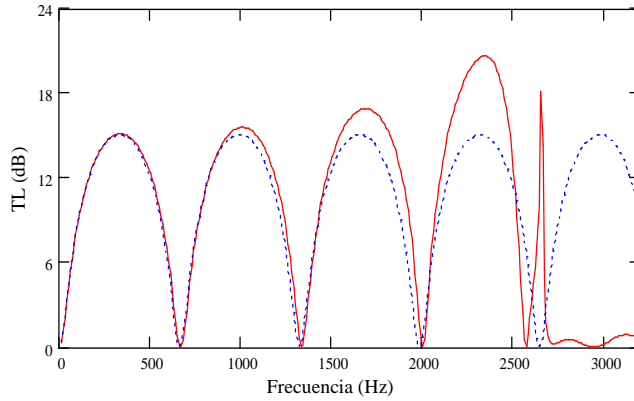


Figura 2.38 TL de una cámara de expansión simple. Comparación entre métodos de onda plana y Elementos Finitos: —, Elementos Finitos; - - - , onda plana.

En un silenciador híbrido con cámaras laterales de corta longitud, Figura 2.34, el campo acústico en éstas es dominado por las ondas transversales. Por lo expuesto en la Figura 2.39 el modelo de onda plana no puede predecir la aparición del pico de resonancia correspondiente a las cámaras laterales.

Geometría	Diámetro conducto D_1 (m)	Diámetro cámara D_2 (m)	Long. cámara entrada L_a (m)	Long. cámara central L_b (m)	Long. cámara salida L_c (m)	Long. silenciador L_T (m)	Resistividad R (rayl/m)
1	0.049	0.1644	0.05	0.1572	0.05	0.2572	4896

Tabla 2.12 Dimensiones de un silenciador con material absorbente y cámaras laterales. Porosidad del conducto central perforado, $\sigma = 8\%$.

En el silenciador híbrido de la Figura 2.36, de acuerdo al modelo de onda plana, la existencia del anillo externo influye en el comportamiento acústico proporcionando picos de resonancia. La Figura 2.40 expone el TL de varios silenciadores con diferentes longitudes de la cámara anular externa. En efecto, a medida que se incrementa la longitud de la misma, aumenta el número de picos de atenuación. No obstante, este modelo no predice la atenuación producida por la presencia de las cámaras laterales. La Figura 2.41 muestra el TL de varios silenciadores en función de la existencia o no de las cámaras laterales de entrada y salida, no apreciándose diferencias notables en el comportamiento acústico de los mismos.

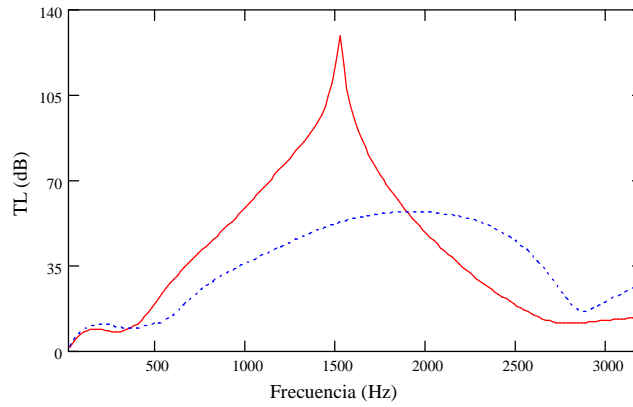


Figura 2.39 *TL* de un silenciador con material absorbente y cámaras laterales. Comparación entre métodos de onda plana y Elementos Finitos:
 —, Elementos Finitos; - - -, onda plana.

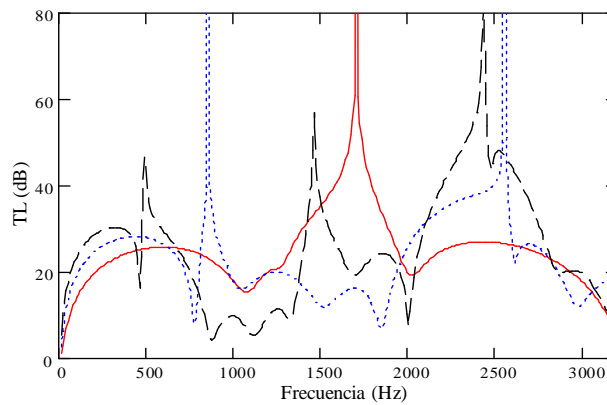


Figura 2.40 *TL* de silenciador con material absorbente, cámara anular y cámaras laterales. Geometría 1: —, $L_c = 0.05$ m; - - -, $L_c = 0.1$ m; — — —, $L_c = 0.175$ m.

De acuerdo a lo exhibido en la Figura 2.42 el modelo de onda plana tampoco predice de manera precisa el comportamiento acústico, en los rangos de media y alta frecuencia, cuando el silenciador tiene material absorbente.

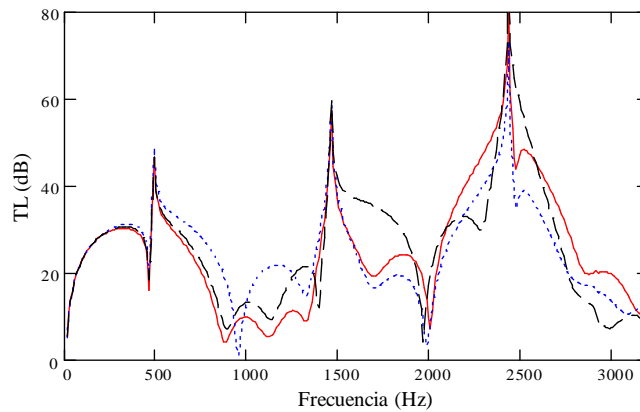


Figura 2.41 *TL* de silenciador con material absorbente, cámara anular y cámaras laterales.
 —, geometría 1; - - - -, geometría 1, sin cámara lateral de entrada; — · — ·, geometría 1, sin cámara lateral de salida.

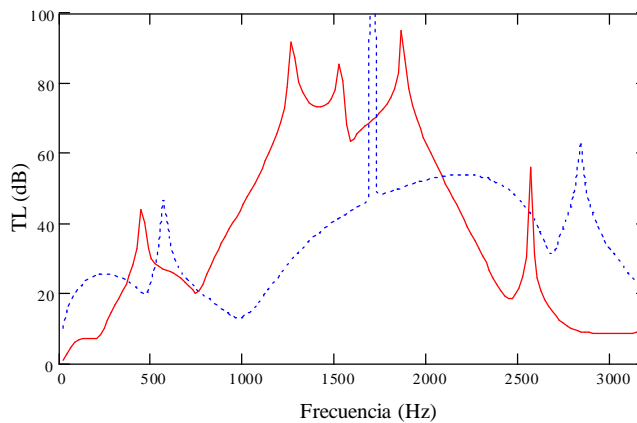


Figura 2.42 *TL* de un silenciador con material absorbente, cámara anular y cámaras laterales. Comparación entre métodos de onda plana y Elementos Finitos, geometría 5:
 —, Elementos Finitos; - - - -, onda plana

2.11. Conclusiones

En este capítulo se han definido conceptos teóricos y presentado ecuaciones fundamentales que serán empleados a lo largo del desarrollo de la Tesis. En el estudio de la propagación de ondas, el capítulo se ha limitado a la hipótesis de propagación unidimensional. En efecto, por medio de las ecuaciones de

2.11 CONCLUSIONES

continuidad, de equilibrio dinámico y de la energía se ha resumido la deducción de la ecuación de ondas, adaptable a un medio en reposo o móvil. La solución de la ecuación de ondas y la aplicación oportuna de condiciones de contorno en un sistema acústico han permitido evaluar su comportamiento por medio del planteamiento de representaciones matriciales. En el estudio de conductos perforados se ha destacado que la impedancia acústica a través de orificios tiene especial influencia en el comportamiento acústico de un silenciador y se han analizado diversos modelos. Asimismo se han examinado algunas de las propiedades más importantes de los materiales absorbentes y evaluado los cambios de sus parámetros fundamentales en función de la frecuencia.

Se han descrito algunas configuraciones geométricas de silenciadores y se han presentado los índices de cuantificación de la atenuación acústica más utilizados. Posteriormente se ha evaluado la atenuación acústica en geometrías concretas en base a la representación matricial.

Se han expuesto las limitaciones del modelo de onda plana en la estimación de la atenuación acústica recalando que es un modelo aproximado. Es aplicable a bajas frecuencias, no puede predecir el comportamiento acústico en frecuencias en las que se propagan los modos de alto orden y tampoco tener en cuenta la geometría de las secciones transversales ofreciendo, por tanto, valoraciones erróneas de la atenuación. Se justifica, de este modo, el propósito de desarrollar modelos más precisos.

Capítulo 3. Modelado acústico de silenciadores mediante Elementos Finitos

Resumen del capítulo:

Se analiza el modelado acústico de silenciadores mediante la utilización del método de Elementos Finitos. Se expone una breve síntesis de esta técnica numérica. Se utiliza la formulación en presiones para describir el campo acústico de un silenciador, en el cual puede existir o no flujo medio y en el que se considera la presencia de material absorbente. Se definen las etapas más importantes del modelado, desde la aplicación del método de los residuos ponderados al campo acústico gobernado por la ecuación de ondas convectiva, pasando por la aplicación de las condiciones de contorno, hasta la formulación matricial de la forma integral asociada a dicho residuo. A partir de este planteamiento se considera el acoplamiento de diferentes elementos que pueden ser parte de un silenciador, a saber, placas y conductos perforados, conductos extendidos, cámaras laterales o bien cámaras anulares que pueden envolver parte del silenciador. Posteriormente se analizan algunas configuraciones geométricas y sus resultados se comparan con el modelo de onda plana, estableciéndose las diferencias entre ambos métodos.

3.1. Introducción

En el Capítulo 2 se dedujo la ecuación de ondas y en base a la hipótesis de propagación unidimensional se planteó su solución. La teoría de onda plana ha permitido la caracterización acústica de los elementos que componen un sistema de escape por medio del establecimiento de la matriz de cuatro polos o matriz de transferencia. El comportamiento acústico de un sistema de escape es evaluado mediante el cálculo de varios índices, entre los cuales se ha destacado el índice de Pérdidas de Transmisión, abreviadamente *TL*. El *TL* es planteado en función de la matriz de cuatro polos o matriz de transferencia del sistema de escape. Este procedimiento ha logrado la estimación de la atenuación acústica de una manera rápida. Sin embargo se ha demostrado que este proceso puede ser válido para una limitada región del rango de frecuencias de estudio ya que no predice la influencia de la propagación de los modos de alto orden y además, no distingue los efectos que ejercen en el comportamiento acústico del silenciador la existencia de diferentes tipos de secciones transversales. Esto conlleva la búsqueda de otras herramientas más eficientes que permitan el modelado acústico de silenciadores.

En este Capítulo se propone realizar el modelado acústico de silenciadores utilizando métodos numéricos, concretamente el método de Elementos Finitos. Entre las técnicas numéricas comúnmente empleadas en el modelado acústico sobresalen los métodos de Elementos Finitos y de Elementos de Contorno. Ambas técnicas son aplicadas a geometrías irregulares, sin embargo, el método de Elementos de Contorno es de difícil aplicación en situaciones donde se contempla la existencia de flujo medio o de variaciones en las propiedades del dominio.

La idea de dividir una superficie continua en un número discreto de pequeñas subregiones de tamaño finito o elementos fue concebida desde hace mucho tiempo. En 1941 Hrenicoff [7] sugirió la idea de que el comportamiento elástico de una placa continua podía parecerse, bajo ciertas condiciones de carga, a un conjunto de elementos conectados entre sí por medio de puntos discretos. Mediada la década de 1950 los computadores digitales comenzaban a introducirse en el mercado y la teoría de matrices iniciaba su adaptación a los ordenadores. Turner, Clough, Martin y Topp [7] al modelar estructuras de aviones ensamblando pequeñas piezas de forma triangular junto con un análisis estructural matricial produjeron un procedimiento sistemático similar a lo que más tarde se conocería como Elementos Finitos. Tanto el término acuñado como su metodología crecieron rápidamente a lo largo de los años. Este importante

crecimiento se debe al grado en el cual el método de Elementos Finitos se ha complementado con las capacidades de la computación. Cabe citar que en los problemas que implican análisis estructural y de sólidos este método presenta un alto grado de desarrollo. Aparte de la aplicación a problemas estructurales Zienkiewicz [119] empleó este método en problemas de campos que utilizaran ecuaciones de Laplace o Poisson tales como problemas de conducción térmica en estado estacionario y de flujo potencial de un fluido incompresible. Estos avances se debieron a la influencia del enfoque del método de Galerkin en la formulación en elementos finitos basados en el método de Residuos Ponderados. Como consecuencia, el abanico de aplicación de esta técnica se amplió a áreas como la mecánica de fluidos, aerodinámica, teoría electromagnética, acústica y dinámica atmosférica entre otras.

Limitando el enfoque al campo acústico se manifiesta que el método de Elementos Finitos es ampliamente utilizado en el modelado de silenciadores con configuraciones geométricas complicadas e implica un verdadero reto sobre todo a la hora de utilizar materiales absorbentes y superficies perforadas. Young y Crocker emplearon el MEF para predecir el comportamiento acústico de cámaras de expansión simple [114] y de cámaras reversas [115]. Kagawa y Omote [61] desarrollaron un código de Elementos Finitos para la simulación del comportamiento acústico de silenciadores con sección transversal circular y considerando modos axisimétricos. Apoyándose en el método de Galerkin Sigman, Majjigi y Zinn [104] determinaron con suficiente precisión las propiedades acústicas de conductos anulares con flujo medio uniforme y elevado número de Mach. En cuanto a la aplicación del MEF en el estudio de silenciadores disipativos se destacan los trabajos de Craggs [24, 25] que lo utilizó para obtener la atenuación acústica de silenciadores rellenos de material absorbente. Astley y Cummings [8], a partir del planteamiento de Elementos Finitos, desarrollan una técnica de análisis de valores propios adaptada al caso tridimensional la cual permitió calcular la atenuación modal de silenciadores con sección transversal rectangular en presencia de flujo medio. Un trabajo destacado lo constituye el realizado por Peat y Rathi [83] quienes, por medio de un análisis tridimensional, investigaron la influencia del material absorbente y del flujo medio en las prestaciones acústicas de silenciadores, evaluando el campo de flujo estacionario en el material absorbente inducido por el flujo medio en el conducto central. No obstante, en el análisis del comportamiento acústico de silenciadores a altas frecuencias, la variación de la distribución del campo de presiones es rápida requiriendo para ello un mallado más fino, lo cual se traduce en un aumento de los grados de libertad N , que implica un incremento del tiempo de cálculo en N^3 , que en ocasiones puede ser prohibitivo. Para abordar este problema Cummings [28] desarrolló un método variacional con formulación de Rayleigh-Ritz, adaptable a geometrías de sección transversal axialmente

uniformes, para el modo fundamental. La técnica numérica denominada Colocación por Puntos implementada por Kirby [67, 70] y también enfocada a geometrías con secciones transversales axialmente uniformes, combina la obtención de valores propios mediante Elementos Finitos y un esquema de Ajuste Modal en puntos discretos de las discontinuidades geométricas. Tanto la técnica de Cummings como la de Kirby permiten realizar el análisis acústico con suficiente precisión hasta el rango de media frecuencia.

El método de Elementos Finitos es una de las técnicas numéricas más utilizadas para el modelado de silenciadores, sobre todo en geometrías cuya sección transversal es complicada. La tendencia actual consiste en la automatización del proceso de análisis de manera que el usuario pueda dedicar mayor cantidad de tiempo al estudio e interpretación de los resultados del problema [7].

Existen dos vías para la formulación en Elementos Finitos, bien partiendo de una formulación diferencial o bien de un principio variacional. En el primer caso el método de Elementos Finitos se considera como un método de residuos ponderados, como el método de Galerkin, y en el segundo un método variacional, como el método de Rayleigh-Ritz. De manera general la implementación del método de Elementos Finitos a un problema determinado prosigue un procedimiento paso a paso estandarizado aunque, dependiendo de la naturaleza del caso, pueden asumirse cambios [19].

3.2. Aplicación del MEF a la ecuación de ondas convectiva

La aplicación del método de Elementos Finitos a la ecuación de ondas permitirá obtener un sistema de ecuaciones algebraico cuya resolución permite calcular de manera aproximada los campos de presiones y velocidades acústicas.

El campo de presiones acústicas tridimensional con existencia de flujo medio está gobernado por la ecuación de ondas convectiva

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (3.1)$$

Al considerar comportamiento armónico $p = Pe^{j\omega t}$ para el campo de presión acústica tridimensional, la ecuación de ondas convectiva se transforma en

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{U_{fm}^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{V_{fm}^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{W_{fm}^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\
& - 2 \frac{U_{fm} V_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - 2 \frac{U_{fm} W_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - 2 \frac{V_{fm} W_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} \\
& - 2 j \omega \frac{U_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial P}{\partial x} - 2 j \omega \frac{V_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial P}{\partial y} - 2 j \omega \frac{W_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial P}{\partial z} + k_0^2 P = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2.1. Problema acústico

Para resolver el problema acústico se ha aplicado el método de Elementos Finitos mediante la técnica de residuos ponderados. El método de residuos ponderados implica la multiplicación de la ecuación previa por una función de ponderación Ψ y la integración en el dominio de definición del problema [35]. Al aplicar el Teorema de Green al residuo ponderado se obtiene

$$\begin{aligned}
W = \int_V \nabla^T \Psi [D] \nabla P dV + \frac{2j\omega}{c_0^2} \int_V \Psi \{U_{fm}\}^T \nabla P dV - k_0^2 \int_V \Psi P dV \\
- \int_S \Psi \frac{\partial P}{\partial n} \{n\}^T [D] \{n\} dS = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

en la que la matriz $[D]$ es

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{U_{fm}^2}{c_0^2} & -\frac{U_{fm} V_{fm}}{c_0^2} & -\frac{U_{fm} W_{fm}}{c_0^2} \\ -\frac{V_{fm} U_{fm}}{c_0^2} & 1 - \frac{V_{fm}^2}{c_0^2} & -\frac{V_{fm} W_{fm}}{c_0^2} \\ -\frac{W_{fm} U_{fm}}{c_0^2} & -\frac{W_{fm} V_{fm}}{c_0^2} & 1 - \frac{W_{fm}^2}{c_0^2} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

y $\{n\}$ es el vector unitario normal al contorno en sentido saliente.

La división del dominio en subdominios disjuntos lleva a considerar la forma integral $W(P)$ como la suma de las formas integrales particularizadas a cada subdominio o elemento finito. Al suponer que el dominio está descompuesto en N_e elementos, se tiene que

$$W(P) = \sum_{n=1}^{N_e} W^{(e)}(P) \quad (3.5)$$

Definiendo el operador [L]

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

la expresión (3.3) se escribe como

$$\begin{aligned} W^{(e)}(P) = \int_{V_e} [L]^T \Psi^{(e)} [D] [L] P^{(e)} dV + \frac{2j\omega}{c_0^2} \int_{V_e} \Psi^{(e)} \{U_{fm}\}^T [L] P^{(e)} dV \\ - k_0^2 \int_{V_e} \Psi^{(e)} P^{(e)} dV - \int_S \Psi^{(e)} \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \{n\}^T [D] \{n\} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

La interpolación nodal por medio de Elementos Finitos permite escribir para un elemento dado e de m nodos

$$P^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) P^{(e)}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) P_i^{(e)} \quad (3.8)$$

que en escritura matricial se representa como

$$P^{(e)} = [N] \{P^{(e)}\} \quad (3.9)$$

donde [N] es el vector de las funciones de forma transpuesto y $\{P^{(e)}\}$ es el vector en que están contenidos los valores nodales de la presión. También la función de ponderación es expresada mediante la formulación de Galerkin como

$$\Psi^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) \Psi^{(e)}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) \Psi_i^{(e)} \quad (3.10)$$

cuya representación matricial es

$$\Psi^{(e)} = [N] \{\Psi^{(e)}\} \quad (3.11)$$

donde $\{\Psi^{(e)}\}$ es el vector que contiene los valores nodales de la función de peso en el elemento considerado.

Aplicando las expresiones (3.9) y (3.11) al desarrollo de la ecuación (3.7) se tiene que

$$\begin{aligned} W^{(e)}(P) = & \int_{V_e} \left([L][N]\{\Psi^{(e)}\} \right)^T [D] \left([L][N]\{P^{(e)}\} \right) dV \\ & + \frac{2j\omega}{c_0^2} \int_{V_e} \left([N]\{\Psi^{(e)}\} \right)^T \{U_{fm}\}^T \left([L][N]\{P^{(e)}\} \right) dV \\ & - \int_{V_e} \left([N]\{\Psi^{(e)}\} \right)^T k_0^2 [N]\{P^{(e)}\} dV - \int_S \left([N]\{\Psi^{(e)}\} \right)^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \{n\}^T [D]\{n\} dS \end{aligned} \quad (3.12)$$

La matriz de derivadas de funciones de forma [B] está dada por

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{NNpe}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{NNpe}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{NNpe}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

en la que NN_{pe} equivale al número de nodos del elemento. Agrupando, de acuerdo a (3.6) y (3.13) la expresión (3.12) puede escribirse de manera más compacta

$$\begin{aligned} W^{(e)}(P) = & \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{V_e} \left([B]^T [D][B] \right) dV \{P^{(e)}\} \\ & + \frac{2j\omega}{c_0^2} \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{V_e} [N]^T \{U_{fm}\}^T [B] dV \{P^{(e)}\} \\ & - k_0^2 \{\Psi^{(e)}\}^T \int_{V_e} [N]^T [N] dV \{P^{(e)}\} - \{\Psi^{(e)}\}^T \int_S [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \{n\}^T [D]\{n\} dS \end{aligned} \quad (3.14)$$

Definiendo las integrales

$$[k^{(e)}] = \int_{V_e} \left([B]^T [D][B] \right) dV \quad (3.15)$$

$$[c^{(e)}] = \frac{2}{c_0^2} \int_{V_e} [N]^T \{U_{fm}\}^T [B] dV \quad (3.16)$$

$$[m^{(e)}] = \frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} [N]^T [N] dV \quad (3.17)$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{S \cap S_e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \{n\}^T [D] \{n\} dS \quad (3.18)$$

donde $[k^{(e)}]$ es la matriz de rigidez, $[c^{(e)}]$ es la matriz de amortiguamiento, $[m^{(e)}]$ la matriz de masa y $\{f^{(e)}\}$ es el vector de fuerzas, la expresión (3.14) se escribe como

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(e)}(P) = & \{\Psi^{(e)}\}^T [k^{(e)}] \{P^{(e)}\} + j\omega \{\Psi^{(e)}\}^T [c^{(e)}] \{P^{(e)}\} \\ & - \omega^2 \{\Psi^{(e)}\}^T [m^{(e)}] \{P^{(e)}\} - \{\Psi^{(e)}\}^T \{f^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{W}^{(e)}(P) = \{\Psi^{(e)}\}^T \left[\left([k^{(e)}] + j\omega [c^{(e)}] - \omega^2 [m^{(e)}] \right) \{P^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} \right] \quad (3.20)$$

Una vez obtenida la forma integral para cada elemento debe realizarse el ensamblado de los elementos del dominio, de forma que según (3.5)

$$\mathbf{W}(P) = \sum_{n=1}^{N_e} \mathbf{W}^{(e)}(P) = 0 \quad (3.21)$$

Expandiendo las matrices $[k^{(e)}]$, $[c^{(e)}]$, $[m^{(e)}]$ y vector $\{f^{(e)}\}$ a la dimensión total del problema se plantea el sistema global de ecuaciones

$$\mathbf{W}(P) = \{\Psi\}^T \left[\left([K] + j\omega [C] - \omega^2 [M] \right) \{P\} - \{F\} \right] = 0 \quad (3.22)$$

que, como debe cumplirse para cualquier $\{\Psi\}$, se observa

$$\left([K] + j\omega [C] - \omega^2 [M] \right) \{P\} = \{F\} \quad (3.23)$$

Imponiendo la condición de Dirichlet en los nodos se resuelve el sistema de ecuaciones.

3.2.2. Campo de velocidades

Una vez evaluados los valores nodales de la presión, por medio de la ecuación de Euler (2.28) se calcula la velocidad acústica para cualquier elemento e . Así, si no hay flujo medio la velocidad es

$$-\rho_0 \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) = \nabla P \quad (3.24)$$

Cuando se discretiza el dominio puede escribirse, para cada elemento,

$$-\rho_0 \left(\frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} \right) = \nabla P^{(e)} \quad (3.25)$$

Recordando que $P^{(e)} = [\mathbf{N}]\{P^{(e)}\}$ y $\nabla P^{(e)} = [\mathbf{B}]\{P^{(e)}\}$, sustituyendo en (3.25) y operando se obtiene el campo de velocidades en ausencia de flujo medio

$$\vec{U}^{(e)} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} [\mathbf{B}]\{P^{(e)}\} \quad (3.26)$$

Al haber flujo medio debe aplicarse la ecuación de Navier-Stokes. Suponiendo que sólo existe flujo en dirección x ,

$$-\rho_0 \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{U}_{fm}^T \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \nabla P \quad (3.27)$$

Al discretizar el dominio, para cada elemento se tiene,

$$-\rho_0 \left(\frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} + \vec{U}_{fm}^T \frac{\partial U^{(e)}}{\partial x} \right) = \nabla P^{(e)} \quad (3.28)$$

Similar al caso sin flujo medio, operando en la expresión (3.28), se obtiene,

$$-\rho_0 (j\omega[\mathbf{N}] + \vec{U}_{fm}^T [\mathbf{B}])\{U^{(e)}\} = [\mathbf{B}]\{P^{(e)}\} \quad (3.29)$$

3.2.3. Vector de carga

3.2.3.1. Vector de carga

La existencia de un gradiente de presión normal a la superficie, (condición de Neumann), de una parte del contorno S genera un vector de carga $\{F\}$. El problema acústico puede simplificarse si se impone en las secciones de entrada y salida del silenciador una velocidad normal \vec{U} . Si además, los conductos de entrada y salida son suficientemente largos con una sección transversal uniforme [35] la velocidad de flujo medio es paralela al conducto. La condición de velocidad en la sección transversal implica, en el caso de una sección perpendicular al eje x

$$\begin{aligned}
\{f^{(e)}\} &= \int_{S \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \{n\}^T [\mathbf{D}] \{n\} dS \\
&= \int_{S \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 - \frac{U_{jm}^2}{c_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dS \\
&= \int_{S \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(-\rho_0 j\omega \tilde{U}^{(e)} - \rho_0 \{U_{jm}\}^T \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \{ \tilde{U}^{(e)} \} \right) \left(1 - \frac{U_{jm}^2}{c_0^2} \right) dS \\
&= -\rho_0 (1 - M^2) \int_{S \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(j\omega \tilde{U}^{(e)} + \{U_{jm}\}^T \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \{ \tilde{U}^{(e)} \} \right) dS
\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde M es U_{jm}/c_0 .

3.2.3.2. Imposición de la condición de impedancia

Si parte del contorno del silenciador presenta una impedancia acústica Z , como el caso de una salida anecoica, entonces

$$Z = \frac{P}{U} \tag{3.31}$$

donde U es la velocidad normal al contorno. Tomando como referencia al eje x , en una sección transversal perpendicular a este eje se cumple, para la derivada normal de la presión

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0 \left(j\omega U + U_{jm} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \tag{3.32}$$

Sustituyendo la ecuación (3.31)

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho_0 \left(j\omega \frac{P}{Z} + \frac{U_{jm}}{Z} \frac{\partial P}{\partial n} \right) \tag{3.33}$$

o bien

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\rho_0 j\omega P}{Z + \rho_0 U_{jm}} \tag{3.34}$$

La expresión (3.30) puede ser escrita como

$$\{f^{(e)}\} = \int_{S \cap S^e} [N]^T \left(-\frac{\rho_0 j \omega P}{Z + \rho_0 U_{fm}} \right) \left(1 - \frac{U_{fm}^2}{c_0^2} \right) dS \quad (3.35)$$

$$\{f^{(e)}\} = -(1 - M^2) \int_{S \cap S^e} [N]^T \left(\frac{\rho_0 j \omega P}{Z + \rho_0 U_{fm}} \right) dS \quad (3.36)$$

Descomponiendo la expresión anterior e introduciendo la matriz $[c_z^{(e)}]$ se obtiene

$$[c_z^{(e)}] = \frac{(1 - M^2) \rho_0}{Z + \rho_0 U_{fm}} \int_{S \cap S^e} [N]^T [N] dS \quad (3.37)$$

Si la salida del silenciador es anecoica, $Z_0 = \rho_0 c_0$

$$[c_z^{(e)}] = \frac{(1 - M^2)}{c_0 + U_{fm}} \int_{S \cap S^e} [N]^T [N] dS \quad (3.38)$$

De este modo el vector de fuerzas $\{f^{(e)}\}$ se reescribe como

$$\{f^{(e)}\} = -j\omega [c_z^{(e)}] \{P^{(e)}\} \quad (3.39)$$

Sustituyendo en la expresión (3.23) ésta se transforma en

$$([K] + j\omega([C] + [C_z]) - \omega^2 [M]) \{P\} = \{F\} \quad (3.40)$$

3.2.4. Obtención de la atenuación

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (3.40) en el intervalo de frecuencias de interés, el TL puede conocerse realizando un solo análisis considerando una salida anecoica y empleando la expresión (2.202). Si la caracterización del silenciador debe realizarse en función de la matriz de transferencia, han de realizarse las dos simulaciones correspondientes y emplear las expresiones (2.88)

$$A = \frac{P_1}{P_2} \Big|_{U_2=0} \quad B = \frac{P_1}{U_2} \Big|_{P_2=0} \quad C = \frac{U_1}{P_2} \Big|_{U_2=0} \quad D = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{P_2=0} \quad (3.41)$$

3.3. Subdominios acoplados. Placas y tubos perforados

Los conductos perforados son ampliamente utilizados en los silenciadores para atenuar el ruido generado, previniendo además el deterioro del material absorbente. La región perforada se modelará mediante su impedancia acústica Z_p . El análisis por medio del método de Elementos Finitos considerará la influencia de flujo medio y las condiciones de contorno en los orificios.

3.3.1. Medio en reposo

Un tipo de silenciador comúnmente utilizado es el que se muestra en la Figura 3.1 el cual tiene una superficie perforada cilíndrica en su interior. En él existen dos campos claramente diferenciados, el del interior del cilindro perforado y el de la cámara. A través de las perforaciones se tiene el acoplamiento acústico entre ambos campos.

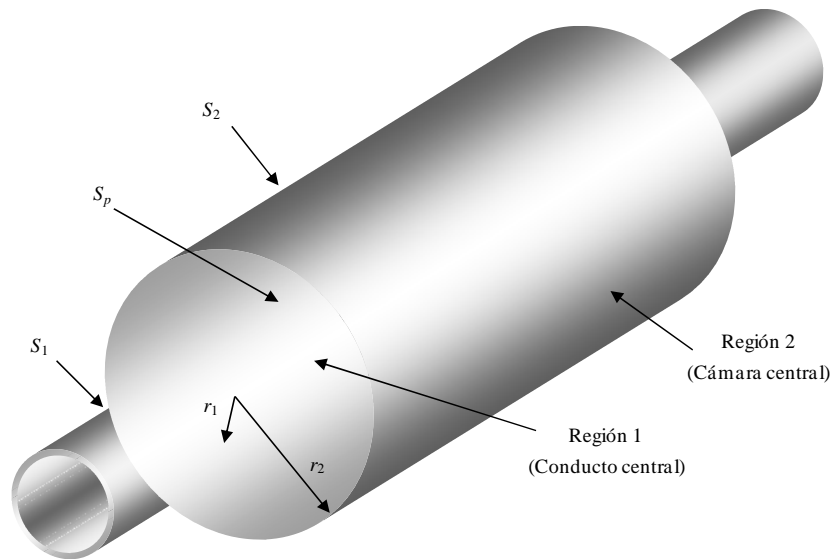


Figura 3.1 Silenciador con conducto perforado.

La figura muestra dos regiones conectadas por medio de una superficie perforada. En la región 1, conducto central, V_1 es su volumen y S_1 el contorno asociado, para la región 2, cámara central, V_2 y S_2 representan su volumen y su

contorno, respectivamente. La superficie perforada, común en ambas regiones, se denota mediante S_p .

Realizando un planteamiento similar en cada región, el sistema de ecuaciones para cada dominio es, según (3.40)

$$([K_1] - \omega^2 [M_1])\{P_1\} = \{F_1\} \quad (3.42)$$

$$([K_2] - \omega^2 [M_2])\{P_2\} = \{F_2\} \quad (3.43)$$

ya que en ausencia de flujo medio tanto en el conducto central como en la cámara se cumple ($[C_1] = [C_2] = [0]$).

El vector de carga para cada elemento se escribe de acuerdo a lo expresado en la ecuación (3.30) en ausencia de flujo medio

$$\{f^{(e)}\} = \int_{S \cap S^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} dS \quad (3.44)$$

La impedancia acústica del perforado relaciona las presiones acústicas P_1 y P_2 a ambos lados de la superficie con la velocidad acústica normal U que se supone constante en ausencia de flujo medio [69]. Por medio de la ecuación de Euler (2.28) la presión y la velocidad normal se relacionan a ambos lados de la placa perforada a partir de las expresiones:

$$U_1 = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_1}{\partial n} \quad \text{y} \quad U_2 = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.45, 3.46)$$

Al considerar que en ambos subdominios el sentido es saliente, entonces $U_1 = -U_2$. Despejando U de la expresión (2.129) y teniendo en cuenta (3.45) y (3.46)

$$U = U_1 = \frac{P_1 - P_2}{Z_p} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial n} \quad \text{y} \quad U = U_2 = \frac{P_2 - P_1}{Z_p} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.47, 3.48)$$

De acuerdo a (3.44) y sustituyendo en ella las ecuaciones (3.47) y (3.48) la evaluación de los vectores de carga en la superficie S_p es

$$\{f_1^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [N]^T \left(-j\rho_0\omega \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right) dS \quad (3.49)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(j\rho_0\omega \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right) dS \quad (3.50)$$

Teniendo en cuenta la interpolación nodal de elementos finitos, se tiene

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} &= -\frac{j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}] \{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}] \{P_2^{(e)}\} \right) dS \\ &= -j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \{f_2^{(e)}\} &= \frac{j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}] \{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}] \{P_2^{(e)}\} \right) dS \\ &= j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}] \{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde

$$[c_{Z_p}^{(e)}] = \frac{\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS \quad (3.53)$$

La presencia de la superficie perforada implica la aparición de matrices de elementos finitos que relacionan los grados de libertad de los nodos situados en la superficie perforada [35]. Al realizar la expansión de las matrices a las dimensiones correspondientes y ensamblando el sistema se tiene

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} [K_1] & [0] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{Bmatrix} \\ -\omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Puede observarse el acoplamiento existente entre subdominios como resultado de su conexión a través de la superficie perforada. Compactando la ecuación tal como se vio en la expresión (3.40), resulta

$$\left([K] + j\omega [C_{Z_p}] - \omega^2 [M] \right) \{P\} = \{F\} \quad (3.55)$$

3.3.2. Medio móvil

En la consideración del caso con flujo medio uniforme en el silenciador representado en la Figura 3.2 se asume que en el conducto perforado existe flujo medio cuyo número de Mach es $M = U_{jm}/c_0$ y es paralelo a la superficie perforada. Además se desprecia el efecto convectivo en la cámara.

Para el primer caso, nuevamente mediante aplicación del método de Elementos Finitos para cada subdominio, se tiene (3.40)

$$([K_1] + j\omega[C_1] - \omega^2[M_1])\{P_1\} = \{F_1\} \quad (3.56)$$

$$([K_2] + j\omega[C_2] - \omega^2[M_2])\{P_2\} = \{F_2\} \quad (3.57)$$

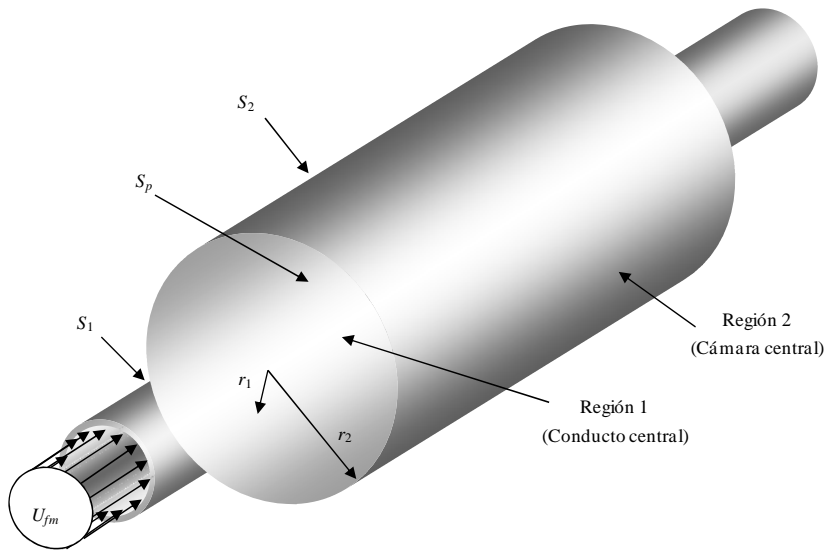


Figura 3.2 Silenciador con conducto perforado y flujo medio.

Al despreciar el flujo medio en la cámara se tiene que la matriz $[C_2] = [0]$. El acoplamiento entre ambas regiones se realiza empleando los vectores de carga $\{F_1\}$ y $\{F_2\}$ y teniendo en cuenta que la dirección de propagación del flujo es paralela al conducto, el vector de carga no presentará dependencia explícita de M [35]. De este modo

$$\{f_1^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial n} \{n\}^T [\mathbf{D}_1] \{n\} dS = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial n} dS \quad (3.58)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial P_2^{(e)}}{\partial n} dS \quad (3.59)$$

En la aplicación de la condición asociada a la superficie perforada se considera que alguna variable acústica debe ser continua. La imposición de esta condición puede realizarse por medio de tres alternativas: 1) condición de continuidad de velocidad normal que implica que $U_1 = -U_2$ [35, 60, 79]; 2) condición de continuidad de desplazamiento normal a la superficie perforada [26, 35, 67] donde $\xi_1 = -\xi_2$; 3) condición de continuidad en la componente transversal del gradiente de presión [35].

En la primera posibilidad las velocidades U_1 y U_2 son perpendiculares a la velocidad del flujo medio U_{fm} , paralela al eje x (3.27) y en función de la ecuación de Euler (2.28) se tiene que

$$\rho_0 \left(j\omega U_1 + U_{fm} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial n} \quad (3.60)$$

$$j\rho_0 \omega U_2 = -\frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.61)$$

En la segunda alternativa al asumir que $\xi_1 = -\xi_2$ la relación entre desplazamiento y presión acústica estará dada por [66]

$$\rho_0 \left(-\omega^2 \xi_1 + 2j\omega U_{fm} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U_{fm}^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial n} \quad (3.62)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \xi_2 = -\frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.63)$$

Finalmente la condición de continuidad en la componente transversal del gradiente de presión tiene en cuenta la componente del vector de carga

$$\frac{\partial P_1}{\partial n} = -\frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.64)$$

3.3.2.1. Continuidad de velocidad

En la deducción del vector de carga bajo la hipótesis de continuidad de velocidad se parte de la base en que $U_1 = -U_2$. Considerando la condición de impedancia (2.129) y las expresiones (3.49) y (3.50) los vectores de carga son

$$\{f_1^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(-j\rho_0\omega \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} - \rho_0 \frac{U_{fm}}{Z_p} \frac{\partial (P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{\partial x} \right) dS \quad (3.65)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(j\rho_0\omega \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right) dS \quad (3.66)$$

Las presiones en términos de valores nodales y funciones de forma se expresan por

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} &= -\frac{j\omega\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}]\{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}]\{P_2^{(e)}\} \right) dS \\ &- \frac{\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(\frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) dS = \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$-j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} - [k_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + [k_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\}$$

$$\begin{aligned} \{f_2^{(e)}\} &= \frac{j\omega\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}]\{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}]\{P_2^{(e)}\} \right) dS = \\ &j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}] \{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde

$$[c_{Z_p}^{(e)}] = \frac{\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS \quad (3.69)$$

$$[k_{Z_p}^{(e)}] = \frac{\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{B}] dS \quad (3.70)$$

y en forma matricial resulta en

$$\begin{pmatrix} \left[\begin{array}{cc} [K_1] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_2] \end{array} \right] + j\omega \left[\begin{array}{cc} [C_1] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{Z_p}^{22}] \end{array} \right] \\ -\omega^2 \left[\begin{array}{cc} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{array} \right] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

3.3.2.2. Continuidad de desplazamiento

La condición de desplazamiento normal en la superficie del conducto perforado implica $\xi_1 = -\xi_2$. Dada la expresión de la impedancia en función del desplazamiento

$$Z_p = \frac{P_1 - P_2}{j\omega\xi} \quad (3.72)$$

y en combinación con las expresiones (3.49) y (3.50) los vectores de carga de la formulación de presiones son

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [N]^T & \left(-j\omega\rho_0 \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right. \\ & \left. - 2\rho_0 \frac{U_{fm}}{Z_p} \frac{\partial(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{\partial x} - \rho_0 \frac{U_{fm}^2}{j\omega Z_p} \frac{\partial^2(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{\partial x^2} \right) dS \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [N]^T \left(j\omega\rho_0 \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right) dS \quad (3.74)$$

Mediante la interpolación nodal de elementos finitos y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned}
\{f_1^{(e)}\} &= -\frac{j\omega\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}] \{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}] \{P_2^{(e)}\} \right) dS \\
&\quad - \frac{2\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(\frac{\partial[\mathbf{N}]}{\partial x} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial[\mathbf{N}]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) dS \\
&\quad - \frac{\rho_0 U_{fm}^2}{j\omega Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(\frac{\partial^2[\mathbf{N}]}{\partial x^2} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial[\mathbf{N}]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) dS = \quad (3.75) \\
&\quad - j\omega [c_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + j\omega [c_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} - [k_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} \\
&\quad + [k_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\} - \frac{1}{j\omega} [d_{Z_p}^{(e)11}] \{P_1^{(e)}\} + \frac{1}{j\omega} [d_{Z_p}^{(e)12}] \{P_2^{(e)}\}
\end{aligned}$$

donde

$$[c_{Z_p}^{(e)}] = \frac{\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS \quad (3.76)$$

$$[k_{Z_p}^{(e)}] = \frac{2\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{B}] dS \quad (3.77)$$

$$[d_{Z_p}^{(e)}] = \frac{\rho_0 U_{fm}^2}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(\frac{\partial^2[\mathbf{N}]}{\partial x^2} \right) dS \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned}
\{f_2^{(e)}\} &= \frac{j\omega\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}] \{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}] \{P_2^{(e)}\} \right) dS = \quad (3.79) \\
&\quad j\omega [c_{Z_p}^{(e)21}] \{P_1^{(e)}\} - j\omega [c_{Z_p}^{(e)22}] \{P_2^{(e)}\}
\end{aligned}$$

Finalmente el sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{bmatrix} [K_1] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_1] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} [D_{Z_p}^{11}] & -[D_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \quad (3.80)
\end{aligned}$$

3.3.2.3. Continuidad de gradiente de presión

Es la condición de continuidad más sencilla de implementar ya que en su planteamiento se asume que disminuyen los efectos del flujo medio y considera que en la definición de impedancia la velocidad corresponde a la zona sin flujo [35]. De este modo se tiene

$$\{f_1^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(-j\omega\rho_0 \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right) dS \quad (3.81)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(j\omega\rho_0 \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right) dS \quad (3.82)$$

Por medio de la interpolación nodal de elementos finitos

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} = -\frac{j\omega\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}] \{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}] \{P_2^{(e)}\} \right) dS = \\ -j\omega \left[c_{Z_p}^{(e)11} \right] \{P_1^{(e)}\} + j\omega \left[c_{Z_p}^{(e)12} \right] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \{f_2^{(e)}\} = \frac{j\omega\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}] \{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}] \{P_2^{(e)}\} \right) dS = \\ j\omega \left[c_{Z_p}^{(e)21} \right] \{P_1^{(e)}\} - j\omega \left[c_{Z_p}^{(e)22} \right] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.84)$$

en la que otra vez,

$$\left[c_{Z_p}^{(e)} \right] = \frac{\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} [K_1] & [0] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{bmatrix} \\ -\omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.86)$$

El sistema de ecuaciones resultante es similar al caso para un medio en reposo (3.54), sin embargo, las matrices $[K]$ y $[C]$ de la región 1 deben evaluarse en función de la presencia de flujo medio, del cual depende Z_p [35].

3.4. Modelado de la propagación en materiales absorbentes

En el modelado de silenciadores a bajas frecuencias, el modo acústico fundamental se propaga en forma de onda plana en la que el campo de distribución de presiones transversales es uniforme. Sin embargo, la adición de material absorbente alrededor del conducto central complica la situación ya que la distribución de presión transversal, incluso para el modo fundamental, deja de ser uniforme.

Se asume que el material absorbente es isótropo y homogéneo y sus propiedades acústicas definidas en términos de impedancia acústica compleja \tilde{Z} , número de onda complejo \tilde{k} , velocidad acústica y densidad acústica complejas \tilde{c} , $\tilde{\rho}$, respectivamente.

El acoplamiento de los campos acústicos de las regiones disipativa y central con los posteriores efectos del flujo medio se analizan a continuación por medio del planteamiento con el método de Elementos Finitos.

3.4.1. Medio en reposo

El planteamiento con presencia de material absorbente y elementos perforados sigue similar trayectoria a lo estudiado en las secciones anteriores. En la Figura 3.3 se distinguen dos dominios: el conducto central, con una sección transversal uniforme en el que se propaga una onda acústica, rodeado por la región absorbente, que puede tener una forma arbitraria. Se asume que el sentido de propagación en el conducto central es paralelo al eje x . Las paredes externas S_1 y S_2 son rígidas e impermeables con lo que sus impedancias Z_{p1} y Z_{p2} , respectivamente, son infinitas. Se considera que la onda es plana en la entrada S_e y salida S_s de la región 1, la frecuencia de análisis se restringe hasta la frecuencia de corte del primer modo de alto orden en esta región y las regiones 1 y 2 tienen una frontera común S_p correspondiente a la superficie perforada.

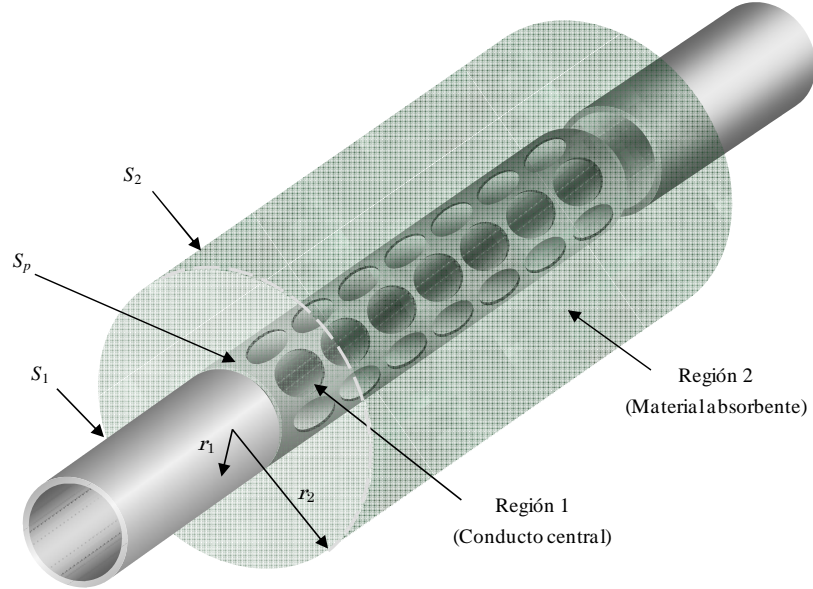


Figura 3.3 Silenciador con conductos perforados y material absorbente.

Para la región 1, conducto central, después de la aplicación del Teorema de Green al residuo ponderado se obtiene

$$\int_{V_1} \nabla^T \Psi_1 [D_1] \nabla P_1 dV - k_0^2 \int_{V_1} \Psi_1 P_1 dV - \int_{S_1} \Psi_1 \frac{\partial P_1}{\partial n} \{n\}^T [D_1] \{n\} dS = 0 \quad (3.87)$$

En la región 2, cámara con material absorbente, la aplicación del Teorema de Green al residuo ponderado proporciona

$$\int_{V_2} \nabla^T \Psi_2 [D_2] \nabla P_2 dV - \tilde{k}^2 \int_{V_2} \Psi_2 P_2 dV - \int_{S_2} \Psi_2 \frac{\partial P_2}{\partial n} \{n\}^T [D_2] \{n\} dS = 0 \quad (3.88)$$

donde \tilde{k} es el número de onda en el material absorbente y $[D_1]$ y $[D_2]$ las matrices unidad de las regiones 1 y 2, respectivamente. Desarrollando el planteamiento indicado en la sección 3.2.1 a partir de la ecuación (3.7) se llega a

$$\left\{ \Psi_1^{(e)} \right\}^T \left[k_1^{(e)} \right] \left\{ P_1^{(e)} \right\} - \omega^2 \left\{ \Psi_1^{(e)} \right\}^T \left[m_1^{(e)} \right] \left\{ P_1^{(e)} \right\} - \left\{ \Psi_1^{(e)} \right\}^T \left\{ f_1^{(e)} \right\} = 0 \quad (3.89)$$

para la región 1 y para la región 2

$$\left\{ \Psi_2^{(e)} \right\}^T \left[k_2^{(e)} \right] \left\{ P_2^{(e)} \right\} - \omega^2 \left\{ \Psi_2^{(e)} \right\}^T \left[m_2^{(e)} \right] \left\{ P_2^{(e)} \right\} - \left\{ \Psi_2^{(e)} \right\}^T \left\{ f_2^{(e)} \right\} = 0 \quad (3.90)$$

donde las matrices $[k_1^{(e)}]$, $[m_1^{(e)}]$, $[k_2^{(e)}]$ y $[m_2^{(e)}]$ son

$$[k_1^{(e)}] = \int_{V_1} [B]^T [D_1] [B] dV \quad (3.91)$$

$$[m_1^{(e)}] = \frac{1}{c_0^2} \int_{V_1} [N]^T [N] dV \quad (3.92)$$

$$[k_2^{(e)}] = \int_{V_2} [B]^T [D_2] [B] dV \quad (3.93)$$

$$[m_2^{(e)}] = \frac{1}{\tilde{c}^2} \int_{V_2} [N]^T [N] dV \quad (3.94)$$

o de forma más compacta,

$$\{\Psi_1^{(e)}\}^T \left(\left([k_1^{(e)}] - \omega^2 [m_1^{(e)}] \right) \{P_1^{(e)}\} - \{f_1^{(e)}\} \right) = 0 \quad (3.95)$$

$$\{\Psi_2^{(e)}\}^T \left(\left([k_2^{(e)}] - \omega^2 [m_2^{(e)}] \right) \{P_2^{(e)}\} - \{f_2^{(e)}\} \right) = 0 \quad (3.96)$$

en las regiones 1 y 2, respectivamente.

Para desarrollar los vectores de carga de cada dominio hay que tener en cuenta la existencia de la placa perforada que separa ambas regiones. Si se asume la condición de continuidad de velocidad entonces $U_1 = -U_2$ y en ausencia de flujo medio

$$U_1 = -\frac{1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial P_1}{\partial n} \quad U_2 = -\frac{1}{j\tilde{\rho}(\omega)\omega} \frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.97, 3.98)$$

donde $\tilde{\rho}(\omega)$ es la densidad del material absorbente, dependiente de la frecuencia. Introduciendo el término de impedancia acústica Z_p estas expresiones se transforman en

$$U_1 = \frac{P_1 - P_2}{Z_p} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial n} \quad U_2 = \frac{P_2 - P_1}{Z_p} = -\frac{1}{j\tilde{\rho}(\omega)\omega} \frac{\partial P_2}{\partial n} \quad (3.99, 3.100)$$

Según (3.44), teniendo en cuenta la condición de continuidad y en función de (3.99) y (3.100) se obtienen los vectores

$$\{f_1^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(-j\rho_0\omega \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right) dS \quad (3.101)$$

$$\{f_2^{(e)}\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(j\tilde{\rho}(\omega)\omega \frac{(P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{Z_p} \right) dS \quad (3.102)$$

El desarrollo de (3.101) y (3.102) proporciona

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} &= -\frac{j\omega\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}]\{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}]\{P_2^{(e)}\} \right) dS \\ &= -j\omega \left[c_{Z_p}^{(e)11} \right] \{P_1^{(e)}\} + j\omega \left[c_{Z_p}^{(e)12} \right] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.103)$$

donde

$$\left[c_{Z_p}^{(e)} \right] = \frac{\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \{f_2^{(e)}\} &= \frac{j\omega\tilde{\rho}(\omega)}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}]\{P_1^{(e)}\} - [\mathbf{N}]\{P_2^{(e)}\} \right) dS \\ &= j\omega \left[\tilde{c}_{Z_p}^{(e)21} \right] \{P_1^{(e)}\} - j\omega \left[\tilde{c}_{Z_p}^{(e)22} \right] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.105)$$

de la que

$$\left[\tilde{c}_{Z_p}^{(e)} \right] = \frac{\tilde{\rho}}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS \quad (3.106)$$

Finalmente expandiendo las matrices a la dimensión total del problema y ensamblando las matrices y vectores de los elementos resulta

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} [K_1] & [0] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[\tilde{C}_{Z_p}^{21}] & [\tilde{C}_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{Bmatrix} \\ -\omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.107)$$

3.4.2. Medio móvil

En la Figura 3.4 se considera que en el conducto central existe flujo medio con número de Mach M . Se asume que en material absorbente no circula flujo [83],

aunque en realidad puede existir un flujo inducido por el flujo medio que circula en el conducto central, que en su caso puede modificar las propiedades del material absorbente, transformando su comportamiento en anisótropo y heterogéneo [83].

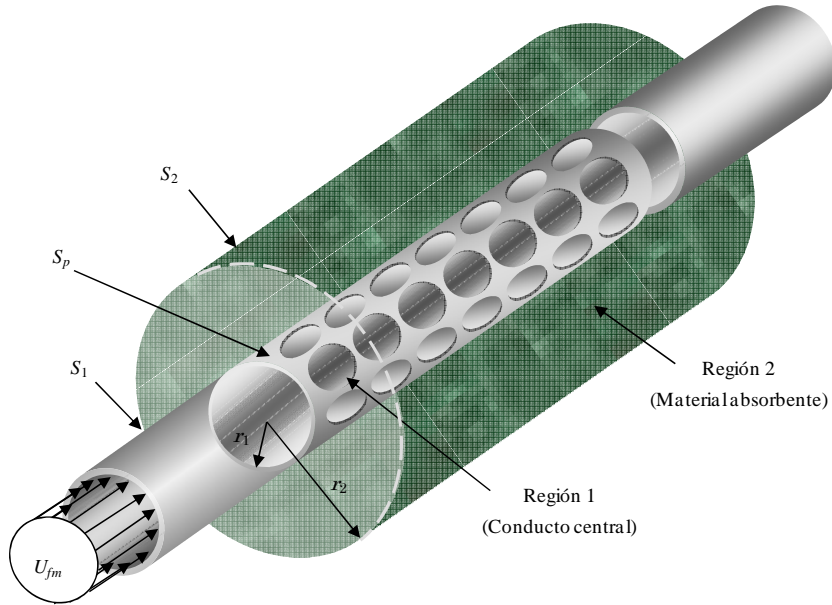


Figura 3.4 Silenciador con conducto perforado, material absorbente y flujo medio.

Para el conducto central el planteamiento en elementos finitos proporciona

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_1^{(e)} \right\}^T \left[k_1^{(e)} \right] \left\{ P_1^{(e)} \right\} + j\omega \left\{ \Psi_1^{(e)} \right\}^T \left[c_1^{(e)} \right] \left\{ P_1^{(e)} \right\} \\ - \omega^2 \left\{ \Psi_1^{(e)} \right\}^T \left[m_1^{(e)} \right] \left\{ P_1^{(e)} \right\} - \left\{ \Psi_1^{(e)} \right\}^T \left\{ f_1^{(e)} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

donde $\left[c_1^{(e)} \right]$ es, nuevamente,

$$\left[c^{(e)} \right] = \frac{2}{c_0^2} \int_V [N]^T \vec{U}_{fm}^T [B] dV \quad (3.109)$$

y $\left[k_1^{(e)} \right]$, $\left[m_1^{(e)} \right]$ están definidos en (3.15) y (3.17), respectivamente. En el material absorbente el desarrollo no conlleva cambios pues se asume que la

circulación de flujo medio en el conducto central no incide en sus propiedades acústicas. Por tanto, de (3.96), se tiene

$$\left\{ \Psi_2^{(e)} \right\}^T \left[k_2^{(e)} \right] \left\{ P_2^{(e)} \right\} - \omega^2 \left\{ \Psi_2^{(e)} \right\}^T \left[m_2^{(e)} \right] \left\{ P_2^{(e)} \right\} - \left\{ \Psi_2^{(e)} \right\}^T \left\{ f_2^{(e)} \right\} = 0 \quad (3.110)$$

En forma compacta las expresiones (3.95) y (3.96) se escriben como

$$\left\{ \Psi_1^{(e)} \right\}^T \left(\left(\left[k_1^{(e)} \right] + j\omega \left[c_1^{(e)} \right] - \omega^2 \left[m_1^{(e)} \right] \right) \left\{ P_1^{(e)} \right\} - \left\{ f_1^{(e)} \right\} \right) = 0 \quad (3.111)$$

$$\left\{ \Psi_2^{(e)} \right\}^T \left(\left(\left[k_2^{(e)} \right] - \omega^2 \left[m_2^{(e)} \right] \right) \left\{ P_2^{(e)} \right\} - \left\{ f_2^{(e)} \right\} \right) = 0 \quad (3.112)$$

para las regiones 1 y 2, respectivamente.

El vector de carga del conducto central debe considerar el flujo medio, por tanto de (3.60)

$$\rho_0 \left(j\omega U_1 + U_{fm} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial n} \quad (3.113)$$

y según (3.65) el vector es

$$\left\{ f_1^{(e)} \right\} = \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(-j\rho_0 \omega \frac{P_1^{(e)} - P_2^{(e)}}{Z_p} - \rho_0 \frac{U_{fm}}{Z_p} \frac{\partial (P_1^{(e)} - P_2^{(e)})}{\partial x} \right) dS \quad (3.114)$$

El vector de la región del material absorbente no varía. Nuevamente, se tiene en cuenta la condición de continuidad de velocidad $U_1 = -U_2$. De esta forma de (3.67)

$$\begin{aligned} \left\{ f_1^{(e)} \right\} &= -\frac{j\omega\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left([\mathbf{N}] \left\{ P_1^{(e)} \right\} - [\mathbf{N}] \left\{ P_2^{(e)} \right\} \right) dS \\ &\quad - \frac{\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T \left(\frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \left\{ P_1^{(e)} \right\} - \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \left\{ P_2^{(e)} \right\} \right) dS = \\ &\quad - j\omega \left[c_{Z_p}^{(e)11} \right] \left\{ P_1^{(e)} \right\} + j\omega \left[c_{Z_p}^{(e)12} \right] \left\{ P_2^{(e)} \right\} - \left[k_{Z_p}^{(e)11} \right] \left\{ P_1^{(e)} \right\} + \left[k_{Z_p}^{(e)12} \right] \left\{ P_2^{(e)} \right\} \end{aligned} \quad (3.115)$$

en la que

$$\left[c_{Z_p}^{(e)} \right] = \frac{\rho_0}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS \quad (3.116)$$

$$[k_{Z_p}^{(e)}] = \frac{\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [N]^T [B] dS \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} \{f_2^{(e)}\} = \frac{j\tilde{\rho}(\omega)\omega}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [N]^T \left([N] \{P_1^{(e)}\} - [N] \{P_2^{(e)}\} \right) dS = \\ j\omega [\tilde{c}_{Z_p}^{(e)21}] \{P_1^{(e)}\} - j\omega [\tilde{c}_{Z_p}^{(e)22}] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (3.118)$$

donde

$$[\tilde{c}_{Z_p}^{(e)}] = \frac{\tilde{\rho}(\omega)}{Z_p} \int_{S_p \cap S^e} [N]^T [N] dS \quad (3.119)$$

El ensamblado de las matrices es, por tanto

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} [K_1] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_1] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[\tilde{C}_{Z_p}^{21}] & [\tilde{C}_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.120)$$

3.5. Aplicaciones

En este apartado se mostrarán los resultados de la atenuación acústica de los silenciadores estudiados en esta Tesis, obtenidos por medio del método de Elementos Finitos. Se comparan con el modelo de onda plana, para verificar las limitaciones de este modelo, sobre todo con la presencia de elementos perforados, material absorbente, cámaras laterales y anulares y flujo medio. Las mallas de elementos finitos se componen de elementos cuadriláteros cuadráticos de 0.005 m, de tamaño uniforme.

3.5.1. Configuraciones sin disipación

3.5.1.1. Cámara de expansión simple

Inicialmente se evalúa el TL correspondiente a una cámara de expansión simple en función de la variación de la longitud del silenciador. Los radios, interno y externo, R_1 y R_2 , permanecen sin cambios, Tabla 3.1. La Figura 3.5 muestra la

mallas de elementos finitos de este silenciador y la Figura 3.6, la distribución del campo de presiones a 2400 Hz.

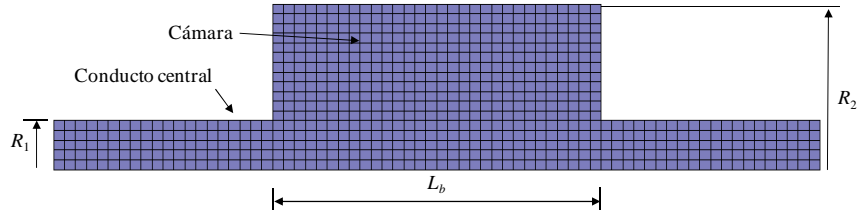


Figura 3.5 Malla de elementos finitos de una cámara de expansión simple.

Geometría	Longitud silenciador L_T (m)	R_1 (m)	R_2 (m)
1	0.15	0.0245	0.0822
2	0.2572	0.0245	0.0822
3	0.4	0.0245	0.0822

Tabla 3.1 Dimensiones relevantes de una cámara de expansión simple.

En la Figura 3.7 el TL obtenido por ambos métodos muestra que para las geometrías analizadas a bajas frecuencias los resultados son similares pero las divergencias comienzan a partir de los 1400 Hz. Como se expuso en el Capítulo anterior el modelo de onda plana no predice la aparición de los modos de alto orden, tal como se evidencia en la figura.

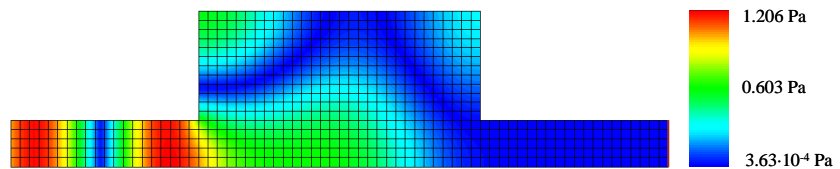


Figura 3.6 Distribución del campo de presiones de una cámara de expansión simple, geometría 1, a 2400 Hz.

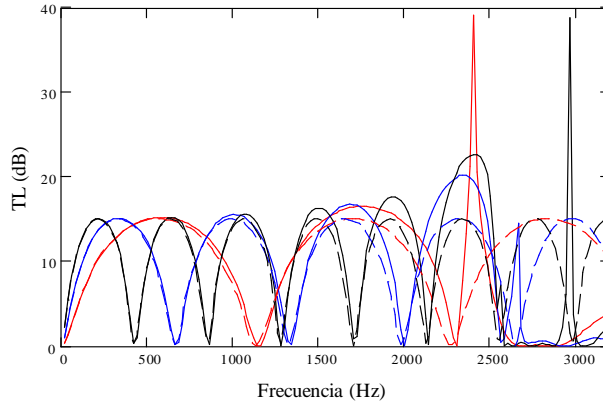


Figura 3.7 Comparación entre métodos. TL de una cámara de expansión simple: geometría 1: —, MEF; - - - -, onda plana; geometría 2: —, MEF; - - - -, onda plana; geometría 3: —, MEF; - - - -, onda plana.

3.5.1.2. Cámara de expansión con conductos extendidos

La Figura 3.8 muestra la malla de elementos finitos de un silenciador con conductos extendidos. Las geometrías de la Tabla 3.2 representan la variación de los conductos extendidos de entrada y salida para la evaluación de su influencia en el comportamiento acústico.

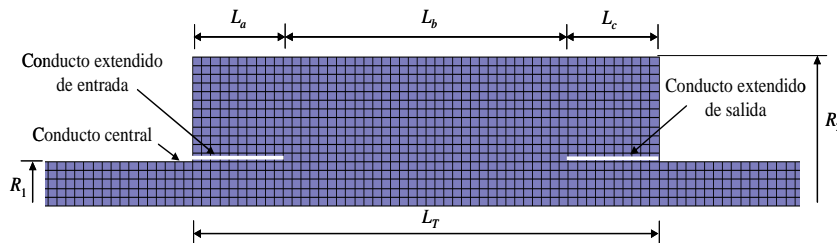


Figura 3.8 Malla de elementos finitos de un silenciador con conductos extendidos.

Geometría	Longitud silenciador L_T (m)	Longitud extend. entrada L_a (m)	Longitud extend. salida L_c (m)
1	0.2572	0.025	0.025
2	0.2572	0.05	0.05
3	0.2572	0.075	0.075

Tabla 3.2 Dimensiones relevantes silenciador con conductos extendidos. $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m.

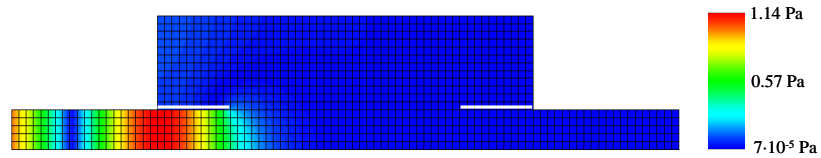


Figura 3.9 Distribución del campo de presiones en un silenciador con conductos extendidos. Geometría 2, a 1400 Hz.

La Figura 3.9 exhibe el campo de distribución de presiones del silenciador, geometría 2, a una frecuencia de 1400 Hz. La Figura 3.10 representa el TL de los silenciadores con conductos extendidos analizados. La existencia de los conductos extendidos modifica el comportamiento acústico del silenciador, proporcionando la aparición de picos de atenuación a determinadas frecuencias, en función de la longitud de los mismos. El método de onda plana no predice de manera precisa las frecuencias en las que se manifiestan dichos picos observándose diferencias con los resultados aportados por elementos finitos. No obstante, a bajas frecuencias, ambos métodos ofrecen resultados próximos.

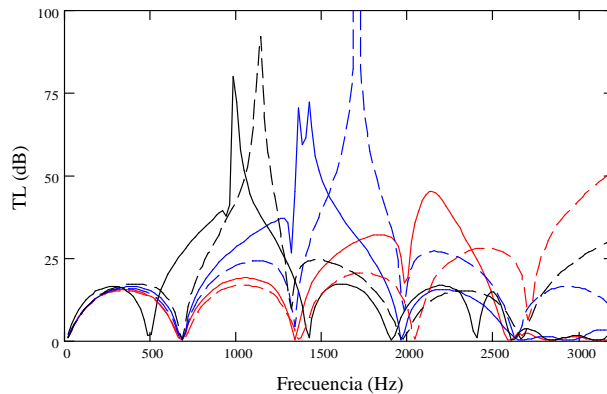


Figura 3.10 Comparación entre métodos. TL de un silenciador con conductos extendidos. Geometría 1: —, MEF; - - -, onda plana; geometría 2: —, MEF; - - -, onda plana; geometría 3: —, MEF; - - -, onda plana.

3.5.1.3. Resonador concéntrico

En la Tabla 3.3 se exponen las diferentes porosidades del conducto central perforado para analizar su efecto en el comportamiento acústico del silenciador. La Figura 3.11 muestra una malla de elementos finitos de un resonador concéntrico. La superficie perforada que se expone en ésta y en las siguientes

figuras es a efectos de indicación del perforado. La Figura 3.12 exhibe la distribución del campo de presiones del silenciador, geometría 2, a 2400 Hz.

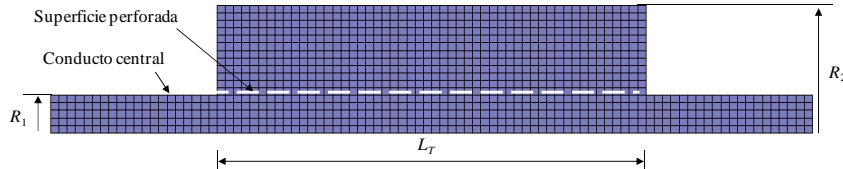


Figura 3.11 Malla de elementos finitos de un resonador concéntrico.

Geometría	Longitud silenciador L_r (m)	Porosidad σ (%)
1	0.2572	2
2	0.2572	8
3	0.2572	50
4	0.2572	100

Tabla 3.3 Dimensiones relevantes resonador concéntrico con conducto central perforado. $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m, espesor placa perforada $t_h = 0.0009$ m, diámetro de orificios $d_h = 0.00249$ m.

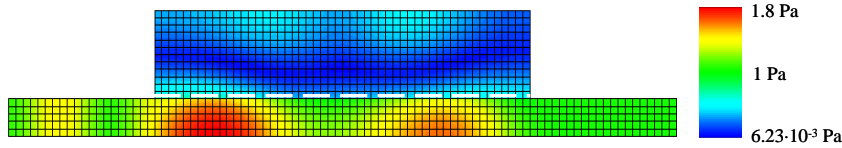


Figura 3.12 Distribución del campo de presiones de un resonador concéntrico. Geometría 2, $\sigma = 8\%$, a 2400 Hz.

En un resonador concéntrico, ambos modelos predicen su comportamiento acústico de manera similar a baja frecuencia, tal y como se muestra en la Figura 3.13. Sin embargo, con porosidades pequeñas, los resultados de los modelos divergen a partir de una frecuencia de 1000 Hz, aumentando a aproximadamente 1500 Hz cuando la porosidad es superior a 50%.

3.5.2. Silenciadores con disipación

En esta sección se evalúan los efectos de la variación de los principales parámetros geométricos y de la resistividad del material absorbente en el comportamiento acústico de silenciadores disipativos e híbridos.

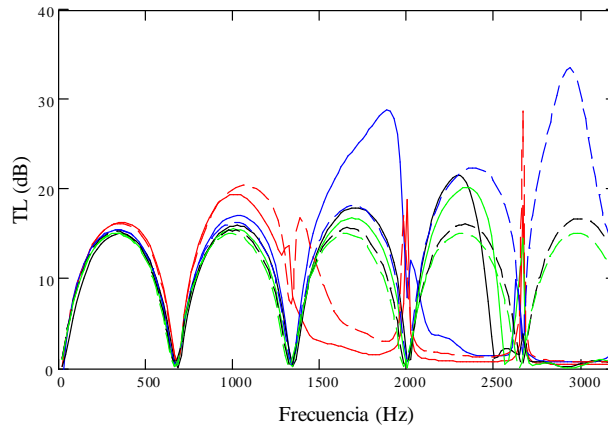


Figura 3.13 Comparación entre métodos. TL de un silenciador con conducto central perforado. Geometría 1: —, MEF; - - -, onda plana; geometría 2: —, MEF; - - -, onda plana; geometría 3: —, MEF; - - -, onda plana; geometría 4: —, MEF; - - -, onda plana.

3.5.2.1. Silenciador concéntrico con material absorbente

La Figura 3.14 representa la malla de elementos finitos de un silenciador con un conducto central perforado y con material absorbente, cuyas dimensiones se detallan en la Tabla 3.4. El cálculo de la impedancia de los orificios se efectúa en base a la expresión (2.194). En la Figura 3.15 se muestra la distribución del campo de presiones del silenciador a una frecuencia de 1500 Hz.

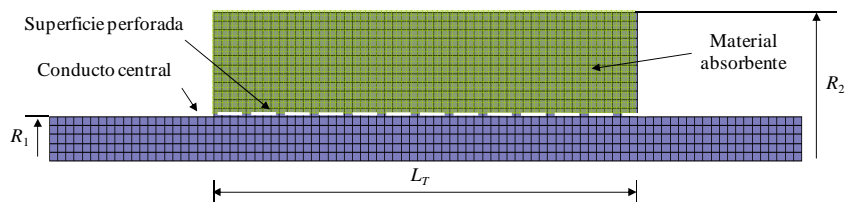


Figura 3.14 Malla de elementos finitos de silenciador concéntrico con material absorbente y conducto perforado.

En este caso se analiza la influencia de la resistividad del material absorbente en el TL , Figura 3.16. Los resultados ofrecidos por el modelo de onda plana en presencia de material absorbente y conducto perforado concuerdan a bajas frecuencias, inferiores a 250 Hz, para los casos de materiales absorbentes con resistividades elevadas. El intervalo de similitud entre ambos métodos aumenta cuando la resistividad disminuye, 1000 rayl/m o menos. Para este tipo de

configuración geométrica, el método de onda plana no proporciona resultados suficientemente precisos a medias y altas frecuencias.

Geometría	Resistividad R (rayl/m)	Porosidad σ (%)	Longitud silenciador L_T (m)
1	0	8	0.2572
2	1000	8	0.2572
3	4896	8	0.2572
4	17378	8	0.2572

Tabla 3.4 Parámetros relevantes del silenciador con material absorbente. $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m, espesor conducto perforado $t_h = 0.0009$ m, diámetro orificios $d_h = 0.00249$ m.

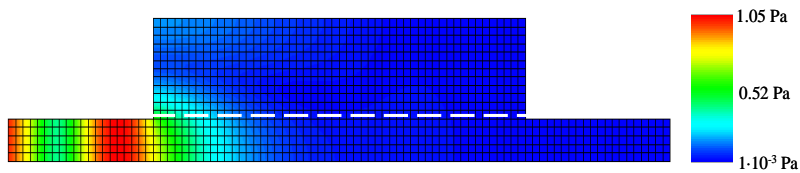


Figura 3.15 Distribución del campo de presiones de un silenciador concéntrico con material absorbente. $R=4896$ rayl/m, porosidad $\sigma = 8\%$, a 1500 Hz.

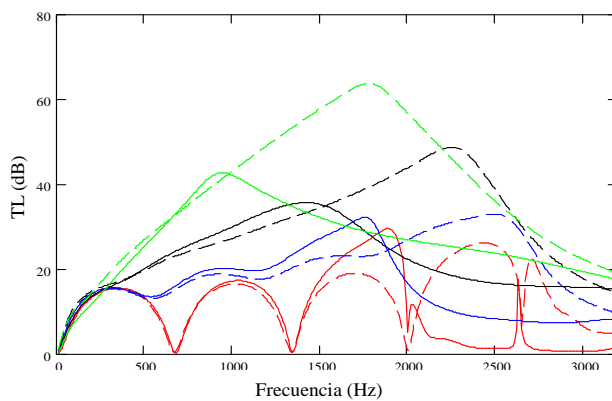


Figura 3.16 TL de un silenciador concéntrico con material absorbente y elementos perforados en función de la resistividad. Geometría 1: —, MEF; - - -, onda plana; geometría 2: —, MEF; - - -, onda plana; geometría 3: —, MEF; - - -, onda plana; geometría 4: —, MEF; - - -, onda plana.

3.5.2.2. Silenciador con material absorbente y conductos extendidos

Para este caso se estudia el efecto que ejerce en el comportamiento acústico de un silenciador híbrido la variación de las longitudes de los conductos extendidos de entrada y de salida. El silenciador está relleno de material absorbente en su parte central. La Figura 3.17 exhibe la malla de elementos finitos y la Figura 3.18 la distribución del campo de presiones de la geometría 3, a 1500 Hz.

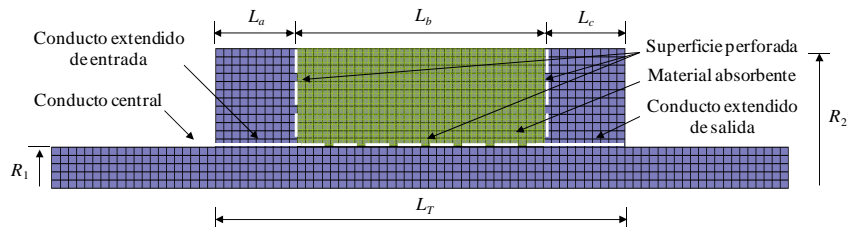


Figura 3.17 Malla de elementos finitos de un silenciador con material absorbente y conductos extendidos.

Geometría	Resistividad R (rayl/m)	Porosidad σ (%)	Longitud silenciador L_T (m)	Longitud extendido entrada L_a (m)	Longitud extendido salida L_c (m)
1	4896	8	0.2572	0.025	0.025
2	4896	8	0.2572	0.035	0.035
3	4896	8	0.2572	0.05	0.05
4	4896	8	0.2572	0.075	0.075

Tabla 3.5 Parámetros relevantes del silenciador con conductos extendidos, material absorbente y elementos perforados. $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m, espesor del conducto perforado $t_h = 0.0009$ m, diámetro orificios $d_h = 0.00249$ m.

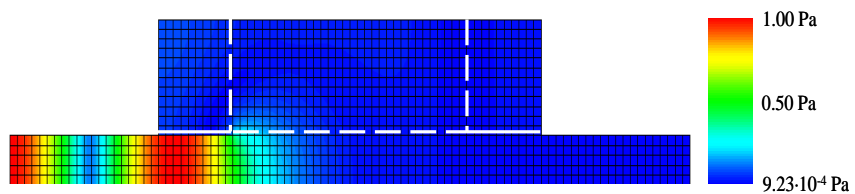


Figura 3.18 Campo de presiones en un silenciador con conductos extendidos, material absorbente y elementos perforados, geometría 3, a 1500 Hz.

La Figura 3.19 muestra el TL de las geometrías resumidas en la Tabla 3.5. En estos ejemplos, al igual que los anteriores, el comportamiento acústico exhibido por el modelo de onda plana converge a bajas frecuencias con el modelo

numérico. Se observa que la mejor atenuación acústica, sobre todo a media y alta frecuencia, corresponde a la geometría 1 debido a la mayor presencia de fibra absorbente.

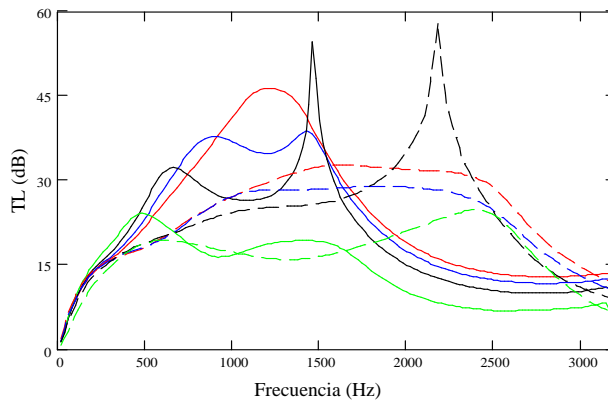


Figura 3.19 TL de un silenciador con conductos extendidos, parcialmente relleno con material absorbente y tubo perforado. Variación de longitud de conductos extendidos: geometría 1: —, MEF; - - - - , onda plana; geometría 2: —, MEF; - - - - , onda plana; geometría 3: —, MEF; - - - - , onda plana; geometría 4: —, MEF; - - - - , onda plana.

3.5.2.3. Silenciador con material absorbente y resonadores laterales

En la Figura 3.20 se muestra la malla de elementos finitos del silenciador y en la Figura 3.21, el campo de presiones correspondiente a la geometría 1, a una frecuencia de 1540 Hz.

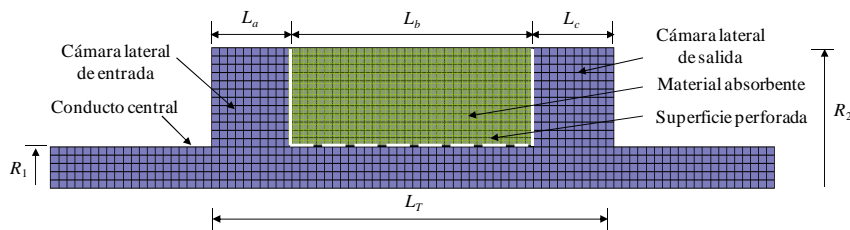


Figura 3.20 Malla de elementos finitos de un silenciador con material absorbente y resonadores laterales.

Geometría	Resistividad R (rayl/m)	Porosidad σ (%)	Longitud silenciador L_r (m)	Longitud cámara lat. entrada L_a (m)	Longitud cámara lat. salida L_c (m)
1	4896	8	0.2572	0.05	0.05
2	4896	8	0.2572	0.075	0.075
3	4896	8	0.2572	0.05	0.01
4	4896	8	0.2572	0.075	0.01

Tabla 3.6 Parámetros relevantes del silenciador con material absorbente y resonadores laterales. $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m, espesor del conducto perforado $t_h = 0.0009$ m, diámetro orificios $d_h = 0.00249$ m, espesor placas rígidas $t_{h1} = t_{h2} = 0.01$ m.

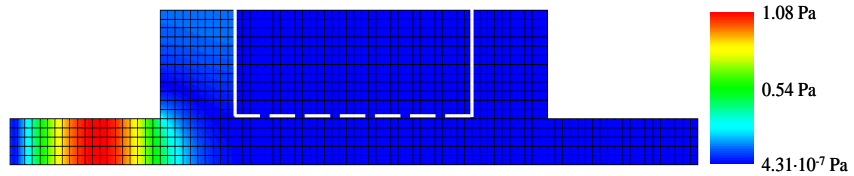


Figura 3.21 Campo de presiones de un silenciador con material absorbente y resonadores laterales, geometría 1, a una frecuencia de 1540 Hz.

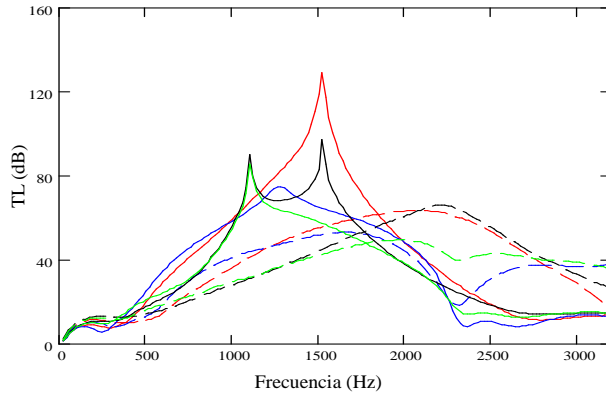


Figura 3.22 TL de un silenciador con resonadores laterales, material absorbente y elementos perforados. Variación de longitud de cámaras laterales. Geometría 1: —, MEF; - - - -, onda plana; geometría 2: —, MEF; - - - -, onda plana; geometría 3: —, MEF; - - - -, onda plana; geometría 4: —, MEF; - - - -, onda plana.

La existencia de resonadores laterales de corta longitud proporciona la aparición de picos de resonancia en la atenuación debido a la existencia de modos de alto orden en las discontinuidades geométricas. El modelo de onda plana no es capaz de predecir correctamente este fenómeno, tal como se observa en la Figura 3.22, donde se exhiben los resultados de las geometrías de la Tabla 3.6. Como en

casos anteriores, los resultados de ambos métodos solo coinciden a bajas frecuencias.

3.5.2.4. Silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales

La característica principal de este silenciador, Figura 3.23, es la existencia de una cámara anular externa cuya función es la de mejorar la atenuación acústica a bajas frecuencias mediante la aparición de un pico de resonancia. Se estudia el efecto de la modificación de las dimensiones de las cámaras laterales, manteniendo la longitud total del silenciador. La Tabla 3.7 expone las dimensiones relevantes.

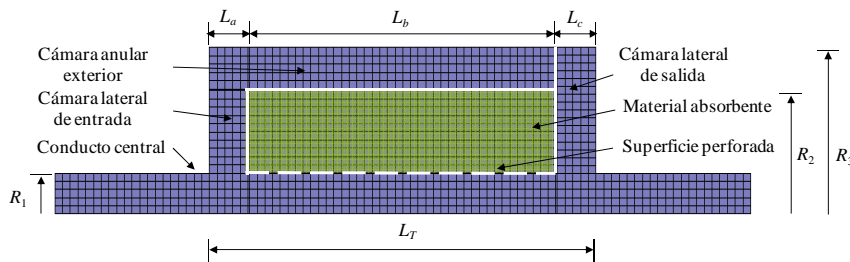


Figura 3.23 Malla de elementos finitos de un silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales.

Geometría	Resistividad R (rayl/m)	Porosidad σ (%)	Longitud silenciador L_T (m)	Longitud cámara lat. entrada L_a (m)	Longitud cámara lat. salida L_c (m)
1	4896	8	0.25	0.05	0.05
2	4896	8	0.25	0.075	0.075
3	4896	8	0.25	0.1	0.1
4	4896	8	0.25	0.05	0.075

Tabla 3.7 Parámetros relevantes del silenciador con material absorbente, anillo exterior y resonadores laterales. $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.075$ m, $R_3 = 0.1$ m, espesor del conducto perforado $t_h = 0.0009$ m, diámetro orificios $d_h = 0.00249$ m, espesor placas rígidas $t_{h1} = t_{h2} = 0.01$ m.

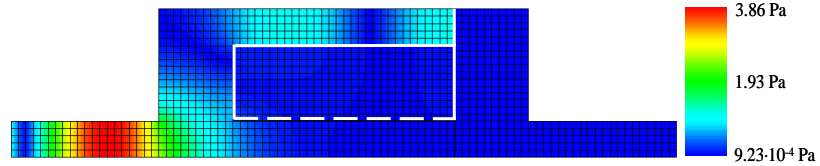


Figura 3.24 Distribución del campo de presiones de un silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales, geometría 1, a 1500 Hz.

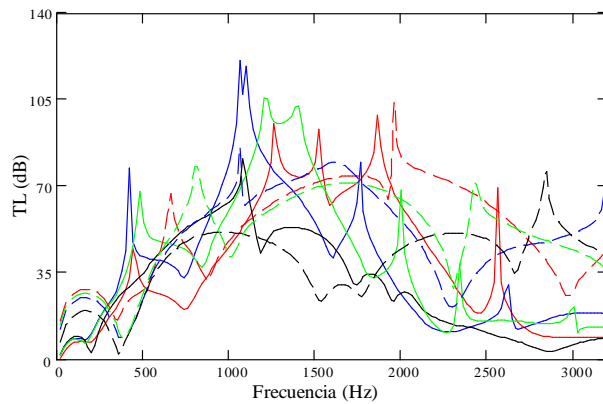


Figura 3.25 Comparación de métodos en un TL de un silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales. Variación de longitud de cámaras laterales.

Geometría 1: —, MEF; - - - - , onda plana; geometría 2: —, MEF; - - - - , onda plana; geometría 3: —, MEF; - - - - , onda plana; geometría 4: —, MEF; - - - - , onda plana.

En la Figura 3.24 se aprecia la distribución del campo de presiones de la geometría 1, a 1500 Hz. Los resultados de la Figura 3.25 indican que el método de onda plana no predice de manera precisa la existencia de picos de atenuación, generados por la combinación de los modos longitudinales y de alto orden, en las discontinuidades geométricas de las cámaras laterales y anular.

3.5.2.5. Silenciador disipativo con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida

En los ejemplos precedentes se ha combinado la existencia de una cámara lateral de entrada y salida sin otros elementos que pudieran obstruir la propagación transversal de las ondas. En este caso la colocación de un conducto extendido en la cámara lateral de entrada busca la mejora de la atenuación acústica a bajas frecuencias sin reducir la cantidad de material absorbente. Este tipo de silenciadores, Figura 3.26, combina la mejora de la atenuación acústica, sobre

todo a bajas frecuencias, y el ahorro de espacio al superponer los conductos extendidos.

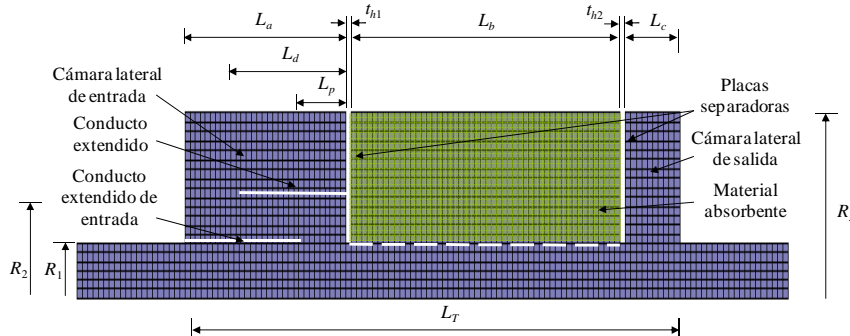


Figura 3.26 Malla de elementos finitos de silenciador disipativo con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida.

Prueba	Cond. extend. exterior L_d (m)	Long. cámara interna L_p (m)	Long. reson. anular L_a (m)	Long. cámara disip. L_b (m)	Long. cámara salida L_c (m)	Long. total L_T (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)
1	0.111	0.048	0.148	0.248	0.05	0.456	0.0268	0.054	0.092

Tabla 3.8 Dimensiones relevantes de silenciador disipativo con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida, $\sigma = 8\%$.

En la Figura 3.27 se representa el campo de presiones correspondiente al silenciador, a una frecuencia de 1080 Hz.

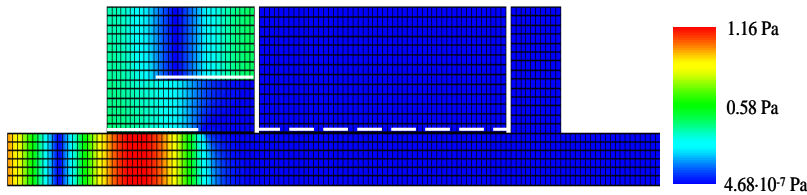


Figura 3.27 Distribución del campo de presiones en un silenciador disipativo con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida, prueba 1, a 1080 Hz.

Para la geometría exhibida en la Figura 3.26, cuyas dimensiones se describen en la Tabla 3.8, se advierte de forma general la presencia de un pico de resonancia a bajas frecuencias el cual incrementa la atenuación en este rango. A medida que aumenta la resistividad el comportamiento acústico del silenciador mejora en gran parte del rango de frecuencias en estudio, tal como se observa en la Figura 3.28.

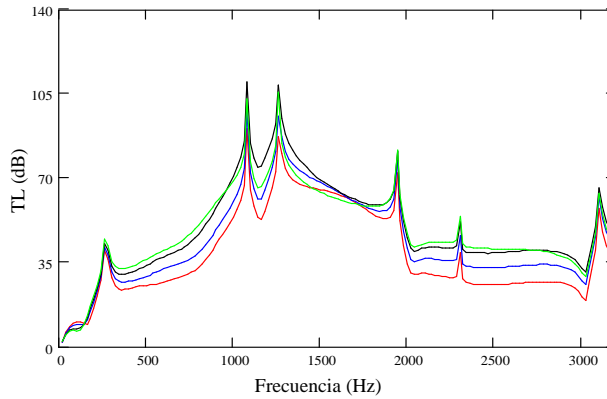


Figura 3.28 TL de un silenciador disipativo con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida. MEF: —, $R = 2000$ rayl/m; —, $R = 4896$ rayl/m; —, $R = 10000$ rayl/m; —, $R = 17378$ rayl/m.

3.5.3. Flujo medio

A continuación se muestra gráficamente el TL de un silenciador concéntrico con conductos perforados considerando la existencia de flujo medio. Inicialmente se expone el resultado obtenido para un silenciador sin material absorbente y seguidamente el resultado de la atenuación cuando existe material absorbente. Para el cálculo con el método de Elementos Finitos con flujo medio se ha seleccionado como condición de continuidad entre medios, la de continuidad de velocidad. Las velocidades de flujo no superan $M = 0.2$ ya que es el límite superior en el que el modelo de impedancia escogido, flujo medio e interacción entre orificios [73], es efectivo. Se asume que el flujo está presente únicamente en el conducto central siendo nulo en la cámara externa.

3.5.3.1. Resonador concéntrico sin material absorbente

Para la realización del análisis del comportamiento acústico del silenciador se utiliza un silenciador de longitud L_T de 0.2572 m, porosidad σ de 8%, diámetro de orificios del conducto perforado d_h de 0.00249 m y espesor t_h de 0.0009 m cuya distribución del campo de presiones a 1720 Hz aparece en la Figura 3.29.

Los resultados que se muestran en Figura 3.30 indican que el modelo de onda plana proporciona resultados cercanos a los ofrecidos por el método de Elementos Finitos hasta una frecuencia aproximada de 1400 Hz. A partir de este

punto las divergencias se hacen más evidentes a medida que la velocidad de flujo medio aumenta.

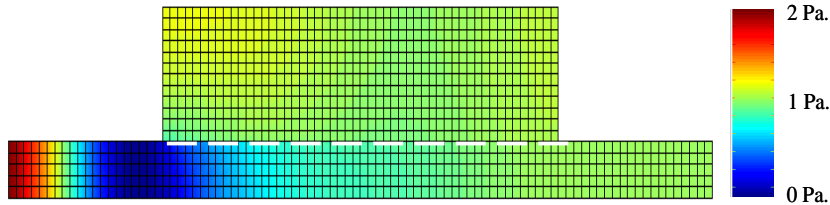


Figura 3.29 Distribución del campo de presiones en un resonador concéntrico con flujo medio, conducto perforado, sin material absorbente, a 1720 Hz.

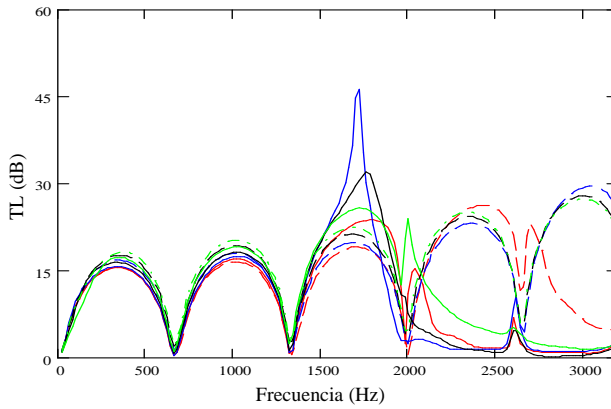


Figura 3.30 TL de silenciador concéntrico con flujo medio, conducto perforado y sin material absorbente. Variación del flujo medio. $M = 0$: —, MEF, - - - , onda plana; $M = 0.05$: —, MEF, - - - , onda plana; $M = 0.1$: —, MEF, - - - , onda plana; $M = 0.15$: —, MEF, - - - , onda plana.

3.5.3.2. Resonador concéntrico con material absorbente

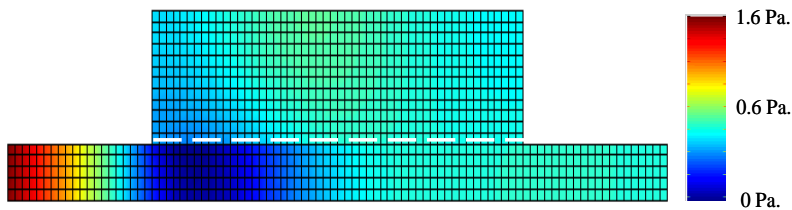


Figura 3.31 Campo de distribución de presiones en un resonador concéntrico, $M = 0.15$, a 1320 Hz.

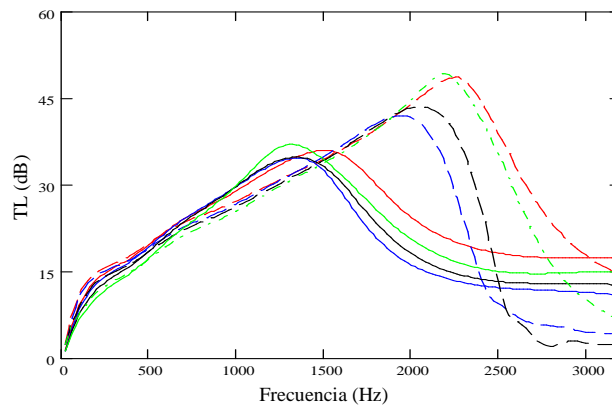


Figura 3.32 TL de silenciador concéntrico con flujo medio, conducto perforado y material absorbente. Variación del flujo medio. $M = 0$: —, MEF, - - -, onda plana; $M = 0.05$: —, MEF, - - -, onda plana; $M = 0.1$: —, MEF, - - -, onda plana; $M = 0.15$: —, MEF, - - -, onda plana.

La distribución del campo de presiones de este silenciador a una frecuencia de 1320 Hz se muestra en la Figura 3.31, con $M = 1.5$. A partir del TL representado en la Figura 3.32, se observa que la presencia de flujo medio disminuye la atenuación a altas frecuencias, mejorando ligeramente en un intervalo de media frecuencia. Como en el ejemplo sin flujo, los resultados proporcionados por el modelo de onda plana logran aproximarse a los generados por elementos finitos hasta una frecuencia de 750 Hz.

3.6. Conclusiones

En este capítulo se ha destacado que el método de Elementos Finitos es una herramienta de mucha versatilidad en el modelado acústico de silenciadores.

La ecuación de ondas convectiva, formulada en presión, ha sido resuelta mediante elementos finitos por medio de la aplicación del método de Residuos Ponderados y la formulación de Galerkin. Este procedimiento ha sido utilizado para silenciadores reactivos, disipativos e híbridos.

Por medio del método de Elementos Finitos se ha analizado el comportamiento acústico de diversos silenciadores estudiando el efecto que ejercen la presencia de conductos perforados, conductos extendidos, cámaras laterales, conductos anulares, material absorbente y flujo medio.

Para el planteamiento de elementos finitos en silenciadores disipativos en presencia de flujo medio se ha supuesto que la velocidad es nula en el material absorbente y que sus características internas tales como homogeneidad e isotropía no se alteran, pese a que, en ocasiones, se generan campos de velocidades inducidas por el flujo medio del conducto central, de baja intensidad, que pueden modificar dichas propiedades.

El comportamiento acústico de los silenciadores analizados manifiesta la limitación del modelo de onda plana, suposición planteada en el capítulo anterior. En efecto, el modelo de onda plana no predice de forma correcta los cambios en la atenuación debidos a la existencia de conductos extendidos, conductos perforados, cámaras laterales de expansión, material absorbente o flujo medio. Por otro lado, conocidas las ventajas de adaptación a geometrías complejas se destaca, no obstante, su limitación en el tiempo de cálculo requerido y capacidad de memoria de ordenador necesaria. Es por ello que se requiere el desarrollo de alternativas modales que garanticen resultados precisos con un coste computacional reducido.

Capítulo 4. Modelado acústico de silenciadores híbridos mediante técnicas modales multidimensionales

Resumen del capítulo:

En este capítulo se estudia el modelado acústico de silenciadores por medio de la aplicación de técnicas modales multidimensionales. Inicialmente se describe el tratamiento analítico modal de la ecuación de ondas asociada a conductos rectangulares, circulares y anulares, considerando medio en reposo y móvil, cuyos modos transversales se conocen.

La existencia de material absorbente en conductos, junto con el aire, implica la evaluación de los números de onda y de los modos transversales a partir del establecimiento de las oportunas condiciones de contorno. Resultado de ello es la obtención de la ecuación característica cuya incógnita representa el número de onda axial, común a ambos elementos, calculado a partir de procedimientos iterativos como el método de la secante o el de Newton-Raphson.

Por medio de técnicas modales, como los métodos de Integración Directa y de Ajuste Modal, se determinan los coeficientes de propagación necesarios en el cálculo de la atenuación acústica y se analizan algunos ejemplos. Con el fin de validar esta técnica, los resultados se comparan con los aportados por medio de técnicas numéricas, en este caso, Elementos Finitos.

4.1. Introducción

En el Capítulo 2 se analizó el comportamiento acústico de silenciadores basado en la teoría unidimensional de onda plana y el desarrollo de la matriz de cuatro polos. Se observó que la teoría de onda plana proporciona resultados aceptables a bajas frecuencias, con un reducido coste computacional, pero que, sin embargo, a frecuencias en las que la onda deja de ser plana, excluye el efecto de los modos de alto orden, ofreciendo una predicción del comportamiento acústico del silenciador errónea. En el Capítulo 3 se procedió al modelado de silenciadores por medio de métodos numéricos, concretamente con el método de Elementos Finitos. Es una técnica ampliamente difundida ya que tiene la ventaja de poder ser aplicada a geometrías arbitrarias, proporcionando resultados precisos. No obstante, posee un elevado coste computacional el cual aumenta a medida que el número de grados de libertad del modelo crece, ocasionando que, para algunos modelos de silenciador, su utilización no sea viable como herramienta de diseño.

Debido a que en el modelado de silenciadores el tiempo de procesamiento de datos es un factor decisivo, los esfuerzos se deben centrar en reducir el coste computacional proporcionando a su vez una predicción del comportamiento acústico suficientemente precisa. Para ello, una posible estrategia consiste en el empleo de técnicas modales multidimensionales que puedan ser aplicadas a las configuraciones geométricas más interesantes comercialmente [35, 98]

Enmarcado en el alcance de esta Tesis, el conocimiento de las técnicas modales multidimensionales y la posterior adaptación al modelado acústico comienza con la descripción de la solución analítica tridimensional de la ecuación de ondas y su utilización en tipologías más comunes de conductos, teniendo en cuenta la presencia o no de flujo medio. Además, la existencia de conductos rodeados de material absorbente separado por medio de una superficie perforada implica el análisis de la ecuación de ondas en función del elemento disipativo y de las características geométricas de la superficie perforada.

De entre las técnicas modales multidimensionales existentes en la bibliografía se hace énfasis en el método de Integración Directa y la técnica de Ajuste Modal. Una vez estudiadas sus analogías y diferencias se procede a su empleo en el modelado de las configuraciones geométricas limitadas al alcance de esta Tesis.

4.2. Acústica tridimensional de conductos sin material absorbente

El conocimiento de la forma en que se propagan las ondas acústicas dentro de los conductos que conforman el silenciador es fundamental para entender el comportamiento acústico de éstos. Generalmente los conductos son de forma cilíndrica con sección transversal circular y anular, conductos con sección elíptica y elíptica anular y en menor escala (pero de utilización difundida en sistemas de aire acondicionado), conductos con sección transversal rectangular.

El análisis de los campos de presión y velocidad acústica considerando medio en reposo y movimiento (flujo medio) se inicia con el planteamiento de la ecuación de ondas en los tipos de conductos más comunes, rectangulares, circulares y anulares, de acuerdo al alcance de esta Tesis, y la aplicación de las correspondientes condiciones de contorno.

4.2.1. Medio en reposo

La elección del sistema de coordenadas que se adapte a las condiciones de frontera, tales como las coordenadas cartesianas para una frontera rectangular o coordenadas cilíndricas para un contorno circular, simplificará en gran medida el trabajo que se requiere para obtener e interpretar una solución.

La ecuación de ondas para el medio en reposo está dada por la expresión [65, 79]

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

en la que el Laplaciano ∇^2 es expresado, en el sistema de coordenadas cartesiano como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.2)$$

y en el sistema de coordenadas cilíndrico como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.3)$$

4.2.1.1. Conductos rectangulares

Asumiendo que la presión acústica tiene un comportamiento armónico, se tiene

$$p = Pe^{i\omega t} \quad (4.4)$$

en la que P es función sólo de las coordenadas espaciales [65]. Al sustituir (4.4) en (4.1) se obtiene la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 P + k_0^2 P = 0 \quad (4.5)$$

El Laplaciano ∇^2 está expresado por medio de la ecuación (4.2). Como P es función de las coordenadas espaciales, tal como se muestra en la Figura 4.1, la expresión (4.4) se escribe como

$$p(x,y,z,t) = P(x,y,z)e^{i\omega t} \quad (4.6)$$

Así, la ecuación de Helmholtz (4.5) en coordenadas cartesianas se convierte en

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \quad (4.7)$$

y aplicando el método de separación de variables [79], siempre y cuando las condiciones de contorno sean separables [111], se obtiene

$$P(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.8) en (4.7) y dividiendo entre XYZ resulta la expresión

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_0^2 \quad (4.9)$$

La expresión anterior también puede ser escrita como

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_0^2 - \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (4.10)$$

en la que

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2 \quad \text{o bien} \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \quad (4.11)$$

con solución $X(x) = A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)$.

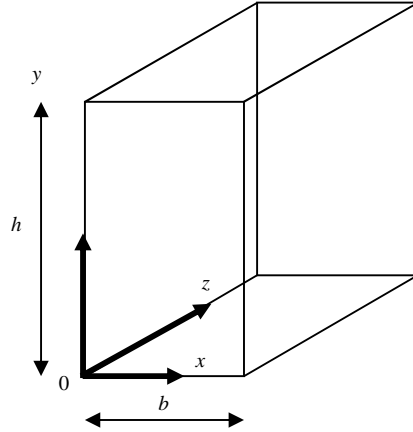


Figura 4.1 Esquema de un conducto rectangular.

Similarmente, para las restantes variables

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_0^2 - \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (4.12)$$

en la que también

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2 \quad \text{o bien} \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \quad (4.13)$$

con solución $Y(y) = B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y)$.

Finalmente, transformando la ecuación (4.12)

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = (-k_0^2 + k_x^2 + k_y^2) Z \quad (4.14)$$

donde debe cumplirse

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad (4.15)$$

en la que

$$k_z^2 = k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 \quad (4.16)$$

con solución $Z(z) = C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{jk_z z}$ y el número de onda del aire, k_0^2 , es

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (4.17)$$

La solución general para la ecuación de onda tridimensional es entonces

$$p(x, y, z, t) = \left((A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)) \right. \\ \left. (B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y)) (C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{jk_z z}) \right) e^{j\omega t} \quad (4.18)$$

y las constantes A , B y C son dependientes de las condiciones de contorno. La solución general asociada a la propagación axial en un conducto rectangular de pared rígida se obtiene de la aplicación de las oportunas condiciones de contorno, tales que las velocidades normales a las superficies conformadas por los planos x e y deben ser cero, es decir,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{y } x = L_x \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad \text{y } y = L_y \quad (4.20)$$

Para $x = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = A_2 k_x (B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y)) (C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{jk_z z}) \quad (4.21)$$

con la que $A_2 = 0$. Para la siguiente condición, $y = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = B_2 k_y (A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)) (C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{jk_z z}) \quad (4.22)$$

define que $B_2 = 0$. La solución general que satisface las condiciones en x e $y = 0$ es:

$$p(x, y, z, t) = (\cos(k_x x)) (\cos(k_y y)) (D_1 e^{-jk_z z} + D_2 e^{jk_z z}) e^{j\omega t} \quad (4.23)$$

donde $D_1 = A_1 B_1 C_1$ y $D_2 = A_1 B_1 C_2$.

Para $x = L_x = b$ e $y = L_y = h$, ver Figura 4.1,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (-A_1 k_x \sin(k_x x)) (B_1 \cos(k_y y)) (C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{jk_z z}) = 0 \quad (4.24)$$

donde
$$-A_1 k_x \operatorname{sen}(k_x x) = 0 \text{ en } x = L_x \quad (4.25)$$

cumpliéndose que
$$\operatorname{sen}(k_x x) = 0 \quad (4.26)$$

por tanto, el número de onda k_x debe satisfacer la relación

$$k_x = \frac{m\pi}{L_x}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

Para la siguiente condición

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (A_1 \cos(k_x x))(-B_1 k_y \operatorname{sen}(k_y y))(C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{jk_z z}) = 0 \quad (4.28)$$

donde

$$-B_1 k_y \operatorname{sen}(k_y y) = 0 \text{ en } y = L_y \quad (4.29)$$

en la que
$$\operatorname{sen}(k_y y) = 0 \quad (4.30)$$

y k_y cumple
$$k_y = \frac{n\pi}{L_y}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

De la expresión (4.16) el número de onda axial k_z equivale a

$$k_{z,m,n} = \left(k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

La solución general que satisface las condiciones en $x = L_x$ e $y = L_y$ es

$$p(x, y, z, t) = \left(\cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \right) (D_1 e^{-jk_z z} + D_2 e^{jk_z z}) e^{j\omega t} \quad (4.33)$$

donde nuevamente $D_1 = A_1 B_1 C_1$ y $D_2 = A_1 B_1 C_2$. Como existen múltiples soluciones posibles, la solución más general será la superposición de todas las soluciones posibles

$$p(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \right) \left(D_{mn}^+ e^{-jk_{z,m,n}z} + D_{mn}^- e^{jk_{z,m,n}z} \right) e^{j\omega t} \quad (4.34)$$

donde $D_{mn}^+ = A_{mn}^+ B_{mn}^+ C_{mn}^+$ y $D_{mn}^- = A_{mn}^- B_{mn}^- C_{mn}^-$.

En la expresión (4.32) el término $(m\pi/L_x)^2 + (n\pi/L_y)^2$ representa el número de onda transversal. Los modos transversales definen la forma de distribución de la presión acústica en cada sección transversal, y su variación dependerá de las variables m y n . Para $m = n = 0$, la distribución de la presión en las secciones transversales del conducto será uniforme, siendo su modo de propagación el de una onda plana. Para el resto de los modos la propagación será diferente al de una onda plana, denominándose modos de alto orden [35, 79]. La Figura 4.2 representa la distribución de la presión acústica de un conducto rectangular a diferentes frecuencias.

La propagación de un modo (m,n) sin atenuación será posible cuando su número de onda $k_{z,m,n}$ sea real. En caso contrario, no habrá propagación sino atenuación exponencial y se designará modo evanescente [35, 79]. Para una frecuencia angular ω un modo (m,n) comenzará su propagación si se cumple la expresión

$$k_{z,m,n}^2 = k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 > 0 \quad (4.35)$$

Puede observarse que el modo de onda plana, $m = n = 0$, siempre se propagará ya que para un intervalo de frecuencias dado el número de onda es siempre real. No obstante, la propagación de los modos de alto orden dependerá de las dimensiones físicas del conducto y de la frecuencia. La frecuencia en la que un modo (m,n) comenzará su propagación se denomina frecuencia de corte $f_{c,m,n}$. Para ello deberá cumplirse [35, 65, 79]

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0} > \left(\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.36)$$

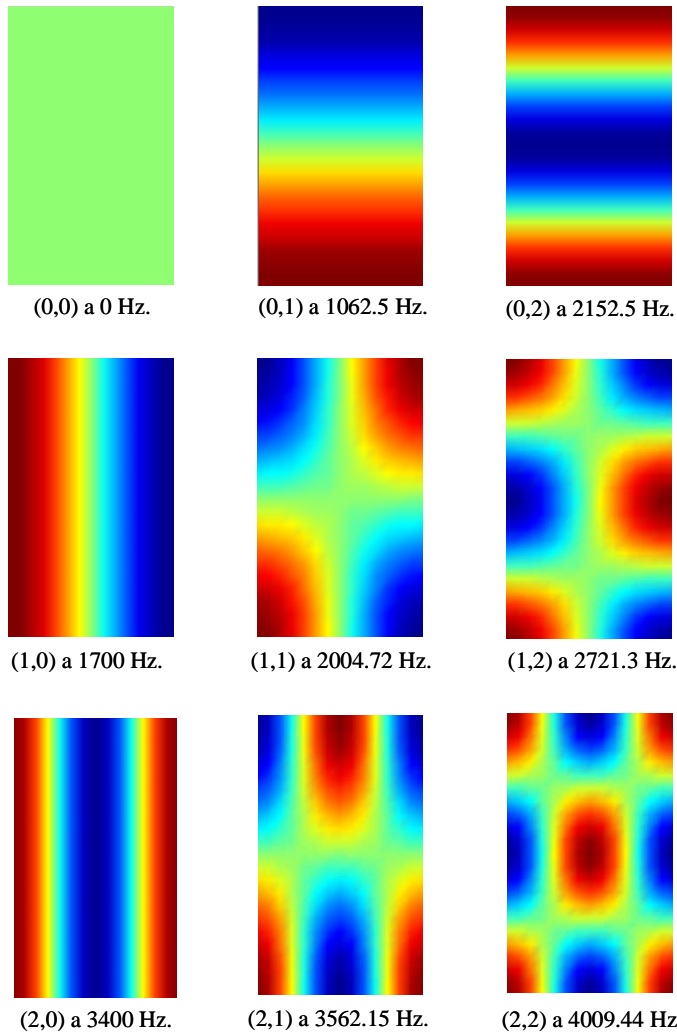


Figura 4.2 Modos de propagación de una sección transversal rectangular.

Por tanto, la frecuencia de corte $f_{c,m,n}$ de un modo (m,n) a partir de la cual comenzará su propagación es

$$f_{c,m,n} = \frac{c_0}{2\pi} \left(\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

La evaluación de la velocidad axial correspondiente al modo (m,n) se obtiene empleando la ecuación de Euler (2.48)

$$\rho_0 \frac{\partial u_{z,m,n}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4.38)$$

de ahí que

$$u_{z,m,n} = - \frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.39)$$

por tanto, la velocidad axial es

$$u_{z,m,n}(x, y, z, t) = \frac{k_{z,m,n}}{\rho_0\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \right) \left(D_{mn}^+ e^{-jk_{z,m,n}z} - D_{mn}^- e^{jk_{z,m,n}z} \right) e^{j\omega t} \quad (4.40)$$

4.2.1.2. Conductos circulares

Los silenciadores con sección transversal circular uniforme son ampliamente utilizados en silenciadores de escape. La propagación de ondas en conductos cilíndricos se rige por medio de la ecuación de ondas (4.1) junto con el Laplaciano (4.3) formulado en coordenadas cilíndricas. Asumiendo que la variación temporal es armónica, la sección transversal es uniforme y empleando coordenadas cilíndricas, ver Figura 4.3, la amplitud de presión acústica en cualquier punto de la sección se puede expresar como

$$p(r, \theta, z, t) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)e^{j\omega t} \quad (4.41)$$

en la que se expresa la dependencia del tiempo t con $e^{j\omega t}$. La ecuación de Helmholtz (4.5) aplicada a este tipo de sección transversal se formula como

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \quad (4.42)$$

Al desarrollar la expresión se obtiene

$$\Theta(\theta)Z(z) \frac{d^2 R}{dr^2} + \Theta(\theta)Z(z) \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R(r)Z(z) \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + R(r)\Theta(\theta) \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 R(r)\Theta(\theta)Z(z) = 0 \quad (4.43)$$

y dividiendo entre $R(r)\Theta(\theta)Z(z)$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 = 0 \quad (4.44)$$

Al trasladar hacia el miembro derecho el término $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$, se logra

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -k_0^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_0^2 + k_z^2 \quad (4.45)$$

verificándose para el miembro derecho

$$-\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_z^2, \quad \text{donde,} \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad (4.46, 4.47)$$

con solución $Z(z) = A_1 \text{sen}(k_z z) + B_1 \text{cos}(k_z z)$

Nuevamente, al trasladar el término $\frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$ hacia el miembro derecho se consigue

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} = -k_0^2 + k_z^2 - \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (4.48)$$

Multiplicando esta expresión por r^2

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = r^2 (-k_0^2 + k_z^2) - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (4.49)$$

Al igual que en (4.45), el último término del miembro derecho debe cumplir

$$-\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = m^2, \quad \text{donde,} \quad \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (4.50, 4.51)$$

cuya solución es $\Theta(\theta) = A_2 \text{sen}(m\theta) + B_2 \text{cos}(m\theta)$

Agrupando (4.49) [65, 79]

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = -r^2 (k_0^2 - k_z^2) + m^2 \quad (4.52)$$

Dividiendo entre r^2 y multiplicando posteriormente por R se obtiene

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{m^2 R}{r^2} + R(k_0^2 - k_z^2) = 0 \quad (4.53)$$

donde el número de onda radial k_r es igual a

$$k_r^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (4.54)$$

y la expresión (4.53) se ordena quedando

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R\left(k_r^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) = 0 \quad (4.55)$$

que es la ecuación diferencial de Bessel de orden m , en la que m es un número entero y cuya solución es

$$R_m(r) = C_1 J_m(rk_r) + C_2 Y_m(rk_r) \quad (4.56)$$

En este caso J_m y Y_m son funciones de Bessel de orden m de primera y de segunda especie respectivamente. Éstas son funciones oscilantes cuyas amplitudes disminuyen conforme aumenta k_r , y las Y_m crecen sin límite cuando $k_r \rightarrow 0$. Por tanto, la consideración de la presión en un dominio cilíndrico que contenga al origen de coordenadas implicará que $C_2 = 0$. De este modo, la solución general en una región cilíndrica en la que se incluya el origen de coordenadas es

$$R_m(r) = C_1 J_m(rk_r) \quad (4.57)$$

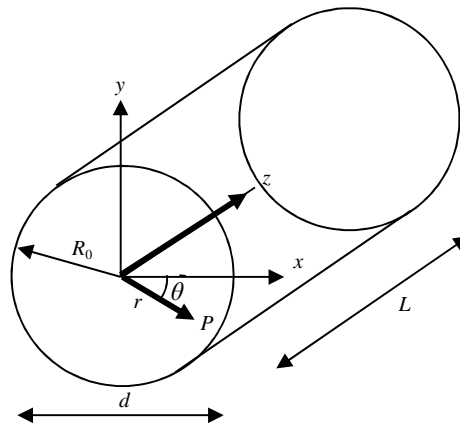


Figura 4.3 Sección transversal circular.

La presión acústica en cualquier punto de la sección transversal puede escribirse como

$$p(r, \theta, z, t) = C_1 J_m(rk_r) (A_1 \sin(k_z z) + B_1 \cos(k_z z)) (A_2 \sin(m\theta) + B_2 \cos(m\theta)) e^{j\omega t} \quad (4.58)$$

Para precisar k_r debe considerarse que en los límites del contorno, $r = R_0$ las paredes son rígidas en la que la velocidad acústica radial es nula, y a partir de la ecuación de Euler (2.36)

$$\left. \frac{dJ_m(k_r r)}{dr} \right|_{r=R_0} = 0 \quad (4.59)$$

La solución de la ecuación no lineal proporciona los números de onda radiales $k_{r,m,n}$ para $m, n = 0, 1, 2, \dots$. El número n es el número modal radial e indica el número de circunferencias nodales. La expresión

$$k_{r,m,n} = \frac{\alpha_{m,n}}{R_0} \quad (4.60)$$

al ser sustituida en (4.59) permite calcular las raíces

$$J'_m(\alpha_m) = 0 \quad (4.61)$$

Los valores de $\alpha_{m,n}$ son constantes e independientes de R_0 . En el caso en que $\alpha_{0,0} = 0$ y $J_0(0) = 1$, la distribución de presión es uniforme y por tanto se tiene el caso de propagación de onda plana.

La solución de la ecuación de Helmholtz, a falta de la imposición de las condiciones de contorno, es

$$\begin{aligned} p(r, \theta, z, t) = & (A_{00}^+ e^{-jk_0 z} + A_{00}^- e^{jk_0 z}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_0} r\right) (A_{0n}^+ e^{jk_{z,0,n} z} + A_{0n}^- e^{-jk_{z,0,n} z}) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_0} r\right) \left((A_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + A_{m,n}^- e^{jm\theta}) e^{jk_{z,m,n} z} \right. \\ & \left. + (A_{2m,n}^+ e^{-jm\theta} + A_{2m,n}^- e^{jm\theta}) e^{-jk_{z,m,n} z} \right) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.62)$$

que escrita en función de sus modos de presión transversal $\Psi(r, \theta)$

$$\Psi^{\pm}(r, \theta) = J_m \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_0} r \right) e^{\mp jm\theta} \quad (4.63)$$

la ecuación (4.62) se convierte en

$$\begin{aligned} p(r, \theta, z, t) = & \left(A_{00}^+ e^{-jk_0 z} + A_{00}^- e^{jk_0 z} \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_0} r \right) \left(A_{0n}^+ e^{jk_{z,0,n} z} + A_{0n}^- e^{-jk_{z,0,n} z} \right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(A_{1m,n}^+ \Psi^+(r, \theta) + A_{1m,n}^- \Psi^-(r, \theta) \right) e^{jk_{z,m,n} z} \right. \\ & \left. \left. + \left(A_{2m,n}^+ \Psi^+(r, \theta) + A_{2m,n}^- \Psi^-(r, \theta) \right) e^{-jk_{z,m,n} z} \right) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Al igual que en las secciones transversales rectangulares, la propagación de un modo (m,n) comenzará cuando el número de onda axial sea real y positivo verificándose la relación

$$k_{z,m,n}^2 = k_0^2 - k_{r,m,n}^2 > 0 \quad (4.65)$$

Para conductos cilíndricos, la frecuencia de corte $f_{c,m,n}$ es

$$k_0^2 > k_{r,m,n}^2 \quad (4.66)$$

$$\frac{2\pi f_{c,m,n}}{c_0} > \frac{\alpha_{m,n}}{R_0} \quad (4.67)$$

$$f_{c,m,n} = \frac{c_0 \alpha_{m,n}}{2\pi R_0} \quad (4.68)$$

Los modos son designados por el par ordenado (m,n) en el que el entero m establece el número de líneas nodales radiales, y el entero n determina el número de círculos nodales. La Figura 4.4 muestra la distribución de la presión acústica en conductos circulares a diferentes frecuencias. Existen dos casos relacionados con la propagación de los modos (m,n) en función de la posible simetría o asimetría en la excitación o en la conexión con otros elementos:

- En geometrías que no presentan simetrías de revolución el primer modo de alto orden que se propaga es el modo $(m,n) = (1,0)$.
- En geometrías que presentan axisimetría el primer modo de alto orden en propagarse es el modo $(m,n) = (0,1)$.

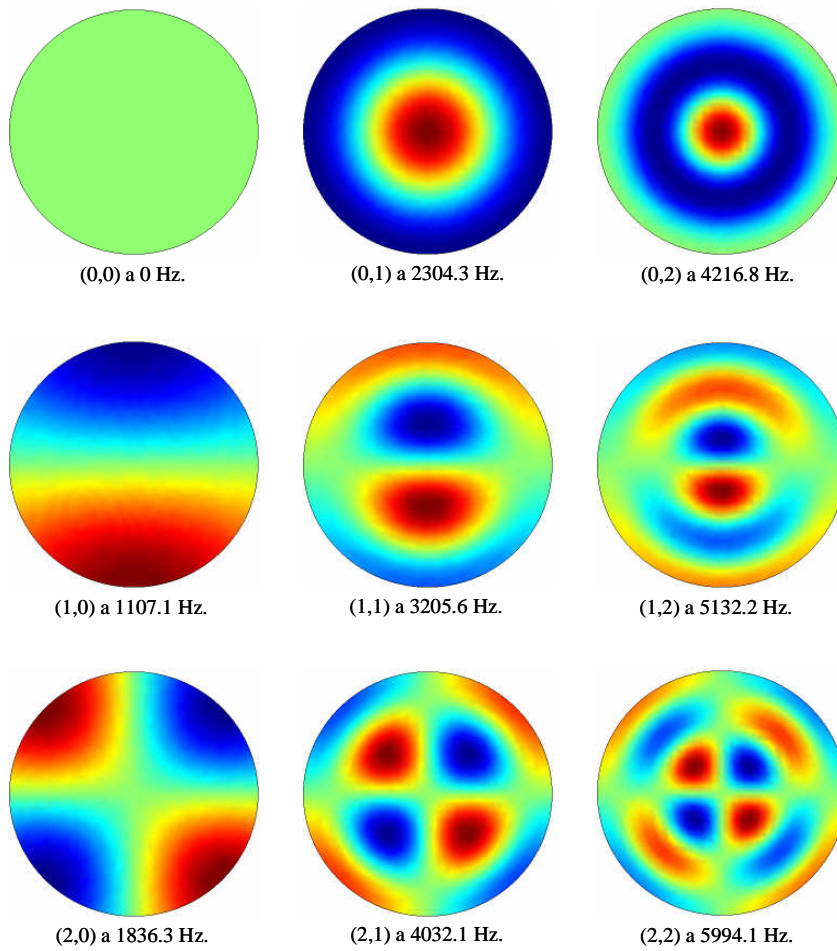


Figura 4.4 Modos transversales en un conducto circular.

- Para la obtención del campo de velocidades nuevamente se utiliza la ecuación de Euler (2.48) la cual provee para $u_{z,m,n}$

$$u_{z,m,n} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.69)$$

que al ser sustituido en (4.69) proporciona

$$\begin{aligned}
u(r, \theta, z, t) = & \left(\frac{1}{c_0 \rho_0} (A_{00}^+ e^{-jk_0 z} - A_{00}^- e^{jk_0 z}) \right. \\
& - \frac{k_{z,0,n}}{\omega \rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_0} r \right) (A_{0n}^+ e^{jk_{z,0,n} z} - A_{0n}^- e^{-jk_{z,0,n} z}) \\
& \left. - \frac{k_{z,m,n}}{\omega \rho_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_0} r \right) \left((A_{1m,n}^+ e^{-jm\theta} + A_{1m,n}^- e^{jm\theta}) e^{jk_{z,m,n} z} \right. \right. \\
& \left. \left. (A_{2m,n}^+ e^{-jm\theta} + A_{2m,n}^- e^{jm\theta}) e^{-jk_{z,m,n} z} \right) \right) e^{j\omega t}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

La Tabla 4.1 representa las raíces $\alpha_{m,n}$ de la primera derivada de la función de Bessel de orden m .

m/n	0	1	2	3	4	5
0	0.0	3.832	7.016	10.174	13.324	16.470
1	1.841	5.331	8.536	11.706	14.864	18.016
2	3.054	6.706	9.969	13.170	16.348	19.513
3	4.201	8.015	11.346	14.586	17.789	20.973
4	5.318	9.282	12.682	15.964	19.196	22.401
5	6.415	10.520	13.987	17.313	20.576	23.804

Tabla 4.1 Raíces $\alpha_{m,n}$ de la función de Bessel $J'_m(\alpha_m)$.

4.2.1.3. Conductos anulares

Las secciones circulares anulares son ampliamente utilizadas en silenciadores con conductos extendidos y elementos perforados [35]. Como en el caso anterior, debe resolverse la ecuación de Helmholtz (4.5). Para geometrías axisimétricas no hay dependencia de la variable angular θ y siguiendo un procedimiento análogo al de secciones circulares, se tiene

$$p(r, z, t) = P(r, z) e^{j\omega t} \tag{4.71}$$

Nuevamente aplicando el método de separación de variables, P se puede escribir como

$$P(r, z) = R(r) Z(z) \tag{4.72}$$

donde R, Z son funciones de r y z , respectivamente. La ecuación de Helmholtz aplicada a este tipo de secciones transversales anulares se formula como

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \tag{4.73}$$

Desarrollando la expresión se obtiene

$$Z(z) \frac{d^2 R}{dr^2} + Z(z) \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R(r) \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 R(r) Z(z) = 0 \quad (4.74)$$

y dividiendo entre $R(r)Z(z)$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 = 0 \quad (4.75)$$

Al trasladar hacia el miembro derecho el término $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$, se consigue

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = -k_0^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_0^2 + k_z^2 \quad (4.76)$$

verificándose para el miembro derecho

$$-\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_z^2, \quad \text{donde,} \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad (4.77, 4.78)$$

cuya solución es $Z(z) = A_1 \text{sen}(k_z z) + B_1 \text{cos}(k_z z)$

Multiplicando (4.76) por R se obtiene

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R(k_0^2 - k_z^2) = 0 \quad (4.79)$$

donde el número de onda radial k_r es igual a

$$k_r^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (4.80)$$

y la expresión (4.79) se ordena quedando

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R k_r^2 = 0 \quad (4.81)$$

que es la ecuación diferencial de Bessel de orden cero cuya solución general es

$$R(r) = C_1 J_0(r k_r) + C_2 Y_0(r k_r) \quad (4.82)$$

donde J_0 e Y_0 representan las funciones de Bessel de orden 0 de primera y de segunda especie, respectivamente.

Para la evaluación de la constante C_2 y del número de onda radial k_r se llevará a cabo el mismo procedimiento realizado para las secciones circulares, con la diferencia de que existen como condiciones de contorno dos paredes rígidas, una interna con radio $r = R_0$ y otra externa con radio $r = R_1$. Si se tiene en cuenta que $\beta = k_r R_1$, entonces

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(J_0 \left(\frac{\beta r_1}{R_1} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{\beta r_1}{R_1} \right) \right) \right|_{r=R_0} = 0 \quad (4.83)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(J_0 \left(\frac{\beta r_1}{R_1} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{\beta r_1}{R_1} \right) \right) \right|_{r=R_1} = 0 \quad (4.84)$$

Como $J'_0(r) = -J'_1(r)$ e $Y'_0(r) = -Y'_1(r)$ implica que

$$J_1 \left(\frac{\beta R_0}{R_1} \right) + C_2 Y_1 \left(\frac{\beta R_0}{R_1} \right) = 0 \quad (4.85)$$

$$J_1(\beta) + C_2 Y_1(\beta) = 0 \quad (4.86)$$

De la ecuación (4.86) se obtiene directamente C_2

$$C_2 = -\frac{J_1(\beta)}{Y_1(\beta)} \quad (4.87)$$

La sustitución de (4.87) en (4.85) proporciona la ecuación característica

$$J_1 \left(\frac{\beta R_0}{R_1} \right) - \frac{J_1(\beta)}{Y_1(\beta)} Y_1 \left(\frac{\beta R_0}{R_1} \right) = 0 \quad (4.88)$$

Los números de onda radiales son conseguidos por medio de los autovalores β_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ [35]. Del número de onda radial n se puede conocer el número de circunferencias nodales. Así, para $n = 0$, se tiene el modo de onda plana. Sustituyendo C_2 en (4.82) resulta la expresión que define el modo transversal $P(r)$ de una sección transversal anular

$$P_n(r) = J_0 \left(\frac{\beta_n R_0}{R_1} \right) - \frac{J_1(\beta_n)}{Y_1(\beta_n)} Y_0 \left(\frac{\beta_n R_0}{R_1} \right) \quad (4.89)$$

La solución general de la ecuación (4.73) es

$$p(r, z, t) = \left(A_{00}^+ e^{-jk_0 z} + A_{00}^- e^{jk_0 z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{0n}^+ e^{jk_{z,0,n} z} + A_{0n}^- e^{-jk_{z,0,n} z} \right) \left(J_0 \left(\frac{\beta_n R_0}{R_1} \right) - \frac{J_1(\beta_n)}{Y_1(\beta_n)} Y_0 \left(\frac{\beta_n R_0}{R_1} \right) \right) \right) e^{j\omega t} \quad (4.90)$$

o bien

$$p(r, z, t) = \left(A_{00}^+ e^{-jk_0 z} + A_{00}^- e^{jk_0 z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{0n}^+ e^{jk_{z,0,n} z} + A_{0n}^- e^{-jk_{z,0,n} z} \right) \Psi_n(r) \right) e^{j\omega t} \quad (4.91)$$

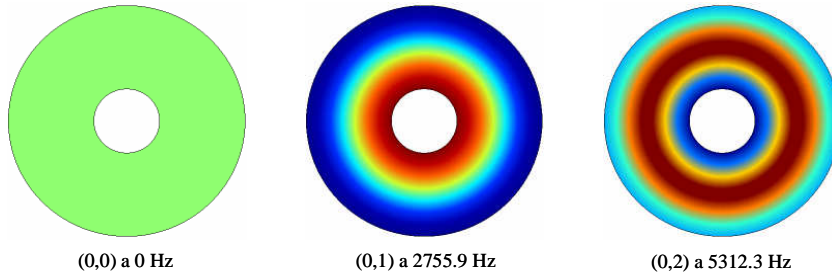


Figura 4.5 Modos transversales en un conducto anular.

En la Figura 4.5 se exhiben los campos de presión acústica correspondientes a un conducto anular a diferentes frecuencias.

4.2.2. Medio móvil

Al considerar la existencia de flujo axial en un conducto se supondrá que es estacionario y uniforme. De acuerdo a esto, en un medio en movimiento el fluido tiene una velocidad axial constante U_{fm} , cuyo número de Mach es $M = U_{fm}/c_0$ y la velocidad de propagación de la onda, relativa al medio, permanece con valor c_0 . Por tanto, respecto a un punto fijo de referencia, una onda progresiva poseerá una velocidad absoluta $U_{fm} + c_0$ y una onda regresiva una velocidad absoluta $U_{fm} - c_0$.

La ecuación de ondas en presencia de flujo medio está definida por la ecuación de ondas convectiva [69]

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (4.92)$$

Recordando del Capítulo 2 que la derivada total (2.5) para la dirección z con flujo medio es

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_{jm} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.93)$$

al aplicar el método de separación de variables se obtiene la solución de la ecuación de ondas anterior. Cuando existe flujo medio M la propagación del sonido está dada por la expresión

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - 2jMk_0 \frac{\partial Z}{\partial z} + k_0^2 Z = 0 \quad (4.94)$$

o bien, considerando el número de onda transversal k_t asociado al número de onda axial $k_{z,m,n}$

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - 2jMk_0 \frac{\partial Z}{\partial z} + (k_0^2 - k_t^2) Z = 0 \quad (4.95)$$

asumiendo soluciones del tipo progresivo $Z(z) = A^+ e^{-jk_{z,m,n}^+ z}$ y del tipo regresivo $Z(z) = A^- e^{jk_{z,m,n}^- z}$, su sustitución en (4.95) proporciona los números de onda axiales $k_{z,m,n}$ a partir de la expresión

$$k_{z,m,n}^\pm = \frac{-Mk_0 \pm \sqrt{k_0^2 - (1 - M^2)k_t^2}}{(1 - M^2)} \quad (4.96)$$

Si no existe flujo medio, $M = 0$, se verifica que $k_z^+ = k_z^- = k_z = \sqrt{k_0^2 - k_t^2}$. En el caso de onda plana el número de onda transversal asociado k_t es cero, por tanto $k^+ = k_0/(1+M)$ y $k^- = k_0/(1-M)$.

En un conducto de sección rectangular, la solución de la ecuación (4.92) con flujo medio es

$$p(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \right) \left(D_{mn}^+ e^{-jk_{z,m,n}^+ z} + D_{mn}^- e^{jk_{z,m,n}^- z} \right) e^{j\omega t} \quad (4.97)$$

en la que los números de onda axiales $k_{z,m,n}^+$ y $k_{z,m,n}^-$ se obtienen modificando la expresión (4.96) [79]

$$k_{z,m,n}^{\pm} = \frac{\mp Mk_0 + \sqrt{k_0^2 - (1-M^2) \left(\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right)}}{(1-M^2)} \quad (4.98)$$

en la que la relación k_t con $k_{z,m,n}$ se da por la expresión [79]

$$k_{z,m,n}^2 + \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 = (k_0 - Mk_{z,m,n})^2 \quad (4.99)$$

Empleando la ecuación de equilibrio dinámico [79] se obtiene el campo de velocidad acústica. En efecto, al haber flujo medio

$$\rho_0 \frac{Du}{Dt} + \nabla p = \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + U_{fm} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4.100)$$

al definir la velocidad y presión acústica de la forma, respectivamente

$$u(x, y, z, t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \left(D_{mn}^+ e^{-jk_{z,m,n}z} + D_{mn}^- e^{jk_{z,m,n}z} \right) \right) e^{j\omega t} \quad (4.101)$$

$$p(x, y, z, t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \left(A_{mn}^+ e^{-jk_{z,m,n}z} + A_{mn}^- e^{jk_{z,m,n}z} \right) \right) e^{j\omega t} \quad (4.102)$$

Sustituyéndolas en (4.100) se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \left(D_n^+ e^{-jk_{z,m,n}z} + D_n^- e^{jk_{z,m,n}z} \right) = \\ & \frac{1}{c_0 \rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \\ & \left(\frac{k_{z,m,n}^+ A_{mn}^+}{k_0 - Mk_{z,m,n}^+} e^{-jk_{z,m,n}^+ z} - \frac{k_{z,m,n}^- A_{mn}^-}{k_0 + Mk_{z,m,n}^-} e^{jk_{z,m,n}^- z} \right) \end{aligned} \quad (4.103)$$

donde los coeficientes D_{mn}^+ y D_{mn}^- son, respectivamente,

$$D_{mn}^+ = \frac{k_{z,m,n}^+ A_{mn}^+}{k_0 - Mk_{z,m,n}^+} \quad D_{mn}^- = - \frac{k_{z,m,n}^- A_{mn}^-}{k_0 + Mk_{z,m,n}^-} \quad (4.104, 4.105)$$

Así al considerar una variación temporal armónica

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{c_0 \rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \left(\frac{k_{z,m,n}^+ A_{mn}^+}{k_0 - M k_{z,m,n}^+} e^{-jk_{z,m,n}^+ z} - \frac{k_{z,m,n}^- A_{mn}^-}{k_0 + M k_{z,m,n}^-} e^{jk_{z,m,n}^- z} \right) e^{j\omega t} \quad (4.106)$$

De manera análoga al apartado anterior, la propagación de los modos de alto orden ocurrirá cuando

$$k_0^2 - (1 - M^2) \left\{ \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right\} = 0 \quad (4.107)$$

La frecuencia de corte $f_{c,m,n}$ es

$$f_{c,m,n} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{(1 - M^2) \left\{ \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right\}} \quad (4.108)$$

Para secciones circulares, la relación entre el número de onda transversal k_t y axial $k_{z,m,n}$ está dado por [79]

$$k_{z,m,n}^2 + k_{r,m,n}^2 = (k_0 - M k_{z,m,n})^2 \quad (4.109)$$

donde k_t equivale a $k_{r,m,n}$. De este modo, el número de onda axial $k_{z,m,n}$ es calculado por medio de (4.96)

$$k_{z,m,n}^{\pm} = \frac{\mp M k_0 + \sqrt{k_0^2 - (1 - M^2) k_{r,m,n}^2}}{(1 - M^2)} \quad (4.110)$$

De esta forma, la solución de la ecuación de ondas en conductos circulares con flujo medio es

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_0} r\right) \left((A_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + A_{m,n}^- e^{jm\theta}) e^{-jk_{z,m,n}^+ z} + (B_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + B_{m,n}^- e^{jm\theta}) e^{jk_{z,m,n}^- z} \right) e^{j\omega t} \quad (4.111)$$

donde $k_{r,m,n} = \frac{\alpha_{m,n}}{R_0}$.

Para la obtención del campo de velocidad acústica, se procede de similar forma a lo desarrollado para conductos rectangulares. Así,

$$u_{z,m,n}(r, \theta, z, t) = \frac{I}{c_0 \rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_0} r \right) \left(\frac{k_{z,m,n}^+}{k_0 - M k_{z,m,n}^+} (A_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + A_{m,n}^- e^{jm\theta}) e^{-jk_{z,m,n}^+ z} - \frac{k_{z,m,n}^-}{k_0 + M k_{z,m,n}^-} (B_{m,n}^+ e^{-jm\theta} + B_{m,n}^- e^{jm\theta}) e^{jk_{z,m,n}^- z} \right) e^{j\omega t} \quad (4.112)$$

De la expresión (4.110) se comprueba que la propagación de los modos de alto orden se iniciará cuando

$$k_0^2 > (1 - M^2) k_{r,m,n}^2 \quad (4.113)$$

y la frecuencia de corte $f_{c,m,n}$ será

$$f_{c,m,n} = \frac{\alpha_{m,n} c_0 \sqrt{1 - M^2}}{2\pi R_0} \quad (4.114)$$

Siguiendo este procedimiento la propagación del primer modo de alto orden (1,0) se iniciará cuando

$$f_{c,1,0} = \frac{1.84 c_0 \sqrt{1 - M^2}}{2\pi R_0} \quad (4.115)$$

y para el primer modo radial (0,1)

$$f_{c,0,1} = \frac{3.83 c_0 \sqrt{1 - M^2}}{2\pi R_0} \quad (4.116)$$

Para conductos anulares, los campos de presión y velocidad acústica son, respectivamente,

$$p(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((A_n^+ e^{-jk_{z,n}^+ z} + A_n^- e^{jk_{z,n}^- z}) \Psi_n(r) \right) e^{j\omega t} \quad (4.117)$$

$$u_{z,n}(r, z, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{k_{z,n}^+ A_n^+}{k_0 - M k_{z,n}^+} e^{-j k_{z,n}^+ z} - \frac{k_{z,n}^- A_n^-}{k_0 + M k_{z,n}^-} e^{j k_{z,n}^- z} \right) \Psi_n(r) \right) e^{j \omega t} \quad (4.118)$$

4.3. Acústica tridimensional de conductos con material absorbente

El estudio de la propagación de ondas en presencia de materiales absorbentes requiere añadir la utilización de conceptos descritos en el Capítulo 2 tales como impedancia característica compleja y número de onda complejo.

4.3.1. Acoplamiento transversal de regiones. Medio en reposo

En este apartado se estudiarán conductos de sección transversal circular uniforme rellenos de material absorbente y la forma en que resulta la interacción medio absorbente-aire. Las paredes de los conductos se consideran rígidas.

Nuevamente, limitando el análisis a los silenciadores tratados en esta Tesis, en el silenciador representado en la Figura 4.6 se observa en la parte central una región de aire, y rodeándola se encuentra el material absorbente que rellena el volumen entre el conducto central y la pared externa del conducto. El material absorbente puede estar separado del conducto central por medio de un tubo perforado delgado. Se supondrá que el material absorbente es homogéneo e isótropo y, tal como se explicó en el Capítulo 2, está caracterizado por la velocidad acústica compleja \tilde{c} y la densidad compleja $\tilde{\rho}$.

La propagación acústica tridimensional en la cavidad ocupada por el material absorbente puede expresarse por medio de la ecuación de ondas

$$\nabla^2 p - \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (4.119)$$

que concretada a régimen armónico para conductos cilíndricos se convierte en la ecuación de Helmholtz (4.42)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \tilde{k}^2 P = 0 \quad (4.120)$$

donde $\tilde{k} = \omega / \tilde{c}$ es el número de onda del material absorbente y \tilde{c} la velocidad acústica asociada al mismo, ambos valores complejos.

A efectos del estudio del acoplamiento transversal de regiones se asumirá que existe axisimetría en las geometrías de estudio, por tanto no hay dependencia de θ y $m = 0$. Realizando un planteamiento similar al descrito en la sección 4.2.1.2, el campo de presión acústica es

$$P(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} J_0 \left(\frac{\alpha_{0,n}}{R_0} r \right) \left(A_n^+ e^{-jk_{z,0,n}z} + A_n^- e^{jk_{z,0,n}z} \right) \quad (4.121)$$

o bien, al relacionar la notación con la región central de la Figura 4.6

$$P_B(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}z} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}z} \right) \Psi_{B,n,P}(r) \quad (4.122)$$

donde $\Psi_{B,n,P}$ es el modo de presión transversal correspondiente a esta sección y $k_{z,B,n}$ es el número de onda axial asociado a los modos transversales, estableciéndose la relación

$$\tilde{k}_{r,B,n}^2 + k_{z,B,n}^2 = \tilde{k}^2, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (4.123)$$

donde \tilde{k}^2 es el número de onda en el material absorbente y $\tilde{k}_{r,B,n}^2$ el número de onda radial en el material absorbente. El número de onda axial en el material absorbente $k_{z,B,n}^2$ es similar al número de onda axial del fluido presente en el conducto central [98]. Por tanto

$$k_{r,B,n}^2 + k_{z,B,n}^2 = k_0^2, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.124)$$

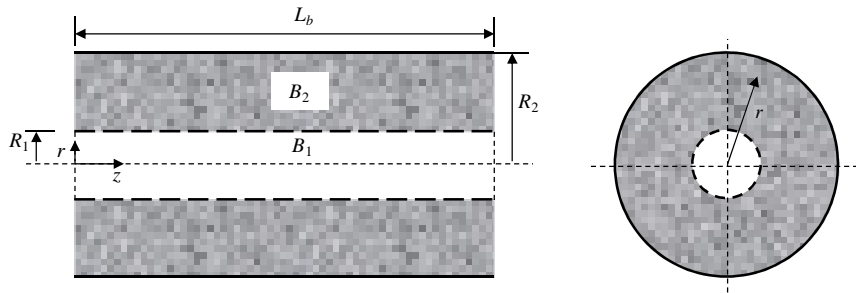


Figura 4.6 Conducto con material absorbente.

Para la resolución de la ecuación de ondas es necesaria la imposición de condiciones de contorno en los dos campos acústicos (regiones B_1 y B_2). En ausencia de flujo medio se considera la continuidad del campo de velocidades radial. Al derivar la expresión (4.122) del campo de presiones se obtiene

$$\frac{\partial P_B}{\partial z} = -jk_{z,B,n} \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}z} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}z}) \Psi_{B,n,P}(r) \quad (4.125)$$

En la sección transversal de un conducto se diferencian dos regiones B_1 y B_2 , por tanto, se tiene [95, 100]

$$P_B(r,z) = \begin{cases} P_{B_1}(r,z), & 0 \leq r \leq R_1 \\ P_{B_2}(r,z), & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.126)$$

El modo transversal de presión también es diferente en cada región y está definido por

$$\Psi_{B,n,P}(r) = \begin{cases} \Psi_{B_1,n,P}(r), & 0 \leq r \leq R_1 \\ \Psi_{B_2,n,P}(r), & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.127)$$

Los subíndices $B_{1,n,P}$ y $B_{2,n,P}$ se refieren a los dominios correspondientes al conducto central y al material absorbente, respectivamente, y $\Psi_{B,n,P}$ es el modo de presión transversal de toda la sección. Al sustituir (4.122)-(1.124) en (4.120) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \Psi_{B,n,P}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{B,n,P}(r)}{\partial r} + \kappa^2 \Psi_{B,n,P}(r) = 0 \quad (4.128)$$

donde

$$\kappa = \begin{cases} k_{r,B,n}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \tilde{k}_{r,B,n}, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.129)$$

La solución de la ecuación (4.128) se expresa como

$$\Psi_{B,n,P}(r) = \begin{cases} \Psi_{B_1,n,P}(r) = C_1 J_0(k_{r,B,n}r) + C_2 Y_0(k_{r,B,n}r), & 0 \leq r \leq R_1 \\ \Psi_{B_2,n,P}(r) = C_3 J_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) + C_4 Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}r), & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.130)$$

El procedimiento de evaluación de los coeficientes C_1, \dots, C_4 y el cálculo de los números de onda se detalla en los trabajos [37, 39, 98, 100]. Para ello se tienen en cuenta las siguientes condiciones de contorno:

1. Presión finita en $r = 0$. Por tanto, teniendo en cuenta las propiedades de Y_0 , se tiene

$$C_2 = 0 \quad (4.131)$$

y de esta manera

$$\Psi_{B1,n,p}(r) = C_1 J_0(k_{r,B,n}r), \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.132)$$

2. La velocidad acústica radial $U_r = \frac{j}{\tilde{\rho}\omega} \frac{\partial P_B}{\partial r}$ debe ser cero en $r = R_2$. De esta forma, de las ecuaciones (4.122), (4.126), (4.127) y (4.130) se tiene

$$C_3 J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2) + C_4 Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2) = 0 \quad (4.133)$$

3. La velocidad acústica radial U_r debe ser continua en $r = R_1$ verificándose que $U_{rB_1} = U_{rB_2}$, o bien

$$\frac{j}{\rho_0\omega} \frac{\partial P_{B1}}{\partial r} = \frac{j}{\tilde{\rho}\omega} \frac{\partial P_{B2}}{\partial r}, \quad r = R_1 \quad (4.134)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{k_{r,B,n}}{\rho_0} [C_1 J_1(k_{r,B,n}R_1) + C_2 Y_1(k_{r,B,n}R_1)] = \\ \frac{\tilde{k}_{r,B,n}}{\tilde{\rho}} [C_3 J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_1) + C_4 Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_1)] \end{aligned} \quad (4.135)$$

Finalmente, si existe un conducto perforado que separa ambos medios, es necesario introducir una cuarta condición, relacionada con la diferencia de presiones acústica entre ambos medios:

4. La diferencia de presión acústica, a través del conducto perforado, en $r = R_1$ es

$$P_{B1} - P_{B2} = \rho_0 c_0 \tilde{\xi}_p U_{rB_1} \quad (4.136)$$

Ello implica

$$\begin{aligned} & [C_1 J_0(k_{r,B,n} R_1) + C_2 Y_0(k_{r,B,n} R_1)] \\ & - [C_3 J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) + C_4 Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1)] = \\ & \frac{\tilde{\xi}_p k_{r,B,n}}{j k_0} [C_1 J_1(k_{r,B,n} R_1) + C_2 Y_1(k_{r,B,n} R_1)] \end{aligned} \quad (4.137)$$

Si se asume que $C_1 = 1$, las ecuaciones (4.131)-(4.137) generan los coeficientes C_3 y C_4

$$C_3 = \frac{k_{r,B,n} \tilde{\rho}}{\tilde{k}_{r,B,n} \rho_0} \frac{J_1(k_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)}{J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1)} \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} C_4 = -\frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)} C_3 = \\ -\frac{k_{r,B,n} \tilde{\rho}}{k_{r,B,n} \rho_0} \frac{J_1(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)}{J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1)} \end{aligned} \quad (4.139)$$

La sustitución de (4.131), (4.138) y (4.139) en (4.137) proporciona la ecuación característica cuya solución provee los números de onda axiales $k_{z,B,n}$ [96, 98, 100]

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0 \tilde{k}_{r,B,n}}{\tilde{\rho} k_{r,B,n}} \left[\frac{J_0(k_{r,B,n} R_1)}{J_1(k_{r,B,n} R_1)} + \frac{j \tilde{\xi}_p k_{r,B,n}}{k_0} \right] \\ \frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)}{J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)} = 1 \end{aligned} \quad (4.140)$$

En caso de que exista contacto directo entre la fibra y el conducto por el que circula el aire $\tilde{\xi}_p = 0$ y la ecuación característica es

$$\frac{\rho_0 \tilde{k}_{r,B,n}}{\tilde{\rho} k_{r,B,n}} \frac{J_0(k_{r,B,n} R_1)}{J_1(k_{r,B,n} R_1)} \frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)}{J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)} = 1 \quad (4.141)$$

De esta manera a partir de (4.130) los modos transversales de presión son evaluados por

$$\Psi_{B,n,P}(r) = \begin{cases} J_0(k_{r,B,n}r), & 0 \leq r \leq R_1 \\ C_5 \left[J_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) \right], & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.142)$$

donde el coeficiente C_5 es [100]

$$C_5 = \frac{\left[J_0(k_{r,B,n}R_1) + \frac{j\tilde{\xi}_p k_{r,B,n}}{k_0} J_1(k_{r,B,n}R_1) \right] Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)}{J_0(\tilde{k}_{r,B,n}R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2) - J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}R_1)} \quad (4.143)$$

En el caso de contacto directo entre material absorbente y el aire del conducto central, C_5 se convierte en [100]

$$C_5 = \frac{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2) J_0(k_{r,B,n}R_1)}{J_0(\tilde{k}_{r,B,n}R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2) - J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}R_1)} \quad (4.144)$$

Para el cálculo de la velocidad se sigue un procedimiento similar. De la ecuación (4.134)

$$U_{z,B} = \begin{cases} -\frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial P_{B1}}{\partial z}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ -\frac{j}{\tilde{\rho} \omega} \frac{\partial P_{B2}}{\partial z}, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.145)$$

La velocidad axial en esta región es

$$U_B(r,z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,B,n} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}z} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}z}) \Psi_{B,n,U_z}(r) \quad (4.146)$$

al igual que en (4.142) Ψ_{B,n,U_z} es

$$\Psi_{B,n,U_z}(r) = \begin{cases} J_0(k_{r,B,n}r), & 0 \leq r \leq R_1 \\ C_5 \frac{\rho_0}{\tilde{\rho}} \left[J_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) \right], & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.147)$$

En ausencia de material absorbente, la impedancia del conducto perforado (incluyendo la interacción de orificios) es [37]

$$\zeta_p = \frac{1}{\sigma} \left(6 \cdot 10^{-3} + j k_0 (t_h + 0.85 d_h F(\sigma)) \right) \quad (4.148)$$

Si existe material absorbente, se deben relacionar las características entre diferentes medios a partir de los factores \tilde{Z}/Z_0 y \tilde{k}/k_0 . Además al considerar la interacción entre orificios, la impedancia adimensional es (2.194)

$$\tilde{\zeta}_p = \frac{1}{\sigma} \left(6 \cdot 10^{-3} + j k_0 \left(t_h + 0.425 d_h \left(1 + \frac{\tilde{Z}}{Z_0} \frac{\tilde{k}}{k_0} \right) F(\sigma) \right) \right) \quad (4.149)$$

Las raíces de la ecuación característica (4.140) o (4.141) obtenidas por procedimientos iterativos, proporcionan los números de onda axiales. Los métodos iterativos comúnmente empleados en su resolución son: el método de la Secante [39, 100], el método de Newton-Raphson [32, 69] y el método de Muller [69]. Un problema común de los métodos iterativos consiste en la posibilidad de pérdidas de raíces en un intervalo dado, debido a una errada estimación inicial. El problema se acrecienta en el análisis de medios disipativos, ya que las raíces son complejas.

4.3.1.1. Método de la secante

El método de la secante evita las dificultades de la evaluación de las derivadas de ciertas funciones (necesarias, por ejemplo, en el método de Newton-Raphson).

Como anteriormente se indicó los números de onda axiales son iguales tanto en el medio poroso como en el conducto central [98]. El cálculo debe realizarse iterativamente. El método de la secante consiste en considerar como aproximación a la derivada la recta que pasa por los valores de dos iteraciones sucesivas. A través de la expresión [100]

$$k_{z_{j+1}} = k_{z_j} - \Phi(R, \tilde{\zeta}_p, k_{z_j}, f) \frac{(1+\Delta)k_{z_j} - (1-\Delta)k_{z_j}}{\Phi(R, \tilde{\zeta}_p, (1+\Delta)k_{z_j}, f) - \Phi(R, \tilde{\zeta}_p, (1-\Delta)k_{z_j}, f)} \quad (4.150)$$

las raíces de la ecuación característica pueden ser obtenidas. $\Phi(R, \tilde{\zeta}_p, k_{z_j}, f)$ es la ecuación característica en función del número de onda k_{z_j} , R representa la resistividad del material absorbente, $\tilde{\zeta}_p$ la impedancia adimensional de la

superficie perforada, f la frecuencia y Δ es una constante de valor muy pequeño. La elección inicial de valores es muy importante ya que de ello dependerá la extracción de todas las raíces. Siguiendo con la metodología propuesta para el caso acústico en el trabajo de Selamet *et al.* [100] las primeras raíces de la ecuación son calculadas para el límite superior del rango de frecuencias de interés f_{max} ya que a elevadas frecuencias, tanto la impedancia característica como el número de onda del material absorbente, tienden a ser similares a los del aire. Para una resistividad $R = 0$ y una impedancia adimensional $\tilde{\xi}_p = 0$ a f_{max} se obtendría la solución para $\Phi(0, 0, k_z, f_{max}) = 0$, es decir, los números de onda $k_{z,1}(0, 0, f_{max})$, $k_{z,2}(0, 0, f_{max})$, ..., $k_{z,nmod}(0, 0, f_{max})$ en un medio sin material absorbente ni elementos perforados, donde $nmod$ es el número de modos considerado en el análisis. Con la aproximación inicial, las raíces de la ecuación característica en el límite superior de frecuencia f_{max}

$$\Phi\left(\frac{R}{Ns_{R,\tilde{\xi}_p}}, \frac{\tilde{\xi}_p}{Ns_{R,\tilde{\xi}_p}}, k_z, f_{max}\right) = 0 \quad (4.151)$$

son evaluadas mediante el método de la secante para $k_{z,1}(R/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}, \tilde{\xi}_p/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}, f_{max})$, $k_{z,2}(R/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}, \tilde{\xi}_p/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}, f_{max})$, ..., $k_{z,nmod}(R/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}, \tilde{\xi}_p/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}, f_{max})$, donde $Ns_{R,\tilde{\xi}_p}$ indica el número de subdivisiones. En efecto, para las aproximaciones $\eta_{S_{R,\tilde{\xi}_p}} = 1, 2, \dots, Ns_{R,\tilde{\xi}_p} - 1$ las raíces de

$$\left(\left(\left(\eta_{S_{R,\tilde{\xi}_p}} + 1\right)/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}\right)R, \left(\left(\eta_{S_{R,\tilde{\xi}_p}} + 1\right)/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}\right)\tilde{\xi}_p, k_z, f_{max}\right) = 0 \quad (4.152)$$

son calculadas a partir de los valores iniciales estimados como soluciones de $\left(\left(\eta_{S_{R,\tilde{\xi}_p}}/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}\right)R, \left(\eta_{S_{R,\tilde{\xi}_p}}/Ns_{R,\tilde{\xi}_p}\right)\tilde{\xi}_p, k_z, f_{max}\right) = 0$. De esta forma las raíces de la ecuación característica $\Phi(R, \tilde{\xi}_p, z, f_{max}) = 0$ han sido obtenidas para la máxima frecuencia de trabajo f_{max} . Las raíces de la ecuación característica, para el resto de las frecuencias, son evaluadas siguiendo el mismo procedimiento. En efecto, subdividiendo en intervalos de frecuencia Δf , los resultados de la frecuencia f son utilizados como valores iniciales para la nueva frecuencia $f_{max} - \Delta f$, hasta completar el rango de frecuencias en estudio.

4.3.1.2. Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson se basa en el desarrollo de Taylor de una función alrededor de una estimación de la raíz de forma que

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) f'(x_i) + \frac{1}{2!} (x_{i+1} - x_i)^2 f''(\varepsilon) + \dots \quad (4.153)$$

donde ε se halla en algún lugar del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Al truncar la última expresión después de la primera derivada

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (4.154)$$

La intersección con el eje de abscisas implicaría que $f(x_{i+1})$ sería igual a cero, de modo que

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (4.155)$$

Finalmente, despejando

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.156)$$

y aplicado al caso acústico se tiene,

$$k_{z,j+1} = k_{z,j} - \frac{\Phi(R, \tilde{\xi}_p, k_z, f)}{\Phi'(R, \tilde{\xi}_p, k_z, f)} \quad (4.157)$$

Aunque, en general, el método de Newton-Raphson es más eficiente que el de la secante, hay situaciones en que su comportamiento no es adecuado, convergiendo a una velocidad muy lenta, o bien, las iteraciones divergen progresivamente de una raíz, pudiendo oscilar alrededor de un punto mínimo o máximo local [19].

Para emplear este procedimiento en el cálculo del número de onda axial, $k_{z,B,n}$, común en ambos medios, la ecuación característica (4.140) se reescribe como

$$\begin{aligned}
& \rho_0 \tilde{k}_{r,B,n} \left[k_0 J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) J_0(k_{r,B,n} R_1) \right. \\
& - k_0 Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) J_0(k_{r,B,n} R_1) \\
& + j \tilde{\xi}_p k_{r,B,n} J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) J_1(k_{r,B,n} R_1) \\
& \left. - j \tilde{\xi}_p k_{r,B,n} Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) J_1(k_{r,B,n} R_1) \right] \\
& - \tilde{\rho} k_{r,B,n} k_0 \left[J_1(k_{r,B,n} R_1) J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \right. \\
& \left. - J_1(k_{r,B,n} R_1) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.158}$$

que en función de $k_{z,B,n}$, se expresa como

$$G(k_{z,B,n}) = \rho_0 \tilde{k}_{r,B,n} \left[k_0 (b_1 - b_4) + j \tilde{\xi}_p k_{r,B,n} (h_1 - h_2) \right] - \tilde{\rho} k_{r,B,n} k_0 [h_3 - h_6] \tag{4.159}$$

La función derivada es

$$G'(k_{z,B,n}) = G_1(k_{z,B,n}) + G_2(k_{z,B,n}) \tag{4.160}$$

donde

$$\begin{aligned}
G_1(k_{z,B,n}) = & -(\rho_0 k_0 k_{z,B,n}) \left((1/\tilde{k}_{r,B,n}) (b_1 - b_4) - \right. \\
& \left((\tilde{k}_{r,B,n} R_1 / k_{r,B,n}) (h_1 - h_2) - R_1 (b_2 - b_6) - R_2 (b_3 - b_5) \right. \\
& \left. + (2/\tilde{k}_{r,B,n}) (b_1 - b_4) \right) - j \tilde{\xi}_p \rho_0 k_{z,B,n} \left((-k_{r,B,n} / \tilde{k}_{r,B,n}) (h_1 - h_2) \right. \\
& \left. + \tilde{k}_{r,B,n} R_1 (b_1 - b_4) + k_{r,B,n} R_1 (h_3 - h_6) + k_{r,B,n} R_2 (h_4 - h_5) \right)
\end{aligned} \tag{4.161}$$

$$\begin{aligned}
G_2(k_{z,B,n}) = & (k_{z,B,n} / k_{r,B,n}) \tilde{\rho} k_0 (h_3 - h_6) \\
& + \tilde{\rho} k_{r,B,n} k_0 \left((k_{z,B,n} R_1 / k_{r,B,n}) (b_2 - b_6) \right. \\
& - (k_{z,B,n} / k_{r,B,n}^2) (h_3 - h_6) - (k_{z,B,n} R_1 / \tilde{k}_{r,B,n}) (h_1 - h_2) \\
& \left. + (k_{z,B,n} R_2 / \tilde{k}_{r,B,n}) (h_7 - h_8) - (k_{z,B,n} / \tilde{k}_{r,B,n}^2) (h_3 - h_6) \right)
\end{aligned} \tag{4.162}$$

y los términos b_1 - b_6 y h_1 - h_8 son

$$b_1 = J_0(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \tag{4.163}$$

$$b_2 = J_0(k_{r,B,n} R_1) J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \tag{4.164}$$

$$b_3 = J_0(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \quad (4.165)$$

$$b_4 = J_0(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) \quad (4.166)$$

$$b_5 = J_0(k_{r,B,n} R_1) J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) \quad (4.167)$$

$$b_6 = J_0(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) \quad (4.168)$$

$$h_1 = J_1(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \quad (4.169)$$

$$h_2 = J_1(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) \quad (4.170)$$

$$h_3 = J_1(k_{r,B,n} R_1) J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \quad (4.171)$$

$$h_4 = J_1(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \quad (4.172)$$

$$h_5 = J_1(k_{r,B,n} R_1) J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) \quad (4.173)$$

$$h_6 = J_1(k_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) \quad (4.174)$$

$$h_7 = J_1(k_{r,B,n} R_1) J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) \quad (4.175)$$

$$h_8 = J_1(k_{r,B,n} R_1) J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) \quad (4.176)$$

El procedimiento iterativo puede comenzar desde la frecuencia de estudio más alta, y siguiendo similar proceso al utilizado en el método de la secante para el resto de las frecuencias de trabajo, los resultados obtenidos en cada subdivisión de los intervalos de frecuencia Δf se emplean como valores iniciales para una nueva frecuencia, hasta completar el rango de frecuencias requerido.

4.3.1.3. Comparación de métodos

Para comparar la precisión de ambos métodos se procede a realizar el cálculo de los números de onda axiales de dos silenciadores híbridos, uno puramente disipativo con elementos perforados en el conducto central, geometría 1, (Figura 2.27) y otro con conductos extendidos, elementos perforados y parcialmente relleno de material absorbente, geometría 2, (Figura 2.32). Las dimensiones de ambos silenciadores se resumen en la Tabla 4.2. A efectos de la comparación, en función del incremento del número de modos, se han efectuado cálculos hasta un número de 14 modos. Posteriormente los resultados obtenidos han sido contrastados con el método de Elementos Finitos, en base a la definición de error dada en [37].

Geometría	Long. silenciador L_T (m)	Long. extend. entrada L_a (m)	Long. cámara central L_b (m)	Long. extend. salida L_c (m)	Resistividad R (rayl/m)	R_1 (m)	R_2 (m)	σ (%)
1	0.2572	0	0.2572	0	4896	0.0245	0.0822	8
2	0.2572	0.05	0.1572	0.05	4896	0.0245	0.0822	8

Tabla 4.2 Dimensiones relevantes de un silenciador con conductos extendidos. Geometría empleada para determinar la precisión de los métodos de la Secante y de Newton-Raphson.

Los resultados expuestos en la Figura 4.7 muestran que la precisión es mayor a medida que el número de modos se incrementa. Ambos métodos presentan ligeras diferencias que no obstante, tienden a reducirse cuando aumenta el número de modos.

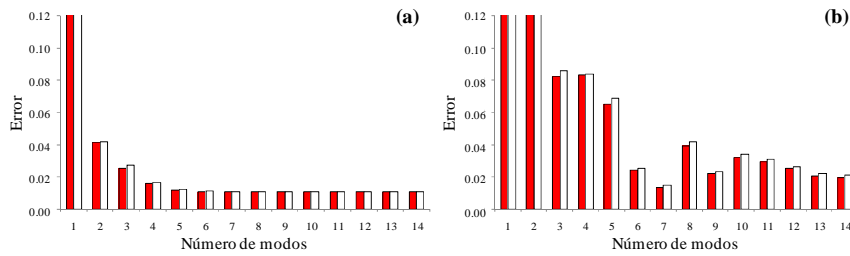


Figura 4.7 Comparación del error obtenido por ambos métodos. Resultados contrastados con el método de Elementos Finitos. Método de la Secante, □; método de Newton Raphson, ■. (a) geometría 1; (b) geometría 2. 30 iteraciones en ambos métodos.

Ambos métodos proporcionan resultados muy próximos entre sí, aunque el método de Newton-Raphson presenta una mayor velocidad de convergencia.

La Figura 4.8 y la Figura 4.9 representan gráficamente el valor de las partes real e imaginaria de los números de onda axiales calculados por ambos métodos. Se observa una correspondencia de los resultados proporcionados por los dos procedimientos a lo largo del intervalo de frecuencias estudiado.

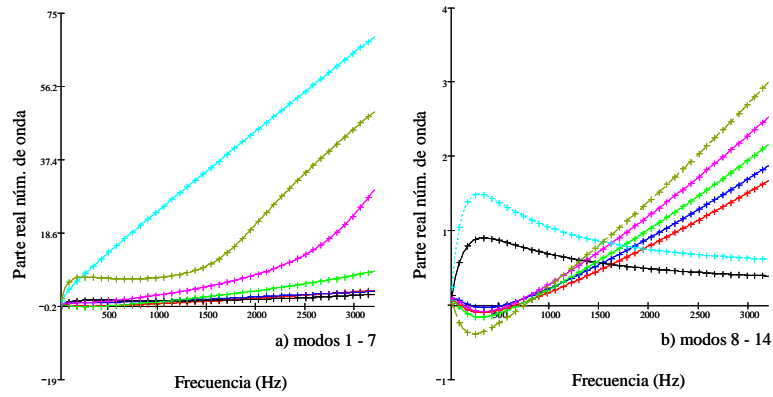


Figura 4.8 Parte real del número de onda. a) Modos 1-7. Método de la secante: —, 1^{er} modo; —, 2^o modo; —, 3^{er} modo; —, 4^o modo; —, 5^o modo; —, 6^o modo; —, 7^o modo. Método de Newton-Raphson: + + + +, 1^{er} modo; + + + +, 2^o modo; + + + +, 3^{er} modo; + + + +, 4^o modo; + + + +, 5^o modo; + + + +, 6^o modo; + + + +, 7^o modo. b) Modos 8-14. Método de la secante: —, 8^o modo; —, 9^o modo; —, 10^o modo; —, 11^o modo; —, 12^o modo; —, 13^o modo; —, 14^o modo. Método de Newton-Raphson: + + + +, 8^o modo; + + + +, 9^o modo; + + + +, 10^o modo; + + + +, 11^o modo; + + + +, 12^o modo; + + + +, 13^o modo; + + + +, 14^o modo.

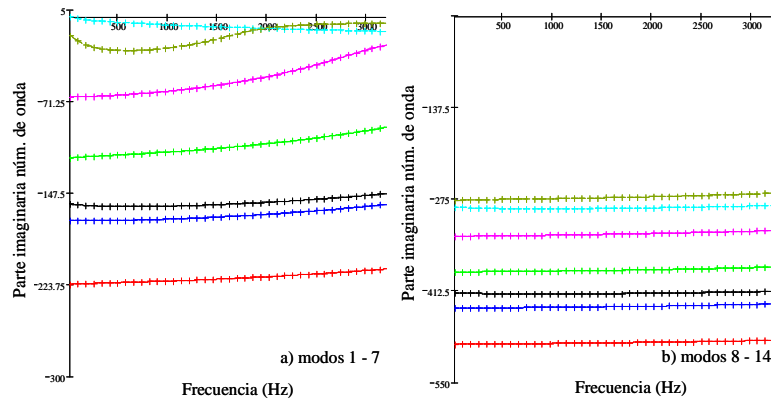


Figura 4.9 Parte imaginaria del número de onda. a) Modos 1-7. Método de la secante: —, 1^{er} modo; —, 2^o modo; —, 3^{er} modo; —, 4^o modo; —, 5^o modo; —, 6^o modo; —, 7^o modo. Método de Newton-Raphson: + + + +, 1^{er} modo; + + + +, 2^o modo; + + + +, 3^{er} modo; + + + +, 4^o modo; + + + +, 5^o modo; + + + +, 6^o modo; + + + +, 7^o modo. b) Modos 8-14. Método de la secante: —, 8^o modo; —, 9^o modo; —, 10^o modo; —, 11^o modo; —, 12^o modo; —, 13^o modo; —, 14^o modo. Método de Newton-Raphson: + + + +, 8^o modo; + + + +, 9^o modo; + + + +, 10^o modo; + + + +, 11^o modo; + + + +, 12^o modo; + + + +, 13^o modo; + + + +, 14^o modo.

4.4. Técnicas modales multidimensionales

4.4.1. Antecedentes

Uno de los aspectos geométricos más relevantes en los silenciadores de motores de combustión interna alternativos es la utilización de los cambios de sección. En la proximidad de los cambios de sección, el campo acústico es necesariamente tridimensional, incluso a baja frecuencia, ya que se desarrolla la generación de modos evanescentes [35, 111]. Como el campo de presiones y velocidades acústicas debe ser continuo, un modelo de onda plana no puede satisfacer este requerimiento. Un método numérico como el de Elementos Finitos tiene en cuenta la tridimensionalidad del campo acústico a la vez que permite considerar geometrías complejas y condiciones de contorno arbitrarias, pero por el contrario, posee un elevado coste computacional. Con el fin de reducir el tiempo de cálculo y de obtener resultados precisos, se justifica el análisis y desarrollo detallado de modelos multidimensionales de tipo analítico.

Tres técnicas fundamentales en el modelado modal tridimensional son el método de Excitación Puntual [35, 36], el método del Pistón [52, 53] y el método de Ajuste Modal [35]. El método de Excitación Puntual es el más simple y a la vez el más impreciso. Los conductos de entrada y salida no son tenidos en cuenta en el análisis ya que se sustituyen por fuentes puntuales de excitación. El procedimiento es válido cuando las dimensiones de los conductos son suficientemente pequeñas en comparación con el tamaño del silenciador y con la longitud de onda mínima, esto es, la más pequeña empleada en el análisis y por tanto asociada a la frecuencia máxima [35]. El método del Pistón tiene en cuenta las discontinuidades asociadas a la expansión y la contracción mediante la sustitución de los conductos de entrada y salida por pistones de dimensión finita cuyo movimiento excita el sistema. La técnica de Ajuste Modal plantea un dominio conformado por todos los conductos y cámaras que integran el silenciador, asume las características modales de propagación de cada elemento por separado y lleva a cabo el acoplamiento en las discontinuidades geométricas, considerando las condiciones de continuidad del campo acústico en éstas [35, 67, 83].

La propagación multidimensional de ondas debida a las discontinuidades de áreas transversales fue estudiada inicialmente por Miles [77]. Mediante la aplicación de las condiciones de continuidad de velocidad en las discontinuidades geométricas y empleando las relaciones de ortogonalidad de las funciones de Bessel, Miles obtuvo un sistema de ecuaciones, y por medio de su

resolución, determinó las amplitudes de las ondas incidente y reflejada. El-Sharkawy y Nayfeh [46] extendieron este análisis en el tratamiento axisimétrico bidimensional en cámaras de expansión simple y compararon sus resultados con medidas experimentales realizadas con prototipos de diferente longitud y radio. Empleando la técnica de Ajuste Modal, Åbom [1] derivó la matriz de cuatro polos en la que incorporó los efectos de los modos de alto orden en cámaras concéntricas, con conductos extendidos de entrada y salida. Por medio de la técnica empleada por Miles, Selamet y Radavich [97] investigaron el efecto de la longitud del silenciador en la mejora de la atenuación acústica en cámaras de expansión concéntricas. Sus resultados fueron comparados con los obtenidos mediante métodos numéricos y pruebas experimentales.

En el caso de cámaras disipativas sin perforado, Cummings y Chang [31, 32] realizaron un estudio en el que se describió el efecto del flujo interno en las propiedades del material absorbente y su incidencia en el cálculo de la atenuación acústica. El TL es determinado a través de la técnica de Ajuste Modal. Peat [82] obtuvo la matriz de transferencia de una cámara de expansión disipativa, por medio de una aproximación utilizable a baja frecuencia. Kirby [66] empleó una aproximación analítica simplificada para el modelado de silenciadores circulares disipativos que proporcionaba una mejora en la velocidad de los cálculos. La técnica, similar a la empleada por Peat, difiere en la de éste ya que añade términos extras a las expansiones en series de las funciones de Bessel, logrando de esta manera, utilizar silenciadores de mayor tamaño y aumentar el rango de frecuencias en el análisis. Por medio de una aproximación analítica bidimensional Selamet *et al.* [98] estudiaron el efecto del espesor de la fibra, diámetro de la cámara y propiedades del material absorbente en las prestaciones acústicas de los silenciadores disipativos. Mediante la imposición de las condiciones de continuidad, los campos de presión y velocidad acústica a través de las discontinuidades geométricas, se igualan y posteriormente se integran en zonas discretas de la expansión y la contracción. Para silenciadores con sección transversal arbitraria pero axialmente uniforme, Glav [49] derivó la matriz de transferencia de silenciadores disipativos en ausencia de flujo medio y tubos perforados. El campo acústico del silenciador fue evaluado combinando, por un lado, la técnica de Colocación por Puntos o Colocación Puntual para la resolución del problema de autovalores transversales y por otro, el método de Ajuste Modal para la formación del sistema de ecuaciones y su resolución.

4.4.2. Métodos de acoplamiento en discontinuidades geométricas

4.4.2.1. Cambios de sección

Para un cambio de sección definido entre las secciones S_i y S_j , deberán cumplirse las condiciones de continuidad de presión y de gradiente axial de presión (o velocidad acústica axial en ausencia de flujo medio) en la superficie común a ambas secciones y velocidad acústica axial nula fuera de ella (superficie rígida nula). De esta manera puede ilustrarse un cambio de sección como un conducto circular de entrada o salida que tiene una superficie transversal S_i con radio R_i acoplado a una cámara de mayor superficie transversal S_j con radio R_j tal como se aprecia en la Figura 4.10. La superficie común entre ambas superficies es S_{ij} .

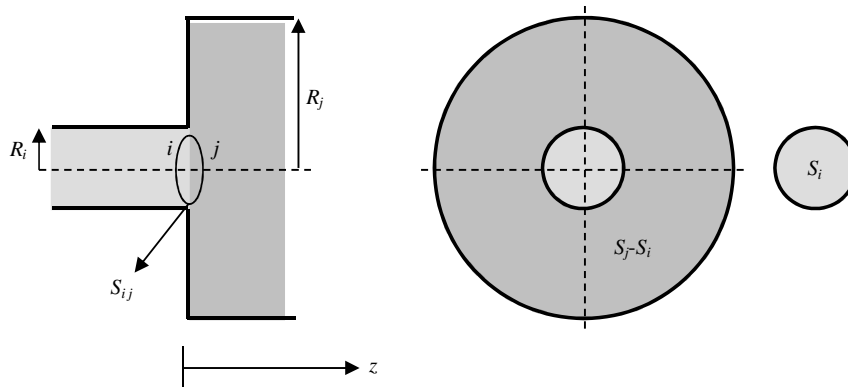


Figura 4.10 Discontinuidad geométrica.

Para este caso, el cumplimiento de las condiciones del campo acústico implica

$$P_i|_{z=0} = P_j|_{z=0} \quad \text{en } S_{ij}, \quad 0 \leq r \leq R_i \quad (4.177)$$

$$U_i|_{z=0} = U_j|_{z=0} \quad \text{en } S_{ij}, \quad 0 \leq r \leq R_i \quad (4.178)$$

$$U_j|_{z=0} = 0 \quad \text{en } S_j - S_i, \quad R_i \leq r \leq R_j \quad (4.179)$$

Las expresiones (4.177) y (4.178) se aplican a la superficie común entre ambos dominios S_{ij} y la expresión (4.179) corresponde a la superficie rígida anular $S_j - S_i$.

4.4.2.2. Conductos extendidos

En el caso de una discontinuidad geométrica con conductos extendidos, ver Figura 4.11, la aplicación de las condiciones de continuidad de presión y gradiente de presión en la superficie común S_{ij} y velocidad acústica axial nula en la superficie no común $S_j - S_i$ implica

$$P_i|_{z=0} = P_j|_{z=0} \text{ en } S_{ij}, 0 \leq r \leq R_i \tag{4.180}$$

$$U_i|_{z=0} = U_j|_{z=0} \text{ en } S_{ij}, 0 \leq r \leq R_i \tag{4.181}$$

$$P_j|_{z=0} = P_k|_{z=0} \text{ en } S_{jk}, R_i \leq r \leq R_j \tag{4.182}$$

$$U_j|_{z=0} = U_k|_{z=0} \text{ en } S_{jk}, R_i \leq r \leq R_j \tag{4.183}$$

$$U_k|_{z=-L_a} = 0 \text{ en } S_k, R_i \leq r \leq R_j \tag{4.184}$$

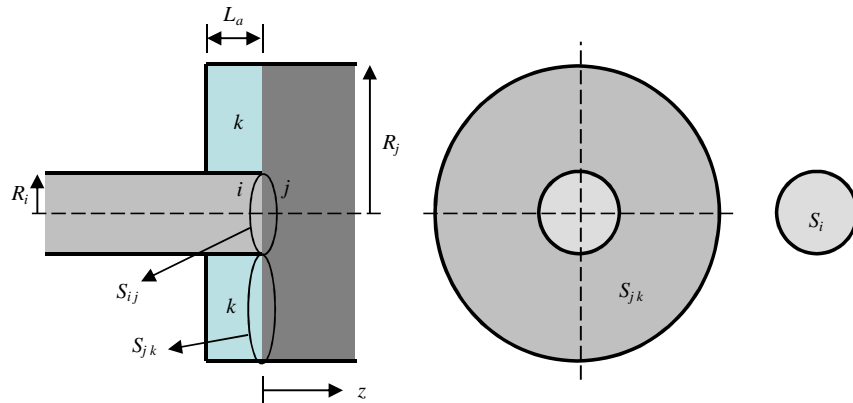


Figura 4.11 Discontinuidad geométrica con conductos extendidos.

4.4.2.3. Placas perforadas

En el caso de la existencia de una placa perforada, anteriormente se vio que está representada por medio de una impedancia Z_p (2.129). En el caso de la existencia de un conducto central perforado, Figura 4.12, se cumple

$$U_{z,i}|_{z=0} = U_{z,j}|_{z=0} \text{ en } R_i \tag{4.185}$$

y por medio de la relación de impedancia

$$U_{z,i}|_{z=0} = \frac{(P_j - P_i)|_{z=0}}{Z_p} \quad (4.186)$$

Para la componente radial se tiene

$$U_r|_{r=R_i} = \frac{(P_j - P_i)|_{r=R_i}}{Z_p} \text{ en } r = R_i \quad (4.187)$$

y en el orificio

$$U_{r,i} = U_{r,j} \quad (4.188)$$

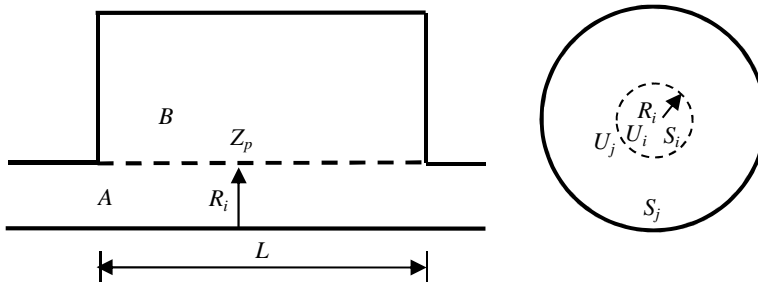


Figura 4.12 Placas perforadas.

4.4.2.4. Sección de entrada y salida

Finalmente la aplicación de condiciones de contorno apropiadas condicionará el tipo de caracterización acústica buscada para el silenciador. Para el caso más general, la obtención de los cuatro polos de un silenciador (2.88), empleados para cuantificar la atenuación acústica, se considerarán dos análisis distintos con condiciones de contorno independientes (sección 2.4.1). Para determinar el \$TL\$ se aplicará, en un primer análisis, una excitación de presión con forma de onda plana de amplitud arbitraria \$P_{exc}\$ (que por comodidad se suele asumir igual a la unidad) en la sección de entrada y presión nula en la salida. De esta forma para la sección de entrada \$S_1\$ y de salida \$S_T\$,

$$P_1 = P_{exc} \text{ en } S_1 \quad (4.189)$$

$$P_T = 0 \text{ en } S_T \quad (4.190)$$

En un segundo análisis, se tendrá en cuenta una onda plana de presión unitaria en la entrada y velocidad acústica axial nula en la salida

$$P_1 = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (4.191)$$

$$U_T = 0 \quad \text{en } S_T \quad (4.192)$$

El TL también puede ser determinado mediante un único análisis, sin necesidad de calcular la matriz de cuatro polos. Un silenciador con salida anecoica tiene una impedancia $\rho_0 c_0$ y al aplicar en la sección de entrada una presión excitadora unitaria en forma de onda plana, P_{exc} , las condiciones de contorno serían

$$P_1 = P_{exc} \quad \text{en } S_1, 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.193)$$

$$P_T = \rho_0 c_0 U_T \quad \text{en } S_T, 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.194)$$

4.4.2.5. Método de integración en subdominios

En secciones rectangulares y circulares los modos transversales se conocen de manera analítica, tal como se describió en la sección 4.2. No obstante, existen otras secciones cuyos modos transversales deben determinarse y donde además, la propagación de ondas acústicas puede ser tridimensional. Para su obtención se recurre al uso de técnicas numéricas o analíticas. Como se explicó en la introducción de este capítulo, la utilización de métodos numéricos implica un mayor coste computacional, sobre todo teniendo en cuenta los efectos tridimensionales de propagación. El empleo de herramientas analíticas modales considera también dichos efectos, disminuyendo el esfuerzo computacional.

Para el caso de un silenciador disipativo concéntrico, como el representado en la Figura 4.13, la aplicación del método de Integración Directa o en subdominios consiste en la división del silenciador en subdominios cuyos modos son conocidos analíticamente. Los subdominios se relacionan unos con otros por medio de la aplicación de las condiciones de continuidad. La solución de la ecuación de Helmholtz (4.120) para los campos de presión en las regiones A y C se representa por

$$P_A(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^+ e^{-jk_{z,A,n}z_1} + A_n^- e^{jk_{z,A,n}z_1} \right) \Psi_{A,n}(r) \quad \text{en } -L_a \leq z_1 \leq 0, 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.195)$$

$$P_C(r, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}z_2} + C_n^- e^{jk_{z,C,n}z_2} \right) \Psi_{C,n}(r) \quad \text{en } 0 \leq z_2 \leq L_c, 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.196)$$

siendo A_n^+ , C_n^+ y A_n^- , C_n^- las amplitudes de las ondas viajando en los sentidos positivo y negativo, respectivamente, del eje axial z , y $k_{z,A,n}$, $k_{z,C,n}$ son los números de onda axiales que deben cumplir con las relaciones

$$k_{r,A,n}^2 + k_{z,A,n}^2 = k_0^2 \quad (4.197)$$

$$k_{r,C,n}^2 + k_{z,C,n}^2 = k_0^2 \quad (4.198)$$

Los modos transversales de presión para cada región son, respectivamente,

$$\Psi_{A,n}(r) = J_0(k_{r,A,n}r), \text{ para } 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.199)$$

y

$$\Psi_{C,n}(r) = J_0(k_{r,C,n}r), \text{ para } 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.200)$$

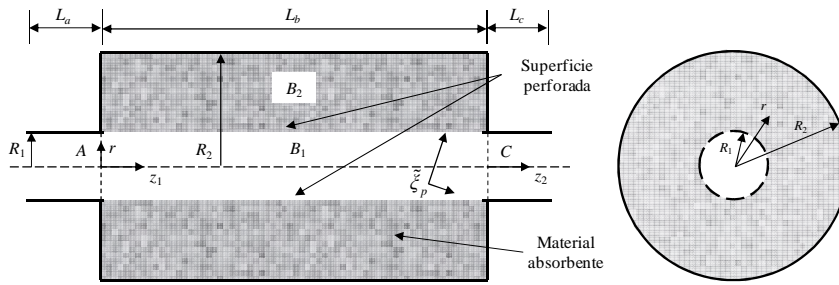


Figura 4.13 Silenciador disipativo concéntrico.

Los números de onda radiales $k_{r,A,n}$ y $k_{r,C,n}$ deberán satisfacer la condición de contorno de pared rígida (4.61), es decir,

$$J'_0(k_{r,A,n}R_1) = 0 \quad (4.201)$$

y

$$J'_0(k_{r,C,n}R_1) = 0 \quad (4.202)$$

La velocidad acústica en la dirección z , en términos de la ecuación de momento linealizada [79], para ambas regiones es

$$U_A(r, z_1) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,A,n} (A_n^+ e^{-jk_{z,A,n}z_1} - A_n^- e^{jk_{z,A,n}z_1}) \Psi_{A,n}(r), \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.203)$$

y

$$U_C(r, z_2) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,C,n} (C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}z_2} - C_n^- e^{jk_{z,C,n}z_2}) \Psi_{C,n}(r), \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.204)$$

Una vez descritas las expresiones de los campos de presión y velocidad acústicas en la entrada, salida y parte central del silenciador (4.122) y (4.146) la obtención del TL del silenciador implica el cálculo de los coeficientes de onda A_n , B_n y C_n . Para ello se deberán satisfacer las condiciones de continuidad en las interfases de las regiones A - B y B - C . Por lo planteado en las expresiones (4.177)-(4.179), en la expansión $z_1 = 0$, superficie común S_{AB} , y en la contracción $z_1 = L_b$, superficie común S_{BC} , las condiciones de los campos de presión y velocidad acústicas están dados por

$$P_A|_{z_1=0} = P_B|_{z_1=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.205)$$

$$U_B|_{z_1=0} = \begin{cases} U_A|_{z_1=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.206)$$

$$P_B|_{z_1=L_b} = P_C|_{z_2=0} \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.207)$$

$$U_B|_{z_1=L_b} = \begin{cases} U_C|_{z_2=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.208)$$

En vista de las ecuaciones (4.195) y (4.203) de la región A , (4.122) y (4.146) de la región B , (4.196) y (4.204) de la región C , el planteamiento de las ecuaciones (4.205)-(4.208) en términos de series [98, 100] involucra, para $z_1 = 0$, superficie S_{AB}

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) \Psi_{A,n}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \Psi_{B,n,P}(r) \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.209)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_{z,B,n} (B_n^+ - B_n^-) \Psi_{B,n,U_z}(r) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \Psi_{A,n}(r), & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.210)$$

y para $z_1 = L_b$, superficie S_{BC}

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ + C_n^-) \Psi_{C,n}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \Psi_{B,n,P}(r) \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.211)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_{z,B,n} \left(B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b} \right) \Psi_{B,n,U_z}(r) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \Psi_{C,n}(r), & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.212)$$

En las ecuaciones (4.209)-(4.212) el número infinito de términos de las series debe ser truncado a un valor apropiado N . Imponiendo las integrales de continuidad de presión y velocidad axial sobre áreas discretas en las interfases las ecuaciones (4.209)-(4.212) se obtiene [37, 118]

$$\sum_{n=0}^N (A_n^+ + A_n^-) \int_0^{r_{m,P}} \Psi_{A,n}(r) r^a dr = \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_0^{r_{m,P}} \Psi_{B,n,P}(r) r^a dr, \quad 0 \leq r_{m,P} \leq R_1 \quad (4.213)$$

$$\sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ - B_n^-) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{B,n,U_z}(r) r^a dr = \begin{cases} \sum_{n=0}^N k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{A,n}(r) r^a dr, & 0 \leq r_{m,U} \leq R_1 \\ \sum_{n=0}^N k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{A,n}(r) r^a dr, & R_1 \leq r_{m,U} \leq R_2 \end{cases} \quad (4.214)$$

$$\sum_{n=0}^N (C_n^+ + C_n^-) \int_0^{r_{m,P}} \Psi_{C,n}(r) r^a dr = \sum_{n=0}^N (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \int_0^{r_{m,P}} \Psi_{B,n,P}(r) r^a dr, \quad 0 \leq r_{m,P} \leq R_1 \quad (4.215)$$

$$\sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{B,n,U_z}(r) r^a dr = \begin{cases} \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{C,n}(r) r^a dr, & 0 \leq r_{m,U} \leq R_1 \\ \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) r^a dr, & R_1 \leq r_{m,U} \leq R_2 \end{cases} \quad (4.216)$$

donde

$$r_{m,P} = \frac{m}{N+1} r_1, \quad m = 1, \dots, N+1, \quad (4.217)$$

$$r_{m,U} = \frac{m}{N+1} r_2, \quad m = 1, \dots, N+1$$

En las integrales el exponente $a = 0$ y 1 implica integrar sobre el radio y el área, respectivamente. Las integrales (4.213)-(4.216) para $a = 0$ se calculan por medio de la expresión [4, 37]

$$\int_0^{r_0} \psi_0(\lambda r) dr = r_0 \psi_0(\lambda r_0) + \frac{1}{2} \pi r_0 (H_0(\lambda r_0) \psi_1(\lambda r_0) - H_1(\lambda r_0) \psi_0(\lambda r_0)) \quad (4.218)$$

donde

$$\psi_\nu(\lambda r) = A J_\nu(\lambda r) + B Y_\nu(\lambda r), \quad \nu = 0, 1, \quad (4.219)$$

en la que A y B son constantes, y H_0 y H_1 son las funciones de Struve de orden 0 y 1, respectivamente. Cuando $a = 1$, las integrales se obtienen analíticamente por

$$\int_0^{r_0} J_0(\lambda r) r dr = \begin{cases} \frac{r_0^2}{2}, & \lambda = 0 \\ \frac{r_0}{\lambda} J_1(\lambda r_0), & \lambda \neq 0 \end{cases} \quad (4.220)$$

para la función de Bessel de primera clase y orden cero, y para la función de Bessel de segunda clase y orden cero,

$$\int_0^{r_0} Y_{\nu-1}(\lambda r) r^\nu dr = \frac{r_0^\nu}{\lambda} Y_\nu(\lambda r_0) + \frac{2^\nu}{\pi \lambda^{1+\nu}} \Gamma(\nu) \quad (4.221)$$

donde $\Gamma(\nu)$ es la función gamma de Euler y $\Gamma(1) = 1$.

El sistema de ecuaciones planteado tiene $nc(s_{max} + 1)$ ecuaciones y $nc(n_{max} + 1)$ incógnitas asociadas donde nc está relacionado con los coeficientes de amplitud desconocidos de las ondas incidentes y reflejadas A^-, B^\pm, C^+ , y s_{max}, n_{max} son valores finitos. Para que el sistema algebraico de ecuaciones sea resoluble debe cumplirse que $s_{max} = n_{max} = q$, obteniendo $4(q + 1)$ ecuaciones y $4(q + 1)$ incógnitas. El truncado se justifica porque los modos de alto orden tienden a disminuir su efecto en la solución [98]. Se asumirá que: (1) la onda incidente es

plana de amplitud unidad $A_0^+ = 1$, $A_n^+ = 1$, $n > 0$; (2) existe terminación anecoica, es decir, no hay reflexión de ondas y de esta manera $C_n^- = 0$ para todo n y (3) la propagación de ondas en la salida es en forma de onda plana a una distancia suficiente de la contracción. De esta forma el índice de Pérdidas de Transmisión, TL , es calculado por la expresión [98, 100]

$$TL = -20 \log_{10} |C_0^+| \quad (4.222)$$

Para el material absorbente considerado, los valores complejos de la impedancia característica $\tilde{Z} = \tilde{\rho}\tilde{c}$ y del número de onda $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$ están dados por

$$\tilde{Z} = Z_0 \left[\left(1 + a_5 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_6} \right) + j \left(a_7 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_8} \right) \right] \quad (4.223)$$

$$\tilde{k} = k_0 \left[\left(1 + a_3 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_4} \right) + j \left(a_1 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_2} \right) \right] \quad (4.224)$$

donde $Z_0 = \rho_0 c_0$ es la impedancia característica del aire, f la frecuencia y R la resistividad al flujo del material absorbente, fibra de vidrio de Owens Corning, que para las pruebas desarrolladas tiene unos valores de 1000 rayl/m para una densidad de material absorbente de 75 kg/m³, 4896 rayl/m correspondiente a una densidad de 100 kg/m³, y 17378 rayl/m para 200 kg/m³ de densidad.

De manera breve los modos transversales de cada región se resumen en la Tabla 4.3.

4.4.2.6. Método con integración ponderada (Ajuste Modal)

El método de Ajuste Modal clásico es utilizado para el cálculo del campo acústico completo en el interior del silenciador, a partir de los modos de los conductos que conforman el silenciador y de las condiciones de contorno asociadas a las discontinuidades.

Una vez calculados los números de onda y conocidos los modos transversales de presión y velocidad, la presión y la velocidad acústica en cada región vienen dadas por las expresiones (4.122), (4.195), (4.196), para la presión y (4.146), (4.203) y (4.204) para la velocidad acústica.

El acoplamiento entre las regiones se obtiene mediante la aplicación de las condiciones adecuadas, que en este caso implica la continuidad de los campos de

presión y de velocidad acústica axial en las discontinuidades geométricas. Para la interfase entre las regiones $A-B$, expansión, la continuidad de presión se plantea aplicando la expresión (4.205) y la velocidad acústica axial empleando (4.206). En la interfase $B-C$, contracción, resulta de la aplicación de las relaciones (4.207) y (4.208).

Región	Tipo de modo	Expresión	Área
A	Presión, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
B	Presión, $\Psi_{B,n,P}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$C_5 \left[J_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) \right]$	$R_1 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{B,n,U_z}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$C_5 \frac{\rho_0}{\tilde{\rho}} \left[J_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) \right]$	$R_1 \leq r \leq R_2$
C	Presión, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$

Tabla 4.3 Resumen de los modos transversales de un silenciador con conducto perforado y material absorbente.

Para determinar los coeficientes de amplitud de onda, progresiva y regresiva, se genera un sistema de ecuaciones de dimensión inicial infinita, a través de un procedimiento de integración ponderada. De esta forma los modos de presión transversal se emplean como funciones de ponderación. Para las condiciones de presión acústica se utilizarán los modos de las secciones de menor sección transversal y para las condiciones de velocidad axial corresponderán los modos de la sección transversal mayor [111].

4.4.2.7. Condiciones de contorno

De acuerdo a la caracterización acústica requerida para el silenciador, obtención de los cuatro polos o cuantificación de la atenuación acústica a partir de ellos, se aplican las condiciones de contorno adecuadas. Para el último caso, se considerarán dos análisis diferentes con condiciones de contorno independientes [35].

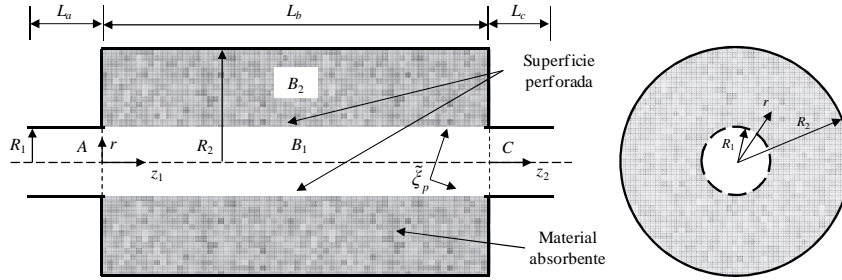


Figura 4.14 Silenciador disipativo concéntrico.

Inicialmente se aplica una presión de excitación de amplitud arbitraria P_{exc} (por conveniencia se utilizará la unidad) en la entrada y presión nula en la salida. Teniendo como referencia la Figura 4.14, en el primer análisis se tiene

$$P_A|_{z_1=-L_a} = P_{exc}, \text{ en } S_{AB}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.225)$$

$$P_C|_{z_1=L_b} = 0, \text{ en } S_{BC}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.226)$$

y presión de excitación arbitraria en la sección de entrada y velocidad nula en la salida, segundo análisis

$$P_A|_{z_1=-L_a} = P_{exc}, \text{ en } S_{AB}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.227)$$

$$U_C|_{z_1=L_b} = 0, \text{ en } S_{BC}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.228)$$

Estas expresiones se incorporarán al conjunto de ecuaciones (4.205)-(4.208).

4.4.2.8. Obtención del sistema de ecuaciones

El conjunto de ecuaciones (4.209)-(4.212) abarca un número infinito de términos debiéndose truncar con un número apropiado de términos N que asegure la convergencia de la solución. Dicho valor dependerá de las dimensiones del silenciador y del rango de frecuencia de interés [98]. Finalmente, la integración en las interfases de las regiones puede llevarse a cabo analíticamente por medio de la integración del producto de los modos por las funciones de ponderación.

La continuidad de la presión en la expansión, $z_1 = 0$, es

$$\sum_{n=0}^N (A_n^+ + A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r \, dr = \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r \, dr \quad (4.229)$$

Para esta condición, la expresión se ha multiplicado a ambos lados por el modo correspondiente al área de menor sección transversal, que en este caso, se ha designado como S_A e integrado en el dominio correspondiente a dicha sección. Para la continuidad de velocidad acústica se tiene

$$\sum_{n=0}^N k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{B,s,P}(r) r \, dr = \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ - B_n^-) \int_0^{R_2} \Psi_{B,n,U_z}(r) \Psi_{B,s,P}(r) r \, dr \quad (4.230)$$

A diferencia del caso anterior, ambos miembros de la expresión de continuidad de velocidad axial son multiplicados por los modos de la sección de mayor área transversal, designada como S_B , el miembro izquierdo es integrado sobre S_A y el miembro derecho sobre S_B .

Realizando el mismo procedimiento en la contracción, $z_1 = L_b$, se tiene para la ecuación (4.211), presión,

$$\sum_{n=0}^N (C_n^+ + C_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r \, dr = \sum_{n=0}^N (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n,P}(r) \Psi_{C,s}(r) r \, dr \quad (4.231)$$

Para la velocidad axial queda

$$\sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \int_0^{R_2} \Psi_{B,n,U_z}(r) \Psi_{B,s,P}(r) r \, dr = \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{B,s,P}(r) r \, dr \quad (4.232)$$

con $s = 0, 1, \dots, N$. En las ecuaciones (4.230) y (4.232) el modo $\Psi_{B,s,P}(r)$ es utilizado como función de ponderación para mantener la ortogonalidad en el

miembro izquierdo (la diferencia entre los términos $\Psi_{B,s,P}(r)$ y $\Psi_{B,s,U_z}(r)$ es $\rho_0/\tilde{\rho}$) [37].

La evaluación analítica de las integrales se realiza por medio de la siguiente expresión [4], para funciones de Bessel de cualquier clase $B_0(k_s r)$ y $B_0(k_n r)$

$$\int r B_0(k_s r) B_0(k_n r) dr = \begin{cases} \frac{r}{k_s^2 - k_n^2} (k_s B_1(k_s r) B_0(k_n r) - k_n B_0(k_s r) B_1(k_n r)), & k_s \neq k_n \\ \frac{r^2}{2} (B_0^2(k_s r) + B_1^2(k_s r)), & k_s = k_n \end{cases} \quad (4.233)$$

Este procedimiento permite la evaluación analítica de las integrales asociadas, reduciendo el coste computacional relacionado [35].

Al igual que con el método de Integración Directa, el sistema de ecuaciones planteado tiene también $nc(s_{max} + 1)$ ecuaciones y $nc(n_{max} + 1)$ incógnitas asociadas. En ellas s_{max} y n_{max} son valores finitos y el término nc está relacionado con los coeficientes de amplitud desconocidos de las ondas incidentes y reflejadas A^-, B^\pm, C^+ . Para que el sistema algebraico de ecuaciones sea resoluble debe verificarse que $s_{max} = n_{max} = q$. De este modo, se obtienen $4(q + 1)$ ecuaciones y $4(q + 1)$ incógnitas. El sistema debe truncarse debido a que los modos de alto orden tienden a disminuir su efecto en la solución [98]. Se asumirá que: (1) la onda incidente es plana de magnitud la unidad, $A_0^+ = 1$, $A_n^+ = 1$, $n > 0$, (2) existe terminación anecoica, es decir, no hay reflexión de ondas y de esta manera $C_n^- = 0$, para todo n . De esta forma el índice de Pérdidas de Transmisión, TL , es calculado por la expresión [35]

$$TL = -20 \log_{10} |C_0^+| \quad (4.234)$$

Como se plantea la metodología de Ajuste Modal es aplicable a otras configuraciones realizando una adecuada descripción modal de cada subdominio con unas condiciones de acoplamiento apropiadas.

Considerando la posibilidad de obtener los cuatro polos del silenciador deberán realizarse dos análisis planteando las condiciones de contorno (4.189), (4.190) ó (4.225), (4.226) para el primer análisis y (4.191), (4.192) ó (4.227), (4.228) para el segundo. Asegurando que la onda es plana a la entrada y a la salida, por medio de las expresiones (2.88) los cuatro polos son obtenidos de manera general

$$A = \frac{P_A|_{z_1=-L_a}}{P_C|_{z_2=L_c}} \Big|_{U_C|_{z_2=L_c}=0} = \frac{P_{exc}}{C_0^+ e^{-jk_0 L_c} + C_0^- e^{jk_0 L_c}} \quad (4.235)$$

$$B = \frac{P_A|_{z_1=-L_a}}{U_C|_{z_2=L_c}} \Big|_{P_C|_{z_2=L_c}=0} = \frac{P_{exc}}{\rho_0 c_0 (C_0^+ e^{-jk_0 L_c} - C_0^- e^{jk_0 L_c})} \quad (4.236)$$

$$C = \frac{U_A|_{z_1=-L_a}}{P_C|_{z_2=L_c}} \Big|_{U_C|_{z_2=L_c}=0} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{(A_0^+ e^{-jk_0(-L_a)} - A_0^- e^{jk_0(-L_a)})}{C_0^+ e^{-jk_0 L_c} + C_0^- e^{jk_0 L_c}} \quad (4.237)$$

$$D = \frac{U_A|_{z_1=-L_a}}{U_C|_{z_2=L_c}} \Big|_{P_C|_{z_2=L_c}=0} = \frac{A_0^+ e^{-jk_0(-L_a)} - A_0^- e^{jk_0(-L_a)}}{C_0^+ e^{-jk_0 L_c} - C_0^- e^{jk_0 L_c}} \quad (4.238)$$

Finalmente por medio de la expresión (2.210) el TL es calculado por

$$TL = 20 \log \left[\left(\frac{S_1}{S_T} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{A + \frac{B}{\rho_0 c_0} + \rho_0 c_0 C + D}{2} \right| \right] \quad (4.239)$$

en la que S_1 y S_T son las superficies transversales en la entrada y la salida, respectivamente, que en este caso coinciden.

4.4.3. Comparación entre métodos

Una vez desarrollado el planteamiento analítico de los métodos de Integración Directa y Ajuste Modal se procederá a su aplicación a casos concretos como el de un silenciador con material absorbente y conducto central perforado y un silenciador con material absorbente, conductos extendidos y conducto central perforado.

4.4.3.1. Silenciador con material absorbente

En la Figura 4.14 se muestra un silenciador con material absorbente y conducto central perforado. El material absorbente está separado de la región central por

medio de una superficie perforada que tiene una impedancia acústica adimensional $\tilde{\xi}_p$.

En este análisis se asume que las placas perforadas tienen un espesor t_h de 0.0009 m, los orificios poseen un diámetro d_h de 0.00249 m y la porosidad σ es de 8%. La cámara central tiene una longitud L_b . El radio del conducto de entrada, central y de salida es R_1 y el radio externo R_2 . Las regiones o subdominios se denotan como A en la región de entrada, C en el conducto de salida y B en la región central. La región central se subdivide a su vez en dos regiones en B_1 para el conducto y B_2 para el material absorbente. El material absorbente tiene una resistividad R y está caracterizado desde el punto de vista acústico por la velocidad \tilde{c} y por la densidad $\tilde{\rho}$.

Para obtener la caracterización del silenciador se seguirá similar procedimiento al expuesto en la sección 4.4.2.5. Los campos de presión y de velocidad axial en las regiones A y C están dados por las ecuaciones (4.195), (4.196), (4.203) y (4.204). Para la región B se prosigue con el mismo planteamiento descrito a partir de la expresión (4.122). A las condiciones establecidas en (4.132)-(4.135) deberá incluirse la correspondiente a la impedancia de la placa perforada (4.136), es decir, que la diferencia de presión acústica a través de la placa perforada está dada por [37]

$$P_{B1} - P_{B2} = \rho_0 c_0 \tilde{\xi}_p U_{rB1}$$

o bien,

$$\begin{aligned} & \left[C_1 J_0(k_{r,B,n} R_1) + C_2 Y_0(k_{r,B,n} R_1) \right] \\ & - \left[C_3 J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) + C_4 Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) \right] = \\ & \frac{\tilde{\xi}_p k_{r,B,n}}{j k_0} \left[C_1 J_1(k_{r,B,n} R_1) + C_2 Y_1(k_{r,B,n} R_1) \right] \end{aligned}$$

donde $\tilde{\xi}_p$ es la impedancia acústica adimensional de la placa perforada en contacto con el material absorbente ya detallada en la ecuación (4.149)

$$\tilde{\xi}_p = \frac{1}{\sigma} \left(6 \cdot 10^{-3} + j k_0 \left(t_h + 0.425 d_h \left(1 + \frac{\tilde{Z} \tilde{k}}{Z_0 k_0} \right) \right) \right) F(\sigma) \quad (4.240)$$

En esta expresión el factor $F(\sigma)$ es una función que considera la interacción entre orificios [37]. El factor se obtiene mediante el promedio de los factores de

corrección de Ingard (2.134) y Fok (2.135), siendo el factor de corrección de Ingard

$$F_I(\sigma) = 1 - 0.7\sqrt{\sigma} \quad (4.241)$$

y el de Fok,

$$F_F(\sigma) = 1 - 1.41\sqrt{\sigma} + 0.34(\sqrt{\sigma})^3 + 0.07(\sqrt{\sigma})^5 \quad (4.242)$$

En ausencia de material absorbente, la expresión (4.149) se transforma en

$$\xi_p = \frac{1}{\sigma} (0.006 + jk_0(t_n + 0.85d_n F(\sigma))) \quad (4.243)$$

A partir de las condiciones (4.132)-(4.135) y (4.136) se deriva la ecuación característica (4.140), por medio de la cual, se evalúan los números de onda axiales $k_{z,B,n}$ de la región B ,

$$\frac{\rho_0 \tilde{k}_{r,B,n}}{\tilde{\rho} k_{r,B,n}} \left[\frac{J_0(k_{r,B,n} R_1)}{J_1(k_{r,B,n} R_1)} + \frac{j \tilde{\xi}_p k_{r,B,n}}{k_0} \right] = \frac{J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)}{J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)} \quad (4.244)$$

Los modos transversales en esta región se determinan por medio de la expresión (4.142) y el coeficiente C_5 es (4.143)

$$C_5 = \frac{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2)}{J_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) - J_1(\tilde{k}_{r,B,n} R_2) Y_0(\tilde{k}_{r,B,n} R_1)} \left[J_0(k_{r,B,n} R_1) + \frac{j \tilde{\xi}_p k_{r,B,n}}{k_0} J_1(k_{r,B,n} R_1) \right] \quad (4.245)$$

El planteamiento de las condiciones de continuidad en las discontinuidades geométricas es similar a las descritas en (4.205)-(4.208). El desarrollo posterior es análogo al expuesto en (4.209)-(4.222). Las Pérdidas por Transmisión, TL , de un resonador concéntrico con variación de la resistividad, empleando el método de Integración Directa, se exhiben en la Figura 4.15. La Tabla 4.4 resume las dimensiones relevantes del silenciador en las pruebas efectuadas

Siguiendo con el mismo procedimiento desarrollado en la sección 4.4.2.6, se aplica el método de Ajuste Modal para obtener el TL del silenciador de la Figura

4.15 con diferentes resistividades, Tabla 4.4. Los resultados muestran una concordancia excelente por ambos métodos. Se aprecia que al incrementarse la resistividad el TL aumenta en la mayor parte del rango de frecuencias de interés.

Geometría	Resistividad R (rayl/m)
1	0
2	1000
3	4896
4	17378

Tabla 4.4 Características relevantes de un silenciador con conducto perforado y material absorbente. Variación de la resistividad. Longitud del silenciador $L_T = 0.2572$ m, radio interno $R_1 = 0.0245$ m, radio externo $R_2 = 0.0822$ m, $\sigma = 8\%$.

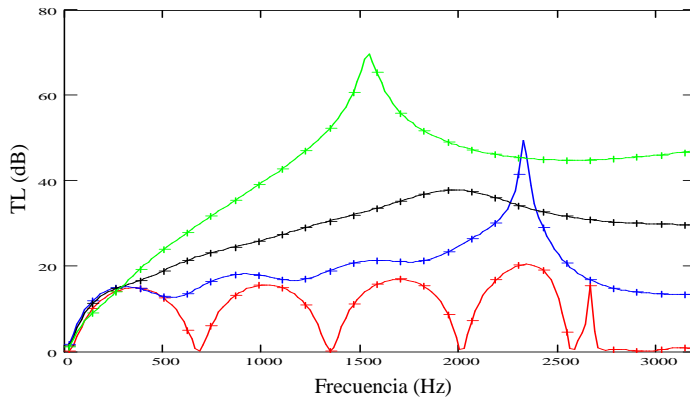


Figura 4.15 Comparación de ambos métodos. TL de un silenciador concéntrico con variación de la resistividad del material absorbente, 9 modos. Método de Integración Directa: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; —, geometría 4. Ajuste Modal: +++++, geometría 1; +++++, geometría 2; +++++, geometría 3; +++++, geometría 4.

La validación de las herramientas analíticas con el método de Elementos Finitos muestra una buena concordancia, de acuerdo a lo exhibido en la Figura 4.16. Como era de prever, prácticamente no existen diferencias en los resultados proporcionados por los métodos de Ajuste Modal y de Integración Directa.

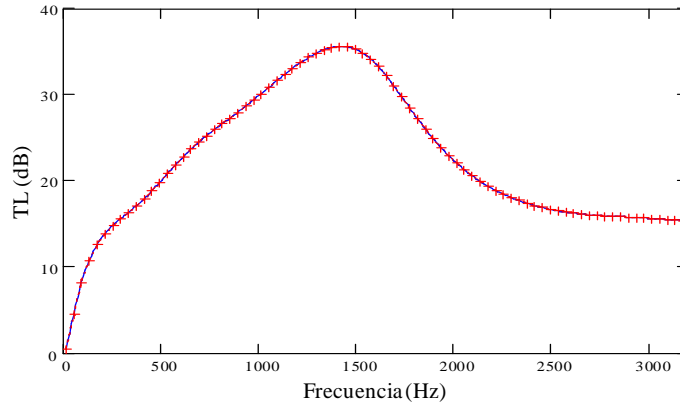


Figura 4.16 TL silenciador disipativo concéntrico. Validación con MEF, geometría 3, 10 modos. —, Ajuste Modal; +++++, MEF.

4.4.3.2. Silenciador con material absorbente y conductos extendidos

En la Figura 4.17 se ilustra el esquema de un silenciador con material absorbente y conductos extendidos. El material absorbente está separado de la región central y de las regiones anulares por medio de una superficie perforada que tiene una impedancia acústica adimensional $\tilde{\zeta}_{p_2}$ para el conducto central, $\tilde{\zeta}_{p_3}$ y $\tilde{\zeta}_{p_1}$ para las placas izquierda y derecha, respectivamente. En este análisis se asume que las placas perforadas tienen el mismo espesor t_h y que adoptan un valor de 0.0009 m, los orificios poseen un diámetro d_h similar en las placas y conducto central cuyo valor es de 0.00249 m y la porosidad σ es del 8%. La cámara central tiene una longitud L_b y los conductos extendidos izquierdo y derecho longitudes L_a y L_c respectivamente. El radio de los conductos de entrada, central y salida es R_1 y el radio externo R_2 . Las regiones o subdominios se denotan como A y C para las regiones de entrada y salida, respectivamente, D el anillo izquierdo, E el anillo derecho y B la región central, la cual se subdivide en una zona central B_1 para el conducto y una zona anular B_2 para el material absorbente. El material absorbente tiene una resistividad R y está caracterizado desde el punto de vista acústico por la velocidad \tilde{c} y por la densidad $\tilde{\rho}$. Por medio de ambos métodos se aborda el análisis del comportamiento acústico de este silenciador.

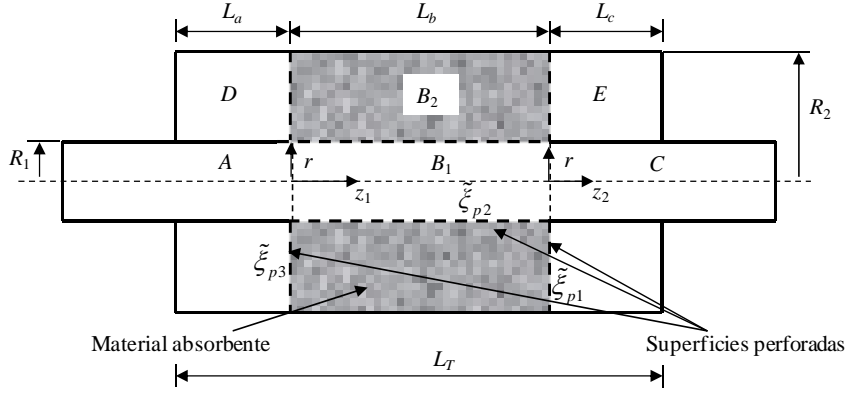


Figura 4.17. Silenciador con conductos extendidos y material absorbente.

4.4.3.2.1. Método de Integración por subdominios (Integración Directa)

Los campos de presión y de velocidad acústica en la región A (C) están dados por

$$P_A(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ e^{-jk_{z,A,n}z_1} + A_n^- e^{jk_{z,A,n}z_1}) \Psi_{A,n}(r) \quad (4.246)$$

$$U_A(r, z_1) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,A,n} (A_n^+ e^{-jk_{z,A,n}z_1} - A_n^- e^{jk_{z,A,n}z_1}) \Psi_{A,n}(r) \quad (4.247)$$

donde A_n^+ y A_n^- son las amplitudes de las ondas progresiva y regresiva, respectivamente. El número de onda axial $k_{z,A,n}$ del modo n satisface la relación

$$k_{z,A,n}^2 = k_0^2 - k_{r,A,n}^2 \quad (4.248)$$

En las regiones anulares D y E, al asumir comportamiento armónico, la solución de la ecuación de Helmholtz es

$$P_D(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^+ e^{-jk_{z,D,n}z_1} + D_n^- e^{jk_{z,D,n}z_1}) \Psi_{D,n}(r) \quad (4.249)$$

donde $\Psi_{D,n}(r)$, ($\Psi_{E,n}(r)$) son los modos transversales de presión definidos por

$$\Psi_{D,n}(r) = J_0(k_{r,D,n}r) - \frac{J_1(k_{r,D,n}R_2)}{Y_1(k_{r,D,n}R_2)} Y_0(k_{r,D,n}r) \quad (4.250)$$

El número de onda radial $k_{r,D,n}$ ($k_{r,E,n}$) deberá cumplir con la condición

$$J_1(k_{r,D,n}R_1) - \frac{J_1(k_{r,D,n}R_2)}{Y_1(k_{r,D,n}R_2)} Y_1(k_{r,D,n}R_1) = 0 \quad (4.251)$$

y el número de onda axial $k_{z,D,n}$ ($k_{z,E,n}$) es obtenido por la relación

$$k_{z,D,n}^2 = k_0^2 - k_{r,D,n}^2 \quad (4.252)$$

La velocidad axial acústica para esta región es

$$U_D(r, z_1) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,D,n} (D_n^+ e^{-jk_{z,D,n}z_1} - D_n^- e^{jk_{z,D,n}z_1}) \Psi_{D,n}(r) \quad (4.253)$$

En la región B se tiene

$$P_B(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}z_1} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}z_1}) \Psi_{B,n,P}(r) \quad (4.254)$$

El conducto central y el material absorbente tienen el mismo número de onda axial $k_{z,B,n}$, que está relacionado con el número de onda radial del aire $k_{r,B,n}$ y de la fibra $\tilde{k}_{r,B,n}$ por las expresiones

$$k_{z,B,n}^2 = k_0^2 - k_{r,B,n}^2, \quad (4.255)$$

$$k_{z,B,n}^2 = \tilde{k}^2 - \tilde{k}_{r,B,n}^2. \quad (4.256)$$

Los números de onda y los modos transversales son evaluados partiendo de las condiciones que deberán ser satisfechas en el campo acústico [37], tal como se ha visto en la sección 4.3.1: (1) presión finita en $r = 0$, (2) velocidad acústica radial nula en $r = R_2$, (3) velocidad acústica radial continua a través de los orificios del conducto perforado, $r = R_1$ y (4) diferencia de presiones a ambos lados del conducto perforado, tal como se detalla en (4.136). Estas condiciones generan la ecuación característica (4.140). Los modos transversales de presión de esta región se representan en (4.142) y el coeficiente C_5 es (4.245). La velocidad acústica axial es

$$U_B(r, z_1) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,B,n} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}z_1} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}z_1}) \Psi_{B,n,U_z}(r) \quad (4.257)$$

donde el autovalor de velocidad axial está dado por la expresión (4.147) en la que nuevamente C_5 es (4.245).

Los modos transversales de presión y velocidad acústica asociados a este silenciador se resumen en la Tabla 4.5. Una vez establecidas las expresiones de presión y velocidad, para obtener el TL deben calcularse los coeficientes de amplitud de onda, en este caso, por medio del Método Directo. Para ello se establecen las condiciones de continuidad de presión y velocidad acústicas en las discontinuidades geométricas $A-B$, $B-C$, $B-D$, $B-E$. Así en la expansión, $z_1 = 0$

$$P_A|_{z_1=0} = P_B|_{z_1=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.258)$$

La relación a través de la pared perforada que corresponde a la diferencia de presión entre los subdominios B y D , expresada en (4.136) y (4.137) es

$$P_D|_{z_1=0} - P_B|_{z_1=0} = \rho_0 c_0 \tilde{\xi}_{\rho_3} U_D|_{z_1=0}, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (4.259)$$

y la velocidad acústica

$$U_B|_{z_1=0} = \begin{cases} U_A|_{z_1=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ U_D|_{z_1=0}, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.260)$$

En la placa rígida izquierda, la condición de velocidad es

$$U_D|_{z_1=-L_a} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (4.261)$$

y por la condición de ortogonalidad

$$D_n^+ = D_n^- e^{-2jk_{z,D,n}L_a} \quad (4.262)$$

En la contracción, $z_1 = L_b$

$$P_B|_{z_1=L_b} = P_C|_{z_2=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.263)$$

La diferencia de presiones entre las regiones B y E a través de la pared perforada

$$P_B|_{z_1=L_b} - P_E|_{z_2=0} = \rho_0 c_0 \tilde{\xi}_{\rho_1} U_E|_{z_2=0}, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (4.264)$$

$$U_B|_{z_1=L_b} = \begin{cases} U_C|_{z_2=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ U_E|_{z_2=0}, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.265)$$

En la placa derecha de la cámara, se tiene

$$U_E|_{z_2=L_c} = 0 \quad \text{para} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (4.266)$$

y debido a la condición de ortogonalidad

$$E_n^- = E_n^+ e^{-2jk_{z,E_n}L_c} \quad (4.267)$$

El desarrollo de estas expresiones en forma de series es, para (4.258)-(4.260)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) \Psi_{A,n}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \Psi_{B,n,P}(r), \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.268)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^- (e^{-2jk_{z,D_n}L_a} + 1) \Psi_{D,n}(r) - \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \Psi_{B,n,P}(r) = \\ \frac{c_0 \tilde{\zeta}_{p_3}}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,D,n} D_n^- (e^{-2jk_{z,D_n}L_a} - 1) \Psi_{D,n}(r), \quad R_1 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.269)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,B,n} (B_n^+ - B_n^-) \Psi_{B,n,P}(r) = \\ \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \Psi_{A,n}(r), & 0 \leq r \leq R_1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,D,n} D_n^- (e^{-2jk_{z,D_n}L_a} - 1) \Psi_{D,n}(r), & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.270)$$

y para (4.263)-(4.265)

$$\sum_{n=0}^N (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) = \sum_{n=0}^N (C_n^+ + C_n^-), \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.271)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \Psi_{B,n,P}(r) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} E_n^+ (1 + e^{-2jk_{z,E_n}L_c}) \Psi_{E,n}(r) = \\ \frac{c_0 \tilde{\zeta}_{p_1}}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,E,n} E_n^+ (1 - e^{-2jk_{z,E_n}L_c}) \Psi_{E,n}(r), \quad R_1 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.272)$$

Región	Tipo de Modo	Expresión	Área
A	Presión, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
B	Presión, $\Psi_{B,n,P}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$J_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{B,n,U_z}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$C_s \frac{\rho_0}{\tilde{\rho}} \left[J_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,B,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,B,n}r) \right]$	$R_1 \leq r \leq R_2$
C	Presión, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
D	Presión, $\Psi_{D,n}(r)$	$J_0(k_{r,D,n}r) - \frac{J_1(k_{r,D,n}R_2)}{Y_1(k_{r,D,n}R_2)} Y_0(k_{r,D,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{D,n}(r)$	$J_0(k_{r,D,n}r) - \frac{J_1(k_{r,D,n}R_2)}{Y_1(k_{r,D,n}R_2)} Y_0(k_{r,D,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$
E	Presión, $\Psi_{E,n}(r)$	$J_0(k_{r,E,n}r) - \frac{J_1(k_{r,E,n}R_2)}{Y_1(k_{r,E,n}R_2)} Y_0(k_{r,E,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{E,n}(r)$	$J_0(k_{r,E,n}r) - \frac{J_1(k_{r,E,n}R_2)}{Y_1(k_{r,E,n}R_2)} Y_0(k_{r,E,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$

Tabla 4.5 Resumen de los modos transversales de un silenciador con conductos extendidos y material absorbente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_{z,B,n} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \Psi_{B,n,U_z}(r) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \Psi_{C,n}(r), & 0 \leq r \leq R_1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,E,n} E_n^+ (1 - e^{jk_{z,E,n}L_c}) \Psi_{E,n}(r), & R_1 \leq r \leq R_2. \end{cases} \quad (4.273)$$

La obtención de los coeficientes de amplitud requiere generar un sistema de ecuaciones, con un apropiado número de términos, que permitan la convergencia de la solución. Truncando a un valor adecuado N [37] e integrando directamente

sobre zonas discretas de las discontinuidades geométricas, las ecuaciones (4.268)-(4.270), expansión, resultan en

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (A_n^+ + A_n^-) \int_0^{r_{m,P1}} \Psi_{A,n}(r) r^a dr = \\ \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_0^{r_{m,P1}} \Psi_{B,n,P}(r) r^a dr, \quad 0 \leq r_{m,P1} \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.274)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N D_n^- (e^{-2jk_{z,D,n}L_a} + 1) \int_{R_1}^{r_{m,P2}} \Psi_{D,n}(r) r^a dr \\ - \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_{R_1}^{r_{m,P2}} \Psi_{B,n,P}(r) r^a dr = \\ \frac{C_0 \tilde{\xi}_{p_3}}{\omega} \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} D_n^- (e^{-2jk_{z,D,n}L_a} - 1) \int_{R_1}^{r_{m,P2}} \Psi_{D,n}(r) r^a dr, \quad R_1 \leq r_{m,P2} \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.275)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ - B_n^-) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{B,n,U_z}(r) r^a dr = \\ \begin{cases} \sum_{n=0}^N k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{A,n}(r) r^a dr, & 0 \leq r_{m,U} \leq R_1 \\ \sum_{n=0}^N k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) r^a dr \\ \quad + \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} D_n^- (e^{-2jk_{z,D,n}L_a} - 1) \int_{R_1}^{r_{m,U}} \Psi_{D,n}(r) r^a dr, & R_1 \leq r_{m,U} \leq R_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.276)$$

y las ecuaciones (4.271)-(4.273), para la contracción

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \int_0^{r_{m,P1}} \Psi_{B,n,P}(r) r^a dr = \\ \sum_{n=0}^N (C_n^+ + C_n^-) \int_0^{r_{m,P1}} \Psi_{C,n}(r) r^a dr, \quad 0 \leq r_{m,P1} \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.277)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \int_{R_1}^{r_{m,P2}} \Psi_{B,n,P}(r) r^a dr \\ - \sum_{n=0}^N E_n^+ (1 + e^{-2jk_{z,E,n}L_c}) \int_{R_1}^{r_{m,P2}} \Psi_{E,n}(r) r^a dr = \\ \frac{C_0 \tilde{\xi}_{p_1}}{\omega} \sum_{n=0}^N k_{z,E,n} E_n^+ (1 - e^{-2jk_{z,E,n}L_c}) \int_{R_1}^{r_{m,P2}} \Psi_{E,n}(r) r^a dr, \quad R_1 \leq r_{m,P2} \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.278)$$

$$\sum_{n=0}^N k_{z,B,n} \left(B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b} \right) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{B,n,U_z}(r) r^a dr =$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \int_0^{r_{m,U}} \Psi_{C,n}(r) r^a dr, & 0 \leq r_{m,U} \leq R_1 \\ \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) r^a dr \\ + \sum_{n=0}^N k_{z,E,n} E_n^+ (1 - e^{-2jk_{z,E,n}L_c}) \int_{R_1}^{r_{m,U}} \Psi_{E,n}(r) r^a dr, & R_1 \leq r_{m,U} \leq R_2 \end{cases} \quad (4.279)$$

donde

$$r_{m,P1} = \frac{m}{N+1} R_1, \quad m = 1, \dots, N+1,$$

$$r_{m,P2} = R_1 + \frac{m}{N+1} (R_2 - R_1), \quad m = 1, \dots, N+1, \quad (4.280)$$

$$r_{m,U} = \frac{m}{N+1} R_2, \quad m = 1, \dots, N+1.$$

Las expresiones con el exponente $a = 0$ se integran sobre el radio y con $a = 1$ sobre el área. La evaluación de las integrales (4.274)-(4.279) se efectúa mediante las ecuaciones (4.218)-(4.221).

En vista de que las amplitudes a determinar son, $A_n^-, D_n^-, B_n^+, B_n^-, E_n^+$ y C_n^+ , se conformará un sistema de ecuaciones de $6(N+1)$ incógnitas. Como en casos anteriores se asumirá que (1) la onda incidente es plana y de magnitud unidad $A_0^+ = 1$, $A_n^+ = 1$, $n > 0$, (2) existe una terminación anecoica, $C_n^- = 0$, para todo n y (3) en la salida la propagación de ondas es plana, es decir, propagación con el primer modo, C_0^+ . El TL es por tanto

$$TL = -20 \log_{10} |C_0^+| \quad (4.281)$$

4.4.3.2.2. Método de Ajuste Modal

Se sigue el mismo planteamiento hasta la ecuación (4.273). Empleando los modos transversales de los conductos como funciones de ponderación, al integrar sobre las discontinuidades geométricas se tiene, para la ecuación (4.268)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (A_n^+ + A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n,P}(r) \Psi_{A,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.282)$$

donde $s = 0, 1, \dots, N$. La integración de (4.269) proporciona

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N D_n^- (e^{-2jk_{z,D,n}L_u} + 1) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{D,n}(r) \Psi_{D,s}(r) r dr \\ - \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{B,n,P}(r) \Psi_{D,s}(r) r dr = \\ \frac{C_0 \tilde{\zeta}_{p_3}}{\omega} \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} D_n^- (e^{-2jk_{z,D,n}L_u} - 1) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{D,n}(r) \Psi_{D,s}(r) r dr, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.283)$$

La integración de la condición de velocidad dada por (4.270) conduce a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ - B_n^-) \int_0^{R_2} \Psi_{B,s,P}(r) \Psi_{B,n,U_z}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{B,s,P}(r) r dr \\ + \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} D_n^- (e^{-2jk_{z,D,n}L_u} - 1) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{D,n}(r) \Psi_{B,s,P}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.284)$$

En la contracción se procede de manera similar al planteamiento en la expansión

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n,P}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (C_n^+ + C_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.285)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b}) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{B,n,P}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr \\ - \sum_{n=0}^{\infty} E_n^+ (1 + e^{-2jk_{z,E,n}L_c}) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr = \\ \frac{C_0 \tilde{\zeta}_{p_1}}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,E,n} E_n^+ (1 - e^{-2jk_{z,E,n}L_c}) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.286)$$

y para la condición de velocidad

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} \left(B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_b} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_b} \right) \int_0^{R_2} \Psi_{B,s,P}(r) \Psi_{B,n,U_z}(r) r dr = \\
 & \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} \left(C_n^+ - C_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{B,s,P}(r) r dr \\
 & + \sum_{n=0}^N k_{z,E,n} E_n^+ \left(1 - e^{-2jk_{z,E,n}L_c} \right) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{B,s,P}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2
 \end{aligned} \tag{4.287}$$

donde nuevamente $s = 0, 1, \dots, N$. La evaluación de las integrales (4.282)-(4.287) se realiza analíticamente por medio de la expresión (4.233).

Finalmente asumiendo que: (1) en el conducto de entrada la onda incidente es plana $A_0^+ = 1$, $A_n^+ = 1$, $n > 0$, (2) la salida es anecoica, $C_n^- = 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ y (3) la propagación de ondas en la salida es en forma de onda plana, C_0^+ , las ecuaciones (4.282)-(4.287) proporcionan un sistema de $6(N+1)$ ecuaciones con $6(N+1)$ incógnitas asociadas a los coeficientes de propagación $A_n^-, D_n^-, B_n^+, B_n^-, E_n^+$ y C_n^+ . Una vez resuelto, el TL se calcula por medio de la expresión (4.222).

En base a las dimensiones especificadas en la Tabla 4.6, las Pérdidas por Transmisión, TL , calculadas por ambos métodos se exhiben en la Figura 4.18.

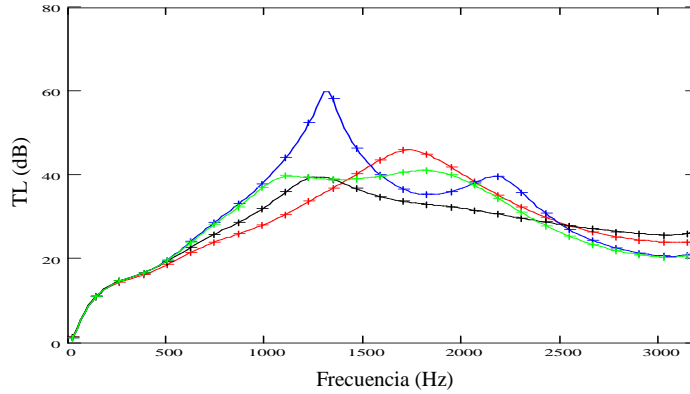


Figura 4.18 Comparación de TL de un silenciador con conductos extendidos parcialmente relleno de material absorbente, sin superficies perforadas. Métodos de Integración Directa y de Ajuste Modal, 10 modos. Método Integración Directa: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; —, geometría 4. Ajuste Modal: +++++, geometría 1; +++++, geometría 2; +++++, geometría 3; +++++, geometría 4.

Geometría	Long. silenciador L_T (m)	Long. extendido entrada L_a (m)	Long. extendido salida L_c (m)
1	0.2572	0.025	0.025
2	0.2572	0.05	0.05
3	0.2572	0.05	0
4	0.2572	0.03	0.06

Tabla 4.6 Dimensiones relevantes de silenciador con conductos extendidos sin superficies perforadas, $R = 4896$ rayl/m, $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m.

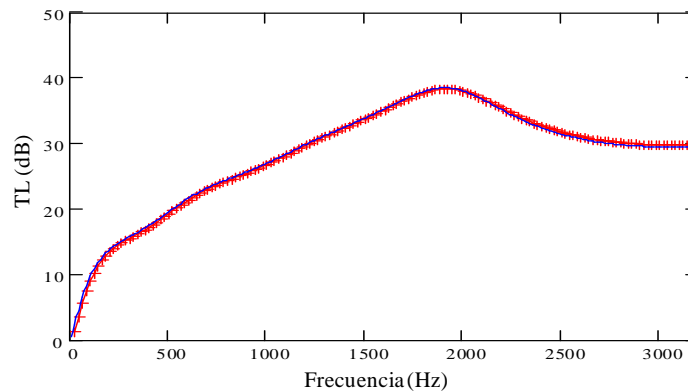


Figura 4.19 TL de un silenciador con conductos extendidos parcialmente rellenos de material absorbente, con superficies perforadas. Validación con MEF. $L_a = L_c = 0.035$ m, $L_b = 0.1875$, sin superficies perforadas, $R = 4896$ rayl/m. —, Ajuste Modal; +++, MEF.

La Figura 4.19 muestra la comparación del TL obtenido mediante Ajuste Modal y Elementos Finitos. La gráfica exhibe unos resultados muy parecidos entre ambos métodos, siendo 10 el número de modos calculados.

4.4.4. Conclusiones

Ambos métodos predicen con suficiente precisión la atenuación acústica, aunque persisten ligeras diferencias cuando la resistividad es baja o no existe material absorbente. Para comparar el error en el índice de Pérdidas de Transmisión, TL , de ambos métodos se ha calculado por medio del método de Elementos Finitos el TL para cada silenciador, cuyas dimensiones relevantes se muestran en la Tabla 4.7.

El TL se ha evaluado para un rango de frecuencias que abarca desde 20 Hz hasta 3200 Hz, con incrementos de 20 Hz. El error del TL se halla por medio de la expresión

$$ETL = \frac{\sum_{i=1}^{Nf} |TL_i^{analitico} - TL_i^{MEF}|}{\sum_{i=1}^{Nf} TL_i^{MEF}} \quad (4.288)$$

donde Nf es 160. Las mallas de ambas geometrías se han construido con elementos cuadriláteros de ocho nodos. La malla 1 tiene más de 12000 elementos y 37000 nodos y la malla 2 contiene más 12000 elementos y 38000 nodos, con un tamaño apropiado de 0.0015 m, excepto en las regiones cercanas a las expansiones y contracciones, el cual se reduce a 0.00075 m. La Figura 4.20 muestra el error de ambos métodos en función del número de modos. La resistividad del material absorbente es de 4896 rayl/m y no se ha considerado la existencia de superficies perforadas.

Geometría	Long. silenciador L_T (m)	Long. extend. entrada L_a (m)	Long. extend. salida L_c (m)	Resistividad R (rayl/m)
1	0.2572	0.0	0.0	4896
2	0.2572	0.08	0.041	4896

Tabla 4.7 Geometrías utilizadas en la estimación del error del TL mediante los métodos de Integración Directa y de Ajuste Modal, sin elementos perforados.

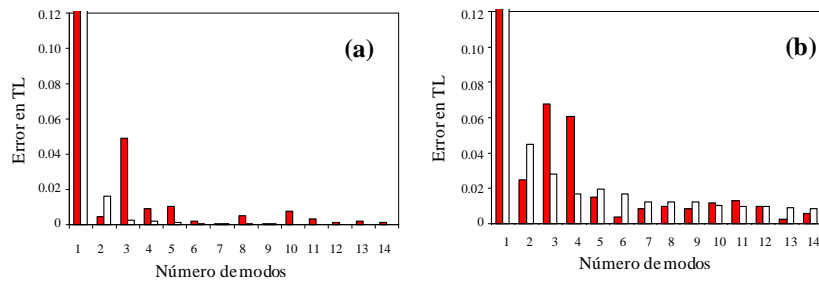


Figura 4.20 Error en pérdidas de transmisión, TL , en silenciadores con material absorbente, $R = 4896$ rayl/m sin elementos perforados. (a) resonador concéntrico, (b) silenciador con conductos extendidos: ■ método de Integración Directa; □ método de Ajuste Modal.

Se aprecia, por medio de dicha figura, que los resultados de la geometría 1 convergen con mayor velocidad. Cuando el número de modos es pequeño, los resultados obtenidos mediante el método de Ajuste Modal son más precisos que los conseguidos a través del método de Integración Directa. Para evaluar las pérdidas por transmisión, TL , en este tipo de geometría no es necesario utilizar un elevado número de modos, ya que la convergencia es bastante rápida.

La presencia de conductos extendidos conduce a un incremento de los errores y un retardo de la convergencia. Para la geometría 2, los resultados muestran que por medio del método de Ajuste Modal la convergencia es más rápida que con el método de Integración Directa, aunque es inevitable la existencia de pequeños errores, los cuales, con el método de Integración Directa, oscilan a medida que el número de modos se eleva.

4.5. Modelado y estudio detallado de silenciadores híbridos

Con lo planteado hasta estos momentos se extiende la aplicación de este contenido a la evaluación del comportamiento acústico de las configuraciones geométricas incluidas en el alcance de esta Tesis. Para cada silenciador se modifican los principales parámetros propios y se estudia su impacto por medio del índice de Pérdidas de Transmisión, TL , utilizando para ello el método de Ajuste Modal.

4.5.1. Silenciador con material absorbente

El análisis del comportamiento acústico de esta geometría ha sido desarrollado en la sección 4.4.2. En este punto se expondrán los resultados obtenidos para las configuraciones geométricas mostradas a continuación.

4.5.1.1. Variación de la resistividad

La Tabla 4.8 muestra las diferentes resistividades del material absorbente empleado para la evaluación del comportamiento acústico del silenciador.

Geometría	Resistividad R (rayl/m)
1	0
2	1000
3	4896
4	17378

Tabla 4.8 Variación de la resistividad. Longitud del silenciador $L_T = 0.2572$ m, radio interno $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m, porosidad del conducto central $\sigma = 8\%$

El incremento de la resistencia al flujo del material absorbente evidentemente mejora la atenuación acústica del silenciador en la mayor parte del rango de frecuencia estudiado. En la Figura 4.21 se aprecia que el aumento de la resistividad del material absorbente incrementa la atenuación a altas frecuencias,

mientras que, a bajas frecuencias, se observa un desplazamiento a menores frecuencias del pico de atenuación. Los resultados se han validado con el método de Elementos Finitos proporcionando una excelente concordancia.

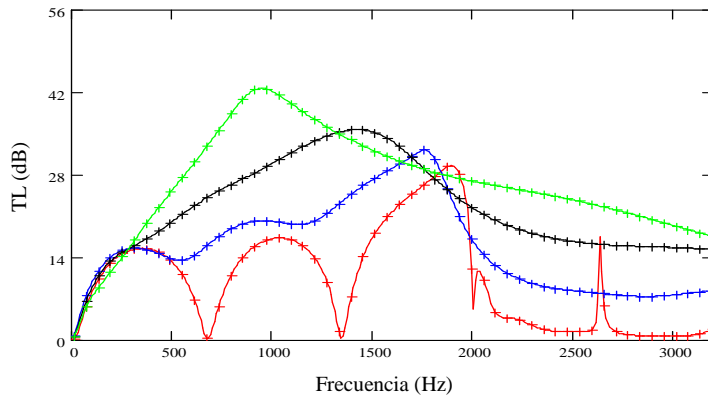


Figura 4.21 TL geometrías con conducto central perforado y material absorbente. Variación de la resistividad, 10 modos. Ajuste Modal: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3; —, geometría 4. MEF: +, geometría 1; +, geometría 2; +, geometría 3; +, geometría 4.

4.5.1.2. Variación de la porosidad

La modificación de la porosidad de la superficie perforada cambia el comportamiento acústico del silenciador. La Tabla 4.9 muestra los valores de la porosidad estudiados. Como se observa en la Figura 4.22 porosidades bajas proporcionan el mejor comportamiento acústico a bajas frecuencias, en detrimento de la atenuación acústica a altas frecuencias.

Geometría	Porosidad σ (%)
5	2
6	8
7	50
8	100

Tabla 4.9 Dimensiones relevantes de un silenciador con conducto central perforado y material absorbente, $R = 4896$ rayl/m. Variación de la porosidad σ del conducto central. Longitud del silenciador $L_T = 0.2572$ m, radio interno $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m.

En efecto, bajas porosidades generan un aumento del TL a bajas frecuencias, pero a altas frecuencias la impedancia es considerable y el silenciador tiende a comportarse como un conducto, tendiendo el TL a cero. Por el contrario, a medida que la porosidad se incrementa el comportamiento acústico muestra una tendencia inversa. Porosidades alrededor del 50% proporcionan una atenuación acústica bastante similar a la resultante de utilizar una porosidad del 100%, demostrándose que la influencia acústica de los elementos perforados disminuye a medida que la porosidad aumenta. La mejora de la atenuación a altas frecuencias se debe al predominio de las propiedades disipativas del material absorbente.

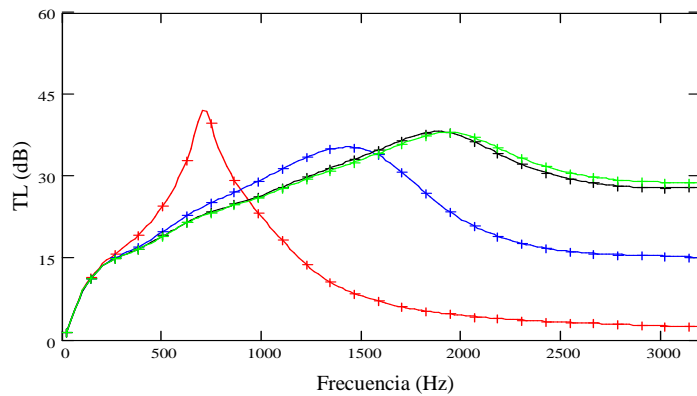


Figura 4.22 TL de un silenciador con conducto central perforado y material absorbente. Variación de la porosidad del conducto central, 10 modos. Ajuste Modal: —, geometría 5; —, geometría 6; —, geometría 7; —, geometría 8. MEF: +++++, geometría 5; +++++, geometría 6; +++++, geometría 7; +++++, geometría 8.

4.5.1.3. Variación de las dimensiones del silenciador

Se estudia el efecto de la modificación de parámetros geométricos en el comportamiento acústico del silenciador. En la Tabla 4.10 se detallan las variaciones en la longitud del silenciador L_T y el radio externo R_2 .

Geometría	Longitud silenciador L_T (m)	Radio interno R_1 (m)	Radio externo R_2 (m)
9	0.3572	0.0245	0.0822
10	0.2572	0.0245	0.101
11	0.3572	0.0245	0.101

Tabla 4.10 Variación de dimensiones de un silenciador concéntrico con conducto central perforado y material absorbente, 10 modos. Resistividad $R = 4896$ rayl/m, porosidad $\sigma = 8\%$.

En la Figura 4.23 se observa que el aumento de la longitud del silenciador mejora la atenuación a bajas y medias frecuencias respecto a la dimensión original. Un aumento de la longitud del silenciador combinado con un incremento del radio externo puede proporcionar un mejor desempeño acústico en el rango de frecuencias estudiado, debido al aumento de material absorbente y de la relación de áreas.

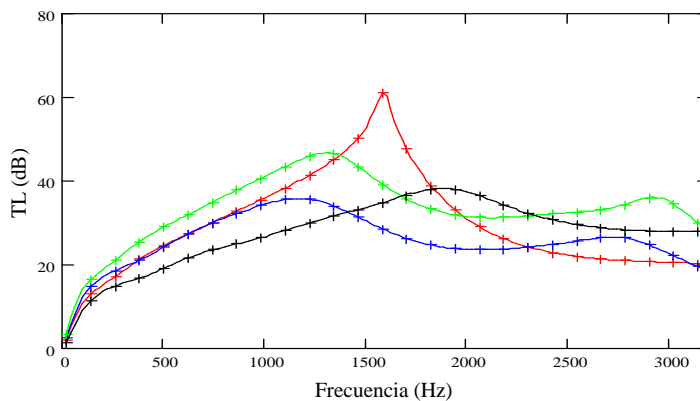


Figura 4.23 TL de un silenciador concéntrico con conducto central perforado y material absorbente. Efecto de la variación de las dimensiones externas, 10 modos. Ajuste Modal: —, geometría 3; —, geometría 9; —, geometría 10; —, geometría 11. MEF: +, geometría 3; ++, geometría 9; +++, geometría 10; +++++, geometría 11.

4.5.2. Silenciador con material absorbente y conductos extendidos

A continuación se estudia el efecto que ejerce sobre la atenuación acústica de un silenciador la inserción de conductos extendidos a la entrada y la salida, la inclusión de superficies perforadas en el conducto central y caras laterales y por último la incorporación de material absorbente.

4.5.2.1. Efecto de los conductos extendidos

La Tabla 4.11 expone las dimensiones de las geometrías de los silenciadores, con conductos extendidos de entrada y salida, empleados para estudiar su influencia en el comportamiento acústico.

En la Figura 4.24 se observa que la presencia de conductos extendidos produce la aparición de picos de resonancia. La corta extensión del tubo de entrada, L_a , origina un aumento de la atenuación a alta frecuencia (2350 Hz), mientras que la

longitud del conducto de salida, L_c , ocasiona la existencia de los picos de resonancia a media y alta frecuencia (914 y 2200 Hz, respectivamente).

Geometría	Longitud silenciador L_T (m)	Longitud extendido de entrada L_a (m)	Longitud cámara central L_b (m)	Longitud extendido de salida L_c (m)
1	0.2572	0	0.2572	0
2	0.2572	0.02	0.1572	0.08
3	0.2572	0.04	0.1372	0.08
4	0.2572	0.06	0.1162	0.08
5	0.2572	0.115	0.0912	0.051
6	0.2572	0.1	0.1072	0.05

Tabla 4.11 Dimensiones relevantes de un silenciador con conductos extendidos.
 $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m.

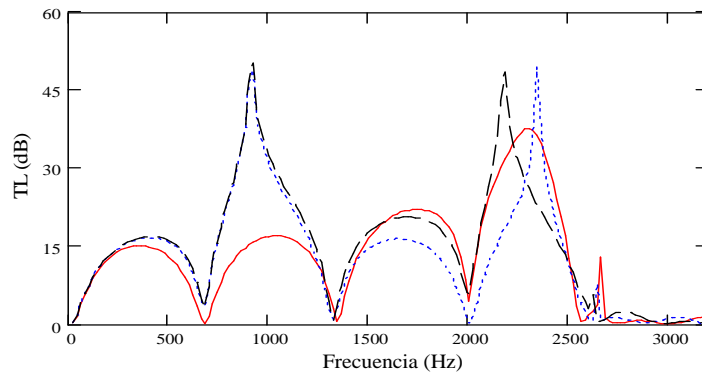


Figura 4.24 Influencia de los conductos extendidos en el TL del silenciador, 10 modos.
 —, $L_a = 0.02$ m y $L_c = 0$; - - - - , $L_a = 0$ y $L_c = 0.08$ m; — · — · — , $L_a = 0.02$ m y $L_c = 0.08$ m (geometría 2).

El aumento de la longitud de los conductos extendidos modifica el comportamiento acústico del silenciador. En la Figura 4.25 se aprecia que, debido al incremento de la longitud del tubo de entrada, L_a , el pico de resonancia se desplaza a menor frecuencia (1585 Hz) seguido de la aparición de otro pico a mayor frecuencia (2450 Hz).

Similar tendencia se advierte en la Figura 4.26 donde el conducto extendido de entrada se ha alargado. El cambio del pico de atenuación a menor frecuencia y su proximidad con el del conducto extendido de salida, ocasionan una mejora del comportamiento acústico a media frecuencia.

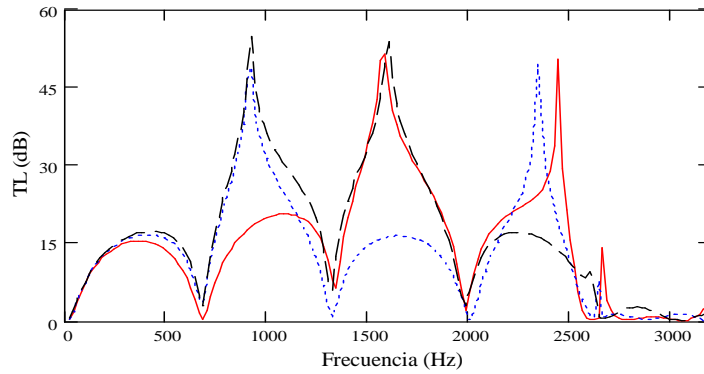


Figura 4.25 Influencia de los conductos extendidos en el TL del silenciador, 10 modos.
 —, $L_a = 0.04$ m y $L_c = 0$; - - - -, $L_a = 0$ y $L_c = 0.08$ m; — · — ·, $L_a = 0.04$ m y $L_c = 0.08$ m (geometría 3).

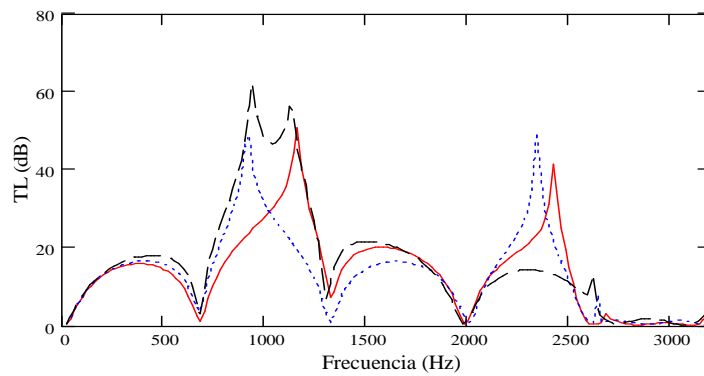


Figura 4.26 Influencia de los conductos extendidos en el TL del silenciador, 10 modos.
 —, $L_a = 0.06$ m y $L_c = 0$; - - - -, $L_a = 0$ y $L_c = 0.08$ m; — · — ·, $L_a = 0.06$ m y $L_c = 0.08$ m (geometría 4).

En el comportamiento acústico de estos silenciadores también se observa la presencia de bandas de paso, que caracterizan la atenuación de las cámaras de expansión simple. De este modo, el comportamiento acústico de los silenciadores con conductos extendidos es una superposición de las mencionadas bandas de paso y de los picos de resonancia propios de los resonadores de cuarto de onda [37].

Mediante una apropiada selección de la longitud de los conductos extendidos, de modo que las depresiones de las bandas de paso se anulen, puede conseguirse

una mejora del comportamiento acústico del silenciador en un amplio rango de frecuencias, tal como se muestra en la Figura 4.27.

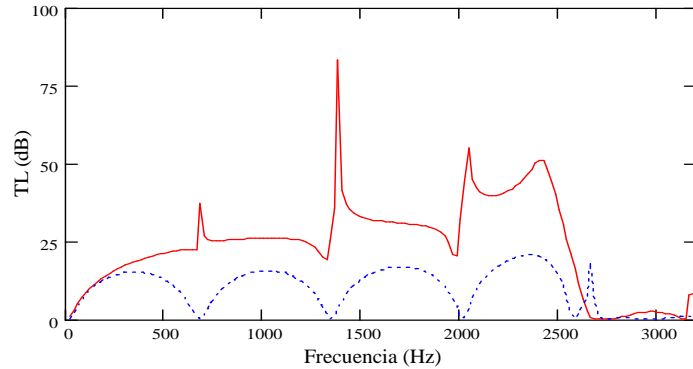


Figura 4.27 TL de un silenciador con conductos extendidos, 10 modos. —, $L_a = 0.115$ m y $L_c = 0.051$ m (geometría 5); - - -, $L_a = 0$ y $L_c = 0$ (cámara de expansión simple).

La existencia de material absorbente y de superficies perforadas, en el conducto central del silenciador y superficies laterales, también modifican el comportamiento acústico de un silenciador con conductos extendidos. El material absorbente ejerce su influencia incrementando la atenuación a medias y altas frecuencias, aunque, con una adecuada selección de la longitud de los tubos extendidos y de la resistividad del material absorbente, se logran mejorar las prestaciones acústicas a bajas frecuencias.

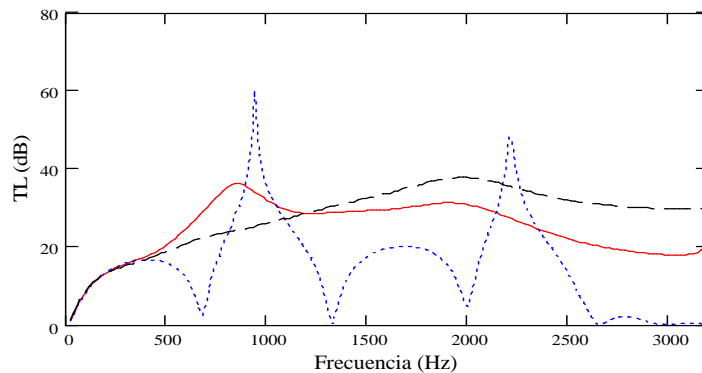


Figura 4.28 TL de un silenciador con conductos extendidos sin superficies perforadas. Efecto de la presencia de material absorbente en la parte central del silenciador. Resistividad: 4896 rayl/m. 10 modos: —, geometría 2 con material absorbente; - - -, geometría 2 sin material absorbente; — — —, geometría 1 con material absorbente.

En la Figura 4.28 se compara el TL de un silenciador con conductos extendidos, correspondiente a la geometría 2, con material absorbente y reactivo. La presencia de fibra, en la parte central del silenciador, elimina las bandas de paso e introduce amortiguamiento, proporcionando una mejora del comportamiento acústico. Además, se produce un desplazamiento, a menor frecuencia, del pico máximo de atenuación y a altas frecuencias aumenta notablemente el desempeño acústico.

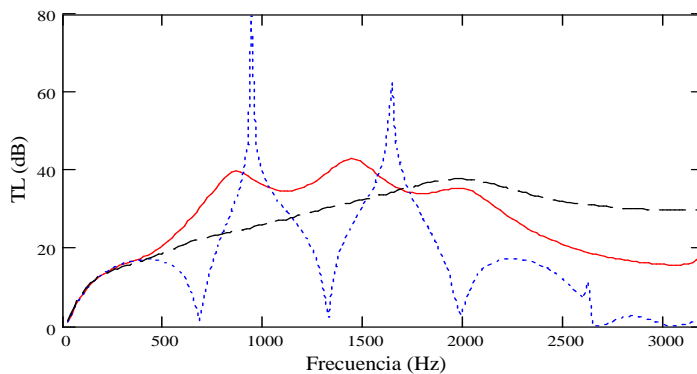


Figura 4.29 TL de un silenciador con conductos extendidos sin superficies perforadas.

Efecto de la presencia de material absorbente en la parte central del silenciador.

Resistividad: 4896 rayl/m. 10 modos: —, geometría 3 con material absorbente; - - - -, geometría 3 sin material absorbente; — · —, geometría 1 con material absorbente.

La modificación de la longitud de los conductos extendidos altera el comportamiento acústico. En la Figura 4.29 se aprecia que un aumento de la longitud del conducto extendido de entrada, L_a , proporciona una mejora de la atenuación a baja y media frecuencia, ya que predomina la influencia de los picos de atenuación del silenciador reactivo.

Una nueva variación de la longitud de los conductos extendidos, alargamiento en el tubo de entrada y disminución en el de salida, aporta un incremento de la atenuación a baja frecuencia, Figura 4.30.

En los casos anteriores, la existencia de conductos extendidos permite el relleno de fibra absorbente en la parte central del silenciador. Debido a esto, se ha comprobado que el comportamiento acústico del silenciador mejora a media y alta frecuencia respecto al silenciador reactivo. Si se incrementa la longitud de los conductos extendidos disminuye la cantidad de material absorbente, y la atenuación se amplía a baja frecuencia, en detrimento de la misma, a media y

alta frecuencia, ver Figura 4.31. En cambio, al comparar estos resultados con el TL de un silenciador concéntrico disipativo se observa que, por un lado, dada la mayor cantidad de fibra absorbente en contacto con el conducto central, la atenuación acústica, a media y alta frecuencia, es más elevada que la del silenciador con conductos extendidos. Por otro lado, a bajas frecuencias, la ausencia de conductos extendidos no permite el aprovechamiento de los picos de atenuación propios de los silenciadores reactivos disminuyendo, de este modo, su desempeño acústico.

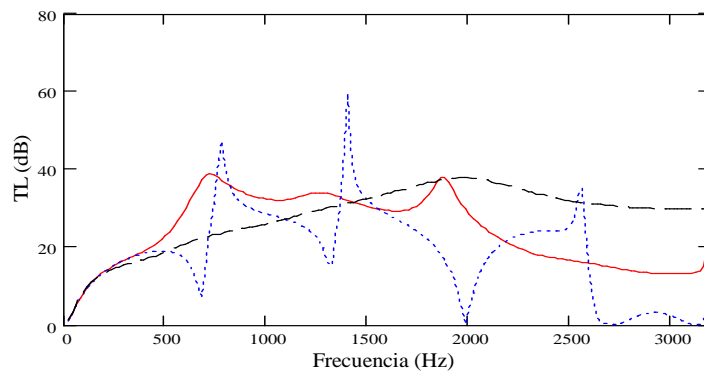


Figura 4.30 TL de un silenciador con conductos extendidos sin superficies perforadas. Efecto de la presencia de material absorbente en la parte central del silenciador. Resistividad: 4896 rayl/m. 10 modos: —, geometría 6 con material absorbente; - - - -, geometría 6 sin material absorbente; — · — ·, geometría 1 con material absorbente.

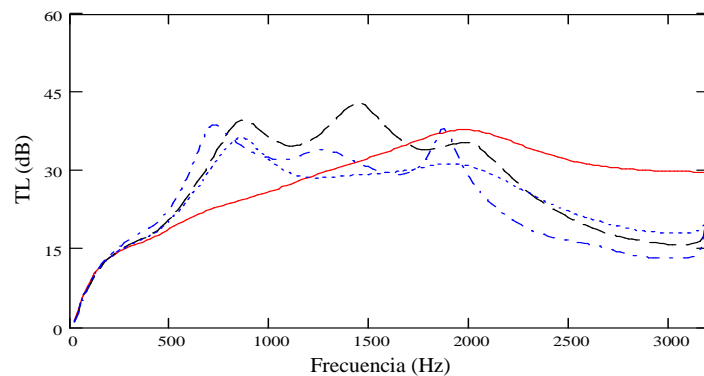


Figura 4.31 TL de un silenciador con conductos extendidos sin superficies perforadas. Variación de la longitud de los conductos extendidos. Resistividad $R = 4896$ rayl/m, 10 modos: —, geometría 1; - - - -, geometría 2; — · — ·, geometría 3; — · — ·, geometría 6.

4.5.2.2. Efecto de la porosidad en las superficies perforadas

El efecto que ejercen las superficies perforadas, en el comportamiento acústico de un silenciador con conductos extendidos y parcialmente relleno de material absorbente, se evalúa con una geometría definida por $L_a = 0.08$ m, $L_c = 0.041$ m, $L_T = L_a + L_b + L_c = 0.2572$ m, radio de entrada de 0.0245 m, radio externo de 0.0822 m y resistividad de 4896 rayl/m. Inicialmente se analiza el comportamiento acústico sin superficie perforada, seguidamente, el caso con elementos perforados en el conducto central y, por último, el caso de superficie perforada en el conducto central y placas laterales.

En la Figura 4.32 se observa que la incorporación de elementos perforados contribuye a empeorar el comportamiento acústico a medias y altas frecuencias, ya que no se aprovecha completamente las características disipativas del material absorbente. La configuración con superficies perforadas en el conducto central atenúa mejor, a baja y media frecuencia, que la que tiene elementos perforados en las placas laterales, a excepción de una estrecha banda a 1500 Hz.

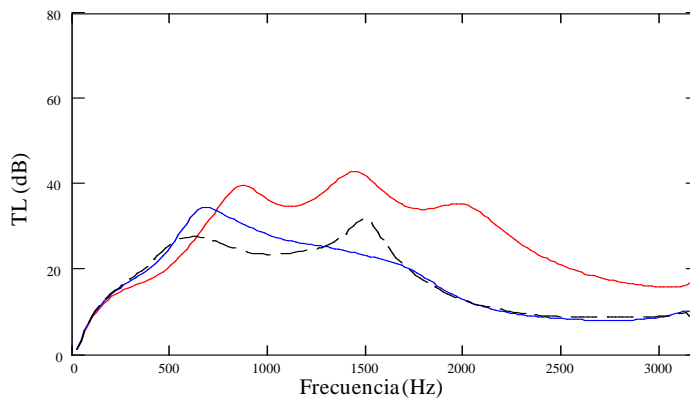


Figura 4.32 TL de un silenciador con conductos extendidos, 10 modos, $R = 4896$ rayl/m. Variación de la porosidad de las superficies perforadas: —, sin superficies perforadas; —, superficie perforada en conducto central, $\sigma = 8\%$; — —, superficies perforadas en conducto central y placas laterales, $\sigma = 8\%$.

4.5.2.3. Efecto de la resistividad

En las geometrías 2-4 de la Tabla 4.11 se estudia el efecto de la resistividad al flujo del material absorbente para valores de 1000 , 4896 y 17378 rayl/m y se tiene en cuenta que $\tilde{\xi}_{p_1} = \tilde{\xi}_{p_2} = \tilde{\xi}_{p_3} = 0$. Los resultados se comparan con los de la geometría 1, silenciador sin conductos extendidos, con el objeto de evaluar el

efecto de la resistividad del material absorbente combinado con el de la influencia de los conductos extendidos.

Para la geometría 2 el comportamiento acústico del silenciador, parcialmente relleno de material absorbente, mejora a medida que aumenta la resistividad de la fibra absorbente, Figura 4.33, a excepción de dos intervalos de frecuencias donde se aprecia una tendencia opuesta. Esto se puede atribuir a la existencia de los picos de atenuación propios del resonador, los cuales, han disminuido ligeramente su amplitud dado el efecto de amortiguación del material absorbente.

Los resultados indican que una mayor resistividad de la fibra absorbente, causa un desplazamiento de los valores de atenuación máxima hacia menores frecuencias, y a la vez, una mejora del desempeño acústico a media y alta frecuencia. Similar pauta se observa en la geometría 1. No obstante, comparando las prestaciones acústicas de ambos silenciadores, se distingue un empeoramiento de las mismas en la geometría 2, a media y alta frecuencia, debido a la menor cantidad de material disipativo presente.

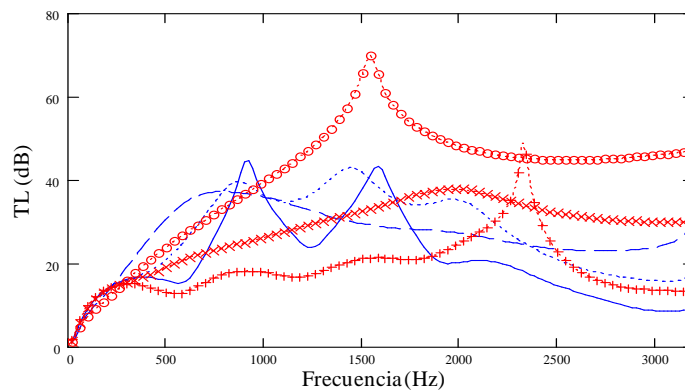


Figura 4.33 TL de un silenciador con conductos extendidos, sin superficies perforadas, 10 modos. Variación de la resistividad. Geometría 2: —, $R = 1000$ rayl/m; - · - · -, $R = 4896$ rayl/m; - - - -, $R = 17378$ rayl/m. Geometría 1 (sin conductos extendidos): + + + +, $R = 1000$ rayl/m; x x x x, $R = 4896$ rayl/m; o o o o, $R = 17378$ rayl/m.

Los resultados presentados en la Figura 4.34, geometría 3, muestran una tendencia parecida a los observados en la figura anterior donde nuevamente, el incremento de la resistividad mejora la atenuación acústica. Sin embargo, el silenciador concéntrico mantiene mejores prestaciones acústicas a media y alta frecuencia.

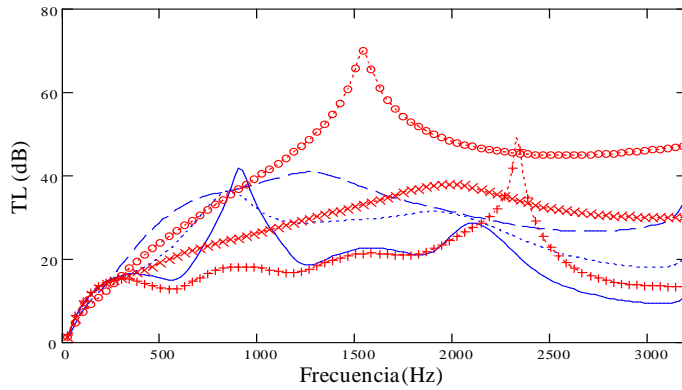


Figura 4.34 TL de un silenciador con conductos extendidos, sin superficies perforadas, 10 modos. Variación de la resistividad. Geometría 3: —, $R = 1000$ rayl/m; - · - · -, $R = 4896$ rayl/m; — · — · —, $R = 17378$ rayl/m. Geometría 1 (sin conductos extendidos): + + + + +, $R = 1000$ rayl/m; x x x x x, $R = 4896$ rayl/m; o o o o o, $R = 17378$ rayl/m.

Un alargamiento del conducto extendido de entrada, geometría 4, exhibe un progreso de la atenuación a baja frecuencia, cuyos valores de máxima amplitud, se trasladan a menores frecuencias a medida que se eleva la resistividad de la fibra absorbente, Figura 4.35. Por otro lado, la disminución de la cantidad de material disipativo en la cámara ocasiona un decaimiento de la atenuación a media y alta frecuencia.

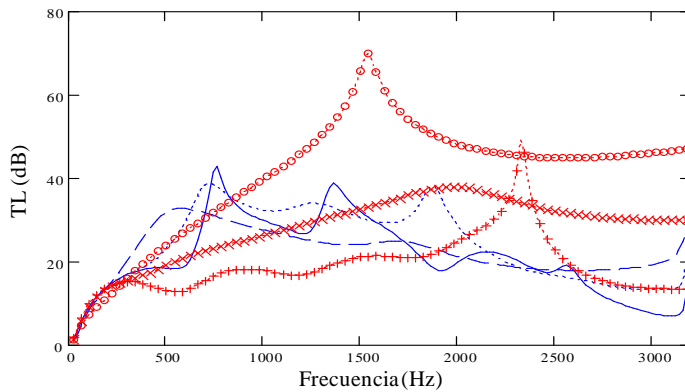


Figura 4.35 TL de un silenciador con conductos extendidos, sin superficies perforadas, 10 modos. Variación de la resistividad. Geometría 4: —, $R = 1000$ rayl/m; - · - · -, $R = 4896$ rayl/m; — · — · —, $R = 17378$ rayl/m. Geometría 1 (sin conductos extendidos): + + + + +, $R = 1000$ rayl/m; x x x x x, $R = 4896$ rayl/m; o o o o o, $R = 17378$ rayl/m.

A partir de las geometrías analizadas se percibe que el relleno parcial de material absorbente mejora el comportamiento acústico a bajas frecuencias. Con el incremento de la resistividad merman las amplitudes de los picos atenuación que ofrece la presencia de conductos extendidos desplazándolos a menores frecuencias [37].

4.5.2.4. Efecto de las dimensiones del silenciador

Se estudia el efecto del aumento de la longitud del silenciador y del radio externo en el comportamiento acústico del silenciador. Los resultados proporcionados por estas variaciones se contrastan con los obtenidos a partir de las geometrías originales. Las longitudes adicionales son múltiplos de la inicial y, la longitud de los conductos extendidos y cámara disipativa, son proporcionales a las dimensiones iniciales. El radio externo aumenta a 0.101 m, ver Tabla 4.12, y se tiene en cuenta que $\tilde{\xi}_{p_1} = \tilde{\xi}_{p_2} = \tilde{\xi}_{p_3} = 0$. La resistividad del material absorbente es de 4896 rayl/m.

La ampliación del radio externo genera la propagación, a frecuencias más bajas, de los modos de alto orden. Los silenciadores con mayor extensión, geometrías 7 y 8, tienen un mejor comportamiento acústico que el silenciador de longitud inicial, geometría 3. Al mismo tiempo, los silenciadores con mayor radio externo, geometrías 9, 10 y 11, atenúan más que aquellos silenciadores con radio externo original, geometrías 3, 7 y 8. A medida que el radio de la cámara se incrementa, el efecto de la propagación de los modos de alto orden debería ser más evidente, si bien el autovalor de r reduce la influencia de los modos transversales. El aumento del radio externo implica una mayor cantidad de picos de atenuación y su amplitud depende de la relación de las áreas de la cámara - conducto extendido, de entrada o salida.

Geometría	Longitud silenciador L_T (m)	Longitud extendido de entrada L_a (m)	Longitud cámara central L_b (m)	Longitud extendido de salida L_c (m)	Radio externo R_2 (m)
3	0.2572	0.08	0.1362	0.041	0.0822
7	0.51	0.16	0.27	0.08	0.0822
8	0.91	0.28	0.48	0.15	0.0822
9	0.2572	0.08	0.1362	0.041	0.101
10	0.51	0.16	0.27	0.08	0.101
11	0.91	0.28	0.48	0.15	0.101

Tabla 4.12 Dimensiones relevantes de un silenciador con conductos extendidos. Variación de las dimensiones externas. Resistividad $R = 4896$ rayl/m, porosidad $\sigma = 8\%$ en conducto central y placas laterales, radio interno $R_1 = 0.0245$ m.

La Figura 4.36 indica que una ampliación del radio de la cámara proporciona un crecimiento de la atenuación, sobre todo a bajas frecuencia. En este rango, el

primer pico de atenuación se traslada hacia menores frecuencias mientras la longitud de los conductos extendidos se incrementa. A altas frecuencias, la mejora de la atenuación se debe a la mayor cantidad de material disipativo existente en la cámara. En la figura también se advierte que la incidencia de la propagación de los modos de alto orden, en el comportamiento acústico, es más significativa en los silenciadores de mayor longitud, donde la forma del TL se vuelve irregular [37]. El número de picos se eleva a medida que el radio de la cámara se amplía.

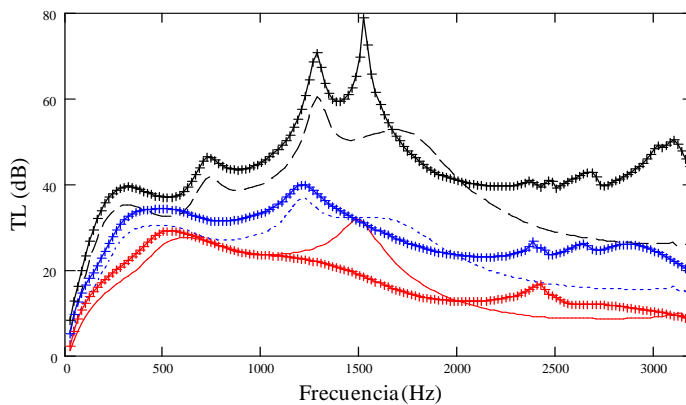


Figura 4.36 TL de un silenciador con conductos extendidos, 10 modos. Variación de las dimensiones externas. —, geometría 3; - - - -, geometría 7; — — —, geometría 8; ++++++, geometría 9; ++++++, geometría 10; ++++++, geometría 11.

4.5.3. Silenciador con material absorbente y resonadores laterales

En la Figura 4.37 se muestra un silenciador con material absorbente, conducto central perforado y dos cámaras laterales. Al igual que en casos anteriores el material absorbente está separado de la región central por medio de una superficie perforada con una impedancia acústica adimensional $\tilde{\xi}_p$. Dicho conducto perforado tiene un espesor t_h , los orificios poseen un diámetro d_h y la porosidad es σ . Las cámaras laterales están separadas del medio absorbente a través de dos placas rígidas de espesor t_{h1} y t_{h2} respectivamente. El radio del conducto de entrada, central y de salida es R_1 y el radio externo R_2 . Las regiones o subdominios se denotan como A en la región de entrada, G en el conducto de salida, D en la región central, B y F las regiones correspondientes a las cámaras laterales, C y E las regiones generadas por el espesor t_{h1} y t_{h2} de las placas. La región central se subdivide a su vez en dos regiones, en D_1 para el conducto y D_2 para el material absorbente. La cámara central tiene una longitud L_b y las

$$k_{z,B,n}^2 = k_0^2 - k_{r,B,n}^2 \quad (4.293)$$

Para la velocidad acústica

$$U_B(r, z_1) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,B,n} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}z_1} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}z_1}) \Psi_{B,n}(r) \quad (4.294)$$

En el orificio, subdominio C (E), de espesor t_{h1} , a la entrada de la cámara disipativa, se tiene

$$P_C(r, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}z_2} + C_n^- e^{jk_{z,C,n}z_2}) \Psi_{C,n}(r) \quad (4.295)$$

satisfaciéndose la relación, para el número de onda axial $k_{z,C,n}$,

$$k_{z,C,n}^2 = k_0^2 - k_{r,C,n}^2 \quad (4.296)$$

La velocidad acústica es definida por

$$U_C(r, z_2) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,C,n} (C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}z_2} - C_n^- e^{jk_{z,C,n}z_2}) \Psi_{C,n}(r) \quad (4.297)$$

En la región D se tiene

$$P_D(r, z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^+ e^{-jk_{z,D,n}z_3} + D_n^- e^{jk_{z,D,n}z_3}) \Psi_{D,n}(r) \quad (4.298)$$

El conducto central y el material absorbente tienen el mismo número de onda axial, $k_{z,D,n}$, el cual está relacionado con el número de onda radial del aire $k_{r,D,n}$ y de la fibra $\tilde{k}_{r,D,n}$ por las medio de las expresiones

$$k_{z,D,n}^2 = k_0^2 - k_{r,D,n}^2 \quad (4.299)$$

$$\tilde{k}_{z,D,n}^2 = \tilde{k}^2 - \tilde{k}_{r,D,n}^2 \quad (4.300)$$

En el conducto central y el material absorbente, el campo de velocidad acústica es

$$U_D(r, z_3) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{z,D,n} (D_n^+ e^{-jk_{z,D,n}z_3} - D_n^- e^{jk_{z,D,n}z_3}) \Psi_{D,n}(r) \quad (4.301)$$

Los modos de presión y de velocidad se exponen en la Tabla 4.13.

Las condiciones de continuidad de presión y velocidad acústica deben satisfacerse en las discontinuidades geométricas $A-B$, $B-C$, $C-D$, $D-E$, $E-F$ y $F-G$. De este modo en la discontinuidad $A-B$ las condiciones de presión y velocidad acústica son, respectivamente,

$$P_A|_{z_1=0} = P_B|_{z_1=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.302)$$

$$U_B|_{z_1=0} = \begin{cases} U_A|_{z_1=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.303)$$

En la discontinuidad $B-C$, para la presión y velocidad acústica se tiene, respectivamente,

$$P_C|_{z_2=0} = P_B|_{z_1=L_a}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.304)$$

$$U_B|_{z_1=L_a} = \begin{cases} U_C|_{z_2=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.305)$$

En la discontinuidad $C-D$, la presión y velocidad acústica es, respectivamente,

$$P_C|_{z_2=l_{h1}} = P_D|_{z_3=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.306)$$

$$U_D|_{z_3=0} = \begin{cases} U_C|_{z_2=l_{h1}}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.307)$$

En la discontinuidad $D-E$, para la presión y velocidad acústica se tiene, respectivamente,

$$P_E|_{z_4=0} = P_D|_{z_3=L_b}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.308)$$

$$U_D|_{z_3=L_b} = \begin{cases} U_E|_{z_4=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.309)$$

En la discontinuidad $E-F$, la presión y velocidad acústica es, respectivamente,

$$P_E|_{z_4=l_{h2}} = P_F|_{z_5=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.310)$$

$$U_F|_{z_5=0} = \begin{cases} U_E|_{z_4=l_{h2}}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.311)$$

Región	Tipo de Modo	Expresión	Área
A	Presión, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
B	Presión, $\Psi_{B,n}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{B,n}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_2$
C	Presión, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
D	Presión, $\Psi_{D,n,P}(r)$	$J_0(k_{r,D,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$J_0(\tilde{k}_{r,D,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,D,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,D,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,D,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{D,n,U_z}(r)$	$J_0(k_{r,D,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$C_s \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \left[J_0(\tilde{k}_{r,D,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,D,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,D,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,D,n}r) \right]$	$R_1 \leq r \leq R_2$
E	Presión, $\Psi_{E,n}(r)$	$J_0(k_{r,E,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{E,n}(r)$	$J_0(k_{r,E,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
F	Presión, $\Psi_{F,n}(r)$	$J_0(k_{r,F,n}r)$	$0 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{F,n}(r)$	$J_0(k_{r,F,n}r)$	$0 \leq r \leq R_2$
G	Presión, $\Psi_{G,n}(r)$	$J_0(k_{r,G,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{G,n}(r)$	$J_0(k_{r,G,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$

Tabla 4.13 Resumen de los modos de presión y de velocidad que actúan en cada región.

En la salida, en la discontinuidad $F-G$, para la presión y velocidad acústica se tiene finalmente

$$P_G|_{z_6=0} = P_F|_{z_5=L_c}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.312)$$

$$U_F|_{z_5=L_c} = \begin{cases} U_G|_{z_6=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.313)$$

Expresando las ecuaciones en forma de series, la expansión de sus términos debe hacerse hasta un número determinado de N modos, con el propósito de generar un sistema de ecuaciones que permita obtener los coeficientes de amplitud. De esta manera, multiplicando por los modos adecuados e integrando sobre las discontinuidades geométricas, se tiene, para los campos de presión

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (A_n^+ + A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.314)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (C_n^+ + C_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (B_n^+ e^{-jk_z B_n L_a} + B_n^- e^{jk_z B_n L_a}) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.315)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (C_n^+ e^{-jk_z C_n L_b} + C_n^- e^{jk_z C_n L_b}) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (D_n^+ + D_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{D,n,P}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.316)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (E_n^+ + E_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (D_n^+ e^{-jk_z D_n L_b} + D_n^- e^{jk_z D_n L_b}) \int_0^{R_1} \Psi_{D,n,P}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.317)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (E_n^+ e^{-jk_z E_n L_b} + E_n^- e^{jk_z E_n L_b}) \int_0^{R_1} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (F_n^+ + F_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.318)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (G_n^+ + G_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{G,n}(r) \Psi_{G,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (F_n^+ e^{-jk_z F_n L_c} + F_n^- e^{jk_z F_n L_c}) \int_0^{R_1} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{G,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.319)$$

Para los campos de velocidad acústica,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ - B_n^-) \int_0^{R_2} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.320)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_a} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_a}) \int_0^{R_2} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.321)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} (D_n^+ - D_n^-) \int_0^{R_2} \Psi_{D,n,U_z}(r) \Psi_{D,s,P}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} (C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}h_1} - C_n^- e^{jk_{z,C,n}h_1}) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{D,s,P}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.322)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} (D_n^+ e^{-jk_{z,D,n}L_b} - D_n^- e^{jk_{z,D,n}L_b}) \int_0^{R_2} \Psi_{D,n,U_z}(r) \Psi_{D,s,P}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N k_{z,E,n} (E_n^+ - E_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{D,s,P}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.323)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,F,n} (F_n^+ - F_n^-) \int_0^{R_2} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N k_{z,E,n} (E_n^+ e^{-jk_{z,E,n}h_2} - E_n^- e^{jk_{z,E,n}h_2}) \int_0^{R_1} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.324)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,F,n} (F_n^+ e^{-jk_{z,F,n}L_c} - F_n^- e^{jk_{z,F,n}L_c}) \int_0^{R_2} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N k_{z,G,n} (G_n^+ - G_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{G,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.325)$$

donde $s = 0, 1, 2, \dots$. La evaluación de las integrales (4.314)-(4.325) se realiza por medio de la expresión (4.233).

Finalmente asumiendo que, (1) en el conducto de entrada la onda incidente es plana $A_0^+ = 1$, $A_n^+ = 1$, $n > 0$, (2) la salida es anecoica, $G_n^- = 0$, para todo n y (3) la propagación de ondas en la salida es en forma de onda plana, las ecuaciones (4.314)-(4.325) generan un sistema de $12(N + 1)$ ecuaciones con $12(N + 1)$

incógnitas, siendo éstas $A_n^-, B_n^\pm, C_n^\pm, D_n^\pm, E_n^\pm, F_n^\pm$ y G_n^+ . Una vez obtenida su solución, el TL se calcula por medio de la expresión

$$TL = -20 \log_{10} |G_0^+| \quad (4.326)$$

En la Figura 4.38 se compara el comportamiento acústico de un silenciador obtenido con el método de Ajuste Modal y Elementos Finitos. La longitud total del silenciador, L_T , es de 0.2572 m, las longitudes de las cámaras de entrada, L_a , y salida, L_c , son de 0.01 m y 0.075 m, respectivamente y la resistividad del material absorbente en la cámara central, de 4896 rayl/m. El espesor de las placas separadoras, t_{h1} y t_{h2} , es de 0.0009 m. Ambos procedimientos exhiben una excelente concordancia de resultados.

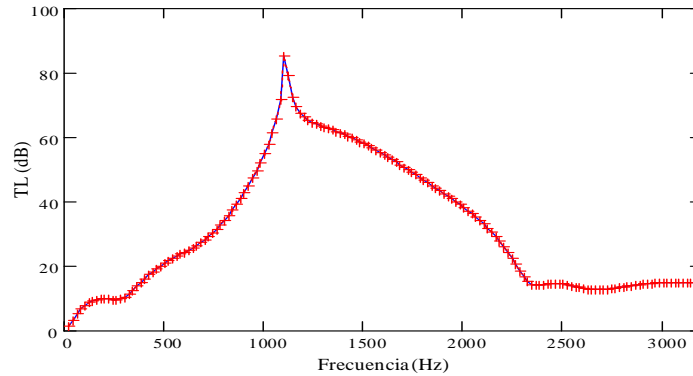


Figura 4.38 TL silenciador con cámaras laterales. Validación con MEF. —, Ajuste Modal; +++++, MEF. $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m, $\sigma = 8\%$.

A continuación se muestran los resultados obtenidos por medio de la técnica de Ajuste Modal, al variar algunas dimensiones importantes del silenciador.

4.5.3.1. Efecto de la longitud de las cámaras laterales

Se estudia el efecto de la variación de la longitud de las cámaras laterales de entrada y salida sobre la atenuación acústica. En las cámaras disipativas con resonadores laterales de corta longitud, son característicos los picos de resonancia, mostrando una fuerte atenuación acústica. Ello es debido a la aparición de los modos de alto orden en la discontinuidad, que dada la corta longitud de la cámara, no se desvanecen en su totalidad generando, por tanto, estos picos. El campo acústico es dominado por las ondas transversales y la frecuencia de aparición de los picos depende de la geometría del silenciador. En la Tabla 4.14 se expone las dimensiones relevantes de las geometrías examinadas

y la Figura 4.39, representa el comportamiento acústico de un silenciador cuando se modifica la longitud de la cámara de entrada. El primer pico de resonancia aparece a la misma frecuencia ya que está relacionado con la longitud de la cámara lateral de salida, cuya dimensión no cambia en este análisis.

Geometría	Longitud cámara lateral de entrada L_a (m)	Longitud cámara central L_b (m)	Longitud cámara lateral de salida L_c (m)
1	0.05	0.1572	0.05
2	0.075	0.1072	0.075
3	0.075	0.1622	0.015
4	0.054	0.1812	0.02
5	0.1076	0.1276	0.02
6	0.1582	0.077	0.02
7	0.037	0.1812	0.037
8	0.0638	0.1276	0.0638
9	0.0891	0.077	0.0891

Tabla 4.14 Dimensiones relevantes de un silenciador con cámaras laterales. Variación de la longitud de las cámaras laterales. Radio interno $R_1 = 0.0245$ m, radio externo $R_2 = 0.0822$ m, porosidad $\sigma = 8\%$, resistividad $R = 4896$ rayl/m.

Se destaca el efecto que ejerce la cámara disipativa en la atenuación acústica. Las cámaras disipativas de mayor longitud contribuyen a mejorar la atenuación a medias y altas frecuencias. A medida que la longitud decrece, existe una menor cantidad de fibra absorbente en contacto con el aire ocasionando, por un lado, un ligero progreso del comportamiento acústico a bajas frecuencias y una disminución de la amplitud de los picos de atenuación, y por otro, un deterioro de la atenuación a altas frecuencias. En la forma del TL , Figura 4.40, se advierte la formación de cúpulas de atenuación.

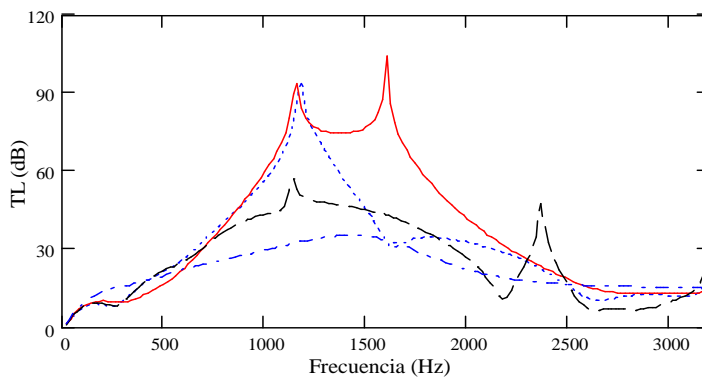


Figura 4.39 TL de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Efecto de la variación de la longitud de las cámaras laterales, $L_a \neq L_c$, 10 modos: —, geometría 4; - - - -, geometría 5; — · —, geometría 6; — · —, sin cámaras laterales.

Es importante tener en cuenta el efecto que ejerce cada cámara por separado en el comportamiento acústico global del silenciador. En la Figura 4.41 se muestra la atenuación del silenciador de la geometría 4. El TL se exhibe con sus componentes separados, de forma que se puede apreciar la contribución de cada cámara en la atenuación acústica. Las longitudes de entrada y salida, L_a y L_c respectivamente, han sido seleccionadas para obtener dos picos de resonancia que mejoren las prestaciones acústicas de este silenciador

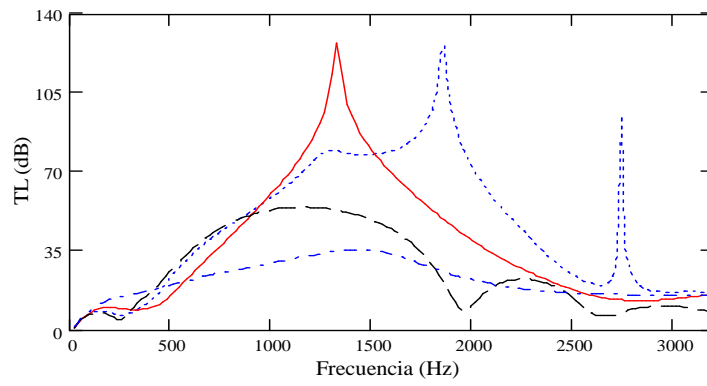


Figura 4.40 TL de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Efecto de la variación de la longitud de la cámara disipativa, $L_a = L_c$, 10 modos: —, geometría 7; - - - -, geometría 8; — — —, geometría 9; - · - · -, sin cámaras laterales.

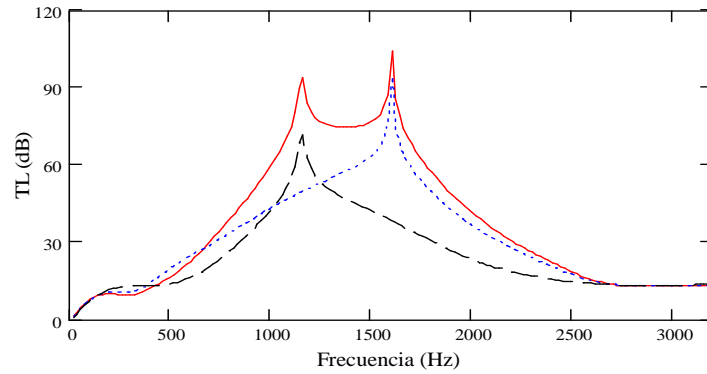


Figura 4.41 TL de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Contribución de cada cámara en la atenuación acústica, $L_a \neq L_c$, 10 modos: —, geometría 4; - · - · -, geometría 4 cámara de entrada; — — —, geometría 4 cámara de salida.

4.5.3.2. Efecto de la variación de la resistividad y la porosidad

Para estudiar el efecto de la resistividad en la atenuación acústica se han realizado dos grupos de pruebas sobre el silenciador esquematizado en la geometría 1, considerando la existencia o no de elementos perforados. Para esta geometría el TL muestra un pico de resonancia, Figura 4.42, cuya frecuencia no exhibe modificaciones sustanciales debido a la variación de la resistencia al flujo del material absorbente y la existencia de elementos perforados. El aumento de la resistividad se traduce en una mejora de la atenuación a altas frecuencias, pero la inclusión de elementos perforados, no sigue esta tendencia. La presencia de conducto perforado mejora la atenuación a baja y media frecuencia.

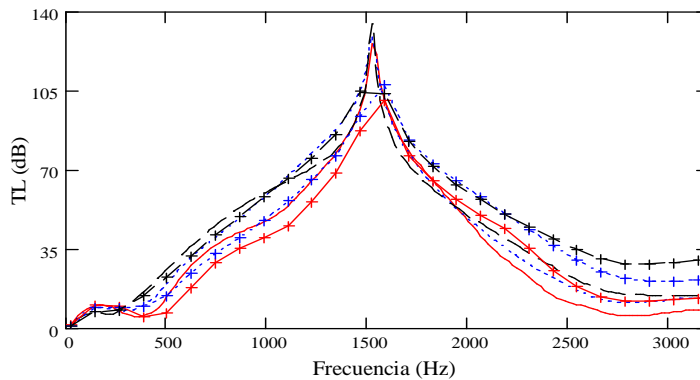


Figura 4.42 TL de un silenciador disipativo con cámaras laterales, geometría 1, 10 modos. Con conducto perforado, $\sigma = 8\%$: —, $R = 1000$ rayl/m; - - - - , $R = 4896$ rayl/m; — — —, $R = 17378$ rayl/m. Sin conducto perforado: + + + + +, $R = 1000$ rayl/m; + - - - +, $R = 4896$ rayl/m; + - - + -, $R = 17378$ rayl/m.

4.5.3.3. Efecto de la variación de las dimensiones

Se analiza el efecto del aumento de la longitud total del silenciador, L_T , y del radio externo, R_2 , del silenciador, manteniendo el resto de dimensiones de las cámaras internas similares a las dimensiones originales de las geometrías 1, 2 y 3, Tabla 4.15. La longitud total aumenta a 0.3858 m y el radio externo a 0.101 m, Tabla 4.16.

El aumento de la longitud total L_T mejora ligeramente la atenuación acústica, sobre todo en el rango de medias y altas frecuencias. La mayor presencia de fibra absorbente proporciona un mejor desempeño del comportamiento acústico observado en las geometrías 1 y 10 de la Figura 4.43. La frecuencia de aparición

de los picos de resonancia no varía, aunque el valor del pico de atenuación se ve incrementado, ver geometría 12 de la Figura 4.44.

Geometría	Longitud del silenciador L_T (m)	Longitud cámara lateral de entrada L_a (m)	Longitud cámara disipativa L_b (m)	Longitud cámara lateral de salida L_c (m)	Radio externo R_2 (m)
10	0.3858	0.05	0.284	0.05	0.0822
11	0.3858	0.075	0.2358	0.075	0.0822
12	0.3858	0.075	0.2958	0.015	0.0822

Tabla 4.15 Variación de las dimensiones externas de un silenciador con cámaras laterales.

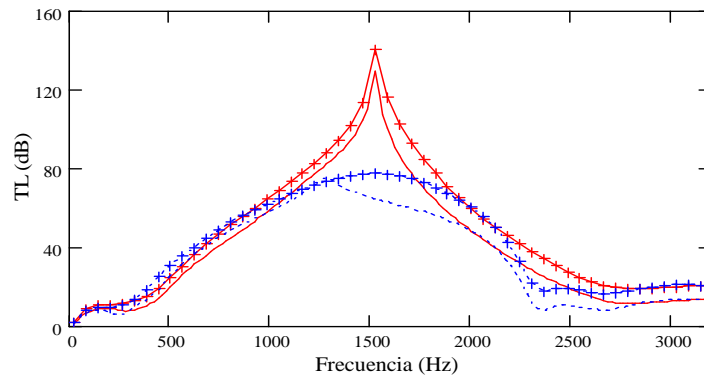


Figura 4.43 TL de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Variación de la longitud total del silenciador, $L_a = L_c$, 10 modos: —, geometría 1; - - - - , geometría 2; + + + + , geometría 10; + + + + + , geometría 11.

El aumento del radio externo, R_2 , reduce la frecuencia de aparición del pico de resonancia y proporciona un incremento de la atenuación acústica a bajas frecuencias debido a la presencia de modos transversales. No obstante, la atenuación a medias y altas frecuencias se reduce, ver Figura 4.45.

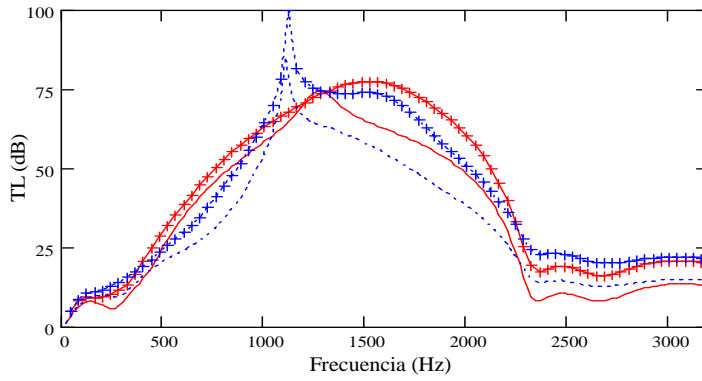


Figura 4.44 TL de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Variación de la longitud total del silenciador, 10 modos. $L_a=L_c$: —, geometría 2; +++++, geometría 3. $L_a \neq L_c$: - - - - -, geometría 11; +++++, geometría 12.

Geometría	Longitud del silenciador L_T (m)	Longitud cámara lateral de entrada L_a (m)	Longitud cámara disipativa L_b (m)	Longitud cámara lateral de salida L_c (m)	Radio externo R_2 (m)
13	0.2572	0.05	0.1572	0.05	0.101
14	0.2572	0.075	0.1072	0.075	0.101
15	0.2572	0.054	0.1812	0.02	0.101

Tabla 4.16 Dimensiones relevantes de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Aumento del radio externo R_2 .

La combinación de un aumento de la longitud L_T y del radio externo R_2 del silenciador, ver dimensiones en Tabla 4.17, mejora el comportamiento acústico hasta la aparición del pico de resonancia, Figura 4.46. La atenuación acústica a media y alta frecuencia es ligeramente superior a la observada en las geometrías 13 y 14.

Geometría	Longitud silenciador L_T (m)	Longitud cámara lateral de entrada L_a (m)	Longitud cámara disipativa L_b (m)	Longitud cámara lateral de salida L_c (m)	Radio externo R_2 (m)
16	0.3858	0.05	0.284	0.05	0.101
17	0.3858	0.075	0.2358	0.075	0.101

Tabla 4.17 Dimensiones relevantes de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Efecto combinado del aumento de la longitud total del silenciador, L_T , y del radio externo, R_2 .

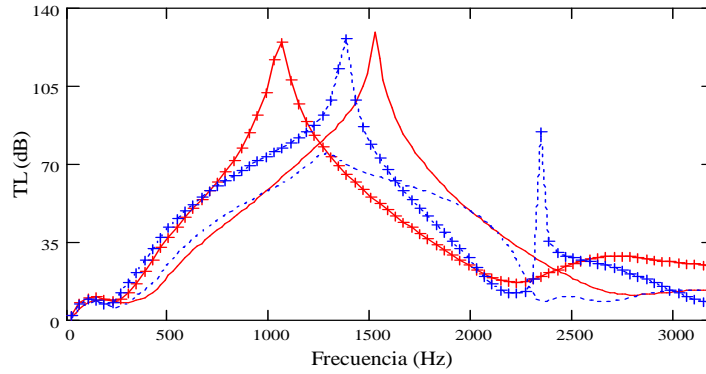


Figura 4.45 TL de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Variación del radio externo del silenciador, 10 modos. $L_a = L_c$: —, geometría 1; - - - -, geometría 2; + + + +, geometría 13; + + + +, geometría 14.

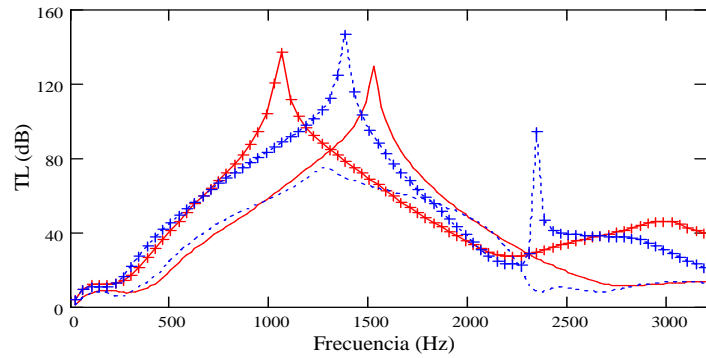


Figura 4.46 TL de un silenciador disipativo con cámaras laterales. Variación de la longitud y del radio externo del silenciador, 10 modos. $L_a = L_c$: —, geometría 1; - - - -, geometría 2; + + + +, geometría 16; + + + +, geometría 17

4.5.4. Silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales

Las geometrías analizadas hasta este momento han proporcionado una mejora del comportamiento acústico a media y alta frecuencia. Sin embargo, dado el objetivo de obtener unas notables prestaciones acústicas de los silenciadores en todo el rango de frecuencias en estudio, se pretende aumentar la atenuación acústica a baja frecuencia.

Para incrementar la atenuación a baja frecuencia se debe ensayar con la modificación de las configuraciones geométricas, ya que en esta región, los cambios de las características reactivas son más efectivos que las variaciones de las propiedades disipativas.

La Figura 4.47 muestra un silenciador con material absorbente, con un conducto central perforado rodeado de material absorbente confinado en una cámara central de radio R_2 , dos cámaras laterales y una cámara anular exterior conectada con la cámara lateral izquierda. Al igual que en casos anteriores el material absorbente está separado de la región central por medio de una superficie perforada con una impedancia acústica adimensional $\tilde{\zeta}_p$. El conducto perforado tiene un espesor t_h , los orificios poseen un diámetro d_h y la porosidad es σ . Las cámaras laterales están separadas del medio absorbente a través de dos placas rígidas de espesor t_{h1} y t_{h2} , respectivamente. El radio del conducto de entrada, central y de salida es R_1 y el radio externo es R_3 . Las regiones o subdominios se denotan como A en el conducto de entrada, G en el conducto de salida, D en la región central, B y F las regiones correspondientes a las cámaras laterales, C y E las regiones generadas por el espesor t_{h1} y t_{h2} de las placas e I la cámara anular. La región central se subdivide a su vez en la región D_1 para el conducto y D_2 para el material absorbente. La cámara central tiene una longitud L_b , la cámara lateral izquierda L_a , la cámara lateral derecha L_c y la anular L_b+t_{h1} . El material absorbente tiene una resistividad que, por defecto, se asume de 4896 rayl/m y está caracterizado desde el punto de vista acústico por la velocidad compleja del sonido \tilde{c} y por la densidad acústica compleja $\tilde{\rho}$. También se considera que el diámetro de los orificios del conducto perforado es de 0.00249 m y el espesor del conducto perforado y de las placas separadoras laterales de 0.0009 m. A continuación se analiza el comportamiento acústico de este silenciador por medio del método de Ajuste Modal.

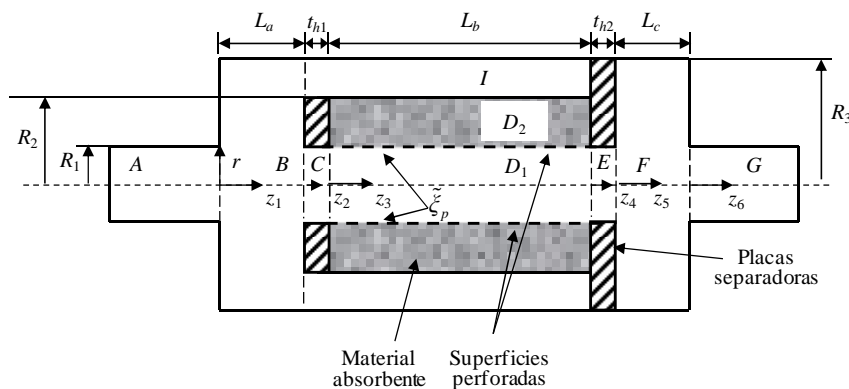


Figura 4.47 Silenciador con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales.

Asumiendo comportamiento armónico la solución de la ecuación de Helmholtz para los campos de presión y velocidad acústica en los distintos subdominios es análoga a los ejemplos vistos anteriormente. Para obtener el índice de Pérdidas de Transmisión, TL , deberán calcularse los coeficientes de amplitud de onda, en este caso, por medio del método de Ajuste Modal. Para ello se establecerán las condiciones de continuidad de presión y velocidad acústica en las discontinuidades geométricas $A-B$, $B-C$, $B-I$, $C-D$, $D-E$, $E-F$ y $F-G$ del silenciador. En la discontinuidad $A-B$, expansión en la cámara lateral de entrada, las condiciones de presión y velocidad acústica son, respectivamente,

$$P_A|_{z_1=0} = P_B|_{z_1=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.327)$$

$$U_B|_{z_1=0} = \begin{cases} U_A|_{z_1=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_3 \end{cases} \quad (4.328)$$

En las discontinuidades $B-C$ y $B-I$, contracción de la cámara lateral de entrada y entrada-salida del anillo externo, respectivamente, las condiciones de presión y velocidad acústica son

$$P_C|_{z_2=0} = P_B|_{z_1=L_a}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.329)$$

$$P_I|_{z_2=0} = P_B|_{z_1=L_a}, \quad R_2 \leq r \leq R_3 \quad (4.330)$$

$$U_B|_{z_1=L_a} = \begin{cases} U_C|_{z_2=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ U_I|_{z_2=0}, & R_2 \leq r \leq R_3 \end{cases} \quad (4.331)$$

En la discontinuidad $C-D$, expansión en cámara disipativa, para la presión y velocidad acústica se tiene, respectivamente,

$$P_C|_{z_2=l_{h1}} = P_D|_{z_3=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.332)$$

$$U_D|_{z_3=0} = \begin{cases} U_C|_{z_2=l_{h1}}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.333)$$

En la discontinuidad $D-E$, contracción cámara disipativa, las condiciones de presión y velocidad acústica son

$$P_E|_{z_4=0} = P_D|_{z_3=l_a}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.334)$$

$$U_D|_{z_3=L_b} = \begin{cases} U_E|_{z_4=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.335)$$

En la discontinuidad $E-F$, expansión cámara lateral de salida, para la presión y velocidad acústica se tiene, respectivamente,

$$P_E|_{z_4=l_{h2}} = P_F|_{z_5=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.336)$$

$$U_F|_{z_5=0} = \begin{cases} U_E|_{z_4=l_{h2}}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_3 \end{cases} \quad (4.337)$$

En la salida en la discontinuidad $F-G$, contracción cámara lateral de salida, para la presión y velocidad acústica se tiene finalmente

$$P_G|_{z_6=0} = P_F|_{z_5=L_c}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.338)$$

$$U_F|_{z_5=L_c} = \begin{cases} U_G|_{z_6=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_3 \end{cases} \quad (4.339)$$

Por la condición de ortogonalidad para el anillo se cumple

$$I_n^- = I_n^+ e^{-2jk_{z,n}(L_b+l_{h1})} \quad (4.340)$$

De forma resumida, los modos de presión y de velocidad se definen en la Tabla 4.18.

Expandiendo estas condiciones en forma de series, la obtención de los coeficientes de amplitud requiere la generación de un sistema de ecuaciones, con un adecuado número de términos que permita la convergencia de la solución. Empleando los modos transversales de los conductos como funciones de ponderación, multiplicando e integrando las ecuaciones (4.327)-(4.339) sobre las discontinuidades geométricas, para la presión acústica se tiene,

$$\sum_{n=0}^N (A_n^+ + A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r dr = \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.341)$$

Región	Tipo de Modo	Expresión	Área
A	Presión, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
B	Presión, $\Psi_{B,n}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_3$
	Velocidad, $\Psi_{B,n}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_3$
C	Presión, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
D	Presión, $\Psi_{D,n,P}(r)$	$J_0(k_{r,D,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$J_0(\tilde{k}_{r,D,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,D,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,D,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,D,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{D,n,U_z}(r)$	$J_0(k_{r,D,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$C_s \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \left[J_0(\tilde{k}_{r,D,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,D,n}R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,D,n}R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,D,n}r) \right]$	$R_1 \leq r \leq R_2$
E	Presión, $\Psi_{E,n}(r)$	$J_0(k_{r,E,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{E,n}(r)$	$J_0(k_{r,E,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
F	Presión, $\Psi_{F,n}(r)$	$J_0(k_{r,F,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{F,n}(r)$	$J_0(k_{r,F,n}r)$	$0 \leq r \leq R_3$
G	Presión, $\Psi_{G,n}(r)$	$J_0(k_{r,G,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{G,n}(r)$	$J_0(k_{r,G,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
I	Presión, $\Psi_{I,n}(r)$	$J_0(k_{r,I,n}r) - \frac{J_1(k_{r,I,n}R_3)}{Y_1(k_{r,I,n}R_3)} Y_0(k_{r,I,n}r)$	$R_2 \leq r \leq R_3$
	Velocidad, $\Psi_{I,n}(r)$	$J_0(k_{r,I,n}r) - \frac{J_1(k_{r,I,n}R_3)}{Y_1(k_{r,I,n}R_3)} Y_0(k_{r,I,n}r)$	$R_2 \leq r \leq R_3$

Tabla 4.18 Resumen de los modos de presión y velocidad acústica del silenciador.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^N (C_n^+ + C_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr = \\
 & \sum_{n=0}^N (B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_a} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_a}) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1
 \end{aligned} \tag{4.342}$$

$$\sum_{n=0}^N I_n^+ \left(1 + e^{-2jk_{z,L_n}(L_b + t_{h1})} \right) \int_{R_2}^{R_3} \Psi_{L_n}(r) \Psi_{L_s}(r) r dr =$$

$$\sum_{n=0}^N \left(B_n^+ e^{-jk_{z,B_n}L_a} + B_n^- e^{jk_{z,B_n}L_a} \right) \int_{R_2}^{R_3} \Psi_{B_n}(r) \Psi_{L_s}(r) r dr, \quad R_2 \leq r \leq R_3$$
(4.343)

$$\sum_{n=0}^N \left(C_n^+ e^{-jk_{z,C_n}t_{h1}} + C_n^- e^{jk_{z,C_n}t_{h1}} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{C_n}(r) \Psi_{C_s}(r) r dr =$$

$$\sum_{n=0}^N \left(D_n^+ + D_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{D_n,P}(r) \Psi_{C_s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1$$
(4.344)

$$\sum_{n=0}^N \left(E_n^+ + E_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{E_n}(r) \Psi_{E_s}(r) r dr =$$

$$\sum_{n=0}^N \left(D_n^+ e^{-jk_{z,D_n}L_b} + D_n^- e^{jk_{z,D_n}L_b} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{D_n,P}(r) \Psi_{E_s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1$$
(4.345)

$$\sum_{n=0}^N \left(E_n^+ e^{-jk_{z,E_n}t_{h2}} + E_n^- e^{jk_{z,E_n}t_{h2}} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{E_n}(r) \Psi_{E_s}(r) r dr =$$

$$\sum_{n=0}^N \left(F_n^+ + F_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{F_n}(r) \Psi_{E_s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1$$
(4.346)

$$\sum_{n=0}^N \left(G_n^+ + G_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{G_n}(r) \Psi_{G_s}(r) r dr =$$

$$\sum_{n=0}^N \left(F_n^+ e^{-jk_{z,F_n}L_c} + F_n^- e^{jk_{z,F_n}L_c} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{F_n}(r) \Psi_{G_s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1$$
(4.347)

Para la velocidad acústica,

$$\sum_{n=0}^N k_{z,B_n} \left(B_n^+ - B_n^- \right) \int_0^{R_3} \Psi_{B_n}(r) \Psi_{B_s}(r) r dr =$$

$$\sum_{n=0}^N k_{z,A_n} \left(A_n^+ - A_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{A_n}(r) \Psi_{B_s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_3$$
(4.348)

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} \left(B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_a} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_a} \right) \int_0^{R_3} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr = \\
& \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} \left(C_n^+ - C_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr \\
& + \sum_{n=0}^N k_{z,I,n} \left(1 - e^{-2jk_{z,I,n}(L_b+t_{h1})} \right) \int_{R_2}^{R_3} \Psi_{I,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_3
\end{aligned} \tag{4.349}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} \left(D_n^+ - D_n^- \right) \int_0^{R_2} \Psi_{D,n,U_z}(r) \Psi_{D,s,P}(r) r dr = \\
& \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} \left(C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}t_{h1}} - C_n^- e^{jk_{z,C,n}t_{h1}} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{D,s,P}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2
\end{aligned} \tag{4.350}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} \left(D_n^+ e^{-jk_{z,D,n}L_b} - D_n^- e^{jk_{z,D,n}L_b} \right) \int_0^{R_2} \Psi_{D,n,U_z}(r) \Psi_{D,s,P}(r) r dr = \\
& \sum_{n=0}^N k_{z,E,n} \left(E_n^+ - E_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{D,s,P}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2
\end{aligned} \tag{4.351}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N k_{z,F,n} \left(F_n^+ - F_n^- \right) \int_0^{R_3} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr = \\
& \sum_{n=0}^N k_{z,E,n} \left(E_n^+ e^{-jk_{z,E,n}t_{h2}} - E_n^- e^{jk_{z,E,n}t_{h2}} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_3
\end{aligned} \tag{4.352}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N k_{z,F,n} \left(F_n^+ e^{-jk_{z,F,n}L_c} - F_n^- e^{jk_{z,F,n}L_c} \right) \int_0^{R_3} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr = \\
& \sum_{n=0}^N k_{z,G,n} \left(G_n^+ - G_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{G,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_3
\end{aligned} \tag{4.353}$$

donde $s = 0, 1, 2, \dots$. Como en los casos anteriores, a través de la expresión (4.233), se evalúan las integrales (4.341)-(4.353). Dichas ecuaciones generan un sistema de $13(N + 1)$ ecuaciones con $13(N + 1)$ incógnitas, siendo $A_n^-, B_n^\pm, C_n^\pm, D_n^\pm, E_n^\pm, F_n^\pm, I_n^-$ y G_n^+ , donde, para su resolución, se asume que: (1) la onda es plana en el conducto de entrada $A_0^+ = 1$, $A_n^+ = 1$, $n > 0$, (2) la salida es anecoica, por tanto, $G_n^- = 0$ para todo n y (3) la propagación de ondas en la salida es en forma de onda plana. Una vez calculado, el TL se obtiene por medio de la expresión

$$TL = -20 \log_{10} |G_0^+| \tag{4.354}$$

La validación del método de Ajuste Modal, aplicado a esta configuración geométrica, con el método de Elementos Finitos se indica en la Figura 4.48. Las dimensiones principales de la geometría estudiada se especifican en la Tabla 4.19, geometría 1. Los resultados muestran una excelente concordancia entre ambas técnicas.

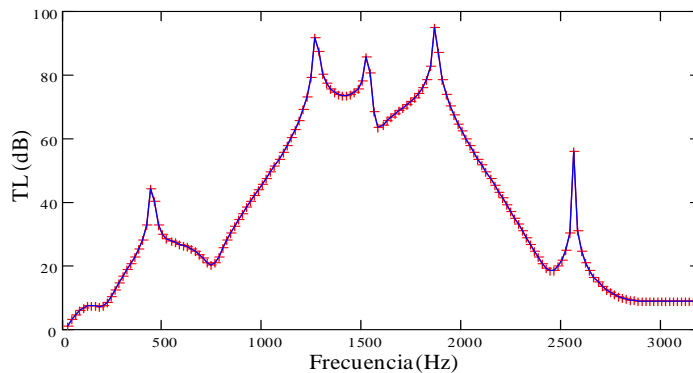


Figura 4.48 TL silenciador con cámara anular externa y resonadores laterales. Validación con MEF. —, Ajuste Modal; +++++, MEF. $R_1 = 0.0245$ m, $R_2 = 0.0822$ m, $R_3 = 0.06$ m, $\sigma = 8\%$.

A continuación, se analiza el efecto en la atenuación del silenciador de la variación de las dimensiones, tales como, el radio interno de la cámara anular, longitud de las cámaras laterales y propiedades como la resistividad.

4.5.4.1. Efecto de la variación de longitud de las cámaras laterales, longitud del anillo externo y cámara disipativa

La variación de las longitudes de las cámaras de entrada, salida, disipativa y anular, ver Tabla 4.19, modifican el comportamiento acústico del silenciador. En un primer análisis se tiene en cuenta que las cámaras de entrada y salida tienen similar longitud, $L_a = L_c$.

En la Figura 4.49 se observa que la reducción de la longitud de las cámaras laterales (aumento de longitud de la cámara disipativa y anular) proporcionan un marcado aumento de la atenuación a medias y altas frecuencias. Los picos de resonancia son generados la combinación de modos longitudinales (en la cámara anular) y modos de alto orden.

Geometría	Longitud cámara lateral de entrada L_a (m)	Longitud cámara central L_b (m)	Longitud cámara lateral de salida L_c (m)
1	0.05	0.1572	0.05
2	0.075	0.1072	0.075
3	0.1	0.0572	0.1

Tabla 4.19 Variación de la longitud de cámaras laterales, longitud del anillo externo y cámara disipativa, $L_a=L_c$. Longitud del silenciador $L_T = 0.2572$ m, resistividad $R = 4896$ rayl/m, porosidad $\sigma = 8\%$, radio de entrada y salida $R_1 = 0.0245$ m, radio interno $R_2 = 0.06$ m, radio exterior $R_3 = 0.0822$ m.

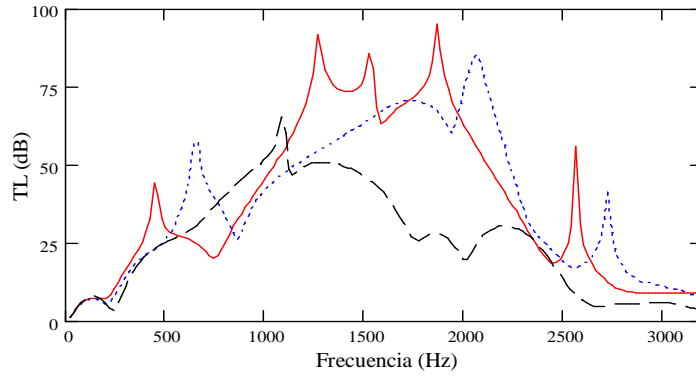


Figura 4.49 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular externa y resonadores laterales. Variación de la longitud de las cámaras laterales, 10 modos. $L_a=L_c$: —, geometría 1; - - - -, geometría 2; — · — ·, geometría 3.

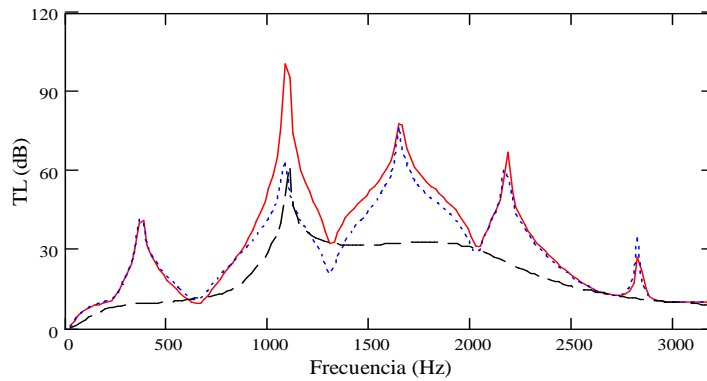


Figura 4.50 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular externa y resonadores laterales. Contribución de las cámaras laterales en la atenuación acústica, 10 modos, $L_a \neq L_c$: —, geometría 4; - - - -, geometría 4 (sólo cámara lateral izquierda y anular); — · — ·, geometría 4 (sólo cámara lateral derecha).

La figura muestra que el primer pico, a baja frecuencia, es una resonancia longitudinal de la cámara lateral izquierda y del anillo externo. A medida que se incrementa la longitud del anillo el pico aparece a más bajas frecuencias. El TL de la figura presenta un deterioro del comportamiento acústico a medias frecuencias debido a la disminución de longitud de la cámara central disipativa.

En las Figuras 4.50 y 4.51 se aprecia el efecto que ejerce cada cámara por separado en el comportamiento acústico global del silenciador, ver dimensiones en la Tabla 4.20. En ellas se indica con mayor claridad los picos correspondientes a la cámara lateral izquierda y anular, y de resonancia transversal. En la Figura 4.50, geometría 4, el pico de resonancia transversal coincide con el segundo pico del silenciador con sólo cámara lateral izquierda y anular (entrada). El resto de los valores máximos del TL se relacionan con las resonancias longitudinales del anillo. Esta tendencia se observa en la geometría 6 de la Figura 4.51. En este caso, el pico de resonancia transversal, segundo pico en el TL , se debe a la cámara lateral derecha (salida).

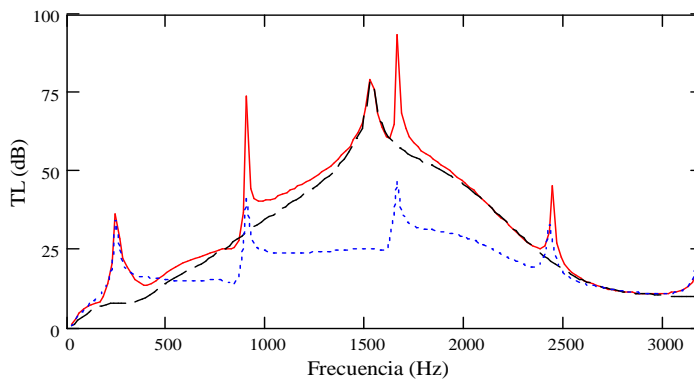


Figura 4.51 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular externa y resonadores laterales. Contribución de las cámaras laterales en la atenuación acústica, 10 modos, $L_a \neq L_c$: —, geometría 6; - - - - , geometría 6 (sólo cámara lateral izquierda y anular); — · — , geometría 6 (sólo cámara lateral derecha).

Si la longitud de la cámara lateral izquierda, L_a , disminuye respecto a la cámara lateral de salida, L_c , y se mantiene la dimensión de la cámara anular, geometrías 6 y 7 de la Tabla 4.20, se advierte que el primer pico de atenuación se desplaza a frecuencias más bajas, Figura 4.51 y Figura 4.52, y el pico de resonancia transversal aparece a mayores frecuencias, Figura 4.51.

Geometría	Longitud cámara lateral de entrada L_a (m)	Longitud cámara central L_b (m)	Longitud cámara lateral de salida L_c (m)
4	0.05	0.1972	0.01
5	0.075	0.1722	0.01
6	0.01	0.1972	0.05
7	0.01	0.1722	0.075

Tabla 4.20 Variación de la longitud de cámaras laterales, longitud del anillo externo y cámara disipativa, $L_a \neq L_c$. Longitud del silenciador $L_T = 0.2572$ m, resistividad $R = 4896$ rayl/m, porosidad $\sigma = 8\%$, radio de entrada y salida $R_1 = 0.0245$ m, radio interno $R_2 = 0.06$ m, radio exterior $R_3 = 0.0822$ m.

En la Figura 4.53 se compara el TL de las geometrías 4 a 7. Además del cambio a menores frecuencias de los primeros picos de atenuación, geometrías 6 y 7, se observa un leve incremento de la atenuación en el rango de frecuencias de 550 Hz a 850 Hz, a la vez de un deterioro en la región de 1000 Hz a 1300 Hz.

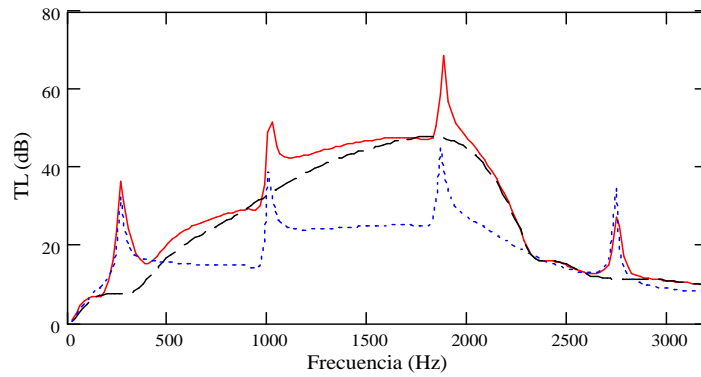


Figura 4.52 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular externa y resonadores laterales. Contribución de las cámaras laterales en la atenuación acústica, 10 modos, $L_a \neq L_c$: —, geometría 7; - - - - , geometría 7 (sólo cámara lateral izquierda y anular); — · — · , geometría 7 (sólo cámara lateral derecha).

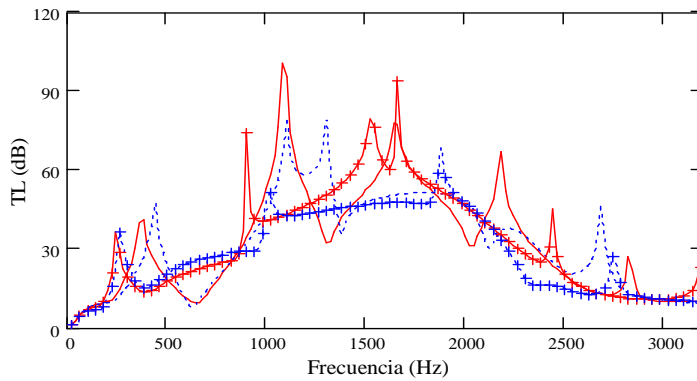


Figura 4.53 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular externa y resonadores laterales. Comparación con geometrías invertidas, 10 modos: —, geometría 4; - - - -, geometría 5; + + + +, geometría 6; + + + +, geometría 7.

4.5.4.2. Efecto de la resistividad

La variación de la resistividad del material absorbente cambia el comportamiento acústico del silenciador. En la Figura 4.54 se exhibe el TL del silenciador, geometría 1, con la modificación de la resistividad del material absorbente, a saber, 1000, 4896 y 17380 rayl/m. Tal como se aprecia en la figura, el incremento de la resistividad mejora la atenuación del silenciador en prácticamente todo el intervalo de frecuencias estudiado. Como se manifestaba anteriormente, el cambio de las frecuencias de aparición de los picos de resonancia son debidos a variaciones de las dimensiones geométricas. Como era de prever, la fibra de mayor resistividad proporciona la mejor atenuación acústica.

La cámara anular externa ejerce una notable influencia en el comportamiento acústico del silenciador. Los análisis efectuados han revelado que, además de la aparición de picos de resonancia, la atenuación se deteriora en el rango de media y alta frecuencia, debido a la menor cantidad de material absorbente disponible en la cámara central. Esta circunstancia se comprueba en la Figura 4.55 donde se compara el TL del silenciador en estudio con un silenciador disipativo con resonadores laterales. Las dimensiones de los silenciadores corresponden a la geometría 1 de cada uno de ellos, ver Tabla 4.14 para el silenciador con resonadores laterales y Tabla 4.19 para el silenciador en estudio.

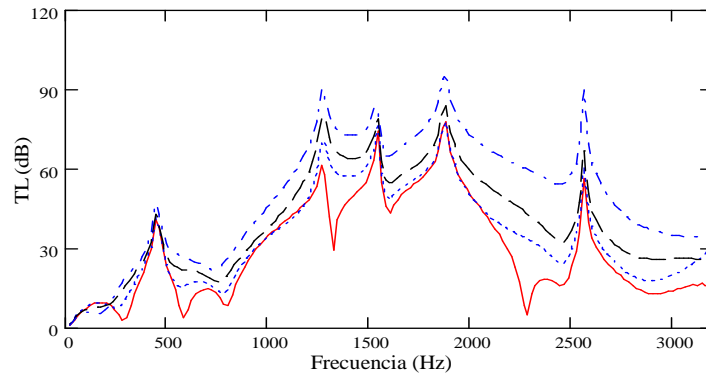


Figura 4.54 TL de silenciador disipativo con material absorbente, extensiones y resonadores laterales. Geometría 1, efecto de la variación de la resistividad, 10 modos: —, sin material absorbente; - - - -, $R = 1000$ rayl/m; — · — ·, $R = 4896$ rayl/m; - - - -, $R = 17378$ rayl/m.

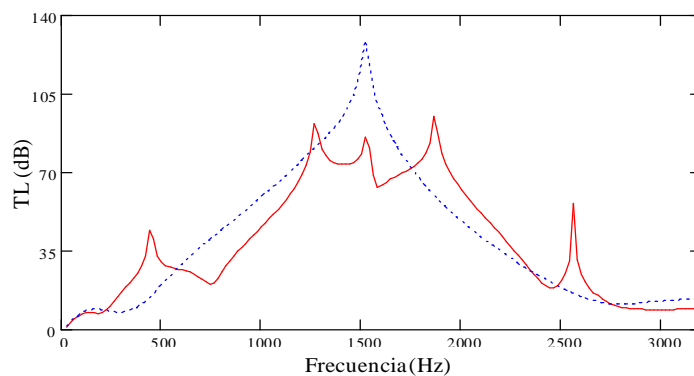


Figura 4.55 Comparación del TL de un silenciador con cámara anular y resonadores laterales con un silenciador con resonadores laterales. —, silenciador con cámara anular y resonadores laterales; - - - -, silenciador con resonadores laterales

4.5.4.3. Efecto de la porosidad

Como puede apreciarse en la Figura 4.56, la inclusión de elementos perforados contribuye a mejorar la atenuación acústica en baja y media frecuencia. A altas frecuencias el comportamiento acústico es favorecido si la fibra está en contacto directo con el fluido. En ausencia de material absorbente, la tendencia es similar.

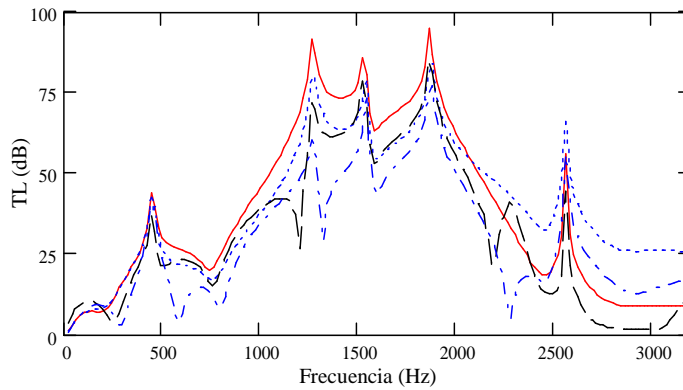


Figura 4.56 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales. Geometría 1, efecto de la variación de la porosidad y de la resistividad, 10 modos: —, $R = 4896$ rayl/m, $\sigma = 8\%$; - - - - , $R = 4896$ rayl/m, $\sigma = 100\%$; — · — · , sin material absorbente, $\sigma = 8\%$; - - - - , sin material absorbente, $\sigma = 100\%$.

4.5.4.4. Efecto de la variación de las dimensiones

Para analizar la influencia de la modificación de las dimensiones del silenciador en el comportamiento acústico, se evalúa el efecto de la variación de la longitud total L_T del silenciador y del radio externo R_3 . Las dimensiones de las geometrías consideradas se exponen en la Tabla 4.21.

En la Figura 4.57 se muestra el TL de las geometrías 8 y 9, en las que se ha incrementado su longitud. Se observa un aumento de la atenuación en prácticamente todo el rango de frecuencias y un desplazamiento del primer pico de resonancia a menores frecuencias. La mejora del comportamiento acústico a baja frecuencia es consecuencia del incremento de la longitud de la cámara anular y de la disminución de la proporción entre la longitud de la cámara lateral, L_a , y la longitud total del silenciador L_T , y a media y alta frecuencia es debido a la mayor cantidad de fibra absorbente presente en la cámara central disipativa.

Al aumentar el radio externo, R_3 , y permanecer sin cambios el radio interno, R_2 , disminuye la frecuencia de aparición de los picos de resonancia, tanto de la cámara anular como de la cámara lateral de salida, incrementando de esta forma la atenuación a bajas frecuencias. Como las dimensiones de la cámara disipativa no varían su tamaño, su influencia en el comportamiento acústico se reduce, por tanto, el TL decae a medias y altas frecuencias, ver Figura 4.58.

Geometría	Longitud del silenciador L_T (m)	Longitud cámara lateral de entrada L_a (m)	Longitud cámara disipativa L_b (m)	Longitud cámara lateral de salida L_c (m)	Radio externo R_3 (m)
8	0.3858	0.05	0.284	0.05	0.0822
9	0.3858	0.075	0.2358	0.075	0.0822
10	0.2572	0.05	0.1572	0.05	0.101
11	0.2572	0.075	0.1054	0.075	0.101
12	0.3858	0.05	0.284	0.05	0.101
13	0.3858	0.075	0.2358	0.075	0.101

Tabla 4.21 Variación de longitud total, L_T , y radio exterior, R_3 , del silenciador.

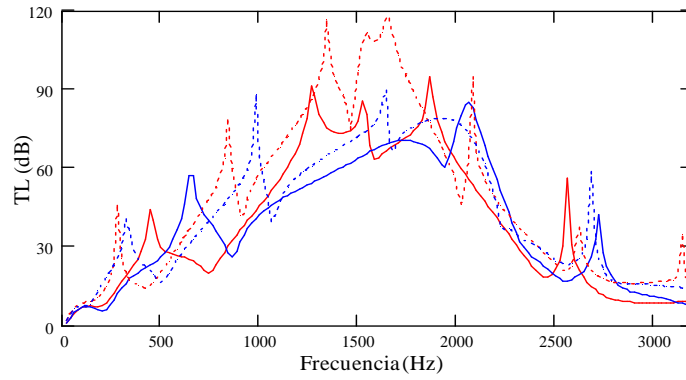


Figura 4.57 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales. Efecto de la variación de la longitud, L_T , del silenciador, 10 modos. $L_a = L_c$: —, geometría 1; —, geometría 2; - - -, geometría 8; - - -, geometría 9.

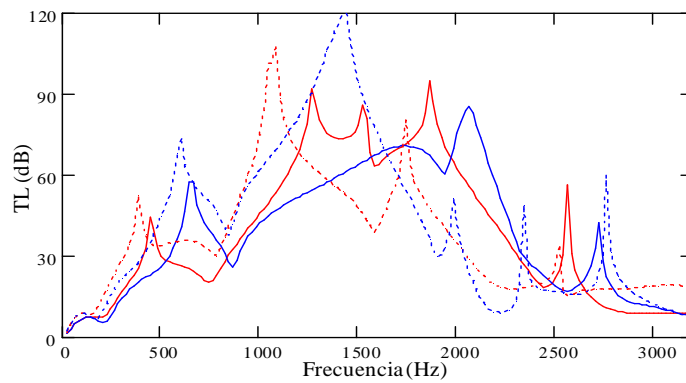


Figura 4.58 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales. Efecto de la variación del radio externo, R_3 , del silenciador, 10 modos: —, geometría 1; —, geometría 2; - - -, geometría 10; - - -, geometría 11.

Al combinar los efectos del aumento de la longitud, L_T , y del radio externo, R_3 , del silenciador se logra una mejora de la atenuación en general, a excepción de algunos intervalos a medias frecuencias, Figura 4.59. Consecuencia de la mayor influencia de los modos de alto orden, el TL del silenciador adopta una forma más irregular. El alargamiento de la cámara disipativa favorece la atenuación a altas frecuencias.

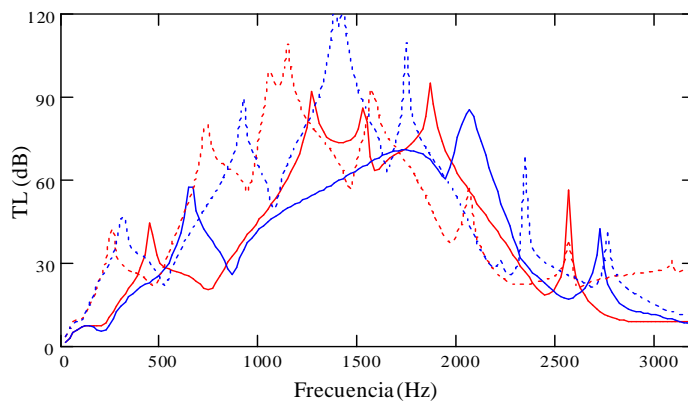


Figura 4.59 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales. Efecto combinado de la variación de la longitud, L_T , y del radio externo, R_3 , del silenciador: —, geometría 1; —, geometría 2; - - -, geometría 12; - - - -, geometría 13.

4.5.4.5. Efecto de la variación del radio interno

Se analiza el efecto de la variación del radio interno R_2 en el comportamiento acústico del silenciador, permaneciendo las restantes dimensiones sin cambios. Los valores estudiados se muestran en la Tabla 4.22.

Geometría	Radio de entrada/salida R_1 (m)	Radio interno R_2 (m)	Radio externo R_3 (m)
14	0.0245	0.045	0.0822
15	0.0245	0.075	0.0822

Tabla 4.22 Geometría 1: variación del radio interno (cámara disipativa). Resistividad $R = 4896$ rayl/m, porosidad $\sigma = 8\%$.

Como resultado de la modificación de esta variable, en la Figura 4.60 se observa que, una aproximación al valor del radio del conducto central R_1 , geometría 14, proporciona una disminución de la atenuación, aunque los picos de resonancia

mantienen su frecuencia de aparición. Por otro lado, si la variable se acerca al valor del radio exterior R_3 , geometría 15, las prestaciones acústicas mejoran, sobre todo, a medias frecuencias, ya que existe una mayor cantidad de material absorbente en la cámara central. Finalmente, al igualar con el radio externo, supresión de la cámara anular, el TL es similar al de un silenciador disipativo con cámaras laterales, donde los picos de resonancia de la cámara anular han desaparecido.

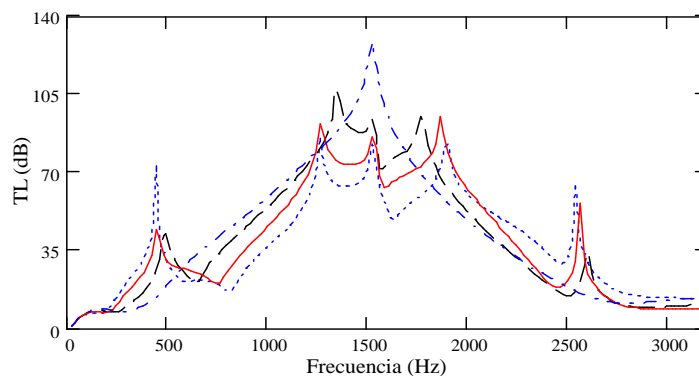


Figura 4.60 TL de silenciador disipativo con material absorbente, cámara anular y resonadores laterales. Variación del radio del anillo interno R_3 , 10 modos: —, geometría 1; ····, geometría 14; — · —, geometría 15; — · —, $R_3 = R_2$.

4.5.5. Silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida

En este tipo de silenciador se busca aumentar la atenuación acústica en todo el intervalo de frecuencia. Con la cámara multianular de entrada se persigue mejorar el comportamiento acústico a bajas frecuencias, mientras que, dado el mayor volumen de material absorbente presente en la cámara disipativa, se pretende mejorar las prestaciones acústicas a medias y altas frecuencias. En este caso, si se compara con la configuración geométrica analizada en el apartado anterior, se observa el reemplazo de la cámara anular externa por la fibra absorbente, ver Figura 4.47 y 4.61.

La Figura 4.61 muestra la geometría de un silenciador híbrido cuya característica es la de la existencia de una cámara multianular de entrada. La presencia de la cámara central disipativa y lateral de salida es común a las geometrías analizadas anteriormente. La cámara anular de entrada posee un conducto central de radio R_1 , común en todo el silenciador, una cámara anular interna que rodea al

conducto de entrada de radio R_2 y finalmente un radio externo R_3 , similar en todo el silenciador. El silenciador se divide en diez regiones: el resonador anular de entrada, de longitud L_a , se subdivide en la región de entrada A , una cámara de radio R_2 , B , una región anular interna C , una región anular en el extremo izquierdo D y una región anular exterior E . En la zona central disipativa, de longitud L_b , se observa al conducto perforado central G_1 y a la cámara anular rellena de material absorbente G_2 , separados por una superficie perforada de espesor t_h , orificios de diámetro d_h y porosidad σ . Finalmente, en la salida, la cámara lateral I tiene una longitud L_c y el conducto de salida se denota por J . Las cámaras laterales están separadas de la cámara central disipativa mediante dos placas rígidas de espesor t_{h1} y t_{h2} . La impedancia adimensional del conducto perforado está dada por $\tilde{\zeta}_p$ y se asume que el material absorbente es homogéneo e isótropo caracterizado por la velocidad acústica compleja \tilde{c} y la densidad compleja $\tilde{\rho}$ [34].

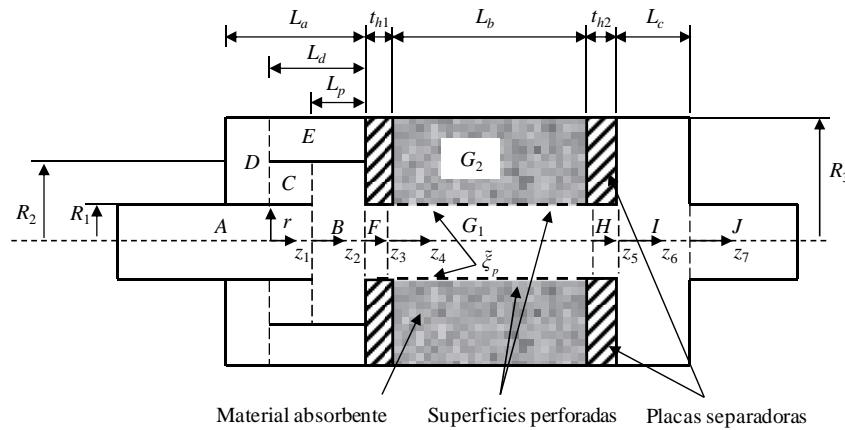


Figura 4.61 Geometría de silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida.

El planteamiento de la solución de la ecuación de ondas en cada región es similar a lo estudiado en las anteriores geometrías. Para calcular las amplitudes de onda desconocidas A_n^\pm , B_n^\pm , C_n^\pm , D_n^\pm , E_n^\pm , F_n^\pm , G_n^\pm , H_n^\pm , I_n^\pm y J_n^\pm se implementa la técnica de Ajuste Modal. Aplicando las condiciones del campo acústico, se tiene [38, 75], para la interfase $A-B$

$$P_A|_{z_2=0} = P_B|_{z_2=0} \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad U_A|_{z_2=0} = U_B|_{z_2=0} \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.355, 4.356)$$

En la interfase $B-C$

$$P_B|_{z_2=0} = P_C|_{z_3=0} \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad U_B|_{z_2=0} = U_C|_{z_3=0} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (4.357, 4.358)$$

En la interfase *C-D*

$$P_C|_{z_2=-(L_d-L_p)} = P_D|_{z_1=0} \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad U_C|_{z_2=-(L_d-L_p)} = U_D|_{z_1=0} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (4.359, 4.360)$$

En la interfase *D-E*

$$P_D|_{z_1=0} = P_E|_{z_1=0} \quad R_2 \leq r \leq R_3, \quad U_D|_{z_1=0} = U_E|_{z_1=0} \quad R_2 \leq r \leq R_3 \quad (4.361, 4.362)$$

En los extremos izquierdo y derecho del resonador anular de entrada

$$U_D|_{z_1=-(L_u-L_d)} = 0 \quad R_1 \leq r \leq R_3, \quad U_E|_{z_1=L_d} = 0 \quad R_2 \leq r \leq R_3 \quad (4.363, 4.364)$$

En la interfase *B-F*

$$P_B|_{z_2=L_p} = P_F|_{z_3=0} \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad U_B|_{z_2=L_p} = \begin{cases} U_F|_{z_3=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.365, 4.366)$$

En la interfase *F-G*

$$P_F|_{z_3=l_{h1}} = P_G|_{z_4=0} \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad U_G|_{z_4=0} = \begin{cases} U_F|_{z_3=l_{h1}}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_3 \end{cases} \quad (4.367, 4.368)$$

En la interfase *G-H*

$$P_G|_{z_4=L_b} = P_H|_{z_5=0} \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad U_G|_{z_4=L_b} = \begin{cases} U_H|_{z_5=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_3 \end{cases} \quad (4.369, 4.370)$$

En la interfase *H-I*

$$P_H|_{z_5=l_{h2}} = P_I|_{z_6=0} \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad U_I|_{z_6=0} = \begin{cases} U_H|_{z_5=l_{h2}}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_3 \end{cases} \quad (4.371, 4.372)$$

En la interfase *I-J*

$$P_I|_{z_6=L_c} = P_J|_{z_7=0} \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad U_I|_{z_6=L_c} = \begin{cases} U_J|_{z_7=0}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0, & R_1 \leq r \leq R_3 \end{cases} \quad (4.373, 4.374)$$

Expresando estas condiciones en forma de series, multiplicando por los modos acuados e integrando sobre la sección transversal de cada discontinuidad

mediante el procedimiento descrito anteriormente, para la presión acústica se tiene, en la interfase $A-B$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (A_n^+ + A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{A,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.375)$$

En la interfase $B-C$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (B_n^+ + B_n^-) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (C_n^+ + C_n^-) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.376)$$

En la interfase $C-D$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left(C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}(L_d - L_p)} + C_n^- e^{jk_{z,C,n}(L_d - L_p)} \right) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N \left(D_n^- \left(e^{-2jk_{z,D,n}(L_a - L_d)} + 1 \right) \right) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{D,n}(r) \Psi_{C,s}(r) r dr, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.377)$$

En la interfase $D-E$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left(D_n^- \left(e^{-2jk_{z,D,n}(L_a - L_d)} + 1 \right) \right) \int_{R_2}^{R_3} \Psi_{D,n}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N \left(E_n^+ \left(1 + e^{-2jk_{z,E,n}L_d} \right) \right) \int_{R_2}^{R_3} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{E,s}(r) r dr, \quad R_2 \leq r \leq R_3 \end{aligned} \quad (4.378)$$

En la interfase $B-F$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left(B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_p} + B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_p} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (F_n^+ + F_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.379)$$

En la interfase $F-G$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (F_n^+ e^{-jk_{z,F,n}t_{h1}} + F_n^- e^{jk_{z,F,n}t_{h1}}) \int_0^{R_1} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (G_n^+ + G_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{G,n,P}(r) \Psi_{F,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.380)$$

En la interfase $G-H$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (G_n^+ e^{-jk_{z,G,n}L_b} + G_n^- e^{jk_{z,G,n}L_b}) \int_0^{R_1} \Psi_{G,n,P}(r) \Psi_{H,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (H_n^+ + H_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{H,n}(r) \Psi_{H,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.381)$$

En la interfase $H-I$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (H_n^+ e^{-jk_{z,H,n}t_{h2}} + H_n^- e^{jk_{z,H,n}t_{h2}}) \int_0^{R_1} \Psi_{H,n}(r) \Psi_{H,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (I_n^+ + I_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{I,n}(r) \Psi_{H,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.382)$$

En la interfase $I-J$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (I_n^+ e^{-jk_{z,I,n}L_c} + I_n^- e^{jk_{z,I,n}L_c}) \int_0^{R_1} \Psi_{I,n}(r) \Psi_{J,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N (J_n^+ + J_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{J,n}(r) \Psi_{J,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_1 \end{aligned} \quad (4.383)$$

Para la velocidad acústica el planteamiento es, en la interfase $A-B-C$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} (B_n^+ - B_n^-) \int_0^{R_2} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr = \\ \sum_{n=0}^N k_{z,A,n} (A_n^+ - A_n^-) \int_0^{R_1} \Psi_{A,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr \\ + \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} (C_n^+ - C_n^-) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.384)$$

En la interfase $C-D-E$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N k_{z,D,n} D_n^- \left(e^{-2jk_{z,D,n}(L_u-L_d)} - 1 \right) \int_{R_1}^{R_3} \Psi_{D,n}(r) \Psi_{D,s}(r) r dr = \\ & \sum_{n=0}^N k_{z,C,n} \left(C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}(-L_d-L_p)} - C_n^- e^{jk_{z,C,n}(-L_d-L_p)} \right) \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{C,n}(r) \Psi_{D,s}(r) r dr \quad (4.385) \\ & + \sum_{n=0}^N k_{z,E,n} E_n^+ \left(1 - e^{-2jk_{z,E,n}L_d} \right) \int_{R_2}^{R_3} \Psi_{E,n}(r) \Psi_{D,s}(r) r dr, \quad R_1 \leq r \leq R_3 \end{aligned}$$

En la interfase *B-F*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N k_{z,B,n} \left(B_n^+ e^{-jk_{z,B,n}L_p} - B_n^- e^{jk_{z,B,n}L_p} \right) \int_0^{R_2} \Psi_{B,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr = \\ & \sum_{n=0}^N k_{z,F,n} \left(F_n^+ - F_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{B,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (4.386)$$

En la interfase *F-G*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N k_{z,F,n} \left(F_n^+ e^{-jk_{z,F,n}l_{h1}} - F_n^- e^{jk_{z,F,n}l_{h1}} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{F,n}(r) \Psi_{G,s,P}(r) r dr = \\ & \sum_{n=0}^N k_{z,G,n} \left(G_n^+ - G_n^- \right) \int_0^{R_3} \Psi_{G,n,U_z}(r) \Psi_{G,s,P}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_3 \end{aligned} \quad (4.387)$$

En la interfase *G-H*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N k_{z,G,n} \left(G_n^+ e^{-jk_{z,G,n}l_b} - G_n^- e^{jk_{z,G,n}l_b} \right) \int_0^{R_3} \Psi_{G,n,U_z}(r) \Psi_{G,s,P}(r) r dr = \\ & \sum_{n=0}^N k_{z,H,n} \left(H_n^+ - H_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{H,n}(r) \Psi_{G,s,P}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_3 \end{aligned} \quad (4.388)$$

En la interfase *H-I*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N k_{z,H,n} \left(H_n^+ e^{-jk_{z,H,n}l_{h2}} - H_n^- e^{jk_{z,H,n}l_{h2}} \right) \int_0^{R_1} \Psi_{H,n}(r) \Psi_{I,s}(r) r dr = \\ & \sum_{n=0}^N k_{z,I,n} \left(I_n^+ - I_n^- \right) \int_0^{R_3} \Psi_{I,n}(r) \Psi_{I,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_3 \end{aligned} \quad (4.389)$$

En la interfase *I-J*

$$\sum_{n=0}^N k_{z,J,n} \left(I_n^+ e^{-jk_{z,J,n}L_c} - I_n^- e^{jk_{z,J,n}L_c} \right) \int_0^{R_3} \Psi_{I,n}(r) \Psi_{I,s}(r) r dr =$$

$$\sum_{n=0}^N k_{z,J,n} \left(J_n^+ - J_n^- \right) \int_0^{R_1} \Psi_{J,n}(r) \Psi_{I,s}(r) r dr, \quad 0 \leq r \leq R_3 \quad (4.390)$$

donde $s = 0, 1, 2, \dots, N$. Nuevamente, la evaluación de las integrales (4.375)-(4.390) se realiza por medio de la expresión (4.233). En la Tabla 4.23 se muestra de manera resumida los modos correspondientes a cada región. Las ecuaciones (4.375)-(4.390) generan un sistema de $16(N+1)$ ecuaciones con $16(N+1)$ incógnitas, a saber, $A_n^-, B_n^+, C_n^+, D_n^+, E_n^-, F_n^+, G_n^+, H_n^+, I_n^+$ y J_n^+ en el que, para su resolución, se asume que: (1) en el conducto de entrada la onda incidente es plana $A_0^+ = 1, A_n^+ = 0, n > 0$; (2) la salida es anecoica, $J_n^- = 0$ para todo n y (3) la propagación de ondas en la salida es en forma de onda plana. Una vez calculado, el TL se obtiene por medio de la expresión

$$TL = -20 \log_{10} |J_0^+| \quad (4.391)$$

Se efectúa la validación de la herramienta de Ajuste Modal con el método de Elementos Finitos, cuyo resultado se muestra en la Figura 4.62. Se observa una excelente correspondencia en el comportamiento acústico presentado por ambos métodos. Las dimensiones del silenciador evaluado equivalen a los de la geometría 1, cuyos valores se exhiben en la Tabla 4.24.

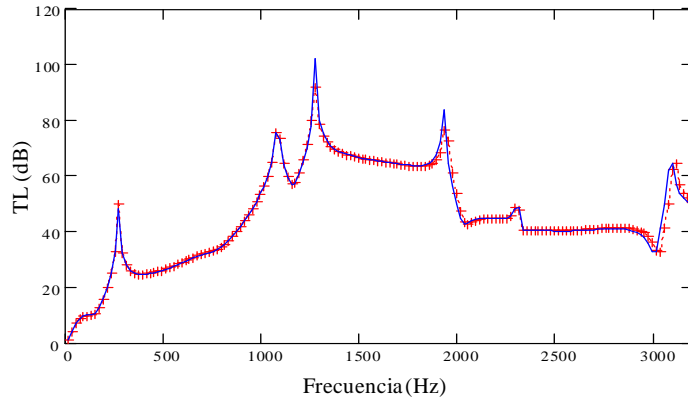


Figura 4.62 TL silenciador con cámara multianular de entrada y cámara lateral de salida. Validación con MEF, 10 modos. —, Ajuste Modal; +++++, MEF. $R_1 = 0.0268$ m, $R_2 = 0.091875$ m, $R_3 = 0.054$ m, $\sigma = 80\%$.

Región	Tipo de Modo	Expresión	Área
A	Presión, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{A,n}(r)$	$J_0(k_{r,A,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
B	Presión, $\Psi_{B,n}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{B,n}(r)$	$J_0(k_{r,B,n}r)$	$0 \leq r \leq R_2$
C	Presión, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r) - \frac{J_1(k_{r,C,n}R_2)}{Y_1(k_{r,C,n}R_2)} Y_0(k_{r,C,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$
	Velocidad, $\Psi_{C,n}(r)$	$J_0(k_{r,C,n}r) - \frac{J_1(k_{r,C,n}R_2)}{Y_1(k_{r,C,n}R_2)} Y_0(k_{r,C,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_2$
D	Presión, $\Psi_{D,n}(r)$	$J_0(k_{r,D,n}r) - \frac{J_1(k_{r,D,n}R_3)}{Y_1(k_{r,D,n}R_3)} Y_0(k_{r,D,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_3$
	Velocidad, $\Psi_{D,n}(r)$	$J_0(k_{r,D,n}r) - \frac{J_1(k_{r,D,n}R_3)}{Y_1(k_{r,D,n}R_3)} Y_0(k_{r,D,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_3$
E	Presión, $\Psi_{E,n}(r)$	$J_0(k_{r,E,n}r) - \frac{J_1(k_{r,E,n}R_3)}{Y_1(k_{r,E,n}R_3)} Y_0(k_{r,E,n}r)$	$R_2 \leq r \leq R_3$
	Velocidad, $\Psi_{E,n}(r)$	$J_0(k_{r,E,n}r) - \frac{J_1(k_{r,E,n}R_3)}{Y_1(k_{r,E,n}R_3)} Y_0(k_{r,E,n}r)$	$R_2 \leq r \leq R_3$
F	Presión, $\Psi_{F,n}(r)$	$J_0(k_{r,F,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{F,n}(r)$	$J_0(k_{r,F,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
G	Presión, $\Psi_{G,n,F}(r)$	$J_0(k_{r,G,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
		$J_0(\tilde{k}_{r,G,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,G,n}R_3)}{Y_1(\tilde{k}_{r,G,n}R_3)} Y_0(\tilde{k}_{r,G,n}r)$	$R_1 \leq r \leq R_3$
	Velocidad, $\Psi_{G,n,U_z}(r)$	$C_s \frac{\rho_0}{\tilde{\rho}} \left[J_0(\tilde{k}_{r,G,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,G,n}R_3)}{Y_1(\tilde{k}_{r,G,n}R_3)} Y_0(\tilde{k}_{r,G,n}r) \right]$	$R_1 \leq r \leq R_3$
H	Presión, $\Psi_{H,n}(r)$	$J_0(k_{r,H,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{H,n}(r)$	$J_0(k_{r,H,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
I	Presión, $\Psi_{I,n}(r)$	$J_0(k_{r,I,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{I,n}(r)$	$J_0(k_{r,I,n}r)$	$0 \leq r \leq R_3$
J	Presión, $\Psi_{J,n}(r)$	$J_0(k_{r,J,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$
	Velocidad, $\Psi_{J,n}(r)$	$J_0(k_{r,J,n}r)$	$0 \leq r \leq R_1$

Tabla 4.23 Resumen de los modos de presión y velocidad acústica del silenciador.

A continuación se analizan los efectos de la variación de la longitud de las cámaras laterales, porosidad de la superficie perforada, resistividad del material absorbente y del radio interno de la cámara anular.

4.5.5.1. Efecto de la variación de la longitud de las cámaras laterales

Asumiendo como geometría de referencia la geometría 1, se analiza la variación de los parámetros de las cámaras laterales en el índice de Pérdidas de Transmisión, TL , donde las dimensiones de las mismas se exponen en la Tabla 4.24. Inicialmente se estudia la contribución de cada cámara lateral en el TL , calculados para 10 modos.

Geometría	Longitud resonador entrada L_a (m)	Longitud anillo interno L_d (m)	Longitud cámara entrada L_p (m)	Espesor separador entrada y salida t_{h1}, t_{h2} (m)	Longitud cámara central L_b (m)	Longitud cámara salida L_c (m)	Longitud total silenciador L_T (m)
1	0.148	0.111	0.048	0.005	0.248	0.05	0.456
2	0	0.111	0.048	0.005	0.248	0.05	0.303
3	0.148	0.111	0.048	0.005	0.248	0	0.401
4	0.148	0.111	0.048	0.005	0.248	0.01	0.416
5	0.148	0.111	0.048	0.005	0.248	0.075	0.481
6	0.148	0.111	0.048	0.005	0.248	0.1	0.506
7	0.148	0.111	0.03	0.005	0.248	0.05	0.456
8	0.148	0.111	0.06	0.005	0.248	0.05	0.456
9	0.148	0.111	0.09	0.005	0.248	0.05	0.456

Tabla 4.24 Dimensiones relevantes de las cámaras laterales. Resistividad del material absorbente $R = 4896$ rayl/m, diámetro de orificios $d_h = 0.0035$ m, espesor del conducto perforado $t_h = 0.001$ m, porosidad $\sigma = 80\%$, $R_1 = 0.0268$ m, $R_2 = 0.054$ m, $R_3 = 0.091875$ m.

La cámara lateral de salida influencia con un pico de resonancia que en este caso se sitúa alrededor de 1250 Hz, como puede verse en la Figura 4.63. La cámara lateral de entrada proporciona los restantes picos de resonancia. Como rasgo resaltante se observa que el anillo interno de la cámara de entrada ayuda a mejorar la atenuación a bajas frecuencias, pudiendo eliminar deficiencias en el sistema a esas frecuencias.

Por otro lado la variación de la longitud L_c de la cámara de salida, Figura 4.64, incide en el comportamiento acústico en el rango medio del intervalo de frecuencias. Los picos de resonancia asociados a la cámara lateral de salida (indicados con una línea vertical en la Figura 4.64) se desplazan a mayores

frecuencias a medida que L_c aumenta, llegando a desaparecer para valores de L_c grandes. Los picos de resonancia relacionados con la cámara de entrada no muestran cambios apreciables en frecuencia.

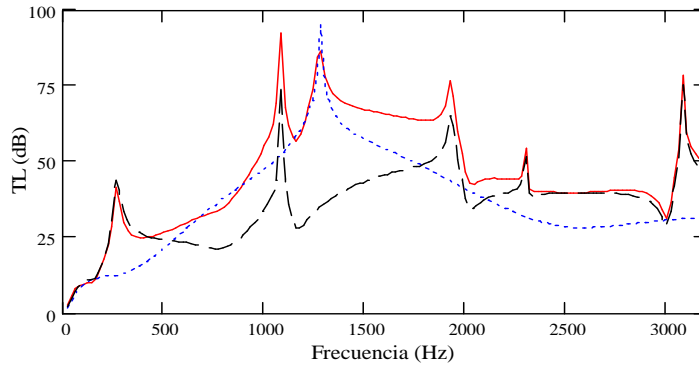


Figura 4.63 TL de silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida. Efecto que ejercen las cámaras de entrada y de salida en el comportamiento acústico del silenciador, 10 modos: —, geometría 1; - - - - , geometría 2; — — — , geometría 3.

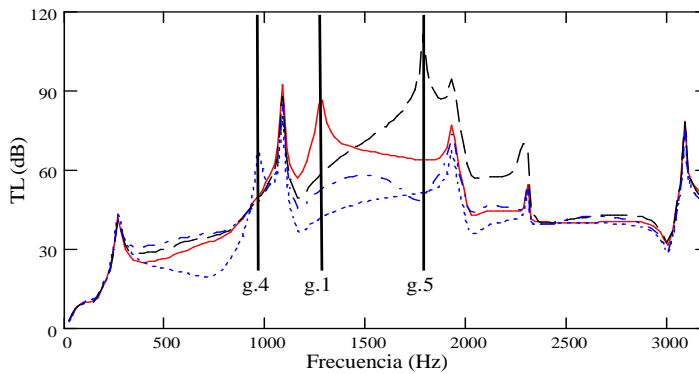


Figura 4.64 TL de silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida. Variación de la longitud L_c de la cámara lateral de salida, 10 modos: —, geometría 1; - - - - , geometría 4; — — — , geometría 5; — — — — , geometría 6.

Un cambio en la longitud L_p de la cámara interna del resonador de entrada genera un cambio en el pico de resonancia el cual se traslada a menores frecuencias a medida que L_p disminuye, o lo que es lo mismo, la longitud de la cámara multianular aumenta, Figura 4.65. Como se describe en [59] la frecuencia del primer pico de resonancia de la cámara de entrada es, aproximadamente,

inversamente proporcional a la raíz cuadrada de $L_d - L_p$. En el intervalo de media frecuencia todas las geometrías exhiben una buena atenuación acústica.

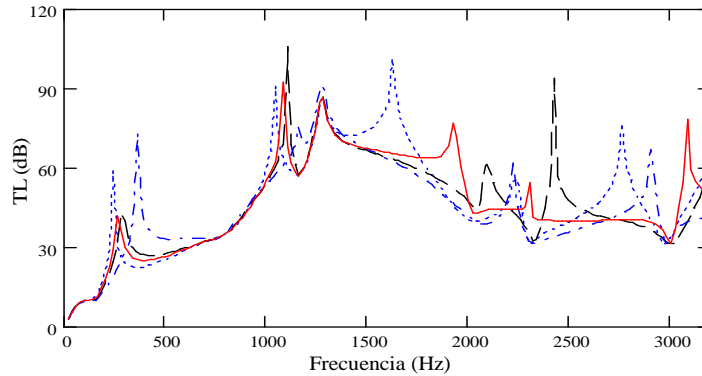


Figura 4.65 TL de silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida. Variación de la cámara interna L_p del resonador lateral de entrada, 10 modos: —, geometría 1; - - - -, geometría 7; — — —, geometría 8; - - - -, geometría 9.

En vista de los resultados este tipo de silenciadores proporcionan una forma de agrupar conductos extendidos, necesarios para atenuaciones a bajas frecuencias, en espacios reducidos. Esta consideración es importante a la hora de integrar el silenciador y el sistema de escape asociado en el espacio disponible del vehículo.

4.5.5.2. Efecto de la variación de la porosidad

El efecto de la porosidad del conducto perforado se muestra en la Figura 4.66 en la que la evaluación de la impedancia acústica incluye los efectos del material absorbente y de la interacción entre orificios, ecuación (4.240). El análisis se realiza en base a la geometría 1, $\sigma = 80\%$, cambiando el valor de la porosidad σ . Según se observa en la figura porosidades bajas, $\sigma = 5\%$, 11% , contribuyen a mejorar la atenuación en los rangos de baja y media frecuencia, mientras que porosidades elevadas, $\sigma = 80\%$, 100% (sin perforado), incrementan la atenuación a altas frecuencias, dado que se produce un mejor aprovechamiento de las características disipativas del material absorbente. Este hecho se indica en la figura en la que los índices de Pérdida de Transmisión, TL , con alta porosidad son prácticamente similares.

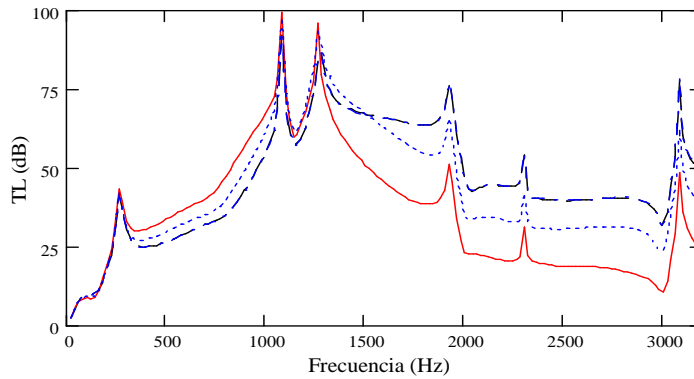


Figura 4.66 *TL* de silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida, 10 modos. Variación de la porosidad, geometría 1, 10 modos: —, $\sigma = 5\%$; ···, $\sigma = 11\%$; — — —, $\sigma = 80\%$; — · — ·, $\sigma = 100\%$.

4.5.5.3. Efecto de la variación de la resistividad

El efecto de la resistividad del material absorbente en el comportamiento acústico del silenciador se presenta en la Figura 4.67. Como en el caso anterior, teniendo en cuenta las dimensiones de la geometría 1, se emplea como parámetro la variación de la resistividad R . Se observa que, a medida que la resistividad se incrementa, la atenuación acústica aumenta en la mayor parte del rango de frecuencias estudiado, a excepción de bajas frecuencias donde la tendencia es inversa (aunque con diferencias de atenuación reducidas).

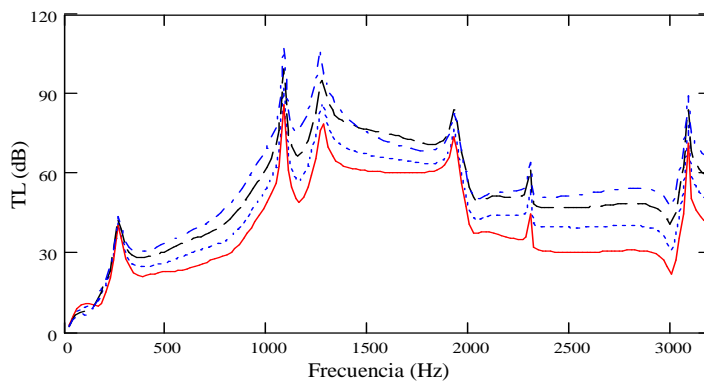


Figura 4.67 *TL* de silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida. Variación de la resistividad R (rayl/m) del material absorbente, geometría 1, 10 modos: —, $R = 2000$ rayl/m; ···, $R = 4896$ rayl/m; — — —, $R = 10000$ rayl/m; — · — ·, $R = 17378$ rayl/m.

La existencia de la cámara multianular, en la entrada del silenciador, y la cámara lateral en la salida proporcionan unos picos de atenuación que mejoran el comportamiento acústico en los rangos de la baja y media frecuencia. Al añadir el efecto disipativo de la cámara central se logra elevar la atenuación a media y alta frecuencia.

4.5.5.4. Efecto de la variación de las áreas anulares

Debido a la influencia que ejerce la cámara multianular en el comportamiento acústico a baja frecuencia, se evalúan los efectos, en la atenuación acústica del silenciador, de la modificación de un parámetro de gran importancia como lo es el radio interno, R_2 . La Tabla 4.25 expone las dimensiones analizadas.

Geometría	Radio de entrada/salida R_1 (m)	Radio interno R_2 (m)	Radio externo R_3 (m)
10	0.0268	0.04	0.091875
11	0.0268	0.07	0.0822

Tabla 4.25 Geometría 1: variación del radio interno R_2 (cámara multianular). Resistividad $R = 4896$ rayl/m, porosidad $\sigma = 80\%$.

En la Figura 4.68 se observa que el comportamiento acústico del silenciador mejora en los rangos de medias y altas frecuencias a medida que R_2 se incrementa. Sin embargo, para la región de bajas frecuencias, se tiene una situación inversa donde el primer pico de atenuación es desplazado a mayores frecuencias mientras R_2 aumenta. El pico de resonancia transversal se mantiene invariable en su frecuencia de aparición.

Una apropiada selección de las diensiones de este silenciador puede conducir a una mejora de las prestaciones acústicas en todo el intervalo de frecuencia de estudio.

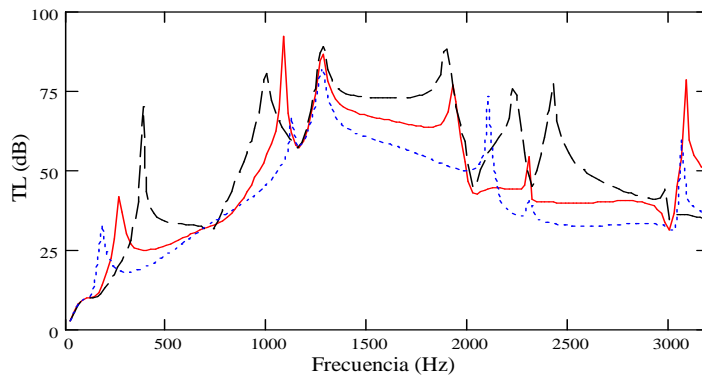


Figura 4.68 TL de silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida. R_2 , 10 modos: —, geometría 1; - - - -, geometría 10; — — —, geometría 11.

4.6. Conclusiones

En este capítulo se han estudiado las principales técnicas analíticas multidimensionales que permiten examinar el comportamiento acústico de silenciadores. Se ha planteado la solución analítica tridimensional de la ecuación de ondas y su adaptación a las tipologías de silenciadores más empleadas comercialmente, a saber, rectangulares, circulares y anulares. Una vez deducidos los campos de presión y velocidad acústica se han podido derivar las frecuencias de corte, frecuencias a las cuales comienzan a propagarse los modos de alto orden, para cada tipo de sección. La existencia de flujo medio disminuye la frecuencia de aparición. Se destaca la utilización de las funciones de Bessel como parte de la solución de la ecuación de ondas en conductos circulares y anulares.

Una parte importante de este capítulo se ha dedicado al estudio de la propagación de ondas en materiales disipativos adquiriendo especial relevancia la estimación de la impedancia acústica compleja, número de onda complejo, así como los valores equivalentes de velocidad del sonido y densidad acústica compleja. Dado que existen situaciones en las que la propagación se efectúa a través de dos medios de diferente densidad, se ha destacado la necesidad de implementar las condiciones de continuidad, axiales y radiales, oportunas en la interfase de los dos medios.

En el análisis de la propagación tridimensional de ondas se ha recalado el estudio de los silenciadores con geometría axisimétrica, en los que se ha

descartado la variable azimutal θ . Para este tipo de silenciadores, se subraya una configuración geométrica característica consistente en un conducto central, por el que circula aire u otro gas, rodeado de material absorbente. Ambos medios pueden estar separados por una delgada placa con orificios, constituyendo el conducto perforado. Un ejemplo de esto lo constituye el resonador concéntrico. El planteamiento de las condiciones de contorno adecuadas ha permitido derivar la deducción de la ecuación característica, desarrollada en términos del número de onda axial, común en ambos medios. La existencia de elementos perforados ha conllevado a la inclusión, dentro de los términos de la ecuación característica, de la impedancia acústica adimensional correspondiente a la superficie perforada. La evaluación del número de onda axial se ha llevado a cabo por procedimientos iterativos, principalmente por el método de la Secante o bien por el de Newton-Raphson. Pese a la existencia de leves diferencias, las cuales se atenuaron con el aumento del número de modos, ambos métodos han convergido bien.

Se han propuesto configuraciones híbridas axisimétricas que permiten lograr una atenuación considerable en la mayor parte del rango de frecuencias, junto con una atenuación selectiva.

Dentro de la categoría de geometrías axisimétricas cabe mencionar los silenciadores con conductos de entrada y salida extendidos, con conducto central (perforado) y placas laterales perforadas, separando el material disipativo de los anillos laterales del silenciador. También silenciadores con resonadores laterales y cámara central disipativa y silenciadores con resonadores laterales, cámara central disipativa y anillo externo conectado a la cámara de entrada así como cámara multianular.

El cálculo de los números de onda ha permitido obtener los modos transversales de presión y velocidad acústica axiales correspondientes a cada sección analizada. A partir de unas condiciones de contorno, por medio de los métodos de Integración Directa y de Ajuste Modal, se han conseguido los valores de los coeficientes de amplitud de onda, necesarios para la determinación del índice de Pérdidas de Transmisión, TL . Ambos métodos han demostrado ser lo suficientemente precisos, proporcionando errores menores a 0.04 dB, al ser comparados con el método de Elementos Finitos. Sin embargo, la presencia de conductos extendidos y placas laterales perforadas disminuye la fidelidad del método de Integración Directa. No obstante, se recalca la importancia de la utilización de técnicas modales multidimensionales ya que ha quedado patente que el tiempo de procesamiento de datos es considerablemente menor que el requerido en técnicas numéricas. De entre las técnicas analíticas, cabe considerar que en el método de Ajuste Modal el tiempo de cálculo es menor que en el método de Integración Directa debido a las propiedades de ortogonalidad.

Por último se ha analizado el comportamiento acústico de los silenciadores considerados en esta Tesis por medio de las técnicas analíticas ya mencionadas. Se ha procedido a la modificación de las variables más importantes de cada silenciador para la evaluación de su comportamiento acústico. De manera general se resalta la importancia de la inclusión del material absorbente ya que permite incrementar la atenuación acústica en los rangos de media y alta frecuencia. El aumento de la resistividad también conlleva a una mejora de la atenuación en los rangos de frecuencia ya citados. La incorporación de elementos perforados ayuda a elevar la atenuación a bajas frecuencias, mientras que el aumento de la porosidad contribuye a acrecentarla a medias y altas frecuencias debido al mejor aprovechamiento de las características disipativas del material absorbente. Los conductos extendidos amplían la atenuación a bajas frecuencias, pudiéndose expandir a media frecuencia con una cuidadosa selección de las longitudes. A altas frecuencias la atenuación decrece debido a que hay menor superficie de contacto del material absorbente con el aire u otro gas en el conducto central. Por otro lado, la inserción de dos cámaras laterales de corta longitud a ambos lados de la cámara central disipativa, una a la entrada y otra a la salida, facilitan la aparición de picos de resonancia debido a la excitación de los modos de alto orden en la discontinuidad que no han podido desvanecerse, siendo el campo acústico dominado por las ondas transversales. Adicionalmente, la incorporación de una cámara anular externa contribuye a la formación de un pico de atenuación a bajas frecuencias debido a un fenómeno de resonancia transversal. Esta configuración mantiene las características de una cámara disipativa con resonadores laterales en la cual los picos de resonancia son combinación de los picos de resonancia de las cámaras de entrada y salida, respectivamente. Finalmente añadiendo en la cámara de entrada una región multianular se logra mejorar la atenuación a bajas frecuencias. Los picos de resonancia pueden ser controlados mediante una apropiada combinación de longitudes de los anillos y de las áreas transversales anulares.

Una parte de los resultados expuestos en el capítulo han sido publicados en las referencias que a continuación se mencionan. En [5] se desarrolla un método de subestructuración modal para el análisis acústico de silenciadores concéntricos con flujo medio. En la referencia [40] se estudia el comportamiento acústico de un silenciador híbrido con resonadores laterales. En las publicaciones [38, 39, 75] se analiza la atenuación acústica del silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida.

Capítulo 5. Medida experimental

Resumen del capítulo:

Este capítulo expone las técnicas de medida experimental previamente desarrolladas por el grupo de investigación para caracterizar el material absorbente y medir el comportamiento acústico de silenciadores. Sirven como punto de partida en el perfeccionamiento de los modelos de predicción analítico-numéricos, evalúan el comportamiento global de un sistema y verifican si éste satisface los requerimientos de diseño. Una vez analizadas se compararán para la evaluación de la más conveniente y en base a ella se procederá a caracterizar el material absorbente empleado. Además se describe el banco de ensayos acústico en el que se realizan las medidas experimentales, tanto del comportamiento acústico de silenciadores como de caracterización de materiales absorbentes.

5.1. Introducción

El desarrollo de medidas experimentales complementa el análisis teórico presentado hasta el momento. Sirven como punto de partida en el perfeccionamiento de los modelos de predicción analítico-numéricos, evalúan el comportamiento global de un sistema y verifican si éste satisface los requerimientos de diseño. Por ello el planteamiento de un modelo físico o sistema de medida, que simule las características reales, es fundamental en la obtención de los datos necesarios para su estudio y comparación de las predicciones teóricas.

De la amplia bibliografía existente, en este capítulo se evalúan algunos de los métodos experimentales más utilizados que permiten estimar las propiedades acústicas de silenciadores y componentes que serán agregados a los sistemas acústicos. En el caso específico de los silenciadores disipativos investigados en la Tesis, se determinan los parámetros más relevantes del material absorbente que forman parte de ellos. Dado el carácter de material de tipo fibroso, se sugiere que la caracterización experimental del material absorbente esté basada en el modelo macroscópico de comportamiento, que considera la propagación de una onda de compresión y que el material puede modelarse a través de dos parámetros principales, impedancia característica \tilde{Z} y número de onda \tilde{k} [78, 111].

5.2. Caracterización del material absorbente

Los materiales absorbentes son ampliamente utilizados para la atenuación del ruido. Sin embargo, el conocimiento adicional de otras características asociadas a la estructura del material, como el coeficiente de absorción acústico y la impedancia superficial, permitirá completar la predicción de su comportamiento acústico.

Como se describía en el Capítulo 2, un material homogéneo y poroso se caracteriza en función de sus propiedades estructurales: la impedancia característica compleja \tilde{Z} y el número de onda complejo \tilde{k} . A continuación se explica algunos de los modelos experimentales existentes empleados para la caracterización acústica de materiales disipativos y para la medición del comportamiento acústico de silenciadores. Básicamente los más utilizados son el método de las Dos Cavidades [113, 109], el método de las Dos Fuentes [109] y

el método de la Matriz de Transferencia [105]. Se hace referencia a la norma UNE-EN-ISO 10534-2 [112] que aplica una metodología basada en la determinación de la función de transferencia para obtener las propiedades acústicas del material absorbente.

5.2.1. Método de las Dos Cavidades

El método de las Dos Cavidades puede incluirse en el conjunto de procedimientos experimentales realizados con dos micrófonos [2, 3]. Por medio de la utilización de dos cavidades de longitud diferente, tal como se muestra en la Figura 5.1, para la generación de dos condiciones de contorno distintas, se trata de calcular parámetros como el coeficiente de reflexión complejo para incidencia normal R , coeficiente de absorción para incidencia normal α y la impedancia acústica del material de ensayo \tilde{Z} . Inicialmente Seybert y Ross [103] propusieron este método, cuya fuente de excitación era un pistón que generaba ruido blanco. Posteriormente Chung y Blaser [20, 21] plantearon este método basado en una función de transferencia H_{12} entre los dos micrófonos, independientemente de la fuente de excitación. También se destaca el trabajo de Davies *et al.* [87] en el que se asumió una excitación con una señal periódica transitoria.

En la Figura 5.1 se muestra un diagrama que esquematiza los fundamentos del método. Originariamente el sistema se excitaba por medio de un pistón que generaba ruido blanco. Actualmente la excitación se lleva a cabo mediante un altavoz que propaga una señal aleatoria estacionaria con un ancho de banda adecuado [35]. Junto al sistema de excitación se podría asociar un sistema de generación de flujo, definido por su número de Mach. En la terminación se conecta el sistema acústico a ser caracterizado, que tiene una impedancia \tilde{Z} , un coeficiente de reflexión R y un coeficiente de absorción α , valores desconocidos.

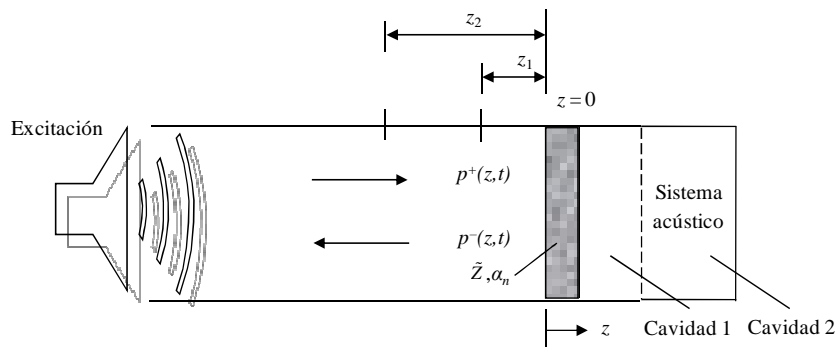


Figura 5.1 Esquema del método de las Dos Cavidades.

El sistema de referencia se sitúa en el elemento a medir, y z_1, z_2 , representan las distancias de los micrófonos al origen. Las ondas incidente y reflejada se denotan como p^+ y p^- , respectivamente. Con una excitación con un estrecho ancho de banda B_e centrado en la frecuencia f , la respuesta del sistema puede considerarse armónica con frecuencia f y variación temporal de su amplitud aleatoria [35, 103].

La señal de presión, captada por ambos micrófonos en sus puntos de ubicación, es acondicionada y amplificada, y después de un tratamiento digital se obtienen las densidades espectrales de potencia en cada punto y la densidad espectral cruzada. Descomponiendo la información se pueden estimar las ondas incidente y reflejada, además de su desfase.

En efecto, en el conducto, las ondas de presión temporales incidente y reflejada son expresadas como

$$p^+(z, t) = a(t)e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (5.1)$$

$$p^-(z, t) = b(t)e^{j(\omega t + k_0 z)} \quad (5.2)$$

donde $\omega = 2\pi f$, $k_0 = \omega/c_0$ el número de onda, y $a(t)$, $b(t)$ las variables aleatorias estacionarias. En vista de que la distancia s entre los micrófonos es suficientemente corta, el coeficiente de atenuación, suma de los efectos viscotérmicos y turbulentos [3] se desprecia y por tanto, la forma de la onda no variaría durante la propagación. Las velocidades de las partículas de las ondas incidente y reflejada se exponen como

$$u^+(z, t) = \frac{p^+(z, t)}{\rho_0 c_0} \quad (5.3)$$

$$u^-(z, t) = -\frac{p^-(z, t)}{\rho_0 c_0} \quad (5.4)$$

El desarrollo teórico que define al sistema acústico en función de la impedancia \tilde{Z} y del coeficiente de reflexión R comienza planteando que, en la entrada, $z = 0$, la presión y velocidad de la partícula son especificados por

$$p(0, t) = (a(t) + b(t))e^{j\omega t} \quad (5.5)$$

$$u(0, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (a(t) - b(t))e^{j\omega t} \quad (5.6)$$

En ese punto, $z = 0$, la impedancia del sistema $\tilde{Z}(f)$, que relaciona la presión y la velocidad, puede evaluarse en función de la densidad espectral de potencia cruzada entre la presión y velocidad $S_{pu}(f)$ y la densidad espectral de potencia de velocidad $S_{uu}(f)$ en el mismo punto. De este modo [103]

$$\tilde{Z}(f) = \frac{S_{pu}(f)}{S_{uu}(f)} \quad (5.7)$$

El coeficiente de reflexión R es obtenido en función de la impedancia acústica por medio de la expresión [79]

$$R(f) = |R|e^{j\theta} = \frac{\tilde{Z}(f) - \rho_0 c_0}{\tilde{Z}(f) + \rho_0 c_0} \quad (5.8)$$

y el coeficiente de absorción α

$$\alpha = 1 - |R|^2 \quad (5.9)$$

Las densidades espectrales son calculadas por las relaciones

$$S_{pu}(f) = P(f, T)U^*(f, T) \quad (5.10)$$

$$S_{uu}(f) = U(f, T)U^*(f, T) \quad (5.11)$$

donde T es el tiempo de registro de la señal temporal y el superíndice * representa el complejo conjugado. Para la presión,

$$S_{pp}(f) = P(f, T)P^*(f, T) \quad (5.12)$$

donde $P(f, T)$ y $U(f, T)$ son las transformadas de Fourier para la presión y la velocidad en $z = 0$. Si las transformadas de Fourier de los términos $a(t)$ y $b(t)$ y de las ecuaciones (5.5) y (5.6) son $A(f, T)$ y $B(f, T)$, respectivamente, dichas expresiones se pueden escribir como

$$P(f, T) = A(f, T) + B(f, T) \quad (5.13)$$

y

$$U(f, T) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (A(f, T) - B(f, T)) \quad (5.14)$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las expresiones correspondientes a las densidades espectrales de potencia cruzadas (5.10), de velocidad (5.11) y de presión (5.12) es posible desarrollar las densidades espectrales de potencia en

función de las densidades espectrales de potencia de las ondas incidente $S_{AA}(f)$, reflejada $S_{BB}(f)$ y cruzada $S_{AB}(f)$. De este modo, la densidad espectral de potencia cruzada entre la presión y la velocidad se escribe como

$$S_{pu}(f) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (S_{AA}(f) - S_{BB}(f) - j2 \operatorname{Im}(S_{AB}(f))) \quad (5.15)$$

y las densidades espectrales de potencia de velocidad y de presión son, respectivamente,

$$S_{uu}(f) = \left(\frac{1}{\rho_0 c_0} \right)^2 (S_{AA}(f) - S_{BB}(f) - 2 \operatorname{Re}(S_{AB}(f))) \quad (5.16)$$

$$S_{pp}(f) = S_{AA}(f) + S_{BB}(f) + 2 \operatorname{Re}(S_{AB}(f)) \quad (5.17)$$

$$S_{AB}(f) = \operatorname{Re}(S_{AB}(f)) + j \operatorname{Im}(S_{AB}(f)) \quad (5.18)$$

en las que $\operatorname{Re}(S_{AB}(f))$ e $\operatorname{Im}(S_{AB}(f))$ representan las partes real e imaginaria de la densidad espectral cruzada $S_{AB}(f)$, respectivamente. Siguiendo con este procedimiento, la impedancia acústica del sistema (5.7) es expresada por

$$\tilde{Z}(f) = \rho_0 c_0 \frac{S_{AA}(f) - S_{BB}(f) - j2 \operatorname{Im}(S_{AB}(f))}{S_{AA}(f) + S_{BB}(f) - 2 \operatorname{Re}(S_{AB}(f))} \quad (5.19)$$

cuya parte resistiva es

$$R_0(f) = \rho_0 c_0 \frac{S_{AA}(f) - S_{BB}(f)}{S_{AA}(f) + S_{BB}(f) - 2 \operatorname{Re}(S_{AB}(f))} \quad (5.20)$$

y su parte reactiva

$$\chi_0(f) = \rho_0 c_0 \frac{-2 \operatorname{Im}(S_{AB}(f))}{S_{AA}(f) + S_{BB}(f) - 2 \operatorname{Re}(S_{AB}(f))} \quad (5.21)$$

De (5.8) el coeficiente de reflexión R es por tanto,

$$R(f) = \frac{-S_{BB}(f) + \operatorname{Re}(S_{AB}(f)) - j \operatorname{Im}(S_{AB}(f))}{S_{AA}(f) - \operatorname{Re}(S_{AB}(f)) - j \operatorname{Im}(S_{AB}(f))} \quad (5.22)$$

cuyo módulo y argumento son, respectivamente

$$|R| = \sqrt{\frac{S_{BB}(f)^2 - 2S_{BB}(f)\operatorname{Re}(S_{AB}(f)) + |S_{AB}(f)|^2}{S_{AA}(f)^2 - 2S_{AA}(f)\operatorname{Re}(S_{AB}(f)) + |S_{AB}(f)|^2}} = \sqrt{\frac{S_{BB}(f)}{S_{AA}(f)}} \quad (5.23)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(R(f))}{\operatorname{Re}(R(f))}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(S_{AB}(f))}{\operatorname{Re}(S_{AB}(f))}\right) \quad (5.24)$$

y las parte real e imaginaria son

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(R(f)) &= -S_{AA}(f)S_{BB}(f) + S_{AA}(f)\operatorname{Re}(S_{AB}(f)) \\ &\quad + S_{BB}(f)\operatorname{Re}(S_{AB}(f)) - (\operatorname{Re}(S_{AB}(f)))^2 + (\operatorname{Im}(S_{AB}(f)))^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(R(f)) &= -S_{BB}(f)\operatorname{Im}(S_{AB}(f)) - S_{AA}(f)\operatorname{Im}(S_{AB}(f)) \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(S_{AB}(f))\operatorname{Im}(S_{AB}(f)) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Una vez disponible el modelo matemático, se puede proceder a realizar el registro experimental de la presión de los dos micrófonos en los puntos de medida y el cálculo de sus transformadas de Fourier, lo cual permite evaluar las densidades espectrales de potencia S_{AA} , S_{BB} y S_{AB} . Con esta información se obtiene la impedancia acústica $\tilde{Z}(f)$ y el coeficiente de reflexión $R(f)$ del sistema. En efecto, en los puntos de medida la presión puede expresarse como

$$p(z_1, t) = \left(a(t)e^{-jk^+z_1} + b(t)e^{jk^-z_1} \right) e^{j\omega t} \quad (5.27)$$

$$p(z_2, t) = \left(a(t)e^{-jk^+z_2} + b(t)e^{jk^-z_2} \right) e^{j\omega t} \quad (5.28)$$

Por lo tanto, las densidades espectrales de potencia de presión son

$$S_{11}(f) = P_1(f, T)P_1^*(f, T) \quad (5.29)$$

$$S_{22}(f) = P_2(f, T)P_2^*(f, T) \quad (5.30)$$

para las presiones registradas en los puntos 1 y 2, respectivamente. La densidad espectral de potencia cruzada entre los puntos 1 y 2 es

$$S_{12}(f) = P_1(f, T)P_2^*(f, T) \quad (5.31)$$

$P_1(f, T)$ y $P_2(f, T)$ son las transformadas de Fourier finitas de las presiones obtenidas por los micrófonos 1 y 2, respectivamente. El desarrollo de estas transformadas conduce a

$$S_{11}(f) = S_{AA}(f) + S_{BB}(f) + 2(\operatorname{Re}(S_{AB}(f))\cos(k^+ + k^-)z_1 + \operatorname{Im}(S_{AB}(f))\operatorname{sen}(k^+ + k^-)z_1) \quad (5.32)$$

$$S_{22}(f) = S_{AA}(f) + S_{BB}(f) + 2(\operatorname{Re}(S_{AB}(f))\cos(k^+ + k^-)z_2 + \operatorname{Im}(S_{AB}(f))\operatorname{sen}(k^+ + k^-)z_2) \quad (5.33)$$

$$S_{12}(f) = \operatorname{Re}(S_{12}(f)) + j\operatorname{Im}(S_{12}(f)) \quad (5.34)$$

en la que la parte real se desarrolla como

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(S_{12}(f)) &= S_{AA}(f)\cos(k^+(z_1 - z_2)) + S_{BB}(f)\cos(k^-(z_1 - z_2)) \\ &\quad + \operatorname{Re}(S_{AB}(f))(\cos(k^-z_1 + k^+z_2) + \cos(k^+z_1 + k^-z_2)) \\ &\quad + \operatorname{Im}(S_{AB}(f))(\operatorname{sen}(k^-z_1 + k^+z_2) + \operatorname{sen}(k^+z_1 + k^-z_2)) \end{aligned} \quad (5.35)$$

y la imaginaria

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(S_{AB}(f)) &= -S_{AA}(f)\operatorname{sen}(k^+(z_1 - z_2)) + S_{BB}(f)\operatorname{sen}(k^-(z_1 - z_2)) \\ &\quad + \operatorname{Re}(S_{AB}(f))(-\operatorname{sen}(k^+z_1 + k^-z_2) + \operatorname{sen}(k^-z_1 + k^+z_2)) \\ &\quad + \operatorname{Im}(S_{AB}(f))(\cos(k^+z_1 + k^-z_2) - \cos(k^-z_1 + k^+z_2)) \end{aligned} \quad (5.36)$$

La impedancia acústica del sistema $\tilde{Z}(f)$ (5.19) y el coeficiente de reflexión $R(f)$ (5.22) son evaluados ya que se puede plantear un sistema con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Si se considera el caso en el que no existe flujo medio las expresiones (5.32)-(5.36) se convierten en

$$S_{11}(f) = S_{AA}(f) + S_{BB}(f) + 2(\operatorname{Re}(S_{AB}(f))\cos(2k_0z_1) + \operatorname{Im}(S_{AB}(f))\operatorname{sen}(2k_0z_1)) \quad (5.37)$$

$$S_{11}(f) = S_{AA}(f) + S_{BB}(f) + 2(\operatorname{Re}(S_{AB}(f))\cos(2k_0z_2) + \operatorname{Im}(S_{AB}(f))\operatorname{sen}(2k_0z_2)) \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(S_{AB}(f)) &= (S_{AA}(f) + S_{BB}(f)) \cos(k_0(z_1 - z_2)) \\ &+ 2(\operatorname{Re}(S_{AB}(f)) \cos(k_0(z_1 + z_2)) + \operatorname{Im}(S_{AB}(f)) \operatorname{sen}(k_0(z_1 + z_2))) \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\operatorname{Im}(S_{AB}(f)) = (-S_{AA}(f) + S_{BB}(f)) \operatorname{sen}(k_0(z_1 - z_2)) \quad (5.40)$$

Finalmente, el cálculo del índice de pérdidas de transmisión de este sistema, TL , puede realizarse mediante dos procedimientos. Por un lado, añadiendo un tercer micrófono aguas abajo del sistema en estudio con salida anecoica, que, por medio de la transformada de Fourier finita de la presión registrada $P_C(f, T)$, se obtiene la densidad espectral de potencia de presión de la onda transmitida $S_{CC}(f, T)$. Es decir,

$$S_{CC}(f) = P_C(f, T) P_C^*(f, T) \quad (5.41)$$

Como la salida es anecoica, no hay onda reflejada, por tanto, el índice de pérdidas por transmisión es

$$TL = 10 \log \left(\frac{S_{AA}(f)}{S_{CC}(f)} \right) \quad (5.42)$$

Por otro lado, efectuando dos ensayos, en el que en una primera prueba los micrófonos se sitúan aguas arriba del elemento a caracterizar y en un segundo experimento se ubican aguas abajo de dicho elemento. Una variante de este procedimiento es el que sigue para caracterizar acústicamente al material absorbente.

La obtención de la impedancia acústica compleja \tilde{Z} , del número de onda complejo \tilde{k} y del coeficiente de reflexión R de una muestra de material absorbente se desarrolla en base al procedimiento descrito en la norma UNE-EN-ISO 10534-2 [112] y aplicado por otros investigadores [109]. De acuerdo a ello se realizan dos ensayos correspondiendo cada uno a una longitud, entre muestra y pared, de L y L' , respectivamente. La Figura 5.2 muestra el esquema del proceso. En base al registro de presiones efectuado por ambos micrófonos y por el desarrollo descrito anteriormente, se obtienen las magnitudes de interés.

La impedancia acústica compleja \tilde{Z} es evaluada en función de la impedancia acústica superficial de una muestra de material absorbente. La impedancia acústica superficial es calculada para cada ensayo, siendo z_1 la conseguida en el primer ensayo, longitud L , y z_1' la obtenida en el segundo ensayo, longitud L' . La impedancia acústica compleja \tilde{Z} es evaluada por la expresión [109, 113]

$$\tilde{Z} = \pm \sqrt{\frac{z_1 z_1' (z_2 - z_2') - z_2 z_2' (z_1 - z_1')}{(z_2 - z_2') - (z_1 - z_1')}} \quad (5.43)$$

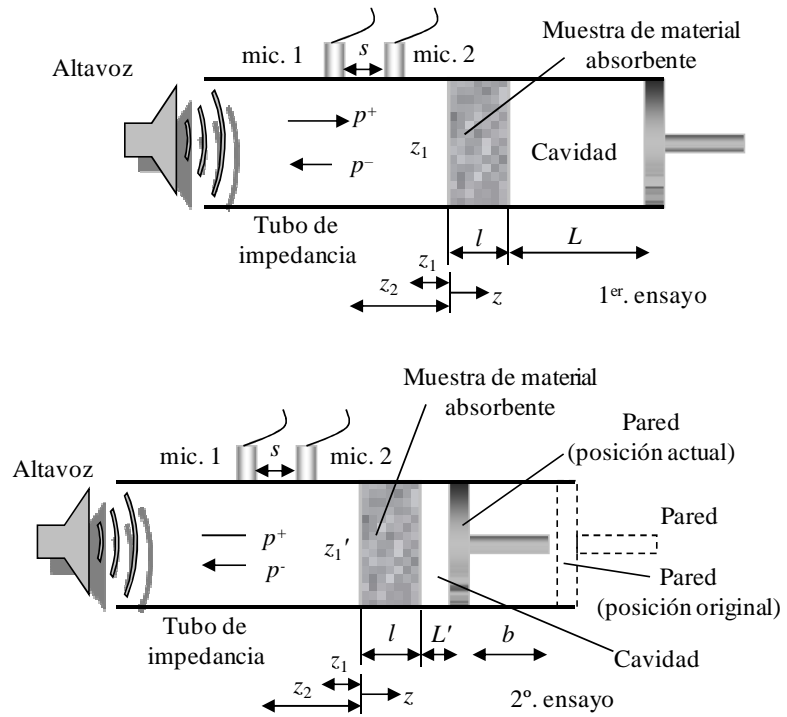


Figura 5.2 Método de las Dos Cavidades. Esquema del proceso.

Debido al movimiento de la pared y la variación del volumen de la cavidad de aire posterior a la muestra de material absorbente, la impedancia del aire en la cavidad es modificada. Para las longitudes inicial L y modificada L' las impedancias correspondientes son, respectivamente [109, 113]

$$z_2 = -j z_0 \cot(k_0 L) \quad (5.44)$$

$$z_2 = -j z_0 \cot(k_0 L') \quad (5.45)$$

donde Z_0 es la impedancia característica del aire. El cálculo del número de onda complejo \tilde{k} se consigue por la relación:

$$\tilde{k} = \left(\frac{1}{2jd} \right) \ln \left(\frac{(z_1 + \tilde{Z})(z_2 - \tilde{Z})}{(z_1 - \tilde{Z})(z_2 + \tilde{Z})} \right) \quad (5.46)$$

Con estos valores se calculan la velocidad compleja de sonido \tilde{c} y la densidad compleja $\tilde{\rho}$ en el material absorbente:

$$\tilde{c} = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{Z}}{\tilde{c}} \quad (5.47, 5.48)$$

5.2.1.1. Sistema experimental

La muestra de material absorbente de ensayo debe colocarse dentro de un tubo de impedancia, el cual, debe ser recto, rígido, liso y estanco [112], tal como se expone en la Figura 5.3. Para evitar que entre en vibración por efecto de las señales acústicas y no presente resonancias de vibración en el intervalo de frecuencias de estudio, las paredes deben ser suficientemente pesadas y macizas. La generación de ondas planas en el tubo se realiza por medio de un altavoz. Para impedir que se produzcan modos de propagación de ondas no planas debe seleccionarse un intervalo de frecuencia de trabajo tal que

$$f_1 < f < f_{max} \quad (5.49)$$

donde f_1 es la frecuencia de trabajo más baja del conducto, f es la frecuencia de trabajo y f_{max} es la frecuencia de trabajo más alta del tubo. La condición para f_{max} es

$$d < \frac{\lambda_{max} \alpha_{1,0}}{\pi} \Rightarrow d < 0.586 \lambda_{max} \quad (5.50)$$

donde $\alpha_{1,0}$ es la raíz de la función de Bessel $J_1(\alpha_m)$ correspondiente al primer modo de propagación de alto orden (1,0). Conviene que el tubo sea lo suficientemente largo para permitir el desarrollo de ondas planas entre la fuente acústica y la muestra. En el extremo final se colocan cierres rígidos móviles que permiten variar la longitud de la cavidad de aire.

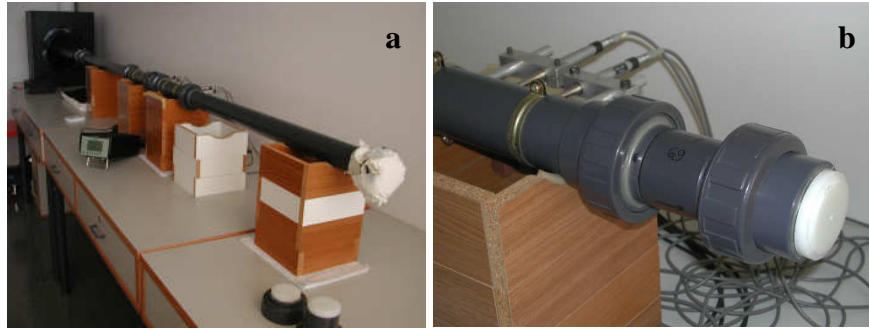


Figura 5.3 Detalle del montaje del sistema acústico con el Método de las Dos Cavidades.
a) vista del tubo de impedancia; b) vista del portamuestras, micrófono y pared.

Los micrófonos deben estar cuidadosamente enrasados en el interior del conducto, impidiendo interferencias. Micrófonos de $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2}$ de pulgada son los encargados de la medida de la presión en los puntos seleccionados. Las señales eléctricas registradas por los micrófonos son usualmente preamplificadas y posteriormente amplificadas y acondicionadas. Después, por medio de un convertidor analógico-digital A/D (tarjeta de adquisición) las señales son digitalizadas. Durante el desarrollo de la fase experimental la ausencia de aliasing se garantiza con la incorporación de filtros paso bajo y una frecuencia de muestreo conveniente [35]. La Figura 5.4 exhibe el esquema del diseño experimental.

Un factor a considerar es la distancia de los micrófonos a la muestra. Deben ubicarse lo más cerca posible con la finalidad de minimizar las pérdidas por disipación viscotérmica en el tubo [103]. Además, la separación entre micrófonos no será igual a la mitad de la longitud de una onda o sus múltiplos 20, ya que como se verá más adelante, tiende a aportar una singularidad en el cálculo del coeficiente de reflexión R . Para una frecuencia máxima de trabajo f_{max} la distancia entre micrófonos s debe ser tal que [3]

$$s \leq \frac{c_0}{2f_{max}}(1 - M^2) \quad (5.51)$$

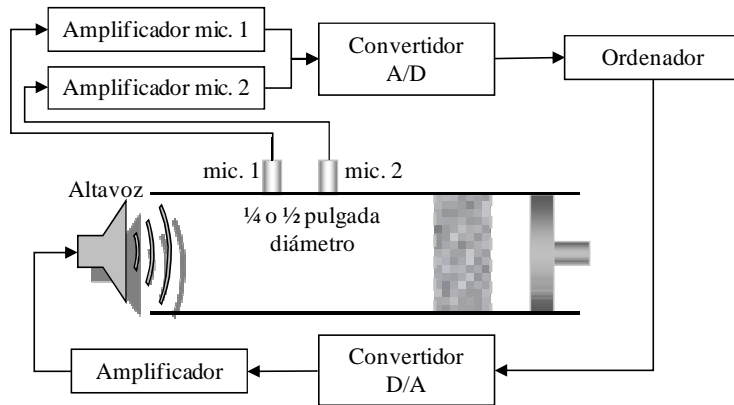


Figura 5.4 Esquema del diseño experimental del método de las dos cavidades.

5.2.1.2. Calibración del sistema

Antes de comenzar la utilización del sistema para la caracterización del comportamiento acústico es importante la realización de una serie de ensayos con el propósito de identificar las fuentes de error y satisfacer las exigencias mínimas. En el rango lineal las propiedades acústicas son independientes del campo sonoro en el conducto [20, 22, 35], por tanto, no es necesario llevar a cabo una calibración absoluta de los micrófonos. Sin embargo, pueden haber diferencias entre los micrófonos y los sistemas de amplificación de señal, luego es preciso efectuar una calibración relativa. Como la densidad espectral de potencia cruzada S_{12} es empleada para evaluar la solución de las ecuaciones (5.32)-(5.36), con flujo medio, y (5.37)-(5.40), sin flujo medio, es indispensable proceder con una calibración en fase. El trabajo de Seybert y Ross [103] explica el procedimiento aplicado. Los micrófonos deben enrasarse en un plato circular con orificios, colocándose en el extremo final del tubo. Ambos micrófonos deberían registrar la misma amplitud de presión de la onda plana incidente, sin cambios de fase. Las diferencias existentes pueden servir para realizar la calibración relativa. Si el conducto es excitado por ruido blanco, con un ancho de banda adecuado, se puede evaluar la función de transferencia (o función de respuesta en frecuencia) entre las medidas de los dos micrófonos $H_{12}(f)$ por medio de [35]

$$H_{12}(f) = \frac{S_{12}(f)}{S_{11}(f)} \quad (5.52)$$

Como $S_{12}(f)$ es una magnitud compleja, también lo es $H_{12}(f)$ y $|H_{12}(f)|$ es la ganancia de las medidas de los dos micrófonos, siendo el desfase entre ambos de

$$\phi_{12}(f) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(H_{12}(f))}{\text{Re}(H_{12}(f))} \right) \quad (5.53)$$

Las densidades espectrales de potencia son corregidas empleando la función de respuesta en frecuencia obtenida en la calibración, de modo que

$$S_{11}(f) = S_{11}^u(f) \quad (5.54)$$

$$S_{22}(f) = \frac{S_{22}^u(f)}{|H_{12}(f)|^2} \quad (5.55)$$

$$S_{12}(f) = \frac{S_{12}^u(f)}{H_{12}(f)} \quad (5.56)$$

donde $S_{11}^u(f)$, $S_{22}^u(f)$ y $S_{12}^u(f)$ representan las densidades espectrales de potencia obtenidas durante un ensayo sin corrección de los micrófonos, habiendo escogido el micrófono 1 arbitrariamente.

5.2.2. Método de las Dos Fuentes

Una segunda alternativa que permita la caracterización acústica del material absorbente consiste en el uso del método de las Dos Fuentes, denominado así porque las superficies laterales de la porción de material absorbente han de ser expuestas a la incidencia normal de ondas planas procedentes de la fuente acústica, tal como se expone en la Figura 5.5. De acuerdo a esta técnica, un elemento acústico ya sea un silenciador, o bien, una muestra de material absorbente, puede ser descrito acústicamente en función de sus cuatro polos. A diferencia del método de las Dos Cavidades, este procedimiento implica la utilización de cuatro micrófonos. El planteamiento matemático expuesto sirve para obtener las funciones de transferencia H_{ij} entre los micrófonos ubicados en los puntos de medida del tubo de impedancia. Este método fue inicialmente propuesto por Munjal y Doige [81]. Una variante de este método, descrita en el trabajo de Song y Bolton [105], será expuesta con mayor detalle en el siguiente apartado.

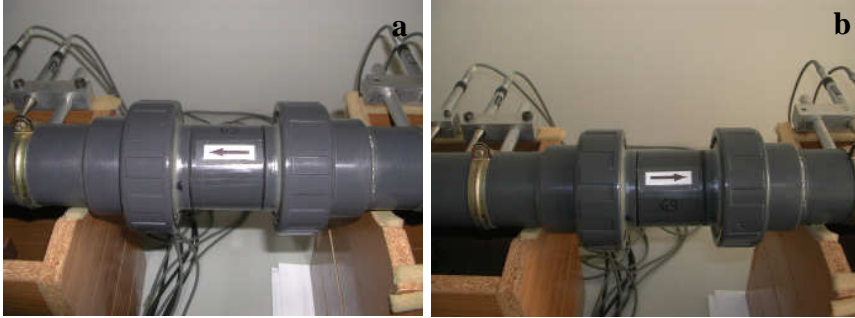


Figura 5.5 Detalle del montaje del sistema acústico con el Método de las Dos Fuentes. a) onda acústica incidente a la izquierda de la muestra; b) onda acústica incidente a la derecha de la muestra.

Como se explicaba en el Capítulo 2 la matriz de transferencia vincula la presión acústica y la velocidad de la partícula a ambos lados de la muestra de material absorbente, es decir,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

donde P_1, P_2 , son las amplitudes de la presión acústica y U_1, U_2 las amplitudes de la velocidad de partícula, y A, B, C y D representan los cuatro parámetros o polos del sistema. La Figura 5.6 expone el esquema de los cuatro polos.

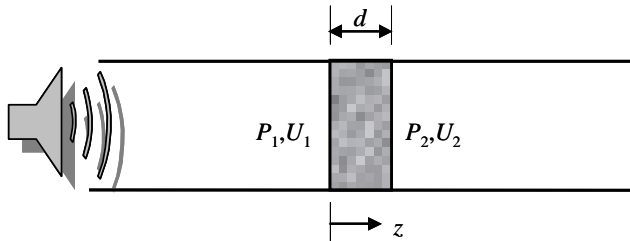


Figura 5.6 Cuatro polos del sistema.

El desarrollo experimental conlleva que la muestra sea incidida por ondas planas, procedentes de una fuente acústica, a ambos lados. Para ello, o se utilizan dos fuentes reales, o bien, se dispone de un equipo experimental que permita el traslado de la fuente acústica a ambos extremos del tubo de impedancia, o bien, se habilita un dispositivo que conectado al tubo de impedancia permita tornar la muestra una vez haya sido sometida al influjo de las ondas acústicas. La Figura 5.7 resume el proceso, suponiendo que la fuente acústica es conducida desde un

extremo (configuración A) a otro del tubo de impedancia (configuración B). En la Figura 5.7, l representa al espesor de la muestra, s_1 la separación entre los micrófonos 1 y 2, s_2 la separación entre los micrófonos 3 y 4 y $z_1 - z_4$ las posiciones de los micrófonos medidas desde la muestra.

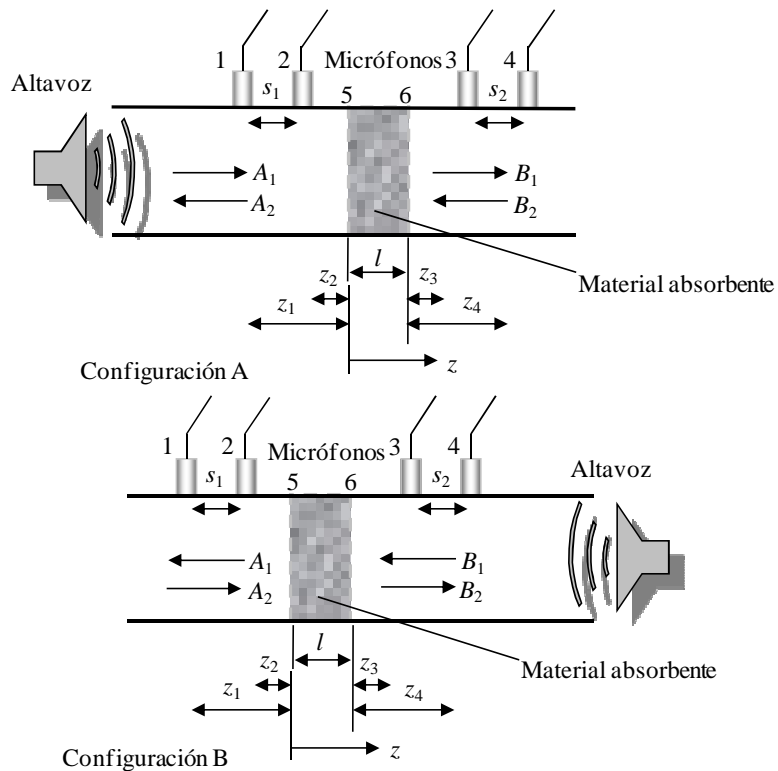


Figura 5.7 Esquema del montaje del tubo de impedancia para el ensayo por medio del método de las Dos Fuentes.

El primer ensayo es equivalente al método de la matriz de transferencia. El conjunto se divide en las particiones 1-2, 2-3 y 3-4. A su vez, la partición 2-3 es subdividida en los componentes 2-5, 5-6 y 6-3.

La matriz de transferencia entre los micrófonos 1 y 2 es:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 s_1) & j\rho_0 c_0 \operatorname{sen}(k_0 s_1) \\ \frac{j\operatorname{sen}(k_0 s_1)}{\rho_0 c_0} & \cos(k_0 s_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

donde P_1 , U_1 , P_2 y U_2 son las presiones y velocidades de la onda acústica en los micrófonos 1 y 2 respectivamente. De (5.58) se deduce que

$$U_2 = \frac{P_1 - \cos(k_0 s_1) P_2}{j \rho_0 c_0 \sin(k_0 s_1)} \quad (5.59)$$

La matriz de transferencia entre los micrófonos 3 y 4 es:

$$\begin{bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 s_2) & j \rho_0 c_0 \sin(k_0 s_2) \\ \frac{j \sin(k_0 s_2)}{\rho_0 c_0} & \cos(k_0 s_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

en la que P_3 , U_3 , P_4 y U_4 son las presiones y velocidades de la onda acústica en los micrófonos 3 y 4, respectivamente. De (5.60) se desprende

$$U_3 = \frac{P_4 j \sin(k_0 s_2)}{\rho_0 c_0} + \cos(k_0 s_2) \frac{P_3 - P_4 \cos(k_0 s_2)}{j \rho_0 c_0 \sin(k_0 s_2)} \quad (5.61)$$

La matriz de transferencia entre los micrófonos 2 y 3 es

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

de la que deben obtenerse los cuatro polos. Para cada uno de los ensayos se tiene:

$$\begin{bmatrix} P_2^A \\ U_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3^A \\ U_3^A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_2^B \\ U_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3^B \\ U_3^B \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Este sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas (A_{23} , B_{23} , C_{23} y D_{23}) puede resolverse obteniendo la matriz de transferencia entre los micrófonos 2 y 3, a partir de las expresiones [109]

$$A_{23} = \frac{(H_{32}^A H_{34}^B - H_{32}^B H_{34}^A) + \cos(k_0 s_1) (H_{32}^B - H_{32}^A)}{(H_{34}^B - H_{34}^A)} \quad (5.64)$$

$$B_{23} = \frac{j \tilde{\rho} \tilde{c} \sin(k_0 s_2) (H_{32}^A - H_{32}^B)}{(H_{34}^A - H_{34}^B)} \quad (5.65)$$

$$C_{23} = \frac{(H_{31}^A - \cos(k_0 s_1) H_{32}^A)(H_{34}^B - \cos(k_0 s_2))}{j \tilde{\rho} \tilde{c} \sin(k_0 s_1)(H_{34}^B - H_{34}^A)} - \frac{(H_{31}^B - \cos(k_0 s_1) H_{32}^B)(H_{34}^A - \cos(k_0 s_2))}{j \tilde{\rho} \tilde{c} \sin(k_0 s_1)(H_{34}^B - H_{34}^A)} \quad (5.66)$$

$$D_{23} = \frac{\sin(k_0 s_2) \left[(H_{31}^A - H_{31}^B) + \cos(k_0 s_1)(H_{32}^B - H_{32}^A) \right]}{\sin(k_0 s_1)(H_{34}^B - H_{34}^A)} \quad (5.67)$$

en las que la función de transferencia H_{ij}^A es, para una fuente sonora del tipo armónico,

$$H_{ij}^A = \frac{p_j}{p_i} \quad (5.68)$$

y para una fuente aleatoria,

$$H_{ij}^A = \frac{S_{ij}^A}{S_{ii}^A} \quad (5.69)$$

donde el superíndice se refiere a la prueba A o B. En el apartado 5.3.2 se explicará el fundamento del método de la función de transferencia.

La matriz de cuatro polos del conjunto 2-3, se expresa a su vez en función de las matrices de cuatro polos de las particiones 2-5, 5-6 y 6-3 y equivale a

$$\begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{25} & B_{25} \\ C_{25} & D_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{63} & B_{63} \\ C_{63} & D_{63} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

en la que la matriz correspondiente al material absorbente, partición 5-6, es

$$\begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{25} & B_{25} \\ C_{25} & D_{25} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{63} & B_{63} \\ C_{63} & D_{63} \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.71)$$

Como la matriz de cuatro polos del material absorbente es

$$\begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{k}l) & j\tilde{Z} \sin(\tilde{k}l) \\ \frac{j\tilde{Z} \sin(\tilde{k}l)}{\tilde{Z}} & \cos(\tilde{k}l) \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

es fácil deducir \tilde{Z} y \tilde{k} . En efecto, como l es el espesor de la muestra del material absorbente, el número de onda e impedancia característica se obtienen por medio de las expresiones

$$\tilde{k} = \frac{1}{l} \cos^{-1} A_{56} \quad (5.73)$$

$$\tilde{Z} = \sqrt{\frac{B_{56}}{C_{56}}} \quad (5.74)$$

respectivamente.

Al igual que lo explicado con el método de las Dos Cavidades, la separación entre micrófonos estará limitada en función de la frecuencia máxima de estudio f_{max} (5.51). La caracterización de la muestra de material absorbente se completa calculando la velocidad acústica compleja \tilde{c} y la densidad compleja $\tilde{\rho}$ aplicando las expresiones (5.47) y (5.48), respectivamente.

5.2.2.1. Sistema experimental

El sistema experimental de medición por medio de la técnica de las Dos Fuentes se distingue por tener dos pares de micrófonos que registran la presión acústica tal como se muestra en la Figura 5.8. Un par de ellos es colocado aguas arriba del elemento acústico a caracterizar, midiendo la presión acústica incidente, y el otro par aguas abajo sondeando la presión acústica transmitida a través del elemento. Del cálculo de las densidades espectrales de potencia cruzada correspondiente a ambos pares de micrófonos, se definen las funciones de transferencia pertenecientes a cada uno de ellos.

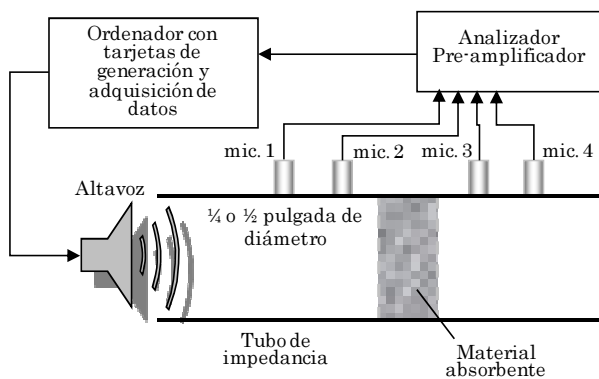


Figura 5.8 Montaje experimental para el método de las Dos Fuentes.

5.2.3. Método de la Matriz de Transferencia

En esta sección se adaptan los datos de la presión acústica recogidos experimentalmente en la entrada, micrófonos 1 y 2, y a la salida, micrófonos 3 y 4, para determinar las propiedades acústicas de una muestra de material absorbente en base a los cuatro polos de la matriz. Es una variante del método de las Dos Fuentes en la que solo es necesaria la realización de un ensayo, ya que se aprovechan condiciones de simetría y reciprocidad [105], en el que se determinan los coeficientes de reflexión y transmisión de la muestra y en función de éstos se obtienen la impedancia acústica compleja \tilde{Z} y el número de onda complejo \tilde{k} .

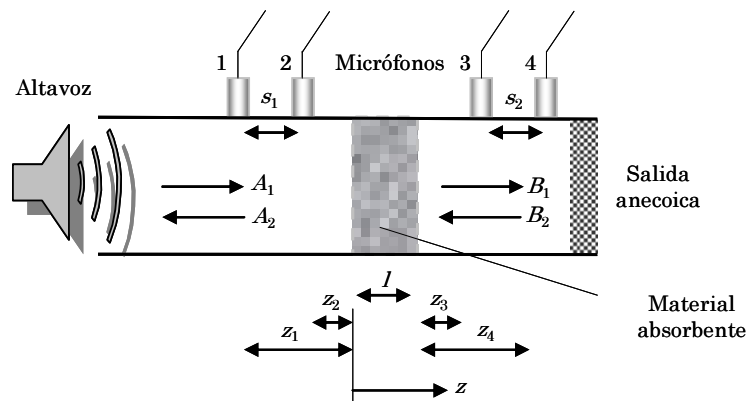


Figura 5.9 Esquema de ensayo mediante el método de la matriz de transferencia.

El tubo de impedancia está provisto de cuatro micrófonos y de un altavoz dispuestos de la manera que aparece en la Figura 5.9. Los micrófonos relacionan la medida de la función de transferencia entre la señal generada por el altavoz y la presión acústica de cada uno de ellos. Para evitar la reflexión de ondas en la terminación, la salida es anecoica y para ello, el tubo de impedancia se rellena de fibra de vidrio con densidad de compactación creciente hacia la salida [35]. Como se describe en [103, 105], la presión acústica en cada uno de los cuatro puntos está definida por

$$P_1 = (A_1 e^{-jk_0 z_1} + A_2 e^{jk_0 z_1}) e^{j\omega t} \quad (5.75)$$

$$P_2 = (A_1 e^{-jk_0 z_2} + A_2 e^{jk_0 z_2}) e^{j\omega t} \quad (5.76)$$

$$P_3 = (B_1 e^{-jk_0 z_3} + B_2 e^{jk_0 z_3}) e^{j\omega t} \quad (5.77)$$

$$P_4 = (B_1 e^{-jk_0 z_4} + B_2 e^{jk_0 z_4}) e^{j\omega t} \quad (5.78)$$

donde A_1 , B_1 representan las amplitudes de las ondas progresivas, A_2 , B_2 , las amplitudes de las ondas regresivas, k_0 el número de onda complejo en el aire y ω la frecuencia de propagación de las ondas.

Despejando las incógnitas A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , en función de la presión acústica registrada, se determinan los valores de los coeficientes de amplitud de las ondas incidente y reflejada, aguas arriba y abajo de la muestra

$$A_1 = \frac{j(P_1 e^{jk_0 z_2} - P_2 e^{jk_0 z_1})}{2 \operatorname{sen}(k_0 (z_1 - z_2))} \quad (5.79)$$

$$A_2 = \frac{j(P_2 e^{-jk_0 z_1} - P_1 e^{-jk_0 z_2})}{2 \operatorname{sen}(k_0 (z_1 - z_2))} \quad (5.80)$$

$$B_1 = \frac{j(P_3 e^{jk_0 z_4} - P_4 e^{jk_0 z_3})}{2 \operatorname{sen}(k_0 (z_3 - z_4))} \quad (5.81)$$

$$B_2 = \frac{j(P_4 e^{-jk_0 z_3} - P_3 e^{-jk_0 z_4})}{2 \operatorname{sen}(k_0 (z_3 - z_4))} \quad (5.82)$$

La matriz de transferencia que relaciona la presión acústica y la velocidad normal acústica a ambos lados del elemento absorbente es

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix}_{z=l} \quad (5.83)$$

Expresando la presión y velocidad en las dos superficies del elemento absorbente en función de las ondas incidente y reflejada [105]

$$P_1|_{z=0} = A_1 + A_2 \quad (5.84)$$

$$U_1|_{z=0} = \frac{1}{\rho_0 c_0} (A_1 - A_2) \quad (5.85)$$

$$P_2|_{z=l} = B_1 e^{-jk_0 l} + B_2 e^{jk_0 l} \quad (5.86)$$

$$U_2|_{z=l} = \frac{1}{\rho_0 c_0} (B_1 e^{-k_0 l} - B_2 e^{ik_0 l}) \quad (5.87)$$

Para determinar los elementos de la matriz de transferencia se requieren dos ecuaciones adicionales que los vinculen con las características homogéneas e isotrópicas del material absorbente (condiciones de reciprocidad y simetría) [105]. Además se deben garantizar las siguientes condiciones: 1) que el determinante de la matriz de transferencia sea igual a 1, 2) $M_{11} = M_{22}$, es decir

$$M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1 \quad (5.88)$$

$$M_{11} = M_{22} \quad (5.89)$$

El cálculo de los elementos de la matriz se realiza por medio de las expresiones

$$M_{11} = \frac{P|_{z=l} U|_{z=l} + P|_{z=0} U|_{z=0}}{P|_{z=0} U|_{z=l} + P|_{z=l} U|_{z=0}} \quad (5.90)$$

$$M_{12} = \frac{P|_{z=0}^2 - P|_{z=l}^2}{P|_{z=0} U|_{z=l} + P|_{z=l} U|_{z=0}} \quad (5.91)$$

$$M_{21} = \frac{U|_{z=0}^2 - U|_{z=l}^2}{P|_{z=0} U|_{z=l} + P|_{z=l} U|_{z=0}} \quad (5.92)$$

$$M_{22} = \frac{P|_{z=l} U|_{z=l} + P|_{z=0} U|_{z=0}}{P|_{z=0} U|_{z=l} + P|_{z=l} U|_{z=0}} \quad (5.93)$$

Una vez conocidos los cuatro elementos de la matriz, el resto de las propiedades acústicas del material absorbente son fácilmente calculadas.

5.2.3.1. Cálculo de los coeficientes de transmisión y reflexión

Asumiendo que la onda incidente, de amplitud unidad, lo hace perpendicularmente contra el elemento absorbente el coeficiente de reflexión R tendrá un valor [105]

$$R = \frac{A_2}{A_1} \quad (5.94)$$

y el coeficiente de transmisión T del elemento absorbente se halla por

$$T = \frac{B_1}{A_1} \quad (5.95)$$

Sustituyendo en las expresiones (5.84)-(5.87) se consiguen los valores referidos a la presión y velocidad en ambas superficies del elemento, en función de los coeficientes de reflexión R , y transmisión T

$$P_1|_{z=0} = 1 + R \quad (5.96)$$

$$U_1|_{z=0} = \frac{1}{\rho_0 c_0} (1 - R) \quad (5.97)$$

$$P_2|_{z=l} = T e^{-jk_0 l} \quad (5.98)$$

$$U_2|_{z=l} = \frac{1}{\rho_0 c_0} (T e^{-jk_0 l}) \quad (5.99)$$

Combinando (5.96)-(5.99) en (5.83) se obtienen, para una terminación anecoica, los valores de los coeficientes de transmisión T y reflexión R , respectivamente,

$$\begin{Bmatrix} 1 + R \\ (1 - R) \\ \rho_0 c_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T e^{-jk_0 l} \\ T e^{-jk_0 l} \\ \rho_0 c_0 \end{Bmatrix} \quad (5.100)$$

$$T = \frac{2e^{jk_0 l}}{T_{11} + \frac{T_{12}}{\rho_0 c_0} + \rho_0 c_0 T_{21} + T_{22}} \quad (5.101)$$

$$R = \frac{T_{11} + \frac{T_{12}}{\rho_0 c_0} - \rho_0 c_0 T_{21} - T_{22}}{T_{11} + \frac{T_{12}}{\rho_0 c_0} + \rho_0 c_0 T_{21} + T_{22}} \quad (5.102)$$

5.2.3.2. Cálculo del número de onda complejo, impedancia característica compleja y velocidad acústica compleja

Como anteriormente se describía, la matriz de transferencia trasladada al elemento absorbente de espesor l es [105]

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{k}l) & j\tilde{Z} \sin(\tilde{k}l) \\ \frac{j\sin(\tilde{k}l)}{\tilde{Z}} & \cos(\tilde{k}l) \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

donde \tilde{k} es el número de onda del material absorbente y \tilde{Z} la impedancia característica del material. La relación de los elementos de ambas matrices proporciona

$$\tilde{k} = \frac{1}{l} \cos^{-1} M_{11} \quad (5.104)$$

para el número de onda o bien

$$\tilde{k} = \frac{1}{l} \sin^{-1} \sqrt{-M_{12}M_{21}} \quad (5.105)$$

y para la impedancia característica del material absorbente:

$$\tilde{Z} = \tilde{\rho}\tilde{c} = \sqrt{\frac{M_{12}}{M_{21}}} \quad (5.106)$$

Por medio de las expresiones (5.47) y (5.48) se determinan la velocidad acústica compleja y la densidad acústica compleja.

5.2.3.3. Sistema experimental

El sistema experimental es similar al que se describe en el apartado correspondiente al método de las Dos Fuentes. La diferencia, respecto al método de las Dos Fuentes, consiste en que por medio de este procedimiento sólo es necesario realizar una sola prueba.

5.2.4. Medida de materiales

Una vez descritas las características propias de cada método, se efectúan ensayos para determinar las propiedades acústicas de una muestra de material absorbente por medio de los tres procedimientos y posteriormente se comparan los resultados. Los ensayos se realizan con un conjunto de muestras de fibra de vidrio¹ de diferente espesor y densidad de compactación, de acuerdo a lo expuesto en la Tabla 5.1. Los resultados de cada prueba corresponden al

¹ Fibra de vidrio de Isover.

promediado de tres experimentos hechos por cada método, cuidando de que en su elaboración, no se hayan alterado las condiciones físicas de las muestras.

Ensayo	Densidad (kg/m ³)	Espesor (cm)
1	44.320	5.00
2	70.910	5.00
3	88.640	5.00
4	44.320	6.90
5	70.910	6.90
6	88.640	6.90

Tabla 5.1 Conjunto de ensayos realizados. Fibra de vidrio de Isover.

Los resultados obtenidos para la impedancia característica \tilde{Z} y el número de onda \tilde{k} se comparan a continuación. En las siguientes figuras se observa, para cada método por separado, la influencia de la densidad y del espesor en el comportamiento acústico en muestras de fibra de vidrio.

5.2.4.1. Influencia de la densidad

Los resultados se refieren a muestras de 5 cm de espesor y densidades de 44.32 kg/cm³, 70.91 kg/cm³ y 88.64 kg/cm³.

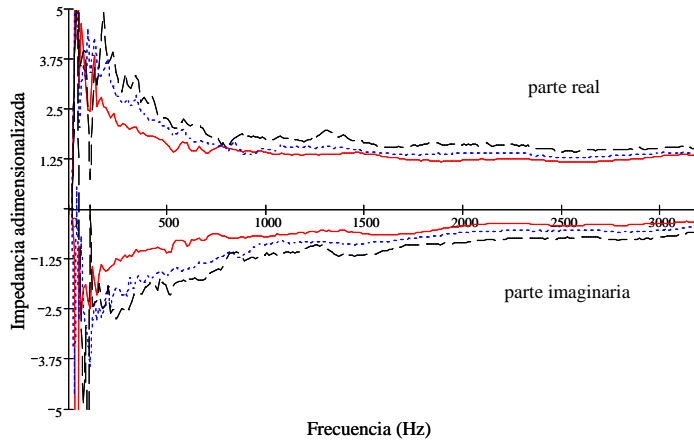


Figura 5.10 Influencia de la variación de la densidad en la impedancia característica en una muestra de 5 cm de espesor. Método de las Dos Cavidades: —, 44.32 kg/m³; - - -, 70.91 kg/m³; — — —, 88.64 kg/m³.

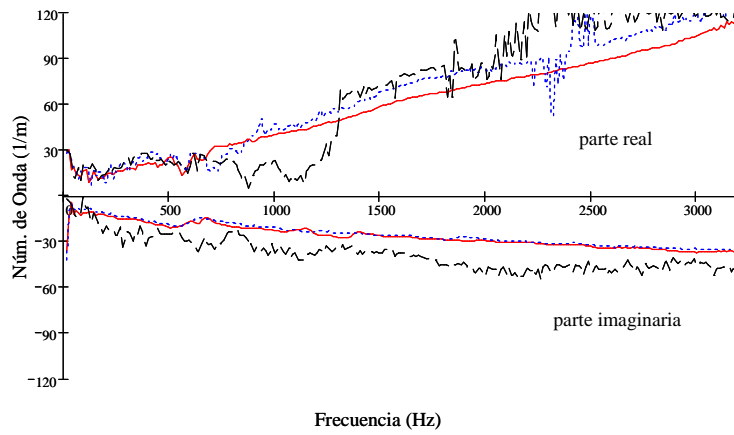


Figura 5.11 Influencia de la variación de la densidad en el número de onda de una muestra de 5 cm de espesor. Método de las Dos Cavidades: —, 44.32 kg/m³; - - -, 70.91 kg/m³; — — —, 88.64 kg/m³.

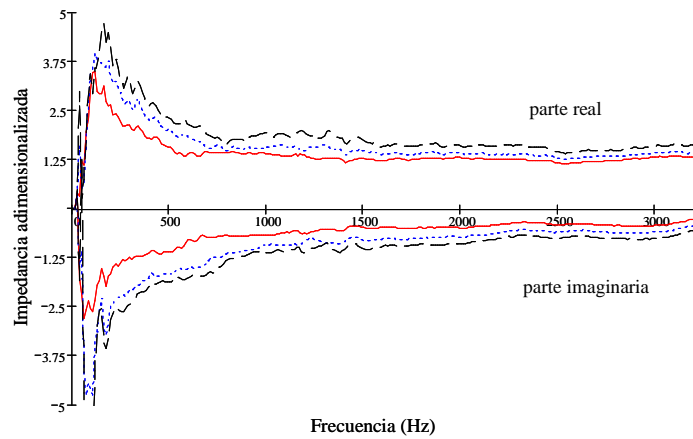


Figura 5.12 Influencia de la variación de la densidad en la impedancia característica en una muestra de 5 cm de espesor. Método de las Dos Fuentes: —, 44.32 kg/m³; - - -, 70.91 kg/m³; — — —, 88.64 kg/m³.

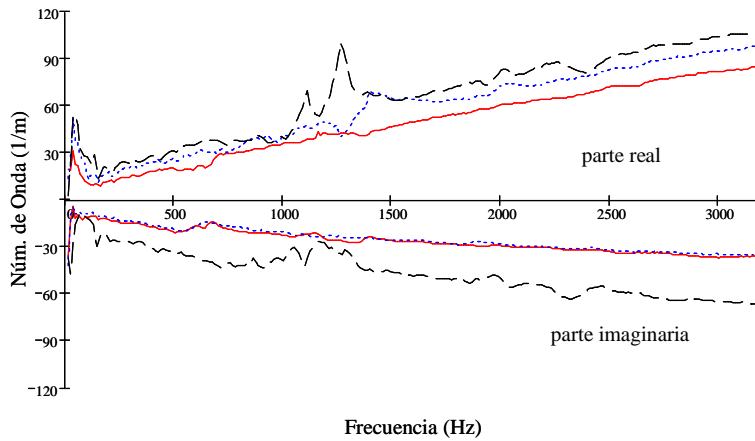


Figura 5.13 Influencia de la variación de la densidad en el número de onda de una muestra de 5 cm de espesor. Método de las Dos Fuentes: —, 44.32 kg/m³; - - -, 70.91 kg/m³; — — —, 88.64 kg/m³.

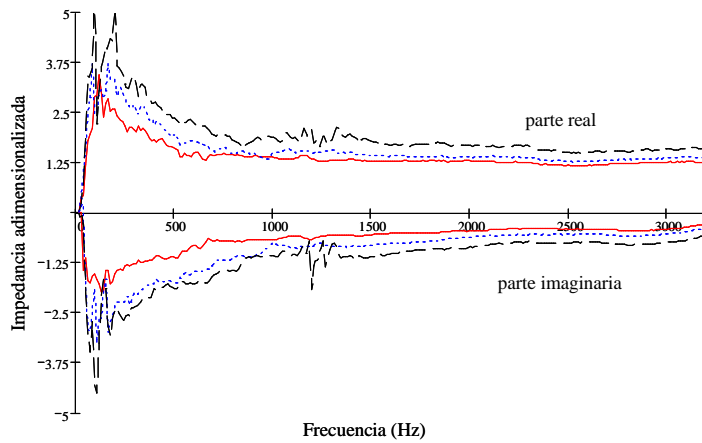


Figura 5.14 Influencia de la variación de la densidad en la impedancia característica en una muestra de 5 cm de espesor. Método de la Matriz de Transferencia: —, 44.32 kg/m³; - - -, 70.91 kg/m³; — — —, 88.64 kg/m³.

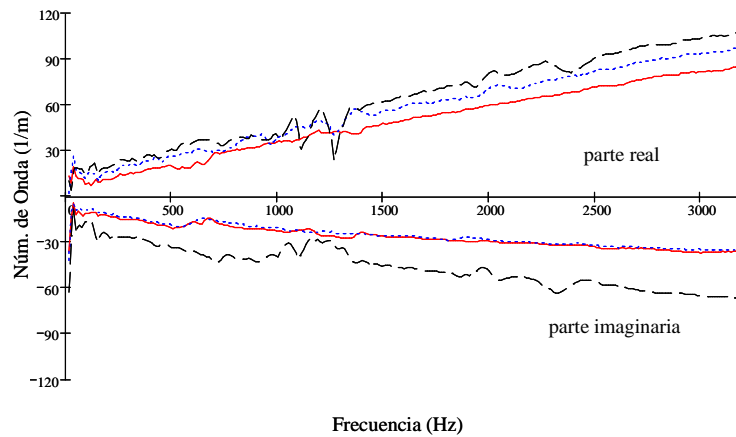


Figura 5.15 Influencia de la variación de la densidad en el número de onda de una muestra de 5 cm de espesor. Método de la Matriz de Transferencia: —, 44.32 kg/m³; - - -, 70.91 kg/m³; — — —, 88.64 kg/m³.

Las Figuras 5.10 y 5.11 muestran la parte real e imaginaria de la impedancia acústica y número de onda obtenidos mediante el Método de las Dos Cavidades, para muestras de 5 cm de espesor y diferentes densidades. Se observa que la parte real de la impedancia adimensional tiende a aumentar ligeramente a medida que se incrementa la densidad del material absorbente, hecho que también se presenta con el número de onda. Al elevar la densidad del material absorbente, el coeficiente de absorción tiende a disminuir e implica la existencia de una creciente cantidad de ondas reflejadas en el tubo de impedancia. Debido a este fenómeno, el cambio de la longitud L de la cavidad tiene escasa incidencia en la medida de la impedancia de la superficie de la muestra [103] y por tanto, la medida del número de onda, obtenida mediante este método, exhibe una elevada incertidumbre para muestras de elevada densidad, tal como se presenta en la Figura 5.11.

Las Figuras 5.12 a 5.15 ofrecen resultados prácticamente similares entre los métodos de las Dos Fuentes y la Matriz de Transferencia. La elevación de la densidad de material absorbente ocasiona un ligero aumento en la parte real de la impedancia característica a medias y altas frecuencias, y un incremento en la parte real del número de onda.

Las imprecisiones registradas en los resultados de la impedancia característica, a baja frecuencia, son causadas por el elevado valor de la longitud de onda λ respecto a la separación s entre micrófonos, que miden una presión acústica prácticamente similar.

5.2.4.2. Influencia del espesor

Los resultados corresponden a ensayos efectuados con muestras de 44.32 kg/m^3 comparando espesores de 5 cm y 6.9 cm.

Los resultados presentados en las Figuras 5.16 a 5.21 indican que la impedancia acústica mantiene un comportamiento similar ante un cambio de espesor de la muestra, tal como predice la teoría. Esta tendencia también se manifiesta con los números de onda obtenidos con los métodos de las Dos Fuentes y Matriz de Transferencia. En cambio, por medio del método de las Dos Cavidades, la diferencia del número de onda de muestras de diferente espesor aumenta a medida que se incrementa la frecuencia, tal como se aprecia en la Figura 5.17.

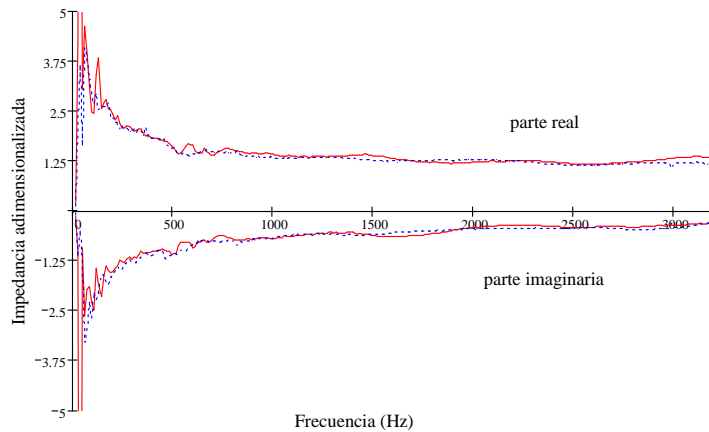


Figura 5.16 Efecto del espesor en la impedancia acústica en una muestra de 44.32 kg/m^3 .
Método de las Dos Cavidades: —, 5 cm de espesor; - - - -, 6.9 cm de espesor.

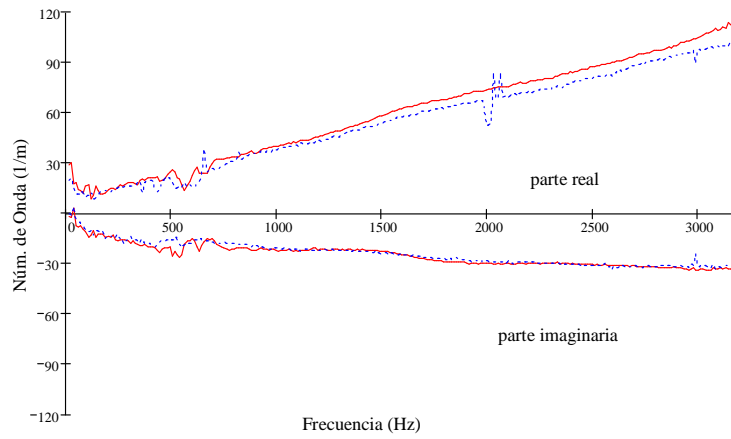


Figura 5.17 Efecto del espesor en el número de onda en una muestra de 44.32 kg/m^3 . Método de las Dos Cavidades: —, 5 cm de espesor; - - - -, 6.9 cm de espesor.

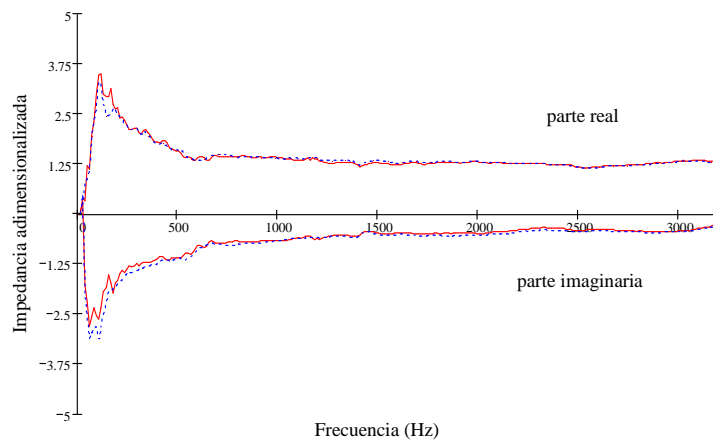


Figura 5.18 Efecto del espesor en la impedancia acústica en una muestra de 44.32 kg/m^3 . Método de las Dos Fuentes: —, 5 cm de espesor; - - - -, 6.9 cm de espesor.

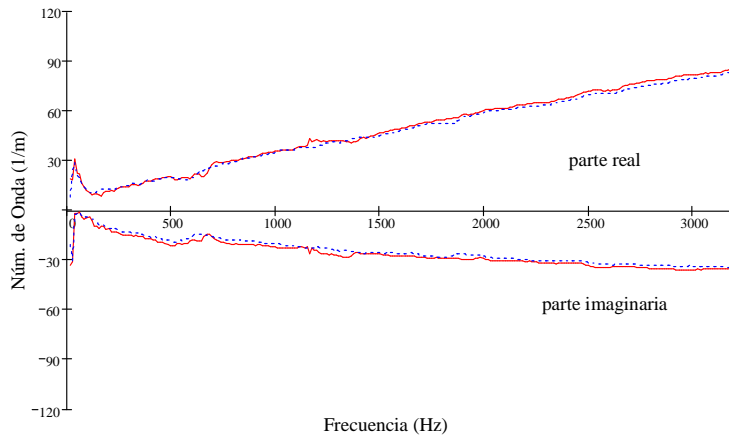


Figura 5.19 Efecto del espesor en el número de onda en una muestra de 44.32 kg/m^3 .
Método de las Dos Fuentes: —, 5 cm de espesor; - - - - , 6.9 cm de espesor.

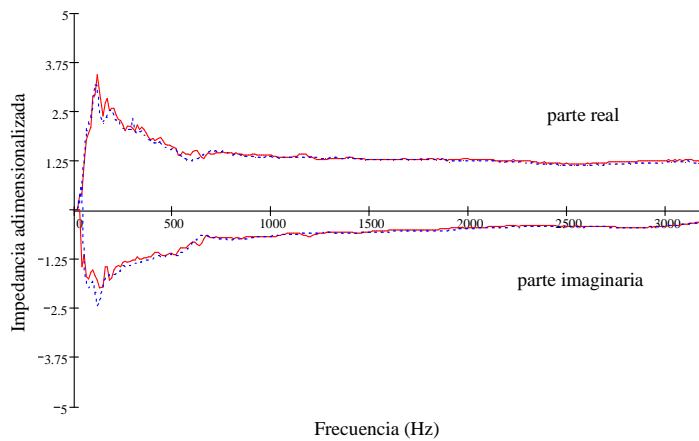


Figura 5.20 Efecto del espesor en la impedancia acústica en una muestra de 44.32 kg/m^3 .
Método de la Matriz de Transferencia: —, 5 cm de espesor; - - - - , 6.9 cm de espesor.

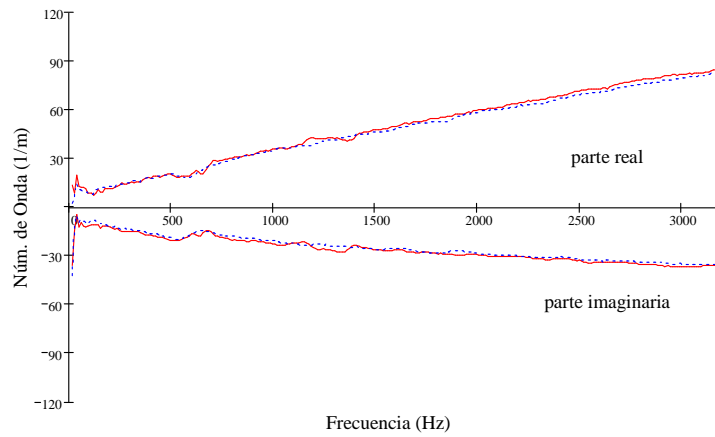


Figura 5.21 Efecto del espesor en el número de onda en una muestra de 44.32 kg/m^3 . Método de la Matriz de Transferencia: —, 5 cm de espesor; - - -, 6.9 cm de espesor.

5.2.4.3. Comparación entre métodos

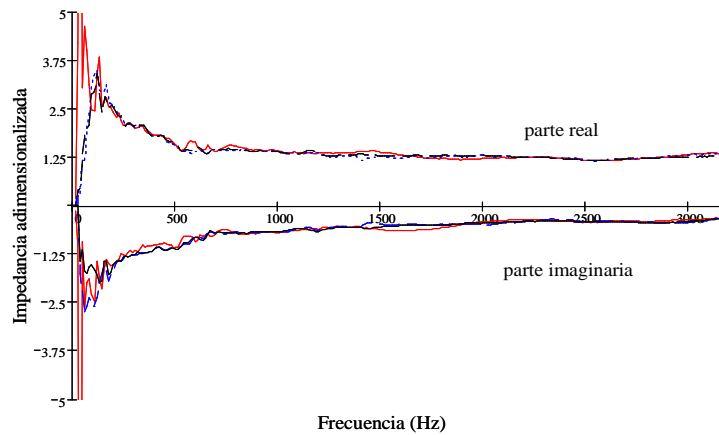


Figura 5.22 Comparación de la impedancia característica de una muestra de fibra de vidrio de 44.32 kg/m^3 de densidad obtenida con los tres métodos. Espesor de 5 cm: —, método de las Dos Cavidades; - - -, método de las Dos Fuentes; — — —, método de la Matriz de Transferencia.

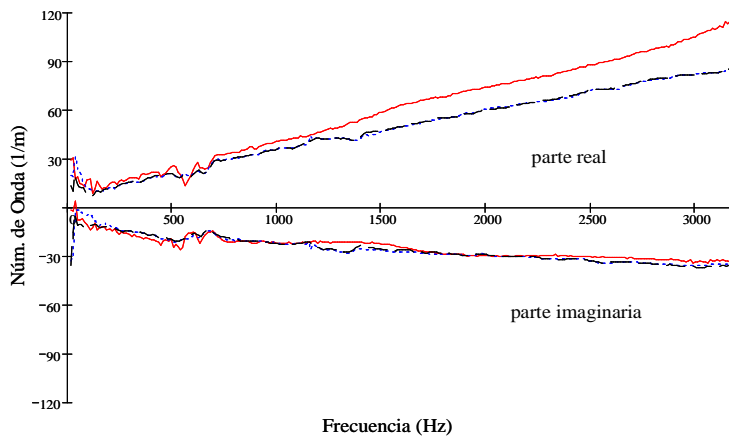


Figura 5.23 Comparación del número de onda de una muestra de fibra de vidrio de 44.32 kg/m^3 de densidad obtenida con los tres métodos. Espesor de 5 cm:
 — (rojo), método de las Dos Cavidades; - - - (azul), método de las Dos Fuentes;
 — (negro), método de la Matriz de Transferencia.

La tendencia del comportamiento acústico registrada por medio de los tres métodos es bastante similar. La impedancia característica exhibe resultados próximos entre sí, como muestra la Figura 5.22. En cambio, con el número de onda, cabe destacar la discrepancia observada con el método de las Dos Cavidades, cuya pendiente es superior que los valores obtenidos por medio de los métodos de las Dos Fuentes y de la Matriz de Transferencia, según se muestra en la Figura 5.23. Los métodos de las Dos Fuentes y de la Matriz de Transferencia proporcionan resultados afines ya que se fundamentan en un principio similar. La diferencia entre ellos proviene de la utilización de ecuaciones diferentes y de las hipótesis adicionales de simetría y reciprocidad, por lo que la propagación del error en los cálculos también lo es. El método de la Matriz de Transferencia, por poseer un error reducido y por su sencillez en el procedimiento de medición, es la técnica seleccionada para caracterizar acústicamente materiales absorbentes en la Tesis.

5.2.5. Ajustes de curvas de comportamiento

Como se indicó en el Capítulo 2, se destaca la contribución de los trabajos de Delany y Bazley [34] en el desarrollo de un modelo de caracterización del material absorbente basado en su impedancia y número de onda complejos. Las ecuaciones que caracterizan al material absorbente en función de estos dos parámetros son

$$\tilde{Z} = \rho_0 c_0 \left(\left(1 + a_5 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_6} \right) + j \left(a_7 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_8} \right) \right) \quad (5.107)$$

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c_0} \left(\left(1 + a_3 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_4} \right) + j \left(a_1 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_2} \right) \right) \quad (5.108)$$

Al introducir el parámetro de frecuencia adimensional $\zeta_f = f\rho_0/R$, y reordenando términos [42] se tiene

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{Z}}{\rho_0 c_0} - 1 \right) = a_5 \zeta_f^{a_6} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{Z}}{\rho_0 c_0} \right) = a_7 \zeta_f^{a_8} \quad (5.109)$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{k}}{\omega/c_0} - 1 \right) = a_3 \zeta_f^{a_4} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{k}}{\omega/c_0} \right) = a_1 \zeta_f^{a_2} \quad (5.110)$$

Utilizando logaritmos

$$\log \left(\operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{Z}}{\rho_0 c_0} - 1 \right) \right) = \log a_5 + a_6 \log \zeta_f \quad (5.111)$$

$$\log \left(\operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{Z}}{\rho_0 c_0} \right) \right) = \log a_7 + a_8 \log \zeta_f \quad (5.112)$$

$$\log \left(\operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{k}}{\omega/c_0} - 1 \right) \right) = \log a_3 + a_4 \log \zeta_f \quad (5.113)$$

$$\log \left(\operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{k}}{\omega/c_0} \right) \right) = \log a_1 + a_2 \log \zeta_f \quad (5.114)$$

se consiguen expresiones lineales. Mediante el método de mínimos cuadrados se ajustan los coeficientes a_i , $i = 1, \dots, 8$. De acuerdo a pruebas de medida de resistividad efectuadas en el CMT² para materiales como la fibra de vidrio, y en base a los resultados obtenidos, la resistividad puede ser calculada de forma aproximada por la expresión $R = A_1 \rho^{A_2}$ siendo ρ la densidad de compactación

² CMT. Centro de Motores Térmicos (Dpto. de Máquinas y Motores Térmicos de la Universidad Politécnica de Valencia).

de la fibra, donde por ajuste con el método de mínimos cuadrados, se logran los valores $A_1 = 13.580$ y $A_2 = 1.801$ [41]. En las Figuras 5.24 a 5.29 las curvas de impedancia y de número de onda complejo, obtenidas mediante el método de la Matriz de Transferencia, se han ajustado en función de los coeficientes de Delany y Bazley.

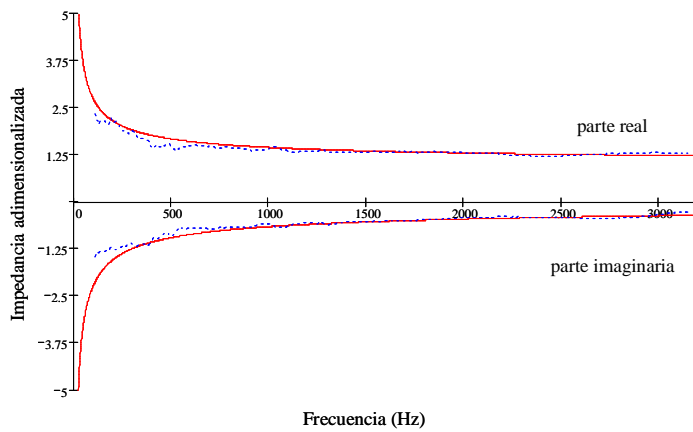


Figura 5.24 Impedancia compleja en una muestra de fibra de vidrio, densidad 44.32 kg/m^3 : —, curva ajustada; - - - -, curva experimental.

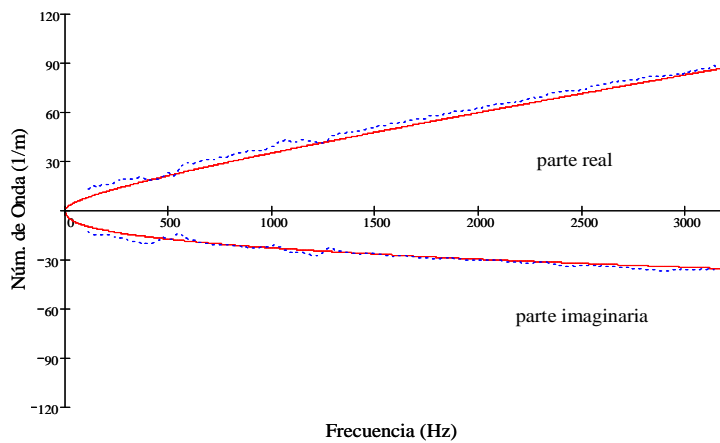


Figura 5.25 Número de onda complejo en una muestra de fibra de vidrio, densidad 44.32 kg/m^3 : —, curva ajustada; - - - -, curva experimental.

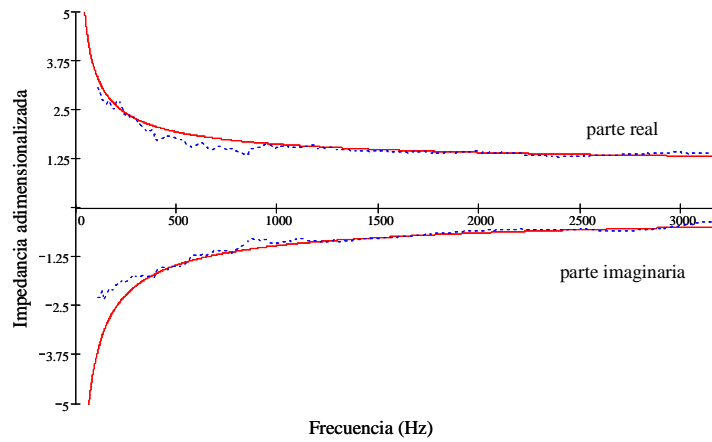


Figura 5.26 Impedancia compleja en una muestra de fibra de vidrio, densidad 70.91 kg/m^3 : —, curva ajustada; - - -, curva experimental.

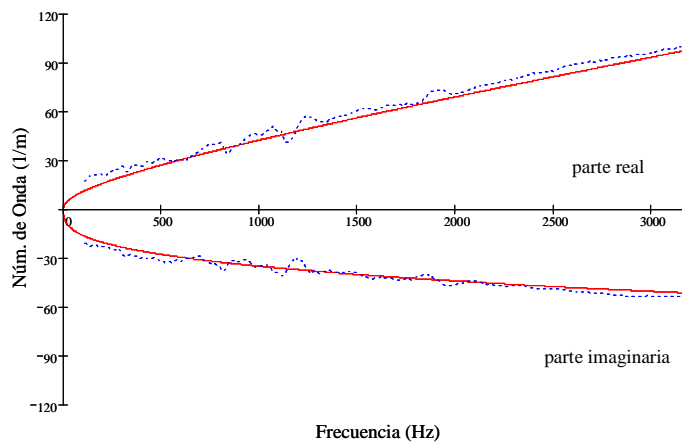


Figura 5.27 Número de onda complejo en una muestra de fibra de vidrio, densidad 70.91 kg/m^3 : —, curva ajustada; - - -, curva experimental.

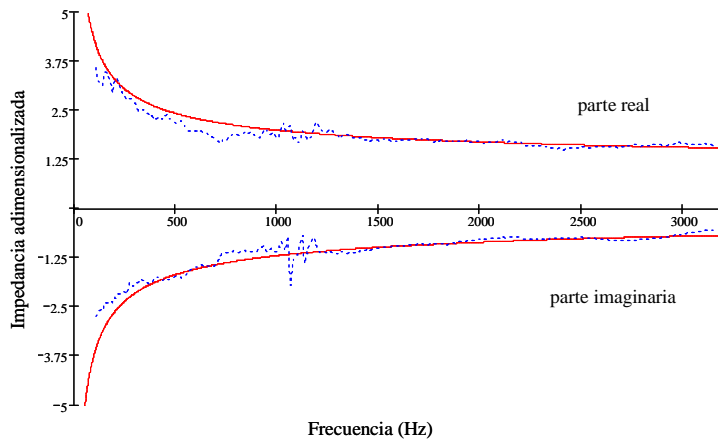


Figura 5.28 Impedancia compleja en una muestra de fibra de vidrio, densidad 88.64 kg/m^3 : —, curva ajustada; - - - , curva experimental.

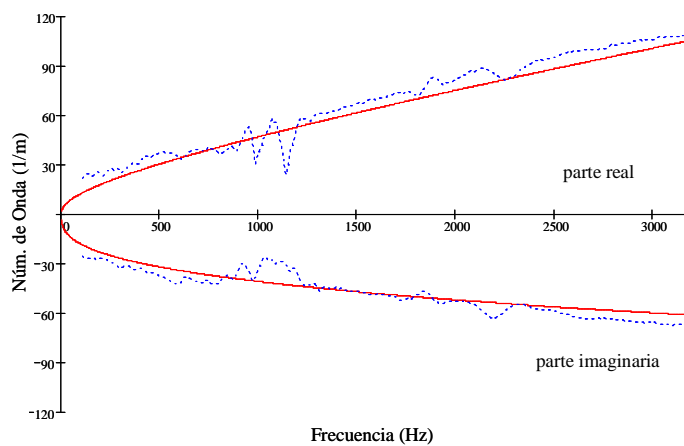


Figura 5.29 Número de onda complejo en una muestra de fibra de vidrio, densidad 88.64 kg/m^3 : —, curva ajustada; - - - , curva experimental.

Colocando las curvas de impedancia en una sola gráfica y del número de onda complejo en otra, se puede advertir la variación de los valores medidos y ajustados en función de la densidad del material absorbente, observar Figuras 5.30 y 5.31.

Los coeficientes a_1 - a_8 obtenidos para las muestras de diferente densidad se exhiben en la siguiente tabla

Coeficientes	
a_1	-0.259197
a_2	-0.615444
a_3	0.217626
a_4	-0.569622
a_5	0.126581
a_6	-0.574489
a_7	-0.191906
a_8	-0.548730

Tabla 5.2 Coeficientes de Delany-Bazley para muestras de densidad 44.32 kg/m³, 70.91 kg/m³ y 88.64 kg/m³.

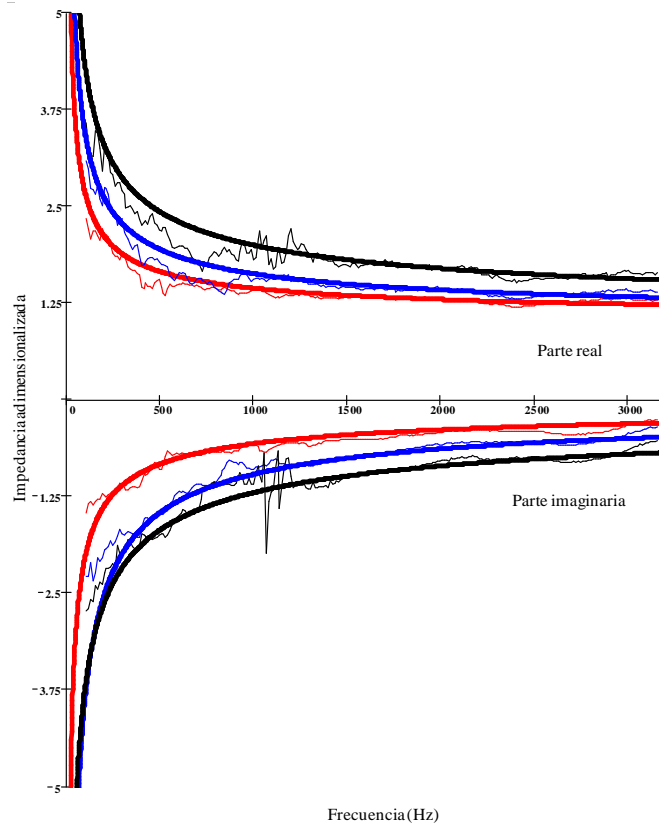


Figura 5.30 Impedancia compleja en muestras de diferente densidad de fibra de vidrio, espesor 5 cm: curva experimental: —, 44.32 kg/m³; —, 70.91 kg/m³; —, 88.64 kg/m³. Curva ajustada: —, 44.32 kg/m³; —, 70.91 kg/m³; —, 88.64 kg/m³.

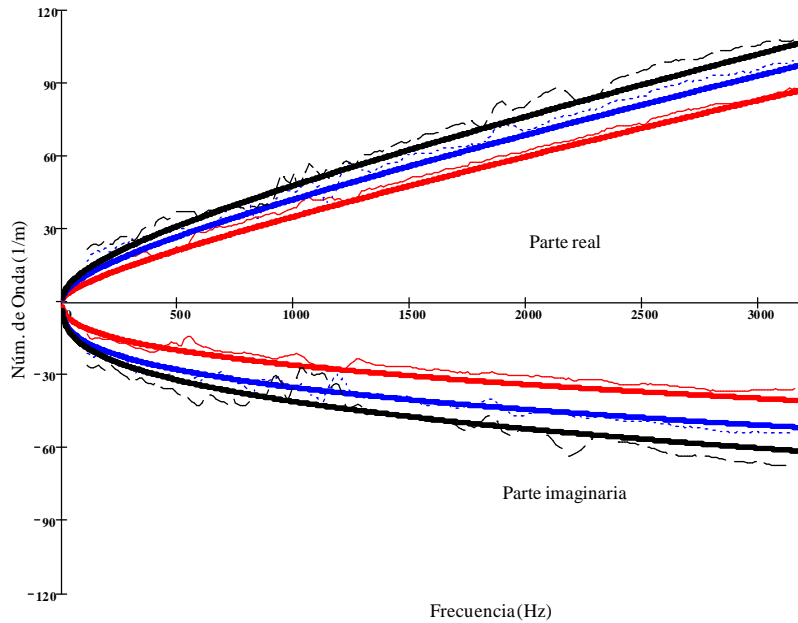


Figura 5.31 Número de onda en muestras de diferente densidad de fibra de vidrio, espesor 5 cm: curva experimental: —•—, 44.32 kg/m³; —•—, 70.91 kg/m³; —•—, 88.64 kg/m³.
Curva ajustada: —, 44.32 kg/m³; —, 70.91 kg/m³; —, 88.64 kg/m³.

5.3. Caracterización del silenciador en ausencia de flujo medio

5.3.1. Introducción

Los métodos expuestos hasta ahora han servido para caracterizar acústicamente los materiales absorbentes que forman parte de los silenciadores disipativos. De los tres procedimientos analizados, el método de las Dos Fuentes y el de la Matriz de Transferencia hacen uso de la función de transferencia. El método de las Dos Cavidades puede verse mejorado si en vez de hacer uso de la descomposición de ondas, expuesto anteriormente, es modificado haciendo uso de la función de transferencia.

La caracterización de un silenciador implica el diseño de un sistema experimental que incluya la posibilidad de reproducir el sistema acústico en un

motor de combustión [17]. El diseño debe contemplar la caracterización lineal completa de silenciadores en un tiempo razonable, con precisión y bajo coste computacional, a través de un único proceso de medida que evite la necesidad de realizar dos montajes.

5.3.2. Método de la función de transferencia

Éste método fue originalmente propuesto por Chung y Blaser [20, 21] para el análisis sin flujo medio de un sistema acústico, y modificado posteriormente al incorporarse flujo medio [22]. El método de la función de transferencia, como parte de la teoría de la descomposición de ondas, se caracteriza por ser un procedimiento computacionalmente eficiente y fácil de implementar. El objetivo primordial consiste en la obtención de la función de transferencia H_{ij} de la presión acústica registrada entre dos micrófonos i, j . Una vez calculada es fácil determinar el coeficiente de reflexión complejo R . Finalmente, en base a estos datos, puede evaluarse el TL del silenciador o de un elemento que lo compone.

La presión acústica de cada punto de medida es la suma de las componentes progresiva y regresiva. De este modo, para dos puntos de medida z_1 y z_2 se tiene

$$p(z_1, t) = p^+(z_1, t) + p^-(z_1, t) = p^+(z_1) e^{j(\omega t - k_0 z_1)} + p^-(z_1) e^{j(\omega t + k_0 z_1)} \quad (5.115)$$

$$p(z_2, t) = p^+(z_2, t) + p^-(z_2, t) = p^+(z_2) e^{j(\omega t - k_0 z_2)} + p^-(z_2) e^{j(\omega t + k_0 z_2)} \quad (5.116)$$

o bien

$$p(z_1, t) = \left(p^+(z_1) e^{-jk_0 z_1} + p^-(z_1) e^{jk_0 z_1} \right) e^{j\omega t} \quad (5.117)$$

$$p(z_2, t) = \left(p^+(z_2) e^{-jk_0 z_2} + p^-(z_2) e^{jk_0 z_2} \right) e^{j\omega t} \quad (5.118)$$

donde $p^+(z_i, t)$ y $p^-(z_i, t)$ son las amplitudes de las ondas progresiva y regresiva, respectivamente, en los puntos de medida z_1 y z_2 , y $k_0 = \omega/c_0$. Chung y Blaser [20] emplean integrales de convolución para obtener la respuesta impulsiva de las ondas incidente y regresiva y su superposición en los puntos de medida. A partir de la expresión general de una onda estacionaria en un conducto [35, 79] las expresiones finales de interés pueden evaluarse de forma fácil.

Empleando la Transformada de Fourier en las ecuaciones (5.117) y (5.118) se obtienen dos nuevas ecuaciones, fundamentales para el cálculo de la función de transferencia entre ambos puntos de medida

$$P_1(f) = P^+(f)e^{-jk_0z_1} + P^-(f)e^{jk_0z_1} \quad (5.119)$$

$$P_2(f) = P^+(f)e^{-jk_0z_2} + P^-(f)e^{jk_0z_2} \quad (5.120)$$

La función de transferencia H_{12} entre ambos puntos es el cociente de las ecuaciones anteriores

$$H_{12}(f) = \frac{P_2(f)}{P_1(f)} = \frac{P^+(f)e^{-jk_0z_2} + P^-(f)e^{jk_0z_2}}{P^+(f)e^{-jk_0z_1} + P^-(f)e^{jk_0z_1}} \quad (5.121)$$

El coeficiente de reflexión R en el punto de medida z_1 es la relación entre la amplitud de la onda regresiva e incidente en ese punto

$$R_1(f) = \frac{P^-(f)e^{jk_0z_1}}{P^+(f)e^{-jk_0z_1}} = \frac{H_{12}(f) - H_i(f)}{H_r(f) - H_{12}(f)} \quad (5.122)$$

Esta última expresión representa el fundamento de este procedimiento y a partir de ella se determinan la impedancia acústica y otros parámetros. La relación entre el coeficiente de reflexión para el primer micrófono R_1 y para el segundo R_2 es

$$\frac{R_1(f)}{R_2(f)} = \frac{H_i(f)}{H_r(f)} \quad (5.123)$$

Asumiendo que la propagación es en forma de onda plana, no existe flujo medio y se desprecian pérdidas en la pared del conducto, H_i y H_r pueden expresarse como

$$H_i(f) = e^{-jk_0s} \quad H_r(f) = e^{-jk_0s} \quad (5.124, 5.125)$$

donde s es la distancia entre los puntos de medida z_1 y z_2 . Las expresiones (5.123)-(5.125) muestran que la magnitud del coeficiente de reflexión es independiente del punto en que es medido.

Merece especial atención la distancia entre los puntos de medida. La elección de la distancia s debe ser tal que impida que la ecuación (5.122) sea indeterminada. El denominador de esta expresión se anula cuando [20]

$$ks = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.126)$$

o bien,

$$s = m \left(\frac{\lambda}{2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.127)$$

Estos términos indican que la distancia s entre micrófonos debe ser diferente a la mitad de la longitud de una onda o múltiplos de ella a una determinada frecuencia f . Si la frecuencia máxima de trabajo es f_{max} dicha separación debe cumplir

$$s \leq \frac{c_0}{2f_{max}} \quad (5.128)$$

Para calcular el coeficiente de reflexión en un punto diferente a los puntos de medida se aplica la ecuación (5.123)

$$\frac{R_1(f)}{R(f)} = \frac{H'_i}{H'_r} \quad (5.129)$$

donde $H'_i = e^{-jk_0 l}$, $H'_r = e^{jk_0 l}$ y l es la distancia entre la superficie del elemento y el punto de medida 1. Por medio de las expresiones anteriores $R(f)$ es

$$R(f) = \frac{R_1(f) H'_r}{H'_i} = R_1 \frac{e^{jk_0 l}}{e^{-jk_0 l}} = R_1 e^{2jk_0 l} \quad (5.130)$$

La impedancia acústica compleja en función del coeficiente de reflexión $R(f)$ en una sección cualquiera del conducto a una distancia l desde el primer punto de medida es

$$Z(f) = \rho_0 c_0 \frac{1 + R(f)}{1 - R(f)} \quad (5.131)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.122) y (5.130) en (5.131) ésta se transforma en [20]

$$Z(f) = j\rho_0 c_0 \frac{H_{12} \operatorname{sen}(k_0 l) - \operatorname{sen}(k_0(l-s))}{\cos(k_0(l-s)) - H_{12} \cos(k_0 l)} \quad (5.132)$$

cuya parte real es

$$\theta = \rho_0 c_0 \frac{\left(\operatorname{Re}(H_{12}) \operatorname{sen}(k_0(2l-s)) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen}(2k_0(l-s)) + |H_{12}|^2 \operatorname{sen}(2k_0 l) \right) \right)}{H_d} \quad (5.133)$$

y la parte imaginaria

$$\chi = \rho_0 c_0 \frac{(-\text{Im}(H_{12}) \text{sen}(k_0 s))}{H_d} \quad (5.134)$$

siendo H_d

$$H_d = \cos^2(k_0(l-s)) - 2\text{Re}(H_{12})\cos(k_0 l)\cos(k_0(l-s)) + |H_{12}|^2 \cos^2(k_0 l) \quad (5.135)$$

De este modo, la impedancia acústica de un elemento es evaluada fácilmente determinando la función de transferencia H_{12} .

El índice de pérdidas de transmisión, TL , se logra empleando los coeficientes de reflexión calculados aguas arriba y aguas abajo del elemento acústico. Suponiendo que lo anteriormente visto equivale a la determinación de la función de transferencia aguas arriba del elemento entre los micrófonos 1 y 2, el planteamiento es análogo aguas abajo, entre los micrófonos 3 y 4 cuya función de transferencia es

$$H_{34}(f) = \frac{P_4(f)}{P_3(f)} \quad (5.136)$$

Siendo el coeficiente de reflexión aguas arriba del elemento $R_u(f)$ la potencia acústica de la onda incidente W_i se calcula por [20, 22]

$$W_i = \frac{S_{uu} A_u}{\rho_0 c_0 |1 + R_u|^2} \quad (5.137)$$

donde S_{uu} y A_u son la densidad espectral de potencia y área de la sección transversal, respectivamente, aguas arriba del silenciador. Por otro lado, la potencia acústica transmitida W_t , aguas abajo del elemento es

$$W_t = \frac{S_{dd} A_d}{\rho_0 c_0 |1 + R_d|^2} \quad (5.138)$$

donde S_{dd} y A_d representan la densidad espectral de potencia y área de la sección transversal, respectivamente, aguas abajo del silenciador. Como se describió en el Capítulo 2 el índice de Pérdidas de Transmisión, TL , es calculado por la expresión

$$TL = 10 \log \left(\frac{W_i}{W_t} \right) \quad (5.139)$$

y desarrollando de acuerdo a (5.137) y (5.138)

$$TL = 20 \log \left(\frac{1+R_d}{1+R_u} \right) + 10 \log \left(\frac{A_u}{A_d} \right) - 20 \log |H_t| \quad (5.140)$$

donde finalmente

$$TL = 20 \log \left(\frac{|H_r - H_{12}(f)|}{|H_r - H_{34}(f)|} \right) + 10 \log \left(\frac{A_u}{A_d} \right) - 20 \log |H_t| \quad (5.141)$$

en la que

$$|H_t| = \left| \frac{S_{dd}}{S_{uu}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5.142)$$

La expresión (5.141) es válida si el número de onda adimensional k_0s de las relaciones (5.124) y (5.125) es el mismo, aguas arriba y aguas abajo.

5.3.3. Sistema experimental

En esta sección se hace una descripción del banco de ensayos existente, por medio del cual se han llevado a cabo los ensayos que han permitido caracterizar acústicamente los materiales absorbentes, y a su vez, conocer el comportamiento acústico, en función de las pérdidas por transmisión, de los silenciadores que se contemplan en la Tesis. El montaje actual permite realizar el estudio de caracterización acústica por medio de los tres procedimientos analizados sin la presencia de flujo medio.

En la Figura 5.32 se muestra el sistema experimental disponible en el Banco de Ensayos y utilizado en la determinación de la función de transferencia. La configuración es similar a la empleada por Denia y Selamet [35, 94]. La señal del altavoz es generada por un módulo de generador de señal y amplificador Brüel & Kjaer 3107 que proporciona un adecuado ancho de banda. Aguas arriba y aguas abajo del silenciador se conectan dos tubos de impedancia cuyo diámetro es de 0.04859 m.

La propagación será en forma de onda plana si se cumple la relación expresada en el Capítulo 4, expresión (4.66) y (5.50). Para un conducto de estas características y asumiendo $c_0 = 340$ m/s la frecuencia de corte es

$$f_{c,1,0} = \frac{1.841c_0}{2\pi r} = \frac{1.841 \cdot 340}{2\pi \cdot 0.02495} \approx 4000 \text{ Hz} \quad (5.143)$$

Este valor supera al rango de frecuencias adoptado en la Tesis. El conducto aguas arriba del silenciador conecta el altavoz con el silenciador. El conducto aguas abajo del silenciador, de 4.5 m de longitud, tiene una terminación anecoica. Dos pares de micrófonos de $\frac{1}{4}$ de pulgada (Brüel & Kjaer 4135) se colocan enrasados con la superficie interna de los conductos. La separación s es similar en ambas parejas siendo de 0.03556 m, cumpliendo la expresión (5.128) para la fijación del límite superior de la frecuencia de análisis f_{max} . Las señales provenientes de los cuatro micrófonos son preamplificadas y tratadas por un analizador de señales multicanal (Brüel & Kjaer 3550).

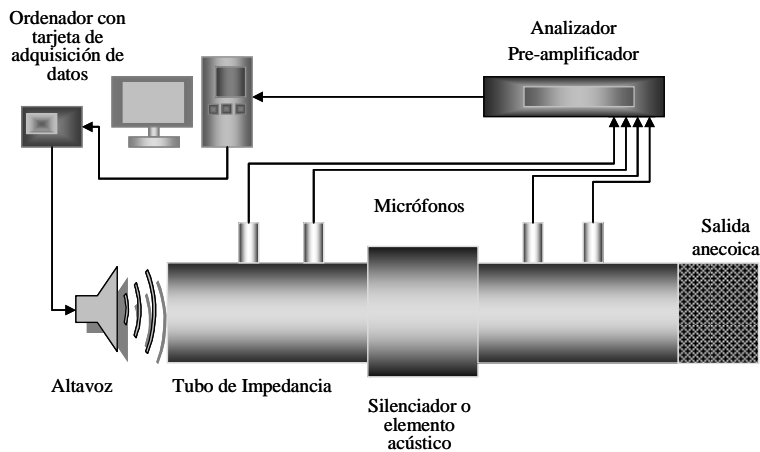


Figura 5.32 Sistema experimental existente.

5.3.4. Calibración del sistema

Una vez que el sistema está instalado debe procederse con la calibración del sistema de medida. La técnica de calibración más empleada cuando existen pares de micrófonos es la de conmutación. La determinación de la función de transferencia requiere de una metódica comprobación tanto de la ganancia como de la fase de los canales de medida [20, 35]. Mediante esta técnica no sólo es posible la eliminación del error asociado a la diferencia de fase entre ambos micrófonos, y elementos adicionales que pueden estar conectados a éstos [35], sino que resulta independiente de los factores de ganancia de los dos canales de medida.

Por medio de este método la función de transferencia es medida con una configuración inicial de micrófonos. Posteriormente, los micrófonos se

intercambian y se evalúa de nuevo. La función de transferencia se calcula a partir de la media geométrica de los resultados de las mediciones inicial y final (conmutada).

Sean H_{11} y H_{12} las respuestas en frecuencia compleja asociadas a los canales de los micrófonos 1 y 2. De la teoría lineal, la función de transferencia medida por los dos micrófonos con la configuración inicial es [21]

$$H_{12}^o = \frac{S_{12}}{S_{11}} H_1^o \quad (5.144)$$

donde

$$H_1^o = \frac{H_{11}^* H_{12}}{|H_{11}|^2} \quad (5.145)$$

en la que * denota conjugada compleja y el superíndice o equivale a la configuración inicial. Cuando se realiza el intercambio o conmutación de micrófonos, la función de transferencia medida es

$$H_{12}^s = \frac{S_{12}}{S_{11}} H_1^s \quad (5.146)$$

y

$$H_1^s = \frac{H_{12}^* H_{11}}{|H_{12}|^2} \quad (5.147)$$

donde el superíndice s indica la configuración posterior.

Como $H_1^o H_1^s = 1$, la función de transferencia H_{12} es calculada a partir de la media geométrica de H_{12}^o y de H_{12}^s , es decir [20, 103]

$$H_{12} = \sqrt{H_{12}^o H_{12}^s} = \frac{S_{12}}{S_{11}} \frac{\sqrt{(H_{11}^* H_{12})(H_{12}^* H_{11})}}{|H_{11}| |H_{12}|} = \frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (5.148)$$

De esta última expresión H_{12} es la función de respuesta en frecuencia expresada como el cociente de la densidad del espectro cruzado S_{12} y la densidad del autoespectro S_{11} sin considerar el efecto de los factores de ganancia y fase de la instrumentación, debido a que H_{11} y H_{12} son independientes. Esto indica que un posible cambio en la amplitud y fase en las características de la respuesta del sistema de medida no afectará los resultados. Esta característica es importante porque en la práctica los errores inducidos por la ganancia y fase en la

evaluación de la función de transferencia pueden producir alteraciones en los resultados del coeficiente de absorción, de la impedancia acústica y de las Pérdidas por Transmisión, TL .

5.3.5. Medida de silenciadores

Con el fin de verificar los resultados obtenidos mediante los modelos teóricos, se contrastarán con los logrados a partir de medidas experimentales. De este modo se podrá apreciar el grado de convergencia del modelado teórico con los silenciadores reales.

Los índices de Pérdidas de Transmisión de los silenciadores medidos corresponden al silenciador con conductos extendidos, silenciador con resonadores laterales y a la configuración multianular en la cámara de entrada.

5.3.5.1. Silenciador con conductos extendidos

Se exhibe de nuevo los resultados mostrados en el Capítulo 2, sección 2.5.2, Figura 5.34, donde se expone el Índice de Pérdidas de Transmisión de un silenciador que adopta porosidades σ de 80% y de 11%, diámetro de orificios d_h de 0.00249 m y espesor de las superficies perforadas t_h de 0.0009 m, tal como se muestra en la Figura 5.33. La resistividad del material absorbente R es de 4896 rayl/m, donde los valores complejos de la impedancia característica $\tilde{Z} = \tilde{\rho}\tilde{c}$ y del número de onda $\tilde{k} = \tilde{\omega}/\tilde{c}$ vienen dados por las expresiones (5.107) y (5.108), respectivamente,

$$\tilde{Z} = Z_0 \left[\left(1 + a_5 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_6} \right) + j \left(a_7 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_8} \right) \right]$$

$$\tilde{k} = k_0 \left[\left(1 + a_3 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_4} \right) + j \left(a_1 \left(\frac{f\rho_0}{R} \right)^{a_2} \right) \right]$$

donde f es la frecuencia y $Z_0 = \rho_0 c_0$ es la impedancia característica del aire. Para el material absorbente analizado, fibra de Owens Corning, los coeficientes a_i son $a_1 = -0.18897$, $a_2 = -0.595$, $a_3 = 0.16$, $a_4 = -0.577$, $a_5 = 0.09534$, $a_6 = -0.754$, $a_7 = -0.08504$, y $a_8 = -0.732$. Los resultados presentados en la Figura 5.34 demuestran la precisión existente entre las medidas experimentales y los modelos numéricos y analíticos desarrollados en capítulos anteriores. La Tabla 5.3 expone las dimensiones del silenciador analizado. En la Figura 5.35 se

presentan los detalles del montaje del silenciador con conductos extendidos, superficies perforadas y material absorbente.

Geometría	Longitud silenciador L_T (m)	Longitud extendido entrada L_a (m)	Longitud cámara central L_b (m)	Longitud extendido salida L_c (m)	Porosidad de las superficies perforadas σ (%)		
					lateral entrada	conducto central	lateral salida
1	0.2	0.075	0.1	0.025	80	80	80
2	0.2	0.075	0.1	0.025	11	11	11

Tabla 5.3 Dimensiones relevantes de un silenciador con conductos extendidos parcialmente rellenos de material absorbente.

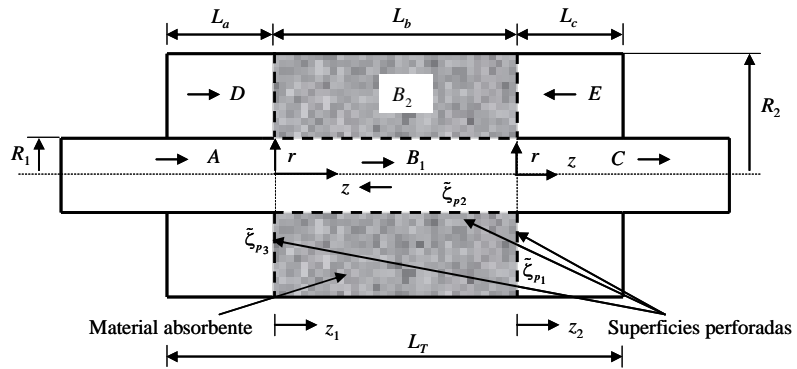


Figura 5.33 Silenciador con conductos extendidos parcialmente relleno de material absorbente.

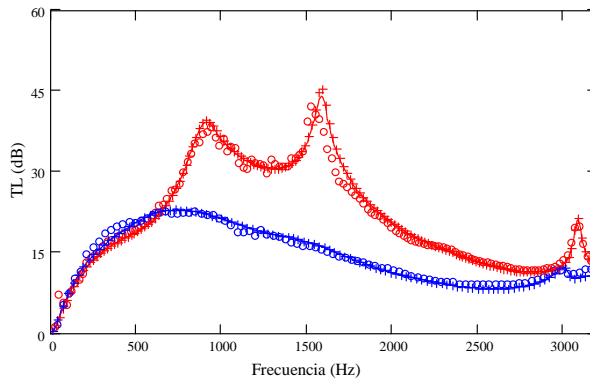
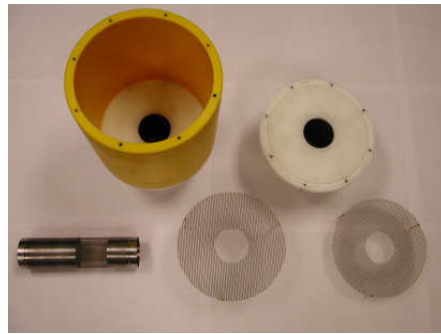


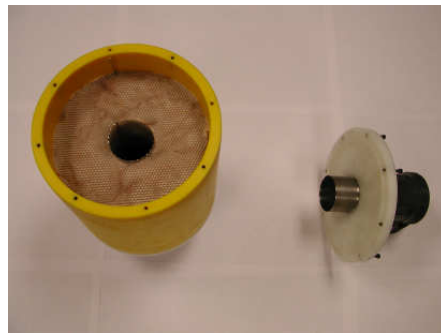
Figura 5.34 Índices de Pérdidas de Transmisión, TL , de un silenciador con conductos extendidos parcialmente relleno de material absorbente. Experimental: $\circ\circ\circ\circ$, geometría 1; $\circ\circ\circ\circ$, geometría 2. MEF: —, geometría 1; —, geometría 2. Ajuste Modal: +++++, geometría 1; +++++, geometría 2.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.35 Detalle de silenciador con conductos extendidos y conducto central perforado. (a) componentes; (b) silenciador sin material absorbente; (c) silenciador con material absorbente.

5.3.5.2. Silenciador con resonadores laterales

Las dimensiones de los prototipos utilizados en los ensayos experimentales y cálculos se muestran en la Tabla 5.4 y en la Figura 5.36 se exhibe el esquema de los mismos. El diámetro de los orificios del conducto central perforado es de 0.0035 m, y el espesor del mismo de 0.0003 m. Los ensayos se han realizado con un conducto perforado de elevada porosidad σ , del 80%, y por consiguiente, la impedancia de la superficie perforada es prácticamente nula, $\tilde{\xi}_p = 0$. El material absorbente queda acústicamente caracterizado por medio de las expresiones descritas en el apartado anterior.

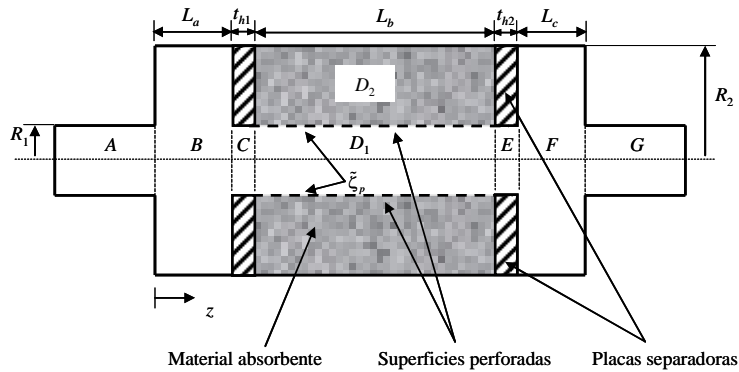


Figura 5.36 Silenciador con resonadores laterales.

Geometría	Longitud cámara lateral entrada L_a (m)	Espesor separador entrada t_{h1} (m)	Longitud cámara central L_b (m)	Espesor separador salida t_{h2} (m)	Longitud cámara lateral salida L_c (m)	Longitud total silenciador L_T (m)	Porosidad conducto central σ (%)
1	0.148	0.005	0.148	0	0	0.301	80
2	0.0665	0.005	0.148	0	0	0.2195	80

Tabla 5.4 Dimensiones relevantes de un silenciador con resonadores laterales. $R_1 = 0.0268$ m, $R_2 = 0.091875$ m. Resistividad material absorbente $R = 4896$ rayl/m.

De los resultados mostrados en el TL de la Figura 5.37 se observa la precisión existente entre los resultados obtenidos experimentalmente y por medio del modelado numérico y analítico. La Figura 5.38 muestra el detalle de montaje del silenciador en el banco acústico.

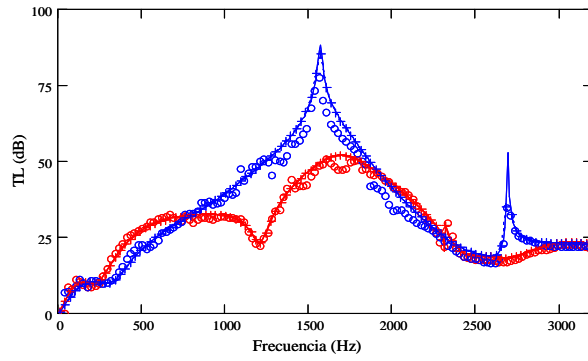
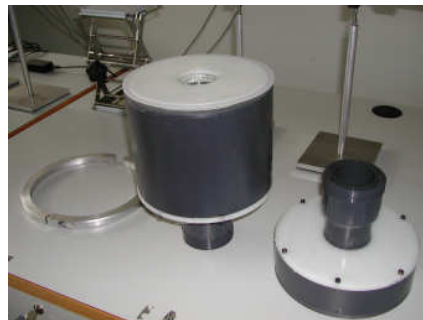
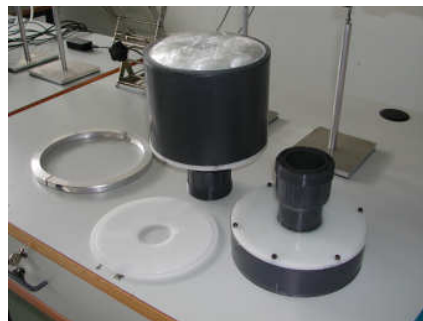


Figura 5.37 TL de un silenciador con resonadores laterales. Experimental: ooooo, geometría 1; ooooo, geometría 2. MEF: —, geometría 1; —, geometría 2. Ajuste Modal: +++++, geometría 1; +++++, geometría 2.



(a)



(b)

Figura 5.38 Detalle de un silenciador con resonadores laterales. (a) componentes; (b) detalle de la fibra absorbente.

5.3.5.3. Silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida

Las pruebas experimentales se realizaron con un prototipo cuyas dimensiones se detallan en la Tabla 5.5. Al igual que en los casos anteriores el diámetro de los orificios del conducto perforado es de 0.0035 m y el espesor de 0.0003 m. La Figura 5.39 representa el modelo estudiado.

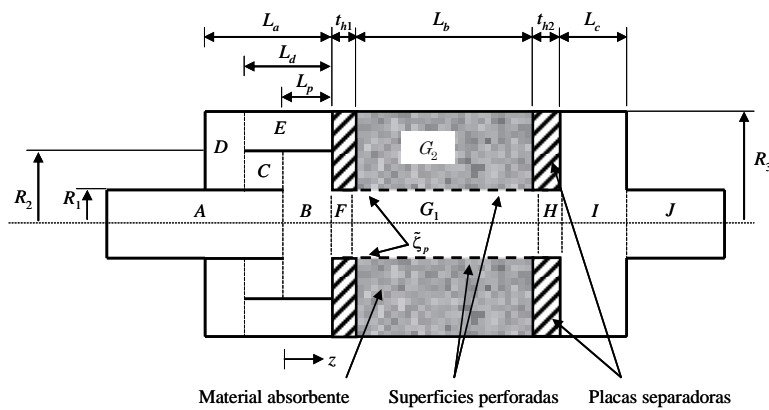


Figura 5.39 Silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida.

Geometría	Long. resonador entrada, L_a (m)	Long. anillo interno, L_d (m)	Long. cámara entrada, L_p (m)	Espesor separador entrada y salida, t_{h1}, t_{h2} (m)	Long. cámara central, L_b (m)	Long. cámara salida, L_c (m)	Long. total silenciador, L_T (m)	Resistv. R (rayl/m)
1	0.148	0.111	0.048	0.005	0.248	0.05	0.456	4896
2	0.148	0.111	0.048	0.005	0.248	0.05	0.456	0

Tabla 5.5 Dimensiones relevantes de un silenciador híbrido con resonador anular de entrada y cámara lateral de salida. $R_1 = 0.0268$ m, $R_2 = 0.054$ m, $R_3 = 0.091875$ m, porosidad $\sigma = 80\%$.

Para ambas geometrías se asume una elevada porosidad σ , del 80%, de tal modo que la impedancia de las superficies perforadas sea nula, $\tilde{\zeta}_p = 0$. En la geometría 2 no existe fibra. La predicción de los resultados entre los modelos numérico y analítico muestra una excelente concordancia, al igual que cuando se comparan con los resultados obtenidos por medios experimentales, según se expone en la Figura 5.40. Sin embargo, se observan ciertas discrepancias las cuales podrían asociarse a defectos en la fabricación del prototipo, proceso de relleno con fibra o problemas en el registro de la presión acústica en los micrófonos aguas abajo del prototipo para frecuencias cuyo contenido está muy atenuado.

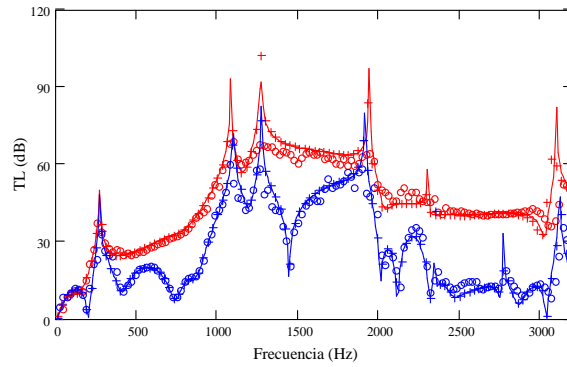


Figura 5.40 TL de silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida con material absorbente. Experimental: $\circ\circ\circ\circ$, geometría 1; $\circ\circ\circ\circ$, geometría 2. MEF: —, geometría 1; —, geometría 2. Ajuste Modal: +++++, geometría 1, +++++, geometría 2.

De los resultados anteriormente mostrados se verifica que el empleo de técnicas modales multidimensionales proporciona resultados con suficiente precisión, bajo coste computacional y al aplicar técnicas numéricas de modelado, evita la necesidad de conformar nuevamente la geometría ante cualquier variación de las dimensiones. Asimismo se prescinde de la fabricación de numerosos prototipos para ser utilizados en los ensayos experimentales. En la Figura 5.41 se exhiben los detalles del montaje del prototipo.



(a)

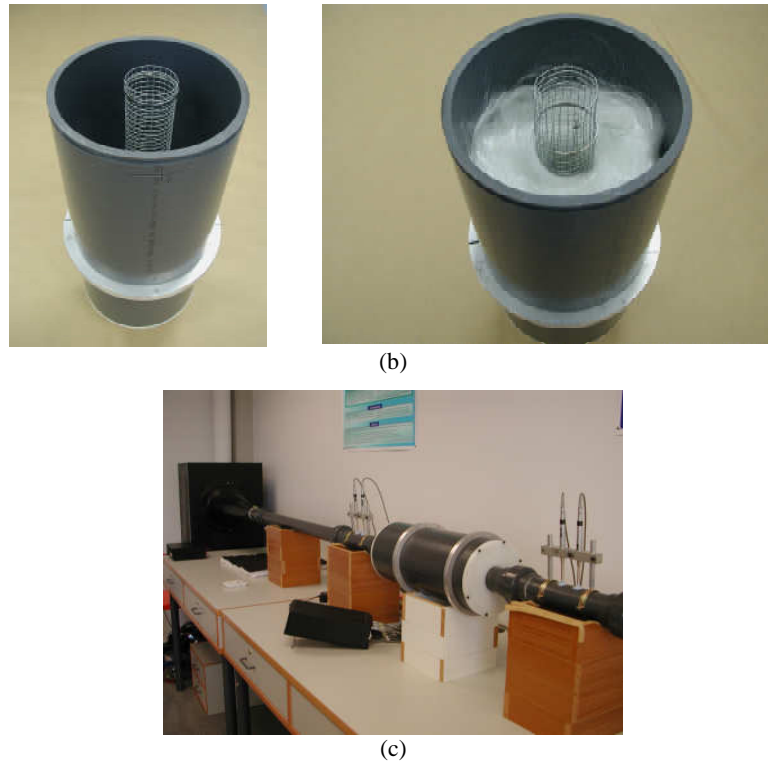


Figura 5.41 Detalle de un silenciador híbrido con resonador multianular de entrada y cámara lateral de salida con material absorbente. (a) componentes; (b) cámara central sin material absorbente; (c) cámara central con material absorbente; (d) montaje del silenciador en el banco de ensayos.

5.4. Conclusiones

A lo largo del capítulo se han analizado tres métodos de obtención de las propiedades acústicas de componentes disipativos de silenciadores. En el método de las Dos Cavidades se utiliza un par de micrófonos que registran la presión acústica aguas arriba del elemento acústico a caracterizar. Para definir las propiedades acústicas de una muestra de material absorbente, una cavidad o espacio con aire es dejado entre la muestra y la terminación rígida del tubo de impedancia, realizándose dos ensayos, uno con la cavidad de corta longitud, y otro con un espacio de mayor longitud. De las técnicas estudiadas se ha resaltado que los métodos de las Dos Fuentes y de la Matriz de Transferencia tienen en común el empleo de una matriz de cuatro polos, que define el comportamiento

acústico de un elemento, y de la función de transferencia. Se ha destacado que ambos procedimientos difieren en el planteamiento de las ecuaciones a las que se recurre para definir los cuatro polos. En el método de las Dos Fuentes se requiere efectuar dos ensayos, o utilizando dos fuentes acústicas rotando el portamuestras o trasladando de ubicación la fuente de ruido. En el método de la Matriz de Transferencia sólo se necesita una prueba y en el montaje experimental se colocan un par de micrófonos aguas arriba del elemento y otro par aguas abajo. La salida es anecoica para evitar reflexiones de onda.

Para la definición de las propiedades acústicas de un elemento se ha escogido el método de la Matriz de Transferencia ya que ha demostrado tener un error reducido y el proceso de medida es eficiente. Por el contrario, los mayores errores se han observado en la utilización del método de las Dos Cavidades.

Para analizar el comportamiento del material absorbente de diversas densidades, en función de las mediciones efectuadas, se ha procedido a la elaboración de gráficas experimentales de la impedancia acústica compleja y del número de onda complejo. En base a los datos de resistividad de materiales absorbentes y a partir de las ecuaciones de Delany y Bazley se han ajustado las curvas de comportamiento que más se aproximan a las curvas experimentales.

Se han estudiado conceptos relacionados con el registro de señales a través de micrófonos colocados en un tubo de impedancia y su tratamiento matemático en función de la Transformada de Fourier. Se han considerado conceptos como densidad espectral de potencia en los puntos de medida y densidad espectral de potencia cruzada entre dos puntos de medida resaltándose su importancia en la definición de la función de transferencia, por medio de la cual se obtienen las Pérdidas de Transmisión, TL , de un sistema acústico. Asimismo se ha realizado una descripción del banco de ensayos y de los procedimientos de calibración de micrófonos.

Experimentalmente se han conseguido los resultados de las Pérdidas por Transmisión, TL , de algunos de los silenciadores estudiados en esta Tesis. Posteriormente, se han comparado con los cálculos analíticos y de Elementos Finitos demostrándose que el comportamiento acústico obtenido experimentalmente se aproxima al logrado analíticamente. Esto indica la validez del método analítico desarrollado como una herramienta de examen del comportamiento acústico de silenciadores.

Capítulo 6. Conclusiones y desarrollos futuros

Resumen del capítulo:

En este capítulo se exponen las conclusiones descritas en capítulos previos en respuesta a los objetivos planteados en la Tesis, referidos al desarrollo de herramientas de modelado y cálculo del comportamiento acústico de silenciadores de escape híbridos, precisas y de un reducido coste computacional, para ser utilizadas en etapas de diseño. Se recogen las aportaciones introducidas y se mencionan futuros desarrollos que puedan continuar la línea de investigación.

6.1. Conclusiones y aportaciones

En función de los objetivos principales planteados en la Tesis y con el propósito de mejorar la rapidez y confiabilidad de los instrumentos de predicción acústica de silenciadores híbridos se describen las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo de la Tesis.

- La utilización de técnicas modales multidimensionales, como los métodos de Integración en Subdominios y Ajuste Modal, aplicados en silenciadores híbridos de geometrías axisimétricas han demostrado tener buenas propiedades de convergencia y precisión en las predicciones de atenuación acústica basados en el índice de Pérdidas de Transmisión, TL . Debido a que la mayoría de los silenciadores que se emplean a escala comercial poseen una sección transversal sencilla y axialmente uniforme, al menos a tramos, ha sido posible la elaboración de herramientas de cálculo basadas en la descripción modal analítica de la ecuación de ondas en conductos de pared rígida.
- Ambas técnicas modales, orientadas al cálculo de la atenuación de ruido, acoplan los diferentes subdominios que forman parte del silenciador. Además de la precisión de los resultados generados se destaca el hecho de su reducido coste computacional.
- El método de Elementos Finitos se ha aplicado al estudio del comportamiento acústico de diversas geometrías de silenciadores con la finalidad de exponer sus características más importantes y las limitaciones del modelo de onda plana. Las técnicas numéricas, como Elementos Finitos, permiten el modelado acústico de silenciadores de geometrías arbitrarias con condiciones de contorno generales. No obstante, a medida que aumenta el número de grados de libertad el coste computacional se eleva, suponiendo una limitación importante en las fases de diseño del silenciador. Esta técnica ha servido como herramienta de validación de las metodologías modales multidimensionales.
- Se ha estudiado la influencia de materiales absorbentes en el interior del silenciador. La introducción de características disipativas en el diseño de silenciadores ha permitido incrementar la atenuación a frecuencias elevadas, mejorando de esta forma la calidad sonora y permitiendo actuar sobre el ruido subjetivo. La conjugación de las características acústicas propias de un silenciador reactivo tales como la eficacia en el control del ruido a baja y media frecuencia, junto con las características asociadas a un silenciador disipativo

proporcionan un silenciador cuyas propiedades acústicas contribuyen a una mejora del comportamiento acústico.

- Se ha considerado en las geometrías estudiadas la existencia de conductos perforados, conductos extendidos, cámaras laterales, extensiones y anillos concéntricos. Los orificios de los conductos perforados generan una impedancia acústica cuyos parámetros comprenden el diámetro del orificio, espesor del conducto perforado, porosidad y su distribución y frecuencia. Además el contacto del orificio con el material absorbente produce una variación de la impedancia acústica, la cual considera, adicionalmente, factores de caracterización del material absorbente. De entre los parámetros citados se resalta la influencia que ejercen la porosidad y la resistividad del material disipativo en el comportamiento acústico. La existencia de picos de resonancia en las partes reactivas de los silenciadores híbridos a determinadas frecuencias pueden ser controlados mediante una apropiada selección de parámetros geométricos como longitud de conductos extendidos, longitud y radio externo del silenciador, longitud de cámaras laterales, longitud de la cámara anular externa y radios de anillos concéntricos. De esta selección depende que se obtenga una adecuada atenuación del ruido.

- Se han estudiado tres técnicas experimentales de caracterización de materiales absorbentes. Las técnicas de las Dos Fuentes y de la Matriz de Transferencia tienen en común el empleo de una base matemática similar. Debido a que el método de la Matriz de Transferencia proporciona los resultados más estables en función de la densidad y el espesor de una muestra de material absorbente, es la técnica seleccionada en la elaboración de pruebas de caracterización acústica de materiales absorbentes. Por otro lado, la obtención del índice de Pérdidas de Transmisión experimental, TL , ha permitido su utilización como herramienta de validación del comportamiento acústico calculado por medio de técnicas numéricas y analíticas.

Algunas de las aportaciones realizadas durante la fase de desarrollo de la Tesis han sido publicadas en las referencias [5, 38 - 40, 75].

6.2. Desarrollos futuros

En función de los desarrollos teóricos y experimentales descritos en esta Tesis se perfilan nuevos problemas, algunos de ellos extensión de lo referido aquí:

- Aplicación de técnicas numéricas y modales multidimensionales para el análisis acústico de una línea de escape conformada por conductos, silenciador y catalizador. En vista de las estrictas regulaciones ambientales existentes se hace necesario el estudio del sistema de escape completo. La consideración del catalizador es fundamental ya que debido a su configuración interna, compuesta de finísimos conductos capilares, proporciona un comportamiento disipativo, pudiendo mejorar por tanto, el comportamiento acústico del sistema.
- Ampliar el estudio del comportamiento de materiales absorbentes ante la presencia de flujo medio. Pese a que en el planteamiento tratado se suponía que el flujo inducido no generaba cambios en sus propiedades acústicas, podría ampliarse la investigación para establecer las variaciones de la densidad efectiva y velocidad acústica efectiva del material absorbente en las inmediaciones del conducto central con flujo medio. Además, establecer cómo la existencia de una placa perforada separadora de los dos medios influye en el cambio de sus propiedades acústicas.
- En vista de los adelantos en materia de control se podría avanzar en el diseño de un silenciador que modifique su configuración geométrica interna en función del cambio de las revoluciones del motor, del flujo másico u otras variables. De este modo, se aprovecharían las ventajas del comportamiento reactivo y disipativo del silenciador en un determinado rango de frecuencias y se podría obtener así la mejor atenuación posible. También cabe considerar técnicas de control activo de ruido mediante el empleo de dispositivos piezoeléctricos.
- Extender el planteamiento modal multidimensional a geometrías que contengan anillos concéntricos o cámaras multianulares en silenciadores elípticos. Se espera aprovechar las ventajas que ofrece el modelado analítico frente al coste computacional generado mediante el empleo de técnicas numéricas.
- Investigar la posibilidad de aplicar técnicas modales multidimensionales y numéricas a silenciadores cuyas paredes empleen membranas flexibles. El empleo de paredes y membranas flexibles posibilita, en conductos de sección transversal uniforme, la aparición de ondas reflejadas a bajas frecuencias que pueden mejorar la atenuación acústica. La existencia de ondas acústicas acopladas cuyo desplazamiento es lento proporcionan un interesante mecanismo de atenuación energética.

Bibliografía

- [1] Åbom, M. Derivation of four pole parameters including higher order mode effects for the expansion chamber mufflers with extended inlet and outlet. *Journal of Sound and Vibration*, 137, 403-418, 1990.
- [2] Åbom, M., Bodén, H. Error analysis of two-microphone measurements in ducts with flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83, 2429-2438, 1988.
- [3] Åbom, M., Bodén, H. Influence of errors on the two-microphone method for measuring acoustic properties in ducts. *Journal of the Acoustical Society of America*, 79, 541-549, 1985.
- [4] Abramowitz, M. y Stegun, I.A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Nueva York, 1972.
- [5] Albelda, J., Denia, F.D., Fuenmayor, F.J., Martínez, M.J. *Método semianalítico con subestructuración para el análisis acústico de silenciadores con material absorbente, superficies perforadas y flujo medio uniforme*. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Oporto, 2007.
- [6] Allard, J.F., Aknine, C., Depollier, C. Acoustical properties of partial reticulated foams with high and medium flow resistance. *Journal of the Acoustical Society of America*, 79, 1734-1740, 1986.
- [7] Astley, R.J. *Finite Elements in solids and structures. An introduction*. Chapman & Hall, Londres, 1992.
- [8] Astley, R.J., Cummings A. A finite element scheme for attenuation in ducts lined with porous material: comparison with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 116, 239-263, 1987.
- [9] Astley, R.J., Cummings, A., Sormaz, N. A finite element scheme for acoustic propagation in flexible-walled ducts with bulk-reacting liners, and comparison with element. *Journal of Sound and Vibration*, 150, 119-138, 1991.
- [10] Bauer, A.B. Impedance theory and measurements on porous acoustic liners. *Journal Aircraft*, 14, 720-728, 1977.
- [11] Bento, J.L. *Acoustic characteristics of perforate liners in expansion chamber*. Tesis Doctoral, University of Southampton, 1983.

- [12] Beranek, L. Acoustical properties of sound absorbing materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 19, 556-568, 1947.
- [13] Beranek, L. *Noise reduction*. Península Publishing, Los Altos-California, 1988.
- [14] Biot, M.A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28, 168-191, 1956.
- [15] Blackstock, D. *Fundamentals of physical acoustics*. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [16] Bolt, R.H. On the design of perforated facings for acoustical materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 19, 917-921, 1947.
- [17] Broatch, J.J. *Metodología experimental para el estudio de la respuesta acústica de elementos silenciadores de motores de combustión interna*. Tesis doctoral, Valencia, 1995.
- [18] Callaway, D.B. y Ramer, L.G. The use of perforated facings in designing low frequency resonant absorbers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 24, 309-312, 1952.
- [19] Chapra, S., Canale, R.P. *Métodos numéricos para ingenieros*. Ed. McGraw-Hill, México, 1990.
- [20] Chung, J.Y., Blazer, D.A. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68, 907-913, 1980.
- [21] Chung, J.Y., Blazer, D.A. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. II. Experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68, 914-921, 1980.
- [22] Chung, J.Y., Blazer, D.A. Transfer function method of measuring acoustic intensity in a duct with flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68, 1570-1577, 1980.
- [23] Coyette, J.P. *Flow acoustics using finite elements. Technical background and application to muffler systems*. Technical report, LMS International, 1995.
- [24] Craggs, A. A finite element method for modelling dissipative mufflers with a locally reactive lining. *Journal of Sound and Vibration*, 54, 285-296, 1977.
- [25] Craggs, A. A finite element model for rigid porous absorbing materials. *Journal of Sound and Vibration*, 61, 101-111, 1978.

- [26] Crocker, M.J. *Encyclopedia of Acoustics*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1997.
- [27] Crocker, M.J. *Handbook of Acoustics*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1998.
- [28] Cummings, A. A segmented Rayleigh-Ritz method for predicting sound transmission in a dissipative exhaust silencer of arbitrary cross section. *Journal of Sound and Vibration*, 187, 23-27, 1995.
- [29] Cummings, A. Sound attenuation in ducts lined on two opposite walls with porous material, with some applications to splitters. *Journal of Sound and Vibration*, 49, 9-35, 1976.
- [30] Cummings, A. The effects of grazing turbulent pipe-flow on the impedance of an orifice. *Acustica*, 61, 233-242, 1986.
- [31] Cummings, A., Chang, I.J. Internal mean flow effects on the characteristics of bulk-reacting liners in circular ducts. *Acustica*, 64, 170-178, 1987.
- [32] Cummings, A., Chang, I.J. Sound attenuation of a finite length dissipative flow duct silencer with internal mean flow in the absorbent. *Journal of Sound and Vibration*, 127, 1-17, 1988.
- [33] Davern, W.A. Perforated facings backed with porous materials as sound absorbers-an experimental study. *Applied Acoustics*, 10, 85-112, 1977.
- [34] Delany, M.E., Bazley, E.N. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, 3, 105-116, 1970.
- [35] Denia, F.D. *Modelado del comportamiento acústico de silenciadores de escape mediante técnicas analíticas y métodos de Elementos Finitos*. Tesis doctoral, Valencia, 2004.
- [36] Denia, F.D., Albelda, J., Fuenmayor, F.J., Torregrosa, A.J. Acoustic behaviour of elliptical chambers mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 241, 401-421, 2001.
- [37] Denia, F.D., Selamet, A., Fuenmayor, F.J., Kirby, R. Acoustic attenuation performance of perforated dissipative mufflers with empty inlet/outlet extensions. *Journal of Sound and Vibration*, 302, 1000-1017, 2007.
- [38] Denia, F.D., Selamet, A., Martínez, M.J., Fuenmayor F.J. *Analytical modeling of hybrid mufflers: comparison of various geometries for improving the acoustic performance*. Inter-Noise, Istanbul, 2007.

- [39] Denia, F.D., Selamet, A., Martínez, M.J., Fuenmayor F.J. Sound attenuation of a circular multi-chamber hybrid muffler. *Noise Control Engineering Journal*, 56, 356-364, 2008.
- [40] Denia, F.D., Selamet, A., Martínez, M.J., Torregrosa A.J. *Hybrid mufflers with short lateral chambers: analytical, numerical and experimental studies*. Thirteenth International Congress on Sound and Vibration, Vienna, 2006.
- [41] Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia. *Informe 5*, Proyecto DPI2003-07153-C02-01. Noviembre 2005.
- [42] Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. *Procedimientos de Ajuste de las Características Acústicas de Materiales Absorbentes*. Informe interno DPI2003-07153-C02-01. Febrero 2005.
- [43] Dickey, N.S., Selamet, A. y Ciray, M.S. An experimental study of the impedance of perforated plates with grazing flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 110, 2360-2370, 2001.
- [44] Dickey, N.S., Selamet, A. y Novak, J.M. The effect of high-amplitude sound on the attenuation of perforated tube silencers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108, 1068-1081, 2000.
- [45] Ericsson, L.J. Higher order mode effects in circular ducts and expansion chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68, 545-550, 1980.
- [46] El-Sharkawy, A.I., Nayfeh, A.H. Effect of the expansion chamber on the propagation of sound in circular pipes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63, 667-674-1978.
- [47] Garrison, F.D., Schnell, A.C., Baldwin, C.D., Russel, P.R. Suppression of combustion oscillations with mechanical damping devices. *Pratt and Whitney Aircraft Report PWA, FR-3299*, 1969.
- [48] Glav, R. The point matching method on dissipative silencers of arbitrary cross section. *Journal of Sound and Vibration*, 189, 123-135, 1996.
- [49] Glav, R. The transfer matrix for a dissipative silencer of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 236, 575-594, 2000.
- [50] Gogate, G.R., Munjal, M.L. Analytical and experimental aeroacoustic studies of open ended-three duct perforated elements used in mufflers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97, 2919-2927, 1995.

- [51] Hughes, W.F., Gaylord, E.W. *Ecuaciones básicas de las Ciencias de la Ingeniería*. McGraw-Hill, México, 1971.
- [52] Ih, J.G. y Lee, B.H. Analysis of higher-order mode effects in the circular expansion chamber with mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 77, 1375-1388, 1985.
- [53] Ih, J.G. y Lee, B.H. Theoretical prediction of the transmission loss of circular reversing chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 112, 261-272, 1987.
- [54] Ingard, U. On the theory and design of acoustic resonators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 26, 151-154, 1954.
- [55] Ingard, U. y Bolt, R.H. Absorption characteristics of acoustic material with perforated facings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 23, 533-540, 1951.
- [56] Ingard, U., Ising, H. Acoustic nonlinearity of an orifice. *Journal of the Acoustical Society of America*, 42, 6-17, 1967.
- [57] Ingard, U. Perforated facing and sound absorption. *Journal of the Acoustical Society of America*, 26, 151-154, 1954.
- [58] Jayaraman, K., Yam, K. Decoupling approach to modelling perforated tube muffler components. *Journal of the Acoustical Society of America*, 69, 390-396, 1981.
- [59] Ji, Z.L. Boundary element analysis of a straight-through hybrid silencer. *Journal of Sound and Vibration*, 292, 415-423, 2006.
- [60] Jing, X., Sun, X., Wu, J. y Meng, K. Effect of grazing flow on the acoustic impedance of an orifice. *AIAA Journal*, 39, 1478-1484, 2001.
- [61] Kagawa, Y., Omote, T. Finite element simulation of acoustic filters of arbitrary profile with circular cross section. *Journal of the Acoustical Society of America*, 60, 1003-1013, 1976.
- [62] Kakoty, S.K., Roy, V.K. Bulk reaction modelling of ducts with and without mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112, 75-83, 2002.
- [63] Karal, F.C. The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section. *Journal of the Acoustical Society of America*, 25, 327-334, 1953.
- [64] Kim, Y.H., Yoon, D.B. An experimental study of the acoustic characteristics of perforated pipe in terms of wavenumber and porosity. *Journal of Sound and Vibration*, 183, 115-127, 1995.

- [65] Kinsler, L.E., Frey, A.R., Coppens, A.B., Sanders, J.V. *Fundamentos de Acústica*. Editorial Limusa, México, 1991.
- [66] Kirby, R. Simplified techniques for predicting the transmission loss of a circular dissipative silencer. *Journal of Sound and Vibration*, 243, 403-426, 2001.
- [67] Kirby, R. Transmission loss predictions for dissipative silencers of arbitrary cross section in the presence of mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114, 200-209, 2003.
- [68] Kirby, R., Cummings, A. The impedance of perforated plates subjected to grazing gas flow backed by porous media. *Journal of Sound and Vibration*, 217, 619-636, 1998.
- [69] Kirby, R., Denia, F.D. Analytic mode matching for a circular dissipative silencer containing mean flow and perforate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122, 3471-3482, 2007.
- [70] Kirby, R., Lawrie, J.B. A point collocation approach to modelling large dissipative silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 286, 319-339, 2005.
- [71] Kooi, J.W., Sarin, S.L. An experimental study of the acoustic impedance of Helmholtz resonator arrays under a turbulent boundary layer. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. Paper 81-1998, 1981.
- [72] Lee, I., Selamet, A. y Huff, N. T. Acoustic impedance of perforations in contact with fibrous material. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119, 2785-2797, 2006.
- [73] Lee, S.H, Ih, J.G. Empirical model of the acoustic impedance of circular orifice in grazing mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114, 98-113, 2003.
- [74] Lung, T.Y., Doige, A.G. A time-averaging transient testing method for acoustic properties of piping systems and mufflers with flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 73, 867-876, 1983.
- [75] Martínez, M. J., Denia, F. D., Albelda, J., Fuenmayor, F. J. *Caracterización acústica de silenciadores de escape híbridos mediante técnicas modales multidimensionales*. V Congreso Ibérico de Acústica y XXXIX Congreso Español de Acústica, Coimbra, 2008.
- [76] Melling, T.H. The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels. *Journal of Sound and Vibration*, 29, 1-65, 1973.

- [77] Miles, J. The reflection of sound due to a change in cross section of a circular tube. *Journal Acoustical Society of America*, 16, 14-19, 1944.
- [78] Morse, P.M., Ingard, U. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [79] Munjal, M.L. *Acoustics of Ducts and Mufflers*. Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [80] Munjal, M.L. Analysis and design of pod silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 262, 497-507, 2002.
- [81] Munjal, M.L., Doige, A.G. Theory of a two source-location Method for Direct Experimental Evaluation of the Four-pole Parameters of an Aeroacoustic Element. *Journal of Sound and Vibration*, 141, 323-333, 1990.
- [82] Peat, K.S. A transfer matrix for an absorption silencer element. *Journal of Sound and Vibration*, 146, 353-360, 1991.
- [83] Peat, K.S., Rathi, K.L. A finite element analysis of the convected wave motion in dissipative silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 184(3), 529-545, 1995.
- [84] Pierce, A.D. Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87, 2292-2299, 1990.
- [85] P.O.A.L., Davies. Practical flow duct acoustics. *Journal of Sound and Vibration*, 124, 91-115, 1988.
- [86] P.O.A.L., Davies. Piston engine intake and exhaust design. *Journal of Sound and Vibration*, 190, 677-712, 1996.
- [87] P.O.A.L., Davies, Bhattacharya, M., Bento Coelho, J.L. Measurement of plane wave acoustic fields in flow ducts. *Journal of Sound and Vibration*. 72, 539-542, 1980.
- [88] P.O.A.L., Davies, Holland, K.R. The measurement of sound power flux in flow ducts. *Journal of the Acoustical Society of America*, 230, 915-932, 1999.
- [89] Rao, K.N., Munjal, M.L. Experimental evaluation of impedance of perforate with grazing flow. *Journal of Sound and Vibration*, 108, 283-295, 1986.
- [90] Recuero, L.M. *Ingeniería Acústica*. Ed. Paraninfo, Madrid, 2000.

- [91] Rossetti, S., Gardonio, P., Brennan, M.J. A wave model for rigid-frame porous material using lumped parameters concepts. *Journal of Sound and Vibration*, 286, 81-96, 2005.
- [92] Sahasrabudhe, A.D., Munjal, M.L., Ramu, S.A. Analysis of inertance due to the higher order mode effects in a sudden area discontinuity. *Journal of Sound and Vibration*, 185, 515-529, 1995.
- [93] Selamat, A., Denia, F.D., Besa, A.J. Acoustic behaviour of circular dual-chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 265, 967-985, 2003.
- [94] Selamat, A., Dickey, N.S., Novak, J.M. The Herschel-Quincke tube: A theoretical, computational, and experimental investigation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96, 3177-3185, 1994.
- [95] Selamat, A., Lee, I.J., Huff, N.T. Acoustic attenuation performance of perforated absorbing silencers. *SAE Paper 2001-01-1435*. SAE international Congress and Exhibition. Detroit, 2001.
- [96] Selamat, A., Lee, I.J., Ji, Z.L., Huff, N.T. Acoustic attenuation of hybrid silencers. *Journal of Sound and vibration*, 262, 509-527, 2003.
- [97] Selamat, A., Radavich, P.M. The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: an analytical, computational, and experimental investigation. *Journal of Sound and Vibration*, 201, 407-426, 1997.
- [98] Selamat, A., Xu, M.B, Lee, I.J. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers. *Journal Acoustical Society of America*, 115, 2091-2099, 2004.
- [99] Selamat, A., Xu, M.B, Lee, I.J. Dissipative expansion chambers with two concentric layers of fibrous material. *International Journal Vehicle Noise and Vibration*, 1, 341-357, 2005.
- [100] Selamat, A., Xu, M.B, Lee, I.J., Huff, N.T. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers with inlet/outlet extensions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117, 2078-2089, 2005.
- [101] Seto, W. *Acústica*. Ed. McGraw-Hill. Cali, 1973.
- [102] Seung, H.J., Jeong, G.I. On the multiple microphone method for measuring in-duct acoustic properties in the presence of mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103, 1520-1526, 1998.

- [103] Seybert, A.F., Ross, D.F. Experimental determination of acoustic properties using a two-microphone random-excitation technique. *Journal of the Acoustical Society of America*, 61, 1362-1370, 1977.
- [104] Sigman, R.K., Majjigi, R.K., Zinn, B.T. Determination of turbofan inlet acoustics using finite element method. *AIAA Journal*, 16, 1139-1145, 1978.
- [105] Song, B.H., Bolton, J.S. A transfer-matrix approach for estimating the characteristic impedance and wave numbers of limp and rigid porous materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107 (2000), 1131-1152.
- [106] Sullivan, J.W. y Crocker, M.J. Analysis of concentric-tube resonators having unpartitioned cavities. *Journal of the Acoustical Society of America*, 64, 207-215, 1978.
- [107] Sullivan, J.W. A method for modelling perforated tube muffler components. I. Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66, 772-778, 1979.
- [108] Sullivan, J.W. A method for modelling perforated tube muffler components. II. Applications. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66, 779-788, 1979.
- [109] Tao, Z., Herrin, D.W., Seybert, A.F. Measuring Bulk Properties of Sound-Absorbing Materials using the Two Source Method. *Society of Automotive Engineers, Inc. Copyright © 2003*.
- [110] Tarnow, V. Measured anisotropic air flow resistivity and sound attenuation of glass wool. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111, 2735-2739, 2002.
- [111] Torres, M.I. *Modelado acústico de silenciadores con material absorbente*. Tesis doctoral, Valencia, 2006.
- [112] UNE-EN ISO 10534-2. *Determinación del coeficiente de absorción acústica y de la impedancia acústica en tubos de impedancia. Parte 2: Método de la función de transferencia*. AENOR, 2002.
- [113] Utsuno, H., Tanaka, T., Fujikawa, T. Transfer function method for measuring characteristic impedance and propagation constant of porous materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 86 (1989), 637-643.
- [114] Young, C.J., Crocker, M.J. Prediction of transmission loss in mufflers by the finite element method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 57, 114-148, 1975.

- [115] Young, C.J., Crocker, M.J. Acoustical analysis, testing and, design of flow-reversing mufflers chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 60, 1111-1118, 1976.
- [116] Wang, C.N. Numerical decoupling analysis of a resonator with absorbent material. *Applied Acoustics*, 58, 109-122, 1998.
- [117] World Health Organization. Regional office for Europe. URL http://www.euro.who.int/Noise/Activities/20030123_1.
- [118] Xu, M.B., Selamet, A., Lee, I.L., Huff, N.T. Sound attenuation in dissipative expansion chambers. *Journal of Sound and Vibration*, 272, 1125-1133, 2004.
- [119] Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. *The Finite Element Method*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1996.