

# Aplicando Tolerancia a Fallas para la Implementación de Compensación de Saturación en Accionadores

Wilber Acuña-Bravo \* Addison Ríos-Bolívar \*\*

\* Universidad de los Andes, CEMISID,

Mérida 5101, Venezuela. (e-mail: wilber@ula.ve)

\*\* Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, Departamento de Sistemas de Control. Mérida 5101, Venezuela. (e-mail: ilich@ula.ve)

Resumen: En esta contribución se presenta un método para la implementación práctica de sistemas de control con compensación de saturación en los actuadores. La técnica se aplica en sistemas lineales, tomando como base un mecanismo de diagnóstico y detección de fallas. Para ello, la saturación en los actuadores es considerada como una falla en el sistema de control, la cual es detectada y aislada mediante un banco de filtros de diagnóstico de fallas, cuyos residuos son utilizados para efectuar la compensación de la saturación, proporcionando un esquema de control tolerante a esta falla particular. Así, el método exhibe ciertas propiedades de robustez frente a cambios en el funcionamiento de los actuadores. Para la síntesis de los filtros de detección de fallas se propone un método derivado de las técnicas de control óptimo robusto en  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , basado en desigualdades lineales matriciales. Para verificar las propiedades de la técnica propuesta se presenta un ejemplo numérico. Copyright © 2008 CEA.

Palabras Clave: Control tolerante a fallas, compensación anti-windup, filtros de detección de fallas, desigualdades lineales matriciales.

## 1. INTRODUCCIÓN

Con el paso de los años, los requisitos impuestos a los sistemas de control se han hecho cada vez más exigentes. En general se buscan sistemas seguros y eficientes, lo que ha impulsado el desarrollo de nuevas técnicas de análisis y síntesis con miras a satisfacer tales requerimientos. Uno de los retos más frecuentes con que se encuentra la ingeniería de control, es el de mantener condiciones de estabilidad y desempeño ante daños en los elementos del sistema, asociado a los sistemas de control tolerantes a fallas (CTF) (Patton, 1997; Blanke *et al.*, 2001); o a las limitaciones en la instrumentación del sistema de control, en este caso asociado a técnicas de control acotado. Dentro de este último grupo se encuentran las estrategias *anti-windup* (AW) que buscan compensar los efectos adversos debido a la saturación de los actuadores o del cambio de controladores inherente a diferentes escenarios de operación.

Por cuenta de las limitaciones físicas presentes en los actuadores y de los cambios de puntos de operación del sistema de control, según los regímenes de producción, es común que en la práctica las entradas de control a los procesos y las salidas de los controladores sean diferentes. Esta característica del lazo de control implica una diferencia entre la señal que es entregada por el controlador y la que es recibida a la entrada de la planta, como consecuencia se produce una actualización incorrecta de los estados del controlador, pues los estados de la planta evolucionan de un modo diferente al considerado por el controlador, debido a la diferencia de la señal de control. Este efecto es conocido como *controller windup* (CW).

La actualización forzada de los estados del controlador genera un conjunto de efectos no deseables en el lazo de control, tales como sobre-disparo, el cual adiciona aún más saturación en los actuadores, aumento del tiempo de respuesta, llegando en casos extremos a producir inestabilidad en el lazo (Kothare *et al.*, 1994).

Por otro lado, los sistemas de CTF están conformados principalmente por elementos o filtros de diagnóstico y detección de fallas (DDF), los cuales determinan cuándo y dónde una falla ocurre, tomando como base la información contenida en un conjunto de residuos (Beard, 1971; Jones, 1973). La forma como se generan estos residuos varía según la aplicación (Ríos-Bolívar, 2001). En general, si se satisfacen condiciones de detectabilidad y de separabilidad de fallas, se buscan mecanismos de diseño de un único filtro de DDF para el diagnóstico, lo cual resulta muy restrictivo (Ríos-Bolívar and García, 2001). Otro enfoque es utilizar el filtrado múltiple en el cual se construye un banco de filtros que genere residuos para fallas particulares (Niemann and Stoustrup, 1998). En esta contribución se abordará mediante el diseño de un banco de filtros de detección (multifiltrado), orientado a la implantación práctica de mecanismos de compensación AW, a los fines de minimizar los efectos nocivos de la saturación de los actuadores.

Los mecanismos AW son, en general, abordados mediante un enfoque de dos pasos:

1. Diseñar un controlador asumiendo que no hay condiciones anómalas.
2. Diseñar una compensación (dinámica o estática) que mantenga los índices de desempeño de operación, aún en presencia de alguna condición como *windup* o sobresaltos

debido a cambios de régimen operación del controlador (Kothare *et al.*, 1994).

La literatura sobre el estudio de los problemas de restricciones en los actuadores es amplia, puede verse (Bernstein and Michel, 1995) para un resumen bibliográfico hasta esa época. El enfoque empleado para la síntesis de la ganancia de compensación AW es el presentado en (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2005).

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En todos los casos, la señal utilizada para implementar la compensación AW debe ser medida directamente del proceso, en general como la diferencia entre la señal de salida del controlador (la cual es siempre conocida) y la entregada por los actuadores a la planta como muestra la Figura 1.

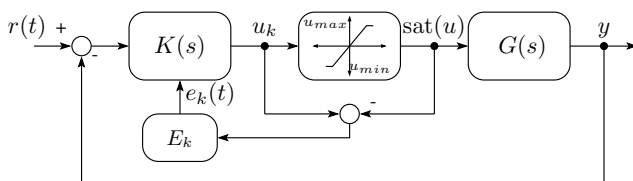


Figura 1. Compensación anti-windup.

Es conocido que, en muchos casos, la posibilidad de realizar esta medición es nula, por limitaciones físicas propias del proceso, por la inexistencia de la tecnología apropiada, o que no sería económicamente viable adicionar más instrumentación al proceso. El problema radica en que hay situaciones en donde es necesario hacer la compensación, pues se sabe que la saturación está presente y no se desea perder características de desempeño o mucho menos que se presente inestabilidad; pero, no se cuenta con la señal mencionada para hacer la compensación del controlador requerido.

Un mecanismo utilizado para efectuar la implementación consiste en el uso de modelos de los actuadores (Åström and Rundqwist, 1989), los cuales deberían reproducir el comportamiento ordinario de los mismos. El problema de este enfoque, como el de cualquier otro que use modelos, es que su validez es limitada; en el tiempo, debido a cambios en los actuadores por su propio funcionamiento, o en su fiabilidad, debido a un modelo con exactitud insuficiente, que a su vez, no se actualiza dinámicamente en el tiempo.

La solución aquí planteada, consiste en reemplazar la medición de esta señal, por un equivalente estimado a partir de filtros DDF, de tal manera que la señal residual de estos sea utilizada para hacer la compensación AW (Ríos-Bolívar and Acuña, 2006). La Figura 2 presenta este enfoque.

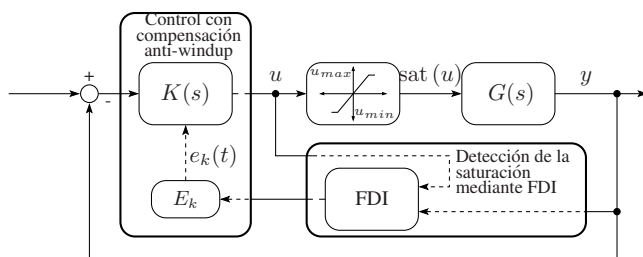


Figura 2. Compensación AW utilizando DDF.

El documento está organizado como sigue: la Sección 2 presenta un enfoque para la síntesis de los filtros de detección de fallas, la Sección 3 presenta un mecanismo de síntesis de la ganancia de compensación AW y en la Sección 4 se muestra la propuesta de los filtros de detección y aislamiento de saturación (FDS), así como el resultado fundamental para su obtención; la Sección 5 presenta un ejemplo numérico de aplicación del enfoque propuesto. La notación utilizada es la estándar y en casos particulares se hará la notación respectiva.

## 3. FILTROS DE DIAGNÓSTICO DE FALLAS

Los filtros de detección de fallas, son sistemas que permiten detectar los comportamientos anómalos dentro de un sistema de control. Están compuestos por tres elementos fundamentales

1. Los mecanismos de generación de residuos.
2. Evaluación de los residuos.
3. Decisiones lógicas.

El componente fundamental de estos sistemas, es el de generación de residuos. Existen dos grandes grupos de mecanismos de generación de residuos:

**Redundancia física:** La idea de este enfoque de generación de residuos es hacer uso de réplicas físicas del sistema. La diferencia entre las respuestas producidas por el proceso y estas réplicas, generan los residuos necesarios. Este enfoque es tal vez el menos viable, pues el costo involucrado puede ser muy elevado.

**Basados en Modelos:** Como su nombre indica, esta técnica está basada en un modelo del proceso, el cual permite hacer una estimación de las señales y por ende obtener un residuo mediante la comparación con el comportamiento real. El enfoque basado en modelos es más frecuentemente utilizado, en general, mediante el diseño de observadores de tipo Luenberger, denominados filtros de Beard-Jones (Beard, 1971; Jones, 1973). Como en la mayoría de los casos donde se trabaja con un modelo, éste debe ser lo suficientemente exacto como para describir, de forma correcta, el comportamiento del sistema, lo que constituye la principal dificultad de este enfoque. Aunque es posible utilizar modelos con incertidumbres acotadas a partir de lo cual se pueden diseñar filtros robustos de detección de fallas (Ríos-Bolívar and García, 2005; Acuña and Ríos-Bolívar, 2008).

Dentro de las dos posibilidades presentadas, hay diversas aplicaciones que permiten el uso de la redundancia física (incluso doble o triple redundancia como en el caso de los aviones) para garantizar la tolerancia a fallas. Por otra parte, hay sistemas que poseen restricciones muy fuertes, en cuanto peso y tamaño, (tal es el caso de los satélites, en donde se llega al punto de operar los actuadores al límite de su capacidad para reducir peso), y la tolerancia a fallas debe ser garantizada mediante piezas más complejas de software. Es claro que para los casos de tolerancia a fallas por software, es necesario contar con técnicas basadas en modelos. Estas últimas han mejorado mucho en los últimos años, pues se han presentado trabajos que abordan el problema de la detección de fallas, incluso de la tolerancia a fallas de sistemas con incertidumbre, variaciones en parámetros, varianza en el tiempo entre otras. Puede verse (Bokor and Balas, 2004; Casavola *et al.*, 2007; Weng *et al.*, 2007) para una discusión al respecto.

### 3.1 Filtros DDF basados en observadores

Para la generación de los residuos se empleará un esquema basado en observadores. Asíumase que se tiene un sistema dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) + \sum_{i=1}^k L_i\nu_i(t) \\ z(t) &= C_1x(t) \\ y(t) &= C_2x(t),\end{aligned}\quad (1)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  son los estados,  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  las señales de perturbación externa,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  las señales de control,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  las salidas controladas e  $y(t) \in \mathbb{R}^s$  las salidas medidas. Las señales  $\nu_i(t) \in \mathbb{R}^f$  representan los *modos de falla*, una función arbitraria y desconocida igual a cero en tiempo  $t = t_0$ ;  $k$  es el número de fallas. Las matrices  $L_i$  y  $M_i$ , son las *direcciones de falla* en los subespacios de entrada y salida respectivamente, las cuales son conocidas y se asumen linealmente independientes. Las matrices restantes, son conocidas y de dimensiones apropiadas. De igual manera, existen condiciones que deben ser satisfechas para que la detectabilidad y separabilidad de las fallas sea posible, lo cual constituye material estándar dentro de la literatura y puede ser consultado en las referencias (Mas-soumnia, 1986).

**Teorema 3.1.** (Detectabilidad). Sea el subespacio imagen de las direcciones de las fallas  $\mathbb{W}_{L_i} = \text{Im}(L_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Considérese el modelo de diagnóstico definido por (1), donde el par  $(C_2, A)$  es detectable,  $\mathbb{U}_o$  el espacio no observable. Entonces, la  $i$ -ésima falla es detectable si

$$\mathbb{W}_{L_i} \cap \mathbb{U}_o = \{0\}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2)$$

**Teorema 3.2.** (Separabilidad). Sea  $\mathbb{W}_{L_i} = \text{Im}(L_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Considérese el modelo de diagnóstico definido por (1) y sea  $\mathcal{O}$  la matriz de observabilidad. Las fallas son separables si cada uno de  $\mathbb{W}_{L_i}$  y cada una de las direcciones de las fallas en la salida del error de estimación están desacopladas, es decir,

$$\mathcal{O}\mathbb{W}_{L_i} \cap \sum_{i \neq j}^k \mathcal{O}\mathbb{W}_{L_j} = \{0\}, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (3)$$

Ahora, para la generación de residuos, se asume que se cuenta con un estimador de tipo Luenberger definido por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_2u(t) + \mathcal{D}(y(t) - C_2\hat{x}(t)) \\ \hat{z}(t) &= C_1\hat{x}(t),\end{aligned}\quad (4)$$

donde,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^p$  representan los estados y salidas controladas estimadas, ambas de dimensiones apropiadas y  $\mathcal{D}$  es la ganancia del estimador que debe ser diseñada. Los errores de estimación y de predicción de la salida vienen dados por

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (5)$$

$$e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t), \quad (6)$$

de forma respectiva, con lo que la dinámica del error es ( $M_i = 0$ )

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= (A - \mathcal{D}C_2)e(t) + B_1w(t) + \sum_{i=1}^k L_i\nu_i(t) \\ e_z(t) &= C_1e(t),\end{aligned}\quad (7)$$

de la cual, se desprenden los requisitos que debe satisfacer el filtro: 1.

1.  $A - \mathcal{D}C$  Debe ser asintóticamente estable.

2. Se debe minimizar el efecto de las perturbaciones  $w(t)$  sobre  $e_z(t)$ , asignando alguna medida como norma-2,  $\infty$ .

Adicional a estos requerimientos, se presenta un problema aún mayor: toda la información de las fallas, se encuentra concentrada en una única señal  $e_z(t)$ , y ante la presencia de varias fallas es necesario diferenciar cada una de ellas. Para dar solución a este problema, pueden ser empleados varios enfoques, por ejemplo, seleccionar  $\mathcal{D}$  de tal forma que se obtenga una diagonal con los residuos y usar un posfiltro para que los autovalores de  $A - \mathcal{D}C$  tengan parte real negativa (Ríos-Bolívar and García, 2001, 2005); emplear, como se mostrará a continuación, un banco de filtros (multi-filtraje) que asigne a cada uno una falla diferente (Acuña and Ríos-Bolívar, 2007; Ríos-Bolívar and Acuña, 2007).

Como una extensión a (4), se asume que se cuenta con un banco de filtros dado por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_i(t) &= A\hat{x}_i(t) + B_2u(t) + \mathcal{D}_i(y(t) - C_2\hat{x}_i(t)) \\ \hat{z}_i(t) &= C_1\hat{x}_i(t), \quad i = 1, \dots, k,\end{aligned}\quad (8)$$

donde cada  $z_i(t)$  constituye un estimado de la salida controlada, cada uno obtenido con la ganancia  $\mathcal{D}_i$ . Cada filtro es diseñado de tal manera que sea inmune a perturbaciones externas y detecte sólo una falla. Ahora, los errores de estimación y predicción para el banco de filtros son

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(t) &= \mathcal{A}_i e_i(t) + \mathcal{B}_i \tilde{w}_i(t) + L_i \nu_i(t) \\ e_{z_i}(t) &= C_1 e_i(t), \quad i = 1, \dots, m,\end{aligned}\quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_i &= [B_1 \ L_k] \\ \mathcal{A}_i &= A - \mathcal{D}_i C_2. \quad \text{y} \quad \tilde{w}_i(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \nu_k(t) \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (10)$$

$L_i$  y  $\nu_i$  constituyen la dirección y el modo de la falla para la cual se diseña el  $i$ -ésimo filtro.  $L_k$  y  $\nu_k(t)$  contienen las direcciones y los modos restantes. Con estas consideraciones, la síntesis de los filtros DDF viene dada por el siguiente resultado, el cual garantiza filtros estables y la satisfacción de condiciones de desempeño sobre la función

$$G_{\tilde{w}_i \rightarrow e_{z_i}}(s) = C_1(sI - \mathcal{A}_i)^{-1} \mathcal{B}_i. \quad (11)$$

**Proposición 3.3.** Existe un filtro de detección para la  $i$ -ésima falla tal que  $(A - \mathcal{D}_i C_2)$  es estable asintóticamente,  $\|G_{\tilde{w}_i \rightarrow e_{z_i}}(s)\|_\infty < \gamma_i$ , si y sólo si, existe  $P_i = P_i^T > 0 \in \mathbb{R}^n$  y  $W_i \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ,  $\nu_i(t) = 0$ , tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P_i + P_i A - W_i C_2 - C_2^T W_i^T & P_i \mathcal{B}_i & C_1^T \\ \mathcal{B}_i^T P_i & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

En ese caso, la ganancia del estimador está dada por  $W_i = P_i \mathcal{D}_i$ .

**Prueba.** Asuma que (25) es factible y se tiene una solución para la desigualdad matricial lineal, denotada por LMI por su abreviación en inglés, con el cambio de variable  $W_i = P_i \mathcal{D}_i$  se tiene

$$\begin{bmatrix} A^T P_i - C_2 \mathcal{D}_i^T P_i + P_i A - P_i \mathcal{D}_i C_2 & P_i \mathcal{B} & C_1^T \\ \mathcal{B}^T P_i & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$P_i > 0$

lo que es equivalente a

$$\begin{bmatrix} (A - \mathcal{D}_i C_2)^T P_i + P_i (A - \mathcal{D}_i C_2) & P_i \mathcal{B} & C_1^T \\ & \mathcal{B}^T P_i & 0 \\ & C_1 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$P_i > 0,$$

del lema real acotado (Scherer, 1990), se tiene que  $(A - \mathcal{D}_i C_2)$  es estable y  $\|G_{\hat{w} \rightarrow e_{zi}}(s)\|_\infty < \gamma$ , si y sólo si las desigualdades anteriores son satisfechas.

Aunque los esquemas basados en bancos de filtros son comunes dentro de la literatura del área, la solución planteada aquí representa una nueva aproximación al problema utilizando nuevos criterios de diseño a partir de LMI, adicionando mayor flexibilidad en las soluciones obtenidas evitándose la obtención de resultados muy conservadores.

#### 4. COMPENSACIÓN AW

En la literatura existen diferentes técnicas para el diseño de la ganancia de compensación AW, (ver (Grimm *et al.*, 2003), (Wu and Lu, 2004) y sus referencias para algunos ejemplos). Todos esos métodos suponen que la salida del actuador es medida, a los fines de la implementación. Además, muchos de los métodos asumen que se conocen los niveles de saturación de los actuadores, lo cual restringe la robustez de la compensación. En este trabajo, para la síntesis de compensación AW, se presentará un método basado en LMI, mismo que exhibe un cierto nivel de robustez, y cuyos detalles pueden ser consultados en (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2005). Nótese que, a los efectos de los resultados, en este trabajo, además, se busca una implementación de la ganancia de compensación con características de robustez, según el desempeño de los actuadores. Así, se tiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (13)$$

se tiene además un controlador dinámico

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k x_k(t) + B_k y(t) \\ u_k(t) &= C_k x_k(t) + D_k y(t), \end{aligned} \quad (14)$$

donde la señal de control se encuentra saturada, es decir<sup>1</sup>,

$$-u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)}, \quad u_{0(i)} > 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Para reducir los efectos de la saturación, se adiciona la ganancia de compensación

$$e_k(t) = E_k [\text{sat}(u_k(t)) - u_k(t)] \quad (16)$$

con lo que el sistema en lazo cerrado es

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) - (\mathcal{B} - \mathcal{R}E_k)\psi(\mathcal{K}\xi(t)), \quad (17)$$

donde  $\xi(t) = [x(t)^T \ x_k(t)^T]^T \in \mathfrak{R}^{n+n_k}$ ,  $\psi(u) := u - \text{sat}(u)$  y

$$A = \begin{bmatrix} A + BD_k C & BC_k \\ B_k C & A_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_k} \end{bmatrix}, \quad K = [D_k C \ C_k],$$

**Teorema 4.1.** Si existen matrices  $W = W^T > 0 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c)}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$  y una matriz diagonal  $S > 0 \in \mathfrak{R}^m$ , que satisface el conjunto de desigualdades

$$\begin{bmatrix} W \mathcal{A}^T + \mathcal{A}W & \mathcal{B}S + \mathcal{R}Z - Y^T \\ S \mathcal{B}^T + Z^T \mathcal{R}^T - Y & -2S \end{bmatrix} < 0; \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} W & W \mathcal{K}_{(i)}^T - Y_{(i)}^T \\ \mathcal{K}_{(i)} W - Y_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (19)$$

entonces la ganancia de compensación  $AW E_k = ZS^{-1}$ , es tal que el elipsoide  $\mathcal{E}(P) = \{\xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c} : \xi^T P \xi \leq 1\}$  con  $W = P^{-1}$ , es una región de estabilidad asintótica para (17).

**Prueba.** Ver (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2005).

#### 5. FILTROS DE DETECCIÓN DE SATURACIÓN

Los filtros de detección de saturación (FDS) son un subconjunto de los presentados en la sección 3, con la diferencia que la falla detectada corresponde a la saturación de los actuadores. Así, se tiene un sistema con saturación, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 \text{sat}(u(t)) \\ z(t) &= C_1 x(t) \\ y(t) &= C_2 x(t), \end{aligned} \quad (20)$$

haciendo  $\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 \text{sat}(u(t)) + B_2 u(t) - B_2 u(t)$ , y con la función  $\psi(u) = \text{sat}(u) - u$ , (20) se reescribe como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) + B_2 \psi(u, t) \\ z(t) &= C_1 x(t) \\ y(t) &= C_2 x(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Es evidente que (21) constituye un modelo de diagnóstico, en donde los modos de falla es la diferencia entre las señales de control saturadas y sus versiones no saturadas, es decir, la señal necesaria para hacer la compensación AW (ver la Figura 1). Por otro lado las direcciones de falla están representadas por la matriz de control  $B_2$ .

Al igual que en los filtros de detección de fallas, el banco de filtros FDS viene dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i(t) &= A \hat{x}_i(t) + B_2 u(t) + \mathcal{D}_i (y(t) - C_2 \hat{x}_i(t)) \\ \hat{z}_i(t) &= C_1 \hat{x}_i(t), \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (22)$$

En este caso  $k$  corresponde al número de actuadores. La dinámica de error es

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \mathcal{A}e_i(t) + \mathcal{B}_i \tilde{w}_i(t) + B_{2i} \psi_i(u, t) \\ e_{zi}(t) &= C_1 e_i(t), \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (23)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= [B_1 \ B_{20}] \\ \mathcal{A} &= A - \mathcal{D}_i C_2. \quad \text{y} \quad \tilde{w}_i(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \psi_0(u, t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

$B_{2i}$  y  $\psi_i(u, t)$  constituyen la dirección y el modo de la falla para la cual se diseña el  $i$ -ésimo filtro.  $B_{20}$  y  $\psi_0(t)$  contienen las direcciones y los modos restantes. A continuación se presenta el resultado fundamental de esta sección, para obtener las ganancias para los filtros FDS.

**Proposición 5.1.** Existe un filtro de detección para la  $i$ -ésima saturación tal que  $(A - \mathcal{D}_i C_2)$  es estable asintóticamente,  $\|G_{\hat{w}_i \rightarrow e_{zi}}(s)\|_\infty < \gamma_i$  con autovalores ubicados a la izquierda de  $\alpha_i$ , si y sólo si, existe  $P_i = P_i^T > 0 \in \mathfrak{R}^n$  y  $W_i \in \mathfrak{R}^{n \times s}$ ,  $\psi_i(u, t) = 0$ , tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P_i + P_i A - W_i C_2 - C_2^T W_i^T & P_i \mathcal{B}_i & C_1^T \\ & \mathcal{B}_i^T P_i & 0 \\ & C_1 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (25A)$$

<sup>1</sup> La notación  $A_{(i)}$  indica la  $i$ -ésima fila de  $A$ .

$$A^T P_i + P_i A - W_i C_2 - C_2^T W_i^T + 2\alpha_i P < 0 \quad (25b)$$

$$\alpha_i > 0.$$

En ese caso, la ganancia del estimador está dada por  $W_i = P_i \mathcal{D}_i$ .

**Prueba.** Asuma que (25) es factible y se tiene una solución para el LMI, con el cambio de variable  $W_i = P_i \mathcal{D}_i$  se tiene

$$\begin{bmatrix} A^T P_i - C_2 \mathcal{D}_i^T P_i + P_i A - P_i \mathcal{D}_i C_2 & P_i \mathcal{B} & C_1^T \\ \mathcal{B}^T P_i & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$A^T P_i - C_2 \mathcal{D}_i^T P_i + P_i A - P_i \mathcal{D}_i C_2 + 2\alpha_i P_i < 0$$

lo que es equivalente a

$$\begin{bmatrix} (A - \mathcal{D}_i C_2)^T P_i + P_i (A - \mathcal{D}_i C_2) & P_i \mathcal{B} & C_1^T \\ \mathcal{B}^T P_i & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$(A - \mathcal{D}_i C_2)^T P_i + P_i (A - \mathcal{D}_i C_2) + 2\alpha_i P_i < 0,$$

del lema real acotado, se tiene que  $(A - \mathcal{D}_i C_2)$  es estable en la región LMI  $\mathcal{R}(\text{Re}(s) < -\alpha_i, \alpha_i > 0)$  y  $\|G_{\hat{w}_i \rightarrow e_{zi}}(s)\|_\infty < \gamma_i$ , si y sólo si las desigualdades anteriores son satisfechas (Scherer, 1990; Chilali and Gahinet, 1996).

*Comentario 5.1.* La adición del LMI (25) es importante ya que la misma permite garantizar la ubicación de los autovalores de  $(A - \mathcal{D}_i C_2)$  a la derecha de un valor determinado, a los fines de dotar al filtro estimador de una velocidad de respuesta superior a la del sistema en lazo cerrado (sistema controlado). Esto se debe a que los residuos de estos filtros van a ser utilizados para hacer una realimentación del controlador mediante la compensación, sus autovalores deben ser lo suficientemente rápidos como para que el estimado de  $\psi(u, t)$  sea apropiado.

### 5.1 Una extensión al caso discreto

El esquema planteado permite elaborar un resultado análogo para el caso de sistemas en tiempo discreto, de tal manera que los filtros de detección, sean fácilmente implementados en un algoritmo. Para ello, se utiliza la versión para sistemas de tiempo discreto del lema real acotado.

Asúmase que se cuenta con el sistema

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k) + \sum_{i=1}^M L_i \nu_i(k) \quad (26)$$

$$z(k) = C_1 x(k)$$

$$y(k) = C_2 x(k),$$

con propiedades similares a (1), y un banco de filtros de detección de fallas

$$\hat{x}_i(k+1) = A\hat{x}_i(k) + B_2 u(k) + \mathcal{D}_i (y(k) - C_2 \hat{x}_i(k)) \quad (27)$$

$$\hat{z}_i(k) = C_1 \hat{x}_i(k), \quad i = 1, \dots, M,$$

la dinámica de error definida por

$$e_i(k+1) = \mathcal{A}e_i(k) + \mathcal{B}_i \tilde{w}_i(k) + B_{2i} \psi_i(u, k) \quad (28)$$

$$e_{zi}(k) = C_1 e_i(k), \quad i = 1, \dots, M.$$

Como una formulación paralela a la Proposición 5.1 se presenta el siguiente resultado.

*Proposición 5.2.* Para el sistema definido por (26), existe un filtro de detección para la  $i$ -ésima saturación tal que  $(A - \mathcal{D}_i C_2)$  es estable asintóticamente,  $\|G_{\hat{w}_i \rightarrow e_{zi}}\|_\infty < \gamma_i$  con autovalores ubicados dentro del círculo de radio  $r_i$ , si y sólo si, existe

$W_i = W_i^T > 0 \in \mathfrak{R}^n$  y  $K_i \in \mathfrak{R}^{n \times s}$ ,  $\psi_i(u, k) = 0$ , tal que

$$\begin{bmatrix} W_i & W_i A - K_i C_2 & W_i \mathcal{B}_i & 0 \\ A^T W_i - C_2^T K_i^T & W_i & 0 & C_1^T \\ \mathcal{B}_i^T W_i & 0 & I & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & \gamma_i \end{bmatrix} > 0. \quad (29a)$$

$$\begin{bmatrix} -r_i W_i & W_i A - K_i C_2 \\ A^T W_i - C_2^T K_i^T & -r_i W_i \end{bmatrix} < 0, \quad 1 > r_i > 0 \quad (29b)$$

En ese caso, las ganancias de los estimadores están dadas por  $K_i = W_i \mathcal{D}_i$ .

**Prueba.** Asuma que (29) es factible y se tiene una solución para el conjunto de LMI. Con el cambio de variable  $K_i = W_i \mathcal{D}_i$ , y efectuando transformaciones de congruencia con  $\text{diag}[P_i \ P_i \ 0 \ 0]$  y  $\text{diag}[P_i \ P_i]$  sobre (29a) y (29b) de forma respectiva, se obtiene el resultado esperado.

Con los resultados teóricos establecidos, se procede a desarrollar algunos ejemplos numéricos.

## 6. EJEMPLO NUMÉRICO

Para el conjunto de ecuaciones, correspondiente al modelo linealizado del plano vertical de un avión (Maciejowski, 1989):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,132 & 0 & -1 \\ 0 & -0,0538 & -0,1712 & 0 & 0,0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,0485 & 0 & -0,8556 & -1,013 \\ 0 & -0,2909 & 0 & 1,0532 & -0,6859 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4,419 & 0 & -1,665 \\ 1,575 & 0 & -0,0732 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0],$$

se desea diseñar e implementar una ganancia de compensación AW.

El paso inicial, corresponde a la obtención del controlador sin considerar las no linealidades en el lazo, para ello se diseña un controlador óptimo robusto en  $\mathcal{H}_\infty$  basado en LMI (Scherer et al., 1997), que permita al sistema de lazo cerrado, seguir referencias de tipo escalón. Asumiendo una perturbación sobre los estados proyectada por

$$B_1 = [1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0]^T \times 10^{-3},$$

En el diseño se desea  $\|G_{w \rightarrow z}(s)\|_\infty < 2$ , dicho controlador viene dado por:

$$A_k = \begin{bmatrix} -1,0369 & -0,86483 & 1,5554 & -32,356 \\ 0,01116 & -2,4448 & 0,2835 & 8,6681 \\ -0,49325 & 1,3097 & -0,9498 & 3,6831 \\ -0,13461 & -2,0248 & -0,64089 & -17,654 \\ 0,51683 & -1,5769 & 0,98538 & -26,37 \\ -0,66463 & -0,12374 & 0,23996 & -2,5962 \\ 0,05611 & -0,22581 & -0,01312 & -0,23982 \\ -0,17893 & -0,07174 & 0,43488 & 0,00874 \\ -18,891 & -70,779 & 11,731 & 83,517 \\ -5,2434 & -114,87 & 17,433 & 231,72 \\ -28,56 & -382,55 & 47,579 & 727,27 \\ 38,135 & 557,03 & -68,417 & -1073,9 \\ 8,925 & 276,95 & -32,706 & -566,72 \\ 4,1084 & 44,816 & -5,785 & -93,26 \\ -0,84543 & -7,7633 & -2,326 & 14,028 \\ 2,1239 & 26,946 & -3,3322 & -55,246 \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 10,029 & -1,2423 & -0,63886 \\ -1,6054 & -1,425 & 2,3411 \\ 7,0862 & 0,54062 & 10,12 \\ 8,1832 & -2,4019 & -3,8993 \\ -8,2485 & -1,1757 & -11,986 \\ 9,5968 & 1,1759 & -10,89 \\ -0,65085 & 14,564 & 1,2609 \\ -1,0328 & -0,097888 & -9,7126 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0,009219 & -0,08514 & 0,08796 & -1,9636 \\ -0,004590 & -0,14971 & 0,03314 & -0,02266 \\ -0,057321 & -0,14771 & 0,24015 & -5,0559 \\ 0,52541 & 16,599 & -1,9394 & -34,339 \\ 0,23025 & 2,6605 & -0,13442 & -4,9336 \\ -0,37985 & 21,217 & -2,3105 & -47,861 \end{bmatrix},$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0,40101 & -0,09314 & -0,40868 \\ 0,02483 & -0,17198 & -0,02788 \\ 1,1503 & -0,16596 & -0,70489 \end{bmatrix},$$

La Figura 3 presenta los resultados de la simulación del sistema en lazo cerrado con el controlador obtenido, donde claramente se observa la estabilidad del sistema. En adición se están logrando propiedades de seguimiento de trayectorias.

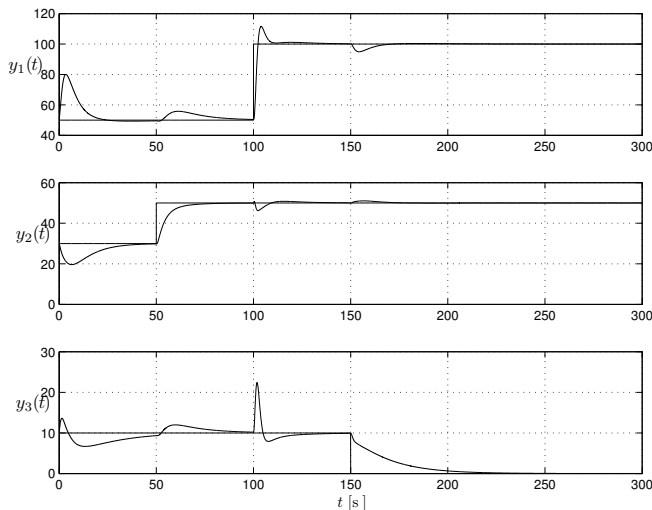


Figura 3. Salidas del sistema en lazo cerrado sin saturación.

Como paso siguiente se asume que dos de los actuadores (1 y 3) del sistema tienen límite, es decir, entran en saturación en  $U_0 = \pm[15 \ 35]$ . Para efectos de cálculo y simulación se asume que el segundo actuador tiene un límite de 100, valor que jamás será alcanzado.

La Figura 4 presenta los resultados de la simulación, bajo condiciones de saturación de los actuadores. Claramente se evidencia que el sistema al introducir los cambios de referencia se hace inestable, esto se debe a que éstos últimos son lo suficientemente altos, como para llevar los actuadores a su límite físico. Para este problema se hace evidente, que es necesario aplicar algún esquema de corrección cuando los actuadores entran en saturación.

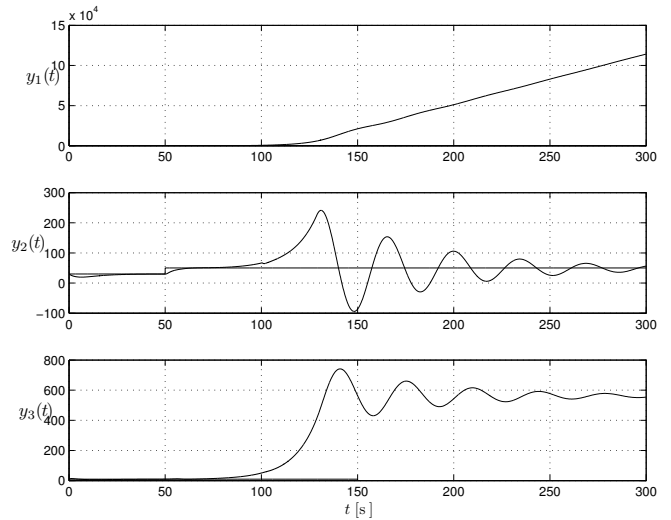


Figura 4. Salidas del sistema, saturado sin compensación.

Demostrada la necesidad de utilizar la compensación AW, se procede con el diseño de la misma. Para ello, se define el conjunto inicial:

$$\Xi_0 = Co \left\{ \begin{bmatrix} 40 \\ 27,778 \\ 5 \\ 2 \\ 2,7778 \\ 0_{(11 \times 1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 70 \\ 30 \\ 8 \\ 4 \\ 3 \\ 0_{(11 \times 1)} \end{bmatrix}, \left. \begin{bmatrix} 120 \\ 35 \\ 12 \\ 8 \\ 3,5 \\ 0_{(11 \times 1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \\ 15 \\ 15 \\ 4 \\ 0_{(11 \times 1)} \end{bmatrix} \right\}.$$

Del Teorema 4.1 (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2005), la ganancia de compensación es:

$$E_c = \begin{bmatrix} -71,509 & -0,55025 & 9,2366 \\ -3,1085 & 21,338 & 5,2673 \\ 80,074 & 8,4381 & 33,759 \\ -110,81 & -1,2156 & -33,187 \\ -87,937 & -0,13526 & -11,873 \\ -88,407 & 1,2082 & -7,8538 \\ 129,32 & 38,671 & 30,198 \\ -59,224 & -1,956 & -6,5699 \end{bmatrix},$$

la cual, garantiza un factor de escala  $\beta = 1,9439$  para el conjunto de condiciones iniciales  $\Xi_0$ .

Ahora, para hacer la implementación de la ganancia obtenida, se procede a calcular los filtros FDS. Las matrices de perturbación extendida y de direcciones de falla son:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0,001 & -1,6650 \\ 0 & -0,0732 \end{bmatrix} \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1200 \\ 0 \\ 4,4190 \\ 1,5750 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & -0,1200 \\ 0 & 0 \\ -0,001 & 4,4190 \\ 0 & 1,5750 \end{bmatrix} \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,6650 \\ -0,0732 \end{bmatrix}.$$

De la Proposición 5.1, haciendo  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1 \times 10^{-3}$  y  $\alpha_i \approx 230$ , las ganancias para los filtros FDS son:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1,5609 \times 10^3 & -2,3257 \times 10^2 & -8,32 \times 10^2 \\ -5,0825 \times 10^1 & 8,6848 \times 10^2 & -3,5510 \times 10^2 \\ -6,2811 \times 10^1 & 1,119 \times 10^2 & 1,2488 \times 10^4 \\ -2,3035 \times 10^5 & 4,1712 \times 10^5 & 4,6486 \times 10^7 \\ -4,5851 \times 10^5 & 5,0482 \times 10^5 & 1,9559 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1,3572 \times 10^3 & -3,3534 \times 10^1 & 9,4477 \times 10^2 \\ 6,0861 \times 10^3 & 8,9207 \times 10^4 & -9,6164 \times 10^3 \\ -6,7052 \times 10^3 & 3,1076 \times 10^2 & 1,5134 \times 10^4 \\ -3,1658 \times 10^6 & -3,1402 \times 10^5 & 6,9324 \times 10^6 \\ -6,1354 \times 10^6 & -8,8353 \times 10^5 & 1,2369 \times 10^7 \end{bmatrix}.$$

La Figura 5, presenta las salidas del sistema, el cual cuenta con un mecanismo de compensación del tipo de la Figura 2. En este caso el sistema a pesar de la existencia de la saturación de sus actuadores (ver Figura 6) se mantiene estable, con una ligera degradación en el desempeño.

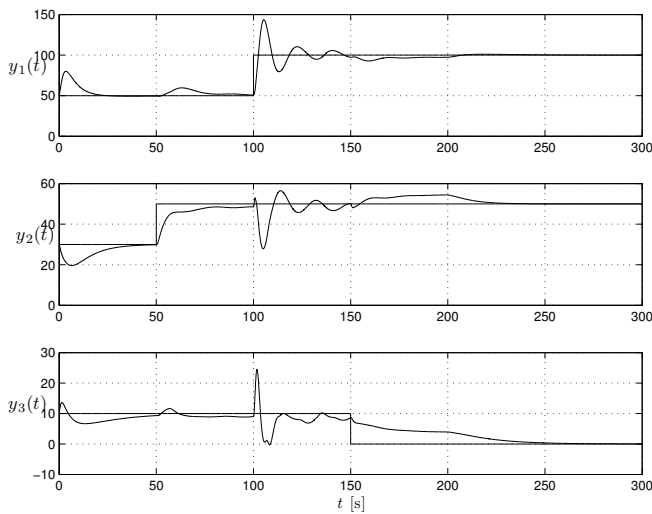


Figura 5. Saturado con compensación vía FDS.

La Figura 6, presenta las señales de control a la salida del controlador (parte superior), y a la entrada de la planta (parte inferior).

Los resultados observados en la Figura 5, se han logrado a través de la estimación de las señales necesarias para hacer la compensación. La Figura 7 presenta la señal  $\psi(u, t)$ , para el caso medido (parte superior) y el estimado (parte inferior). Es válido hacer la aclaración que la señal  $\psi(u, t)$  medida, es presentada por motivos de ilustración y comparación con su equivalente estimado, pero la implementación se está efectuando con  $\hat{\psi}(u, t)$ , pues la solución presentada en este trabajo asume que esta no se conoce.

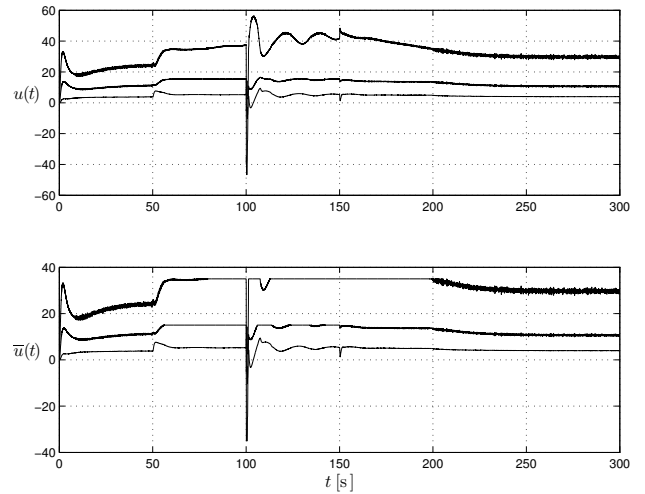


Figura 6. Señales de control, a la salida del control, y a la entrada a la planta.

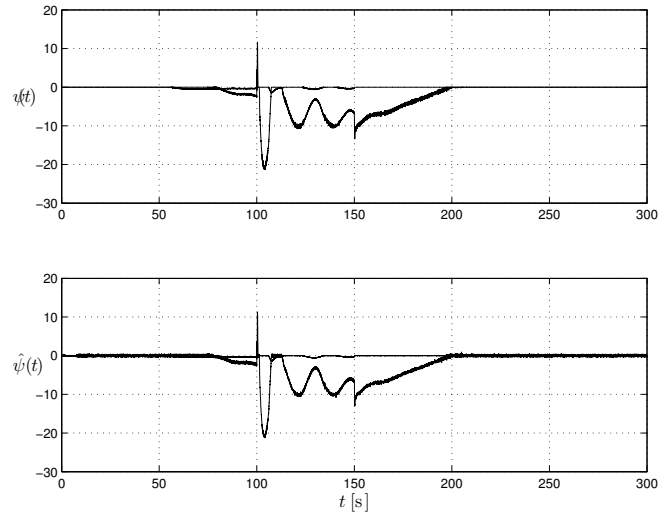


Figura 7. Señal  $\psi(u, t)$ , medida y estimada.

Este método de implementación permite variabilidad, dentro de un cierto rango, en los límites de acción de los actuadores, debido a que los filtros pueden detectar esos cambios, lo cual representa un nivel de robustez. Así, la validez de la implementación, está subordinada a esa robustez proporcionada por el mecanismo de síntesis de la compensación AW, pues aunque el mecanismo de implementación soporta cambios en el comportamiento de los actuadores, la compensación AW puede no hacerlo. Esto deja abierto el problema de síntesis robusta de la compensación AW.

## 7. CONCLUSIONES

En esta contribución se ha presentado un método para hacer la implementación de la compensación anti-windup en sistemas de control lineales. La técnica está basada en el uso de un banco de filtros de diagnóstico de fallas (multifiltrado), para obtener un estimado de la señal residual, que es la diferencia entre la salida del control y la entrada a la planta. Esta técnica resuelve el problema de los casos donde se tiene alguna dificultad para efectuar la medición real de la salida de los actuadores, o el uso de modelos aproximados. Además, la técnica exhibe

características de robustez frente a cambios de las condiciones de operación de los accionadores.

El banco de filtros ha sido obtenido por medio de la solución de un problema de optimización convexa en términos de desigualdades lineales matriciales; valiéndose de resultados clásicos dentro de la teoría de control óptimo robusto como el Lema Real Acotado y las regiones de estabilidad LMI. El esquema de implementación presentado muestra grandes ventajas, pues es robusto frente a cambios de los elementos de actuación. La construcción del banco de filtros permite reducir la posibilidad de soluciones muy conservadoras, ya que al tener condiciones de diseño diferentes para cada filtro, se está aumentando el grado de libertad del problema.

El uso de las LMI permite suficiente flexibilidad en el diseño, ya que es posible adicionar tantas restricciones como sea necesario, incluso permitiendo aplicar criterios de diseño multiobjetivos; esto es, diferentes normas en diferentes canales del diseño. La verificación del método se ha presentado mediante un ejemplo numérico. Los resultados han sido evaluados mediante simulaciones.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer la colaboración del FONACIT, según el proyecto No. **2005000170**, y el CDCHT-ULA, a través del proyecto No. **I-1103-08-02-A**.

#### REFERENCIAS

- Acuña, W. and A. Ríos-Bolívar (2007). AW implementation using multifiltering for fault detection. In: *Proc 9th WSEAS International Conference on Automatic Control, Modelling and Simulation (ACMOS '07)*. Istanbul, Turkey. pp. 139–144.
- Acuña, W. and A. Ríos-Bolívar (2008).  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  multiobjective for fault detection in uncertain polytopic systems. In: *17th IFAC World Congress (Submitted)*. Seoul, Korea. p. CDROM.
- Åström, K.J. and L. Rundquist (1989). Integrator windup and how to avoid it. In: *Proc. of the American Control Conference*. pp. 1693–1698.
- Beard, R.V. (1971). Failure accommodation in linear systems through self-reorganization. PhD thesis. Mass. Inst. Technol.
- Bernstein, D.S. and A.N. Michel (1995). A chronological bibliography on saturating actuators. *Int. Journ. of Robust and Nonlinear Control* **5**(5), 375–380.
- Blanke, M., M. Staroswiecki and N.E. Wu (2001). Concepts and methods in fault-tolerant control. In: *Proc. of the American Control Conference*. Vol. 4. Arlington, VA, USA. pp. 2606–2620.
- Bokor, J. and G. Balas (2004). Detection filter design for lpv systems—a geometric approach. *Automática* **40**, 511–518.
- Casavola, A., D. Famularo, G. Franzè and M. Sorbara (2007). A fault detection, filter-design method for linear parameter-varying systems. *Proc IMechE. Part I: Journal of Systems and Control Engineering* **221**, 865–873. Especial Issue on Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control.
- Chilali, M. and P. Gahinet (1996).  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Tran. Aut. Control* **41**(3), 358–367.
- Gomes da Silva Jr., J.M. and S. Tarbouriech (2005). Anti-windup design with guaranteed regions of stability: An LMI approach. *IEEE Tran. on Autom. Control* **50**(1), 106–111.
- Grimm, G., J. Hatfield, I. Postlethwaite, A.R. Teel, M.C. Turner and L. Zaccarian (2003). Antiwindup for stable linear systems with input saturation: An LMI-based synthesis. *IEEE Tran. on Autom. Control* **48**(9), 1509–1525.
- Jones, H.L. (1973). Failure detection in linear systems. PhD thesis. Mass. Inst. Technol.
- Kothare, M.V., P.J. Campo, M. Morari and C.N. Nett (1994). A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica* **30**(12), 1869–1883.
- Maciejowski, J.M. (1989). *Multivariable Feedback Design*. Addison Wesley.
- Massoumnia, M.-A. (1986). A geometric approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Trans. On Autom. Control* **31**(9), 839–846.
- Niemann, H.H. and J. Stoustrup (1998). Multiobjective design techniques applied to fault detection and isolation. In: *Proc. of the 1998 American control Conference*. Philadelphia. pp. 2022–2026.
- Patton, R.J. (1997). Fault-tolerant control systems: The 1997 situation. In: *Proc. of The 3th Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes (SAFEPROCESS'97)*. Hull University. pp. 1033–1054.
- Ríos-Bolívar, A. (2001). Sur la Synthèse de Filtres de Détection de Défaillances. PhD thesis. Université Paul Sabatier. Toulouse.
- Ríos-Bolívar, A. and G. García (2001). Robust filters for fault detection and diagnosis: An  $\mathcal{H}_\infty$  optimization approach. In: *6th European Control Conference*. Porto - Portugal. pp. 132–137.
- Ríos-Bolívar, A. and G. García (2005). Robust filters for fault detection: An LMI control setting. *Rev. Tecnica de la Universidad del Zulia* **28**(3), 189–199.
- Ríos-Bolívar, A. and W. Acuña (2006). FTC usando FDI robusta y compensación AW. In: *Proc. of the XII Latin-American Congress on Automatic Control*. Vol. 1. Salvador, Brazil. pp. 192–197.
- Ríos-Bolívar, A. and W. Acuña (2007). Implementation of AW compensation based-on multifiltering for fault diagnosis. In: *15th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*. Athens, Greece. p. CDROM.
- Scherer, C. (1990). The Riccati Inequality and State-Space  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal Control. PhD thesis. Universitat Wurzburg.
- Scherer, C., P. Gahinet and M. Chilali (1997). Multiobjective output feedback control via LMI optimization. *IEEE Tran. Aut. Control* **42**(7), 896–911.
- Weng, A., R.J. Patton and P. Cui (2007). Active fault-tolerant control of a double inverted pendulum. *Proc IMechE. Part I: Journal of Systems and Control Engineering* **221**, 895–904. Especial Issue on Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control.
- Wu, F. and B. Lu (2004). Anti-windup control design for exponentially unstable LTI systems with actuator saturation. *Systems & Control Letters* **52**, 305–322.