Defensive Architecture of the Mediterranean / Vol XI / Navarro Palazón, García-Pulido (eds.)

DOI: https://dx.doi.org/10.4995/FORTMED2020.2020.11324

Il pentagono come strumento per il disegno delle fortezze

The pentagon as a tool for fortresses' drawing

Paola Magnaghi-Delfino [a], Giampiero Mele [b], Tullia Norando [c]

[a] Politecnico di Milano, Milan, Italy, paola.magnaghi@polimi.it
[b] Università degli Studi eCampus, Novedrate, Italy, giampiero.mele@uniecampus.it
[c] Politecnico di Milano, Milan, Italy, tullia.norando@polimi.it

Abstract

Starting from the fifteenth century, the diagram of many fortresses has a pentagonal shape. Among the best known fortresses, in Italy we find the Fortezza da Basso of Florence, the Cittadella of Parma, the Cittadella of Turin, Castel Sant'Angelo in Rome.The aim of this article is to analyze the reasons that link form and geometry to the planning of the design and the layout of pentagonal fortresses.

The pentagon is a polygon tied to the golden section and to the Fibonacci sequence and it is possible to construct it starting from the golden triangle and its gnomon. This construction of the pentagon is already found in the book De Divina Proportione by Luca Pacioli and is particularly convenient for planning pentagonal fortresses. If one wants to draw the first approximated golden triangle, one can just consider the numbers of the Fibonacci sequence, for example 5 and 8, which establish the relationship between the sides: 5 units is the length of the base and 8 units the length of the equal sides. In the second isosceles triangle, which is the gnomon of the first, the base is 8 units long and equal sides are 5 units long; half of this isosceles triangle is the Pythagorean triangle (3, 4, 5). This characteristic of the golden triangles, that was already known by the Pythagoreans and, in a certain sense, contained in the symbol of their School, allows to build a pentagon with only the use of the ruler and the set square. The distinctive trait of the construction just described makes preferable to use the pentagon in the layout of the military architectures in the fieldworks. We have verified the relationship between numbers, shape and size in the layout of Castel Sant'Angelo (1555-1559) in which the approximate pentagon was the instrument for the generation of its form.

Keywords: Fortresses, drawing, geometric analysis, pentagon.

1. Introduzione

Fino al XV secolo, l'efficacia delle fortezze era legata soprattutto alla loro altezza: più una muraglia era alta, più difficile era scalarla e migliore era il dominio visuale sulla zona circostante. Le azioni difensive più efficaci erano costituite dal getto dall'alto di oggetti e liquidi bollenti mentre le tecniche d'assedio prevedevano invece la scalata delle mura. Nel XV secolo, lo sviluppo di artiglierie portatili mise in discussione le tradizionali fortificazioni basate sulla difesa piombante, costituite da muraglie perpendicolari al suolo. Tali strutture quanto più alte erano tanto più erano esposte ai proiettili dell'artiglieria. Già Leon Battista Alberti nel *De Re Aedificatoria* aveva intuito come, per aumentare l'efficacia, le difese dovevano essere *costruite lungo linee irregolari, come i denti di una sega* (Alberti, 1992).

Con i fratelli Antonio e Giuliano da Sangallo, l'architettura militare si trasformò in una branca della geometria: le piante dovevano essere trasferite sul terreno con la massima esattezza, il che costrinse gli architetti a ideare complessi sistemi di tracciamento e ingrandimento dei disegni.

Nel corso del XIV e XV secolo vi fu un lungo dibattito su quale fosse il giusto numero di bastioni da prevedere per la struttura allo scopo di una migliore difendibilità.

Il mantenimento di una forma radiocentrica, coerente con la concezione rinascimentale delle città e il perseguimento di caratteri di estrema funzionalità del complesso, furono le principali cause che portarono alla scelta della forma pentagonale per la realizzazione delle fortificazioni. Inoltre, gli angoli del pentagono, essendo ottusi, resistono meglio allo scantonamento rispetto a quelli retti del quadrato e quindi scegliere un angolo ottuso aumenta la capacità di difesa.

2. I pentagoni regolari e approssimati

Per meglio comprendere le variazioni costruttive del pentagono è necessario sistematizzarle, elencandone alcune a partire da Euclide fino a tutto il XVI secolo.

Le soluzioni scelte in questo articolo, tra quelle riportate da trattatisti, si riferiscono a costruzioni sia esatte sia approssimate.

Tutti i trattatisti hanno un denominatore culturale comune che è la conoscenza degli *Elementi* di Euclide.

I matematici greci costruivano il pentagono regolare dividendo una linea unitaria in una proporzione media ed estrema (Libro II degli *Elementi*, proposizione 11) (Euclide, 2019).

Per mostrare come questa proporzione sia collegata al pentagono regolare, si procede nel modo seguente.

Sia O il centro del cerchio unitario e AOB l'angolo al centro sotteso da un lato di un decagono regolare (Fig. 1), quindi angolo OAB = angolo ABO = 72 °. Siano:

AB = BD = OD = x; AD = 1-x

Sia BD la bisettrice dell'angolo ABO.

Poiché la bisettrice dell'angolo del triangolo divide il lato opposto in due segmenti che sono proporzionali ai lati adiacenti, il punto D divide il lato OA in un rapporto medio ed estremo.

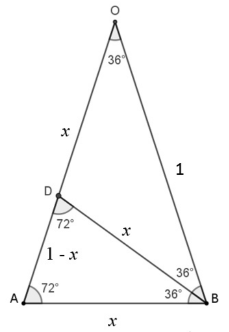

Fig. 1. Gnomone (Autori, 2019).

Pertanto, viene costruito il lato del decagono regolare e il pentagono regolare può essere formato unendo i vertici alternati (Bold, 1982).

Osserviamo che negli *Elementi* di Euclide la costruzione del triangolo isoscele 36 °-72 °-72 °, che si trova nel Libro IV proposizione 10, si basa sulla proposizione 11 del Libro II. La costruzione del pentagono regolare si trova poi nel Libro IV, proposizione 14.

Quindi, per poter capire come costruire un pentagono regolare, bisogna ricercare le informazioni in libri diversi.

Tolomeo, a distanza di circa 500 anni, evidenzia una notevole proprietà del pentagono: il lato del pentagono è la sezione aurea della sua diagonale.

Usando questa proprietà, il pentagono regolare può essere disegnato, dato il lato, senza l'uso del cerchio circoscritto (Fig. 2).

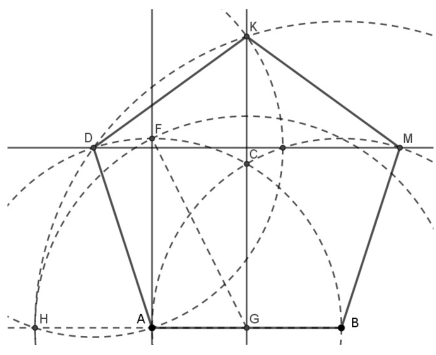

Fig. 2. Pentagono secondo Tolomeo (Autori, 2019).

Nel Medioevo si cercano metodi semplici per costruire il pentagono, metodi più convenienti per l'uso pratico o per le caratteristiche di determinate architetture.

Sebbene alcuni metodi approssimati differiscano nella loro precisione, le discrepanze sono abbastanza piccole da poter essere ignorate, considerando l'accuratezza della traccia a vista e la costruzione stessa nella pratica medievale.

La civiltà islamica medievale ci ha lasciato un impressionante patrimonio di scritti di matematica: centinaia di manoscritti matematici arabi e persiani sono stati conservati in biblioteche in diverse parti del mondo. Questi manoscritti includono traduzioni arabe delle principali opere della geometria greca antica come gli *Elementi* di Euclide (circa 300 a.C.) e le *Coniche* di Apollonio (circa 200 a.C.).

Fino al termine del Medioevo, in Occidente, non sono documentate costruzioni del pentagono diverse dalle precedenti. Laddove sono presenti, come ad esempio nel taccuino di Villard de Honnecourt, si tratta di disegni privi di costruzione. (Bowie, 1959)

In assenza di documentazione, si può supporre che le descrizioni per la costruzione di un poligono fossero tramandate per via orale nelle botteghe.

Nel mondo islamico, ricordiamo il *Libro su ciò di cui ha bisogno l'artigiano della scienza della geometria* del matematico-astronomo Abûl-Wafà Buzjani (X secolo). Abûl-Wafà non fornisce dimostrazioni per renderlo più accessibile agli artigiani. (Raynaud, 2012) Patrimonio della cultura islamica è un ingegnoso metodo approssimato per disegnare il pentagono. (Fehér, 2019) Il metodo si basa sulla proprietà che la lunghezza dell'arco BC del cerchio ABC è uguale a $2 \times OA \times \sin(\alpha/2)$, dove α è l'angolo centrale (Fig. 3). Poiché $\sin 36° \sim 0.588$ differisce solo del 2% da 0.6, possiamo considerare $BC = 6/5 \times OA$ come lato del pentagono, poiché, confrontando le due formule, otteniamo:

$\sin(\alpha/2) = 3/5 = 0.6$. (Hogendij, 2010).

Nel Rinascimento, in Occidente, i libri di Euclide, di Apollonio e di Archimede sono tornati disponibili attraverso il mondo islamico.

Luca Pacioli, autore della *Summa* e del *De Divina Proportione*, scrive libri ispirati alle sue esperienze didattiche, tra cui il *De viribus quantitatis* (Pacioli, 2009).

Nella seconda parte di questo trattato, Pacioli fornisce come riferimento gli *Elementi* di Euclide che ha tradotto (citato come *Magnum Opus*), a cui aggiunge le proprietà della sezione aurea presenti nel *De Divina Proportione* (Pacioli, 1998).

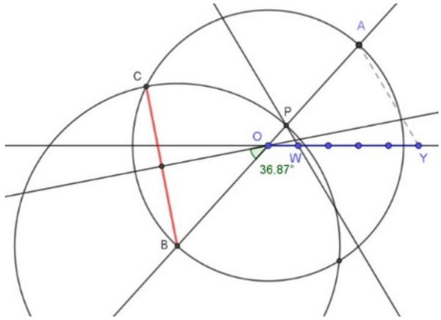

Fig. 3. Pentagono secondo Abûl-Wafà (Autori, 2019).

Quindi fornisce alcune istruzioni dedicate agli artigiani e ai neofiti della geometria che riguardano le costruzioni geometriche delle figure. Per eseguire le costruzioni, chi pratica la geometria dovrebbe essere dotato di due strumenti di base, la riga e il compasso, di cui lo stesso Pacioli fornisce istruzioni su come costruirli.

Pacioli divide il materiale in sezioni, che chiama Documenti.

Nel Documento 10 (f. 141r.), mostra come costruire rapidamente un pentagono regolare: disegna un cerchio, centrato in A, grande quanto vuoi, poi disegna i diametri ortogonali del cerchio BC e DE. F, punto intermedio di AC, funge da centro per la circonferenza di raggio FD. La circonferenza interseca AC in G. GD è la lunghezza del lato del pentagono.

Per quanto riguarda l'accuratezza del disegno del pentagono, Pacioli suggerisce di usare la seguente proprietà: se tre angoli di un pentagono con lati uguali, presi in qualsiasi ordine, sono uguali, allora il pentagono è regolare. (Euclide, XIII, 7). Nel Documento 19, Pacioli afferma che la sezione aurea del lato dell'esagono regolare è uguale al lato del decagono regolare inscritto nello stesso cerchio. Nel Documento 20, afferma che il lato dell'esagono regolare, il lato del pentagono regolare inscritto nello stesso cerchio e la sua diagonale (che è uguale al lato del decagono regolare), costituiscono una terna pitagorica.

Anche Leonardo da Vinci e Albrecht Dürer, entrambi studenti di Pacioli, si cimentano nella costruzione approssimata del pentagono regolare.

Le costruzioni di Leonardo sarebbero apparse in un libro intitolato *De Ludo Geometrico* (Fig. 4) (Calzolari, 2017).

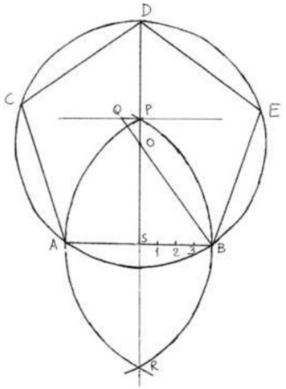

Fig. 4. Leonardo da Vinci (Codice B, foglio 13).

Nel 1525, Albrecht Dürer pubblica un'opera, in quattro volumi sulla geometria, dal titolo *Unterweisung der Messung* (Hugues, 2012) (Figg. 5 e 6).

Nel secondo libro, egli si occupa della costruzione di poligoni regolari.

Il pentagono regolare viene disegnato usando la proprietà già menzionata da Pacioli (Documento 20).

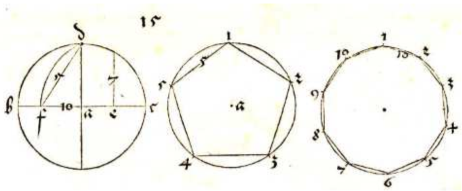

Fig. 5. Pentagoni regolari di Dürer.

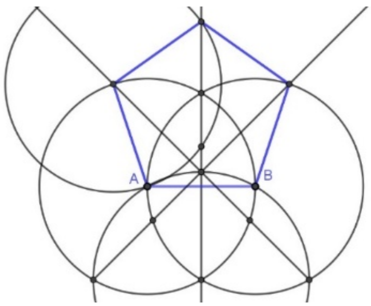

Fig. 6. Pentagono approssimato di Dürer (Autori, 2019).

Dürer fornisce anche una costruzione approssimata del pentagono regolare. Questa costruzione, che probabilmente si riferisce a Pappo di Alessandria, fornisce un pentagono equilatero ma non equiangolare, come dimostrarono, con metodi differenti, Cristoforo Clavio e Pietro Antonio Cataldi. Il pentagono disegnato da Dürer fu ritenuto regolare o comunque apprezzato per la sua particolare precisione da molti trattatisti, in particolare anche da Galileo.

3. Il rettangolo e i triangoli aurei come strumento per il disegno del pentagono regolare e approssimato.

Leonardo Fibonacci, ispirato da Euclide e dalla scienza dei numeri praticata dagli Arabi, pubblica nel *Liber Abaci* (1202), il problema sulla riproduzione dei conigli che da' origine alla famosa successione detta di Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

In questa successione, ogni numero è ottenuto dalla somma dei due precedenti e il rapporto di ognuno di questi con il precedente risulta essere una buona approssimazione di ϕ (numero d'oro).

La proporzione fra i segmenti aventi misura data dai numeri di Fibonacci è la divina proporzione o sezione aurea.

Ogni coppia di questi segmenti costituisce una buona approssimazione del rettangolo aureo.

Come riportato da Luca Pacioli nel *De Divina Proportione,* è possibile costruire un pentagono facendo riferimento ai triangoli aurei. Esistono due tipi di triangoli isosceli che derivano dalla sezione aurea, il primo è quello che ha la base uguale a 1 e il lato uguale a ϕ e l'altro ha base uguale a ϕ e lato uguale a 1; si può notare dalla figura che uno è lo gnomone dell'altro (Fig. 7a). Dalle considerazioni precedenti, si può costruire il pentagono regolare usando la combinazione di un triangolo aureo con base uguale a 1 e lati uguali a ϕ e di due triangoli aurei che hanno base uguale a ϕ e lati uguali a 1. La costruzione del pentagono con l'uso della sola riga faciliterebbe il tracciamento sul campo, nel caso in cui questa figura venga utilizzata in architettura.

Si può usare 8/ 5 = 1.6 come approssimazione di ϕ, infatti questo rapporto permette di disegnare un rettangolo di proporzione 5:8 e di determinare il triangolo isoscele di base 5 e lati uguali a 8, il secondo triangolo aureo si può ottenere come somma di due triangoli pitagorici (Fig. 7b).

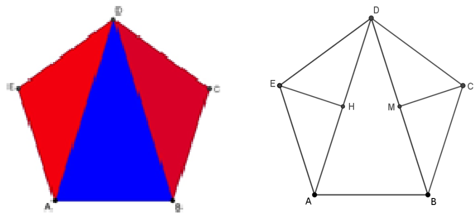

Fig. 7. Pentagoni (a) costruito con i triangoli aurei (b) con i triangoli pitagorici (Autori, 2019).

Attraverso queste semplici considerazioni è possibile tracciare il pentagono e la stella pentagonale.

4. Il disegno della pianta pentagonale della fortificazione di Castel Sant’Angelo

Nel XV secolo, si sviluppa un nuovo tipo di fortificazione detto fortificazione all’italiana per rimediare al problema posto dallo sviluppo dell'artiglieria, messo in evidenza dalle guerre in Italia e da quelle contro gli Ottomani. Lo sviluppo di nuove tecniche di costruzione influenza la pianificazione urbana e fornisce nuovi incentivi ad architetti e ingegneri. Individuazione della fortificazione della Città del Vaticano con il particolare di Castel Sant’Angelo. (Martini,1840)

La forma principale delle piante delle nuove fortificazioni all’italiana è quella pentagonale. Uno dei primi esempi, sebbene non si tratti di un pentagono regolare, è costituito dalla Fortezza da Basso di Firenze, progettata da Francesco Fiorenzuoli e Antonio da Sangallo il Giovane (1534-1537). Pochi anni dopo (1559-1565), furono realizzate le mura pentagonali con bastioni attorno a Castel Sant’Angelo a Roma (Fig. 8). Castel Sant’Angelo venne adeguato varie volte alle nuove esigenze militari. Pio IV (Giovanni Angelo Medici), fratello del condottiero lombardo Gian Giacomo Medici, decise di dotare la fortezza romana di una nuova cinta esterna munita di fossato e di baluardi ad “asso di picche”. Il progetto di fortificazione fu affidato a Francesco Laparelli di Cortona, uno dei più importanti architetti militari del Cinquecento. Laparelli, da giovane, si era dedicato allo studio della matematica e dell'architettura, all'esercizio delle armi e alla pratica del disegno. Aveva collaborato con Gabrio Serbelloni alle fortificazioni cortonesi, durante il conflitto tra Firenze e Siena.

Nel 1560, Francesco venne chiamato a Roma da Papa Pio IV con l'incarico di restaurare le fortificazioni di Civitavecchia. Nello stesso anno, progettò le fortificazioni della nuova foce del Tevere e l’anno successivo diresse i lavori per le fortificazioni del colle Vaticano. Nel 1565, terminò il pentagono bastionato di Castel Sant'Angelo e proseguì la costruzione della cinta bastionata pentagonale del borgo presso il Vaticano.

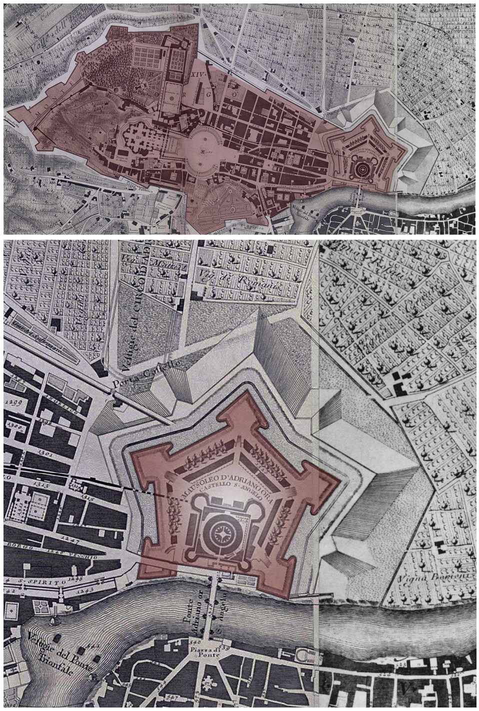

Fig. 8. (a), (b) Individuazione della fortificazione della Città del Vaticano con il particolare di Castel Sant’Angelo sulla pianta di G.B. Nolli del 1748 (Autori, 2019).

Il disegno della pianta pentagonale, progettata dal Laparelli, mostra una particolare applicazione del pentagono poichè, come in molte altre fortificazioni coeve, vi era una ingombrante preesistenza al centro. Per questa ragione, risulta particolarmente utile la costuzione del pentagono ottenuta combinando tre triangoli aurei. Il primo, quello centrale, ha la base di 600 piedi romani (1 piede romano = 0,2964 m; 600 piedi romani = 177,84 m) e i lati uguali di 960 piedi romani. Gli altri due triangoli hanno la base di 960 piedi e il lati uguali di 600 piedi. Per quanto detto nel paragrafo 3, è possibile costruire quest’ultimo triangolo come somma di due triangoli pitagorici (3, 4, 5) in cui l’ipotenusa misura 600 piedi, uno dei cateti 360 e l’altro 480.

La presenza della precedente fortificazione quattrocentesca, costruita intorno al mausoleo di Adriano, non consente di fare un tale tracciamento per cui è necessario fare qualche considerazione ulteriore sulla figura pentagonale e sui triangoli aurei che la generano.

Il primo triangolo aureo ABC ha la base pari al lato del pentagono e AC e BC sono in proporzione media ed estrema con AB. Se a AC si sottrae CD=AB, i segmenti AD e DC sono ancora in proporzione media ed estrema. Se si unisce il punto B con il punto D, il triangolo ADB è un triangolo aureo in proporzione media ed estrema con quello di partenza ABC (Fig. 9a) e il triangolo BCD è lo gnomone di quello di partenza.

Con i triangoli AEB e BFD (metà dei triangoli precedenti), che sono retti in E e F, è possibile costruire un pentagono per coordinate (Fig. 9b).

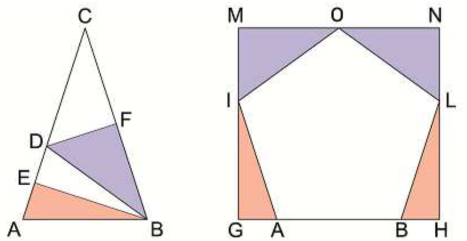

Fig. 9. (a), (b) Pentagono costruito con triangoli retti ottenuti da quelli aurei (Autori, 2019).

Infatti, noto il lato AB, si aggiunge, sulla retta che lo contiene, a destra e a sinistra, la misura del segmento AE, determinando così i punti G e H. Da questi, ortogonalmente, si tracciano i segmenti GI e HL (GI=HL=EB; EB=altezza del triangolo ADB). I segmenti AI, BL sono uguali a AB e, insieme ad AB, costituiscono tre lati del pentagono. Poi, sulle direzioni ortogonali a GH, dai punti I ed L, si riporta la misura dell'altezza FD del seconto triangolo aureo BCD, ottenendo i punti M ed N.

Il segmento NM è uguale e parallelo a GH e, diviso in due in O, consente di individuare i restanti lati del pentagono che risulta inscritto nel rettangolo GMNH ed ha i vertici nei punti A, I, O, L, B.

Si può dunque tracciare un pentagono per coordinate senza conoscerne il centro.

Il problema del tracciamento in situ delle mura pentagonali di Castel Sant'Angelo da costruire, intorno alla fortezza quattrocentesca, ora è risolvibile con la sola misura dell'angolo retto e di segmenti. La precisione della figura dipende dall'approssimazione dei triangoli generatori.

5. I baluardi di Castel Sant'Angelo

Prima di analizzare il disegno dei baluardi di Castel Sant'Angelo, bisogna analizzare quanto scritto da Giacomo de Lanteri nel suo libro *Due Dialoghi* (Lanteri, 1557) a proposito *del modo di disegnare le piante delle fortezze secondo Euclide*. Nel testo, l'autore descrive in modo minuzioso le operazioni geometriche condotte per disegnare in pianta i bastioni di una fortificazione pentagonale. Lanteri suppone che il lettore conosca come disegnare il pentagono e inizia la descrizione della costruzione dei baluardi partendo dal vertice A (Fig. 10). Per prima cosa, bisogna decidere la misura che, partendo dal punto A, sul lato AE, deve essere assegnata all'ampiezza del baluardo per individuare il punto F. La stessa misura deve essere riportata sul lato AB, individuando il punto G. Dai punti F e G, si traccia la perpendicolare verso l'esterno e quindi si assegna la dimensione del fianco del baluardo e si individuano i punti H e I. Per ottenere le facce del baluardo, si unisce Q con I. Il testo tuttavia ha dei punti oscuri che riguardano proprio le dimensioni da assegnare: la distanza dal vertice dell'angolo inferiore A sembra essere 1/3 del semilato del pentagono e la dimensione del fianco 1/11 dello stesso semilato. Nel testo infatti il Lanteri riporta: "[…] poniamo che vogliate incominciare dall'angolo .a. dovete col compasso segnare prima nel lato .a e. la metà dello spatio ,che vorrete che occupi il beluardo , come sarebbe à dire , dall'angolo .a. al punto .f. poi dovete dal lato .a b. tagliare, ò segnare una parte eguale alla .a f. per la terza del primo, qual sara la .a g. Fatto ciò, dovete (per la undecima del primo) dal punto .f. tirare una perpendicolare ad angoli retti, sopra la .a e.". Cosa intende il Lanteri quando dice *segnare una parte eguale AF per la terza parte del primo*? Ed ancora cosa quando indica dal punto F la undecima parte del primo? Del primo lato del pentagono o della prima metà del lato? Quello che è certo è che quelle che sembrano variabili indipendenti (ampiezza di AF e di FH) invece sono dipendenti da una quantità che può essere o il lato o la sua metà; chiaramente esiste una suddivisione di un segmento dato che individua le diverse parti.

Analizziamo ora la pianta della fortezza pentagonale disegnata per Castel Sant'Angelo. Come già detto, il lato del pentagono della fortificazione è di 600 piedi romani.

Per costruire il tracciato regolatore dei baluardi (Fig. 11), si considerano le mediane passanti per il lato opposto rispetto ad ogni vertice del pentagono (nel nostro caso si parte dal vertice A). Su questa retta, si aggiunge verso l'esterno un segmento pari a 240 piedi romani, individuando il punto F. Si divide in tre la distanza AF e il lato del pentagono. Si congiunge C con B, quindi il segmento CB definisce la direzione della faccia del baluardo. La posizione del fianco si trova dividendo in due un terzo del lato e si individua il punto D.

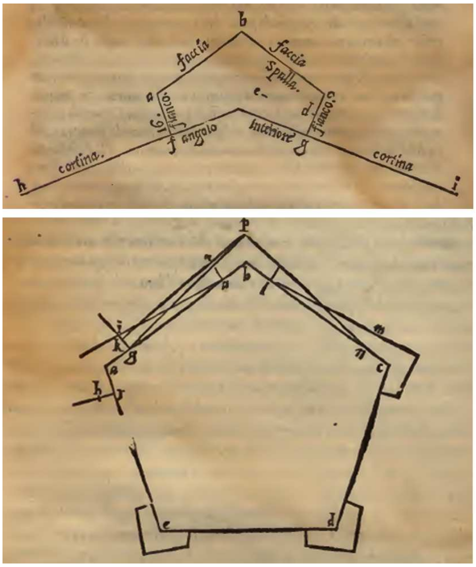

Fig. 10. Schema per la costruzione dei baluardi di una fortezza pentagonale tratta da Giacomo Lanteri.

Si divide ancora in tre il segmento DA e dai punti D e 1 si disegnano le due perpendicolari alla direzione AC. Sulla ortogonale nel punto 1, si riporta la distanza D1 individuando il punto 2. Unendo il vertice A con E, si trova la parallela alla faccia opposta del baluardo. Tracciando la parallela ad AE passante per il punto 2, si ottiene la direzione della faccia interna del baluardo. Sulla ortogonale uscente da D, nello spazio individuato dalle direzioni BC e 23, si attesta la semicirconferenza che chiude il baluardo. Per ottenere il disegno completo, si procede nello stesso modo su ogni lato e su ogni vertice.

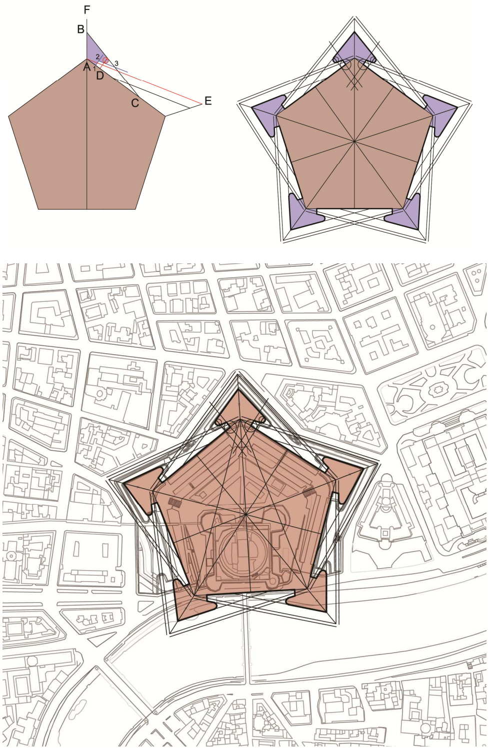

Fig. 11. Schemi geometrici e sovrapposizione alla planimetria layout di Castel Sant'Angelo (Autori, 2019).

6. Conclusioni

Il disegno della fortificazione pentagonale dell'architetto militare Francesco Laparelli dimostra quanto sia necessaria la conoscenza della geometria euclidea per l'ideazione delle nuove fortezze all'italiana. Il pentagono, con le sue varie composizioni e costruzioni, è uno dei poligoni più utili e usati per risolvere i problemi legati al tracciamento in situ. È evidente l'interdipendenza tra la distanza dei baluardi, e quindi della misura del lato del pentagono, e la gittata delle armi da fuoco del XVI secolo che condizionava in ristretti margini la possibilità di variare la lunghezza dei lati del pentagono al fine di consentire la massima funzionalità del fuoco di fiancheggiamento. Aumentare la distanza fra i baluardi di una fortezza, dotata di un certo tipo di cannoniere, significava aumentare il numero dei suoi lati. La forma pentagonale media fra le necessità imposte dall'organizzazione del corpo di difesa e le esigenze strutturali per un perfetto funzionamento del sistema bastionato.

Bibliography

Alberti, L.B. (1992). *De Re Aedificatoria*, Edizioni Il Polifilo, Italia.

Bowie, T. (1959). *The Sketchbook of Villard de Honnecourt*, Indiana University Press, Bloomington.

Calzolani, S. (2017). *Il De Ludo Geometrico di Leonardo da Vinci*, in www.geometriapratica.it/allegatipdf/de-ludo-geometrico-Leonardo (october 2019).

Euclide. *Elements*, in https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html (October 2019).

Fehér, K.; Szilágyi, B.; Bölcskei, A.; Halmos, B. (2019). *Pentagons in Medieval Sources and Architecture*, Nexus Network Journal, Published online (8 July 2019).

Hogendijk, J.P. (2010). *Mathematics and geometric ornamentation in the Medieval Islamic world*, in http://www.jphogendijk.nl/talks/neugebauer-written.pdf (October 2019).

Hugues, G. (2012). *The Polygons of Albrecht Dürer -1525*, in https://arxiv.org/abs/1205.0080 (October 2019).

Lanteri, G. (1557). *Due dialoghi ne i quali s'introduce messer Girolamo Catanio novarese, e messer Francesco Trevisi ingeniero veronese,con un giovene bresciano, à ragionare del modo di disegnare le piante delle fortezza secondo Euclide;et del modo di comporre i modelli, e torre in disegno le piante delle città*, Vincenzo Valgrisi e Baldessar Costantini, Venezia.

Martini di Giorgio, F. (1840). *Trattato di Architettura Civile e Militare*, Tipografia Chirio e Mina, Torino, in http://dlib.biblhertz.it/ia/pdf/Gh-FRA4851-4410-2.pdf (October 2019).

Pacioli, L. (1998). *De Divina Proportione*, Scriptorium Sassoni, Ristampa Anastatica, Milano.

Pacioli, L. (2009). *De Viribus Quantitatis*, Aboca Ed., Riproduzione anastática.

Raynaud, D. (2012). *Abu al-Wafa' Latinus? A Study of Method*. in Historia Mathematica, Elsevier, 39, pp.34-83, in https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00645624 (October 2019).