

Obtención de Modelos Borrosos Interpretables de Procesos Dinámicos

Juan Contreras Montes* Roger Misa Llorca ** Luis F. Murillo Fernández ***

* *Facultad de Ingeniería Naval, Escuela Naval Almirante Padilla, Isla de Manzanillo, Cartagena, Colombia, (e-mail: epcontrerasj@ieee.org)*

** *Departamento de Ingeniería Eléctrica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Marianao, La Habana, Cuba, (e-mail: rmisa@electrica.cujae.edu.cu)*

*** *Facultad de Ingeniería, Corporación Universitaria Rafael Núñez, Centro, Calle Larga, Cartagena, Colombia, (lfmurillo@ieee.org)*

Resumen: En este artículo se presenta una novedosa metodología para la construcción de modelos borrosos lingüísticamente interpretables, a partir de datos de entrada y salida, de procesos dinámicos. Se describe una sencilla técnica de agrupamiento para construcción de las reglas borrosas, así como el empleo de mínimos cuadrados para ajuste de consecuentes. Para garantizar la interpretabilidad del modelo borroso la partición de los antecedentes emplea conjuntos triangulares con interpolación de 0.5. El aspecto más promisorio en nuestra propuesta consiste en alcanzar una buena precisión sin sacrificar la interpretabilidad del sistema borroso ni recurrir a otras técnicas de inteligencia artificial. Se presentan aplicaciones a problemas o conjuntos de datos ampliamente conocidos (benchmark classic) como la cámara de gas de Box-Jenkins, la serie caótica de Mackey Glass y la dinámica de cabeceo de un helicóptero a escala, y se comparan los resultados con aquellos obtenidos por otros autores que emplean técnicas diferentes. Copyright © 2008 CEA

Palabras Clave: identificación, agrupamiento, mínimos cuadrados, modelo borroso, interpretabilidad.

1. INTRODUCCIÓN

La construcción de modelos borrosos involucra la selección y sintonización de varios parámetros como: forma y distribución de las funciones de pertenencia de las variables de entrada, base de reglas, operadores lógicos empleados, forma y distribución de los consecuentes, etc. El gran número de parámetros requeridos para obtener un modelo borroso ha dificultado el desarrollo de una técnica única de modelación, especialmente en el caso de identificación borrosa a partir de datos experimentales de entrada y salida.

Una de las primeras propuestas para diseño automático de sistemas borrosos a partir de los datos es la propuesta por Wang (1992). Sugeno y Yasukawa (1993) propusieron una metodología para identificación de parámetros de modelos borrosos empleando consecuentes tipo singletons, pero requiere de muchas reglas y presenta una pobre capacidad de descripción. Otros métodos importantes emplean el gradiente descendente, técnicas de agrupamiento o clustering y algoritmos evolutivos.

Los algoritmos de agrupamiento borroso representan la técnica más adecuada para la obtención de modelos borrosos, siendo los métodos de Fuzzy C-Means (Bezdek, 1987) y el de Gustafson-Kessel (1979) los más empleados. Se han realizado diversas variaciones a estos algoritmos de agrupamiento. Nauck y Kruse (1995,1999) proponen técnicas de agrupamiento neuro-difusas; Espinosa y Vandewalle (2000) presentan una metodología para extraer reglas a partir de los datos en un marco de integridad lingüística incluyendo algoritmos de fusión para agrupar conjuntos cuyos valores modales estén a una distancia muy cercana. Sala (1998,2001) introduce una novedosa técnica basada en el error de inferencia para aproximar funciones

empleando partición suma 1 con conjuntos triangulares; Diez et al (2004) proponen variaciones a los algoritmos de agrupamiento para mejorar la interpretabilidad y descubrir estructuras afines locales en los modelos borrosos obtenidos. Paiva y Dourado (2004) presentan un modelo generado por medio del entrenamiento de una red neuro-difusa implementado en dos fases: en la primera fase, se obtiene la estructura del modelo empleando un algoritmo clustering subtractivo, lo cual permite extraer las reglas a partir de datos de entrada y salida; en la segunda fase, se realiza la sintonización de los parámetros del modelo mediante una red neuronal que emplea retropropagación, pero imponiendo restricciones en el ajuste de los parámetros y en la fusión de las funciones de pertenencia con el fin de garantizar la interpretabilidad del modelo resultante. Guillaume y Charnomordic (2004) proponen una estrategia para generar particiones difusas interpretables a partir de los datos mediante una metodología, que denominan partición jerárquica difusa (HFP), en la que en vez de incorporar datos en cada iteración agrega conjuntos borrosos. También presentan un algoritmo de fusión de los conjuntos borrosos basado en métricas adecuadas que garanticen la interpretabilidad semántica. Joo y Lee (2003,2005) proponen un aproximador universal para cualquier función continua en un conjunto compacto empleando un sistema borroso jerárquico en el que las salidas de las capas previas no son usadas en las partes IF de la reglas difusas sino en las partes THEN. Chen y Saif (2005) proponen un sistema borroso novedoso que emplea bases de reglas dinámicas, lo que implica que las reglas pueden cambiar con las entradas y facilita su empleo tanto para modelación como para control.

Los métodos mencionados han demostrado su potencialidad para identificar modelos borrosos a partir de los datos con acertada precisión numérica. Sin embargo, continúa siendo un problema

la interpretabilidad del modelo borroso obtenido, compuesto por particiones con solapamientos mayores a uno, solapamiento de más de dos conjuntos, elevado número de reglas y, en algunos casos, conjuntos no convexos.

Hay tres criterios básicos que definen la interpretabilidad (Espinosa y Vandewalle, 2000, Paiva y Dourado, 2004) de un modelo borroso:

- 1) Distinguible: cada etiqueta lingüística debe tener significado semántico y cada conjunto borroso debe tener un rango definido en el universo de discurso. Las funciones de pertenencia deben ser claramente diferentes.
- 2) El número de funciones de pertenencia: no debe exceder de 9 términos distintos
- 3) Número de reglas: debe ser limitado, aunque en este punto no existe consenso sobre un número máximo.

La novedad del método propuesto en este documento radica en la consecución de modelos borrosos interpretables con alta precisión y bajo número de parámetros, y a que no es un método híbrido ya que no requiere de otras técnicas de inteligencia artificial para su entrenamiento.

La metodología empleada en este trabajo es presentada en tres fases: en la primera, se emplea el error de inferencia para generar un sistema borroso interpretable y, además, detectar clases o agrupamientos posibles en los datos; en la segunda, mediante el empleo de mínimos cuadrados, para ajuste de consecuentes; en la tercera, se emplea el método para la identificación de procesos dinámicos.

2. ERROR DE INFERENCIA

En lógica borrosa es común tratar con reglas del tipo “Si u es A , entonces y es B ”, donde u e y representan dos variables numéricas, $A \subset U$ y $B \subset Y$, son dos conjuntos borrosos de entrada y salida respectivamente, definidos en los universos U e Y . La regla mencionada es equivalente a la inequación

$$u_A(u) \leq u_B(y) \tag{1}$$

donde $u_A(u)$ y $u_B(y)$ se refieren a las funciones de pertenencia de los valores lingüísticos que pueden tomar las variables u e y respectivamente. El error de inferencia \in , concebido como la distancia conceptual al conjunto conclusión de la regla, está definido por Sala (1998) como

$$\in \approx \begin{cases} 0 & u_A(u) \leq u_B(y) \\ u_A(u) - u_B(y) & u_A(u) > u_B(y) \end{cases} \tag{2}$$

En el método propuesto, el primer paso es construir la partición de la(s) variable(s) de entrada empleando conjuntos triangulares con solapamiento en 0.5. Posteriormente se procede a generar la ubicación de los consecuentes de cada regla buscando que el error de inferencia sea nulo, según la ecuación (2), lo cual conllevaría a un infinito número de soluciones posibles. En la búsqueda de una única solución se restringe la condición de error de inferencia nulo a la presentada en la ecuación (3)

$$u_A(u) = u_B(y) \tag{3}$$

Si el sistema tiene p entradas se debe representar por reglas del tipo “Si u_1 es A_1 , u_2 es A_2 , ..., u_p es A_p , entonces y es B ”, la regla j deberá cumplir con la condición

$$(u_{A_1}(x_1^{(i)}) \wedge u_{A_2}(x_2^{(i)}) \wedge \dots \wedge u_{A_p}(x_p^{(i)})) = u_B(y^{(i)}) \tag{4}$$

donde \wedge representa un operador de combinación de la lógica borrosa de la clase promedio ponderado, $x_k^{(i)}$, con $k=1, \dots, p$; $i=1, \dots, N$, es el vector entrada p -dimensional, con N datos por variable de entrada, y y^i es el vector unidimensional de salida.

Si se emplean consecuentes tipo singleton, solo se consideran los valores modales de las funciones de pertenencia del antecedente, considerando que la ubicación del valor modal de la función de pertenencia triangular en el consecuente se puede asimilar a un singleton.

3. IDENTIFICACIÓN BORROSA

3.1 Estructura del Modelo Borroso

Buscando un equilibrio entre la aproximación numérica y la interpretabilidad del sistema borroso resultante se consideran los siguientes criterios para la selección de los parámetros (Contreras et al. 2006)

Funciones de Pertenencia

La partición de los universos de las variables de entrada en el proceso de aprendizaje se hace con conjuntos triangulares normalizados con solapamiento específico de 0.5. Las funciones de pertenencia triangulares permiten la reconstrucción del valor lingüístico en el mismo valor numérico, luego de aplicar un método de concreción (Pedrycz, 1994); además, el solapamiento en 0.5 asegura que los soportes de los conjuntos borrosos sean diferentes.

Los conjuntos borrosos generados para la variable de salida son tipo singleton.

Distribución de las Funciones de Pertenencia

Los conjuntos borrosos triangulares de las variables de entrada se distribuyen uniformemente en cada universo respectivo de manera tal que cada uno de los elementos de los universos de discurso de cada variable debe pertenecer, al menos, a un conjunto borroso.

Operadores

Para la combinación de los antecedentes se emplea un operador de combinación de la clase OWA, cuya denominación obedece a sus siglas en inglés (Ordered Weighted Averaging operators)

Método de Inferencia

El método de inferencia empleado está dado por

$$f(x^{(i)}) = \frac{\sum_{j=1}^L m_j(x^{(i)})y^j}{\sum_{j=1}^L m_j(x^{(i)})} \quad (5)$$

donde

$$m_j(x^{(i)}) = u_{A_1^j}(x_1^{(i)}) \cdot u_{A_2^j}(x_2^{(i)}) \cdot \dots \cdot u_{A_n^j}(x_n^{(i)}) \quad (6)$$

es el el grado de la salida de la j-ésima regla de un sistema borroso tipo Mamdani, $f(x^{(i)})$ es la función que aproxima a la función real de salida, y^j es el valor del singleton correspondiente a la regla j , A_n^j son los conjuntos borrosos del antecedente de la regla j activada, y L corresponde al número de reglas activadas.

3.2 Algoritmo De Identificación Borrosa

El algoritmo para generación de sistemas borrosos interpretables a partir de los datos se basa en la minimización del error de inferencia. El usuario solo debe introducir los datos de las variables de entrada y salida. El algoritmo determina los rangos de cada variable, distribuye las funciones de pertenencia en los universos de cada variable de entrada, ubica los consecuentes tipo singleton en el espacio de salida, determina las reglas y ajusta la ubicación de los consecuentes, empleando mínimos cuadrados, para minimizar el error de aproximación. El algoritmo se detiene cuando se ha alcanzado una métrica de error menor a la requerida por el usuario o cuando el número de conjuntos borrosos por variable de entrada es mayor a 9. La distribución de las funciones de pertenencia en cada universo de entrada se hace de manera uniforme para garantizar que la partición resultante sea suma 1; es decir, la suma de los grados de pertenencia de un dato en una variable de entrada será siempre igual a 1.

Dado una colección de datos experimentales de entrada y salida $\{x_k^{(i)}, y^{(i)}\}$, con $i = 1 \dots N$; $k = 1, \dots, p$, donde $x_k^{(i)}$ es el vector de entrada p-dimensional $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_p^{(i)}$ e $y^{(i)}$ es el vector unidimensional de salida

- a. Organización del conjunto de p variables de entrada y una variable de salida, cada una con N datos.

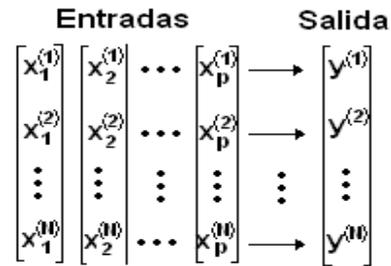


Figura 1. Organización del conjunto de datos.

- b. Determinación de los rangos de los universos de cada variable de acuerdo a los valores máximos y mínimos de los datos asociados $[x_k^-, x_k^+]$, $[y^-, y^+]$.
- c. Distribución de las funciones de pertenencia triangulares sobre cada universo. Se tiene como condición general que el vértice con valor de pertenencia uno (valor modal) cae en el centro de la región cubierta por la función de pertenencia mientras que los otros dos vértices, con valor de pertenencia iguales a cero, caen en los centros de las dos regiones vecinas. Para poder aproximar eficientemente los extremos inferior y superior de una función representada por los datos es necesario que en la partición triangular las funciones de pertenencia que cubren el inicio y final del universo coincidan sus vértices con valor de pertenencia uno con sus vértices izquierdo y derecho respectivamente, como se aprecia en la figura 2. Se inicia con $n = 2$ conjuntos triangulares.

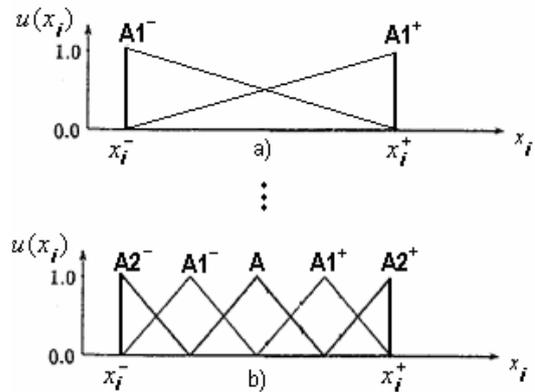


Figura 2. Partición triangular suma 1. a) partición inicial, $n = 2$; b) partición con $n = 5$

- d. Cálculo de la posición de los valores modales de la(s) variable(s) de entrada, de acuerdo a

$$\text{Si } u_{A_k^{(n)}}(x_k^{(i)}) = 1$$

$$\text{Entonces, } yS_k^{(n)} = y[i] \quad (7)$$

donde $yS_k^{(n)}$ corresponde a la proyección sobre el espacio de salida de la evaluación del dato $x^{(i)}$ de la k-ésima variable de entrada en el n-ésimo conjunto de la partición correspondiente. El valor de la salida correspondiente a dicha proyección está dado por el valor de la i-ésima posición del vector de salida y , el cual se constituye en el

singleton asociado a ese conjunto. De esta manera se aplica el criterio de error de inferencia nulo empleando consecuentes tipo singleton.

- e. Determinación de las reglas. El número máximo de reglas está determinado por el número de conjuntos de cada variable de entrada multiplicado por el número de variables; es decir igual a $n \times k$, que es igual al número de singletons generados en el paso anterior. Cuando existen singletons ubicados en la misma posición, se combinan los antecedentes de acuerdo a (4) en una sola regla, lo que permite reducir el número de reglas.
- f. Validación del modelo empleando el método de inferencia descrito por (5), donde \bar{y}^j es el valor del singleton correspondiente a la regla j .
- g. Ajuste de los parámetros, reubicando los singletons de salida mediante el empleo del método de mínimos cuadrados. La ecuación (5) puede expresarse de la forma

$$f(x^{(i)}) = \sum_{j=1}^L w_j(x^{(i)}) \bar{y}^j \quad (8)$$

donde

$$w_j(x^{(i)}) = \frac{m_j(x^{(i)})}{\sum_{j=1}^L m_j(x^{(i)})} = w_j^i \quad (9)$$

La ecuación (8) puede expresarse en forma matricial como $Y = W\theta + E$, donde Y representa los valores de salida reales, $W\theta$ representa la salida del modelo borroso, siendo W es la matriz de grados de pertenencia obtenida de (9) y θ el vector de consecuentes, y E es el error de aproximación que debe ser minimizado. Es decir:

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^L \end{bmatrix}_Y = \begin{bmatrix} w_1^1 & w_2^1 & \vdots & w_L^1 \\ w_1^2 & w_2^2 & \dots & w_L^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1^L & w_2^L & \dots & w_L^L \end{bmatrix}_W \begin{bmatrix} \bar{y}^{-1} \\ \bar{y}^{-2} \\ \vdots \\ \bar{y}^{-L} \end{bmatrix}_\theta + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}_E \quad (10)$$

Empleando la norma del error cuadrático se tiene

$$E^2 = (Y - W\theta)^2 = (Y^2 - 2YW\theta + (W\theta)^2) \quad (11)$$

La solución a este problema de mínimos cuadrados está dada por

$$\frac{\partial E^2}{\partial \theta} = 0 = -2YW + 2W^T W\theta \quad (12)$$

de donde se obtiene

$$\theta = \frac{Y^T W}{W^T W} = (W^T W)^{-1} Y^T W \quad (13)$$

Esta solución es válida si $(W^T W)$ es no singular, lo que quiere decir que todas las reglas deben recibir suficiente excitación durante el entrenamiento. En la práctica esto no es siempre posible, por lo que es recomendable recurrir a la aplicación de mínimos cuadrados recursivos, buscando garantizar que la adaptación solo afecte las reglas excitadas

- h. Terminar si la medida del error cuadrático medio MSE es menor a una medida previamente establecida ó si el número de conjuntos por variable de entrada es mayor a 9. De otra manera, incrementar en 1 el número n de conjuntos de la variable de entrada y volver al paso c).

Con el algoritmo descrito se consigue un modelo borroso interpretable con una buena precisión y solo se requiere del ajuste de los parámetros del consecuente, que son tipo singleton, lo que disminuye el tiempo de entrenamiento. Es posible lograr una mayor aproximación (“ajuste fino”) si al finalizar el proceso mencionado se aplica el método del gradiente descendiente para ajustar la ubicación de los valores modales de los conjuntos triangulares del antecedente, conservando la partición suma 1 y, por lo tanto la interpretabilidad del sistema, como explica Espinosa et al (2005).

4. RESULTADOS

4.1 Horno de Gas de Box-Jenkins

Uno de los problemas clásicos en la modelación e identificación de sistemas es el horno de gas planteado por Box y Jenkins. El conjunto de datos está compuesto de 296 pares de datos de entrada-salida. Los datos de entrada corresponden al flujo de gas que va a ser quemado $u(k)$ y los datos de salida a la concentración de dióxido de carbono $y(k)$. El objetivo es predecir la salida usando valores pasados de la entrada y la salida.

Varios autores han trabajado este problema con diferente número de valores pasados de entrada y salida. Gaweda y Zurada (2003) emplean, en la ecuación de regresión, las variables $u(k-1)$, $u(k-2)$, $u(k-3)$, $y(k-1)$, $y(k-2)$ y $y(k-3)$, mientras que Pavia y Dourado (2004) emplean en la ecuación de regresión solo las variables $y(k-1)$ y $u(k-4)$, logrando un error RMS de 0.390 en la identificación.

Con las variables propuestas por Pavia y Dourado se aplicó el método propuesto. El proceso inicia con una partición de 2 conjuntos triangulares por variable de entrada, Bajo B y Alto A, como se muestra en la figura 3. La figura 4 muestra la ubicación de los consecuentes tipo singleton generados por el algoritmo, a partir de la cual se determina la base de reglas. La ubicación de estos consecuentes se realiza de la siguiente manera: los valores mínimo (-2.7160) y máximo (2.8340) de la variable $u(k-4)$ coinciden con los valores modales de sus 2 conjuntos triangulares y se encuentran ubicados en las posiciones 115 y 44 respectivamente de ese vector. Buscando en el vector $y(k)$, encontramos que en esas posiciones se encuentran los valores, o consecuentes, 60,2 y 45.8 respectivamente. Por otro lado, los

valores mínimo (45.6) y máximo (60.5) de la variable $y(k-1)$ coinciden con los valores modales de sus 2 conjuntos triangulares y se encuentran ubicados en las posiciones 46 y 203 respectivamente de ese vector. Buscando en el vector $y(k)$, encontramos que en esas posiciones se encuentran los valores, o consecuentes, 46.0 y 60.2 respectivamente.

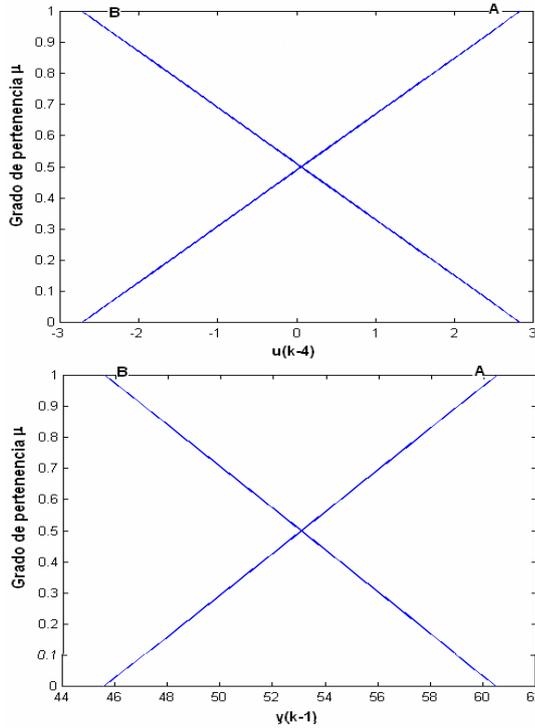


Figura 3. Funciones de pertenencia para el ejemplo de modelación del horno Box-Jenkins

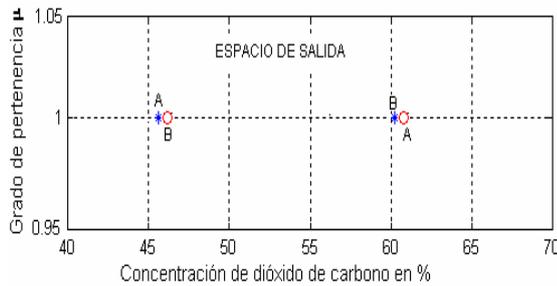


Figura 4. Proyección de los valores modales de las variables de entrada $u(k-4)$ (*), $y(k-1)$ (o) en la identificación del horno de Box-Jenkins

Se aprecia que los valores modales de los conjuntos A (Alto), de la variable $u(k-4)$ y B (Bajo) de la variable $y(k-1)$ generan consecuentes de valores 45.8 y 46.0 respectivamente; mientras que valores modales de los conjuntos A (Alto), de la variable $u(k-4)$ y B (Bajo) de la variable $y(k-1)$ generan consecuentes iguales de valor 60.2. Buscando una mayor precisión se ajustan los consecuentes, empleando mínimos cuadrados, lo que modifica ligeramente la ubicación de estos como se indica en la base de reglas generada, así:

- Si $u(k-4)$ es A, entonces \bar{y}^k es 45.52
- Si $u(k-4)$ es B, entonces \bar{y}^k es 61.08
- Si $y(k-1)$ es B, entonces \bar{y}^k es 45.52
- Si $y(k-1)$ es A, entonces \bar{y}^k es 61.08

Al fusionar las reglas con consecuentes iguales, la base de reglas queda de la forma

- Si $u(k-4)$ es A Y $y(k-1)$ es B, entonces \bar{y}^k es 45.52
- Si $u(k-4)$ es B Y $y(k-1)$ es A, entonces \bar{y}^k es 61.08

Para mejorar aún mas la precisión del modelo borroso obtenido se hizo un ajuste de los valores modales de los conjuntos borrosos de cada variable de entrada empleando gradiente descendente, lo cual movió los valores modales fuera de los rangos de cada variable, pero manteniendo la condición de partición suma 1.

La figura 5 muestra las particiones resultantes de las variables de entrada luego del ajuste de los valores modales y la tabla 1 presenta la base de reglas del modelo borroso luego del ajuste de los consecuentes.

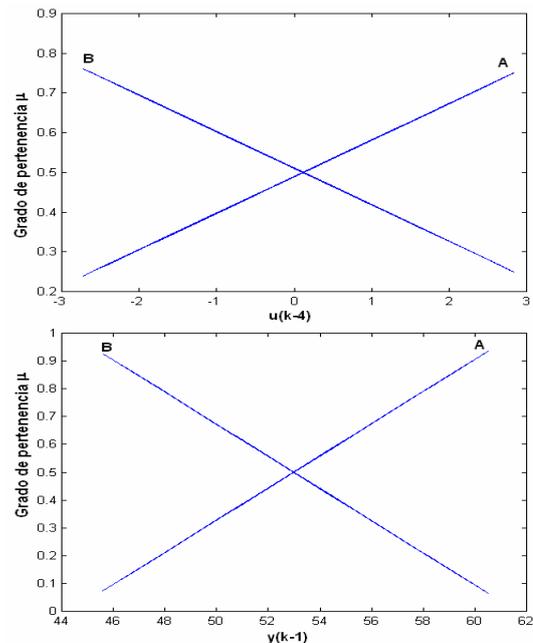


Figura 5. Funciones de pertenencia para el ejemplo de modelación del horno Box-Jenkins luego del ajuste por gradiente descendente

Tabla 1. Descripción lingüística del sistema borroso

Regla	$u(k-4)$	\wedge	$y(k-1)$	\Rightarrow	\bar{y}^k
1	A		B		44.78
2	B		A		65.30

El modelo borroso obtenido presenta un error cuadrático medio de 0.066, con solo 4 parámetros de ajuste y 2 reglas con claro significado para un operador humano. Los conjuntos borrosos de las particiones son triangulares, suma 1 y claramente diferentes. Es decir, el modelo borroso obtenido cumple con el compromiso

de interpretabilidad y precisión. La figura 6 muestra una comparación entre la salida del modelo y la salida real del proceso.

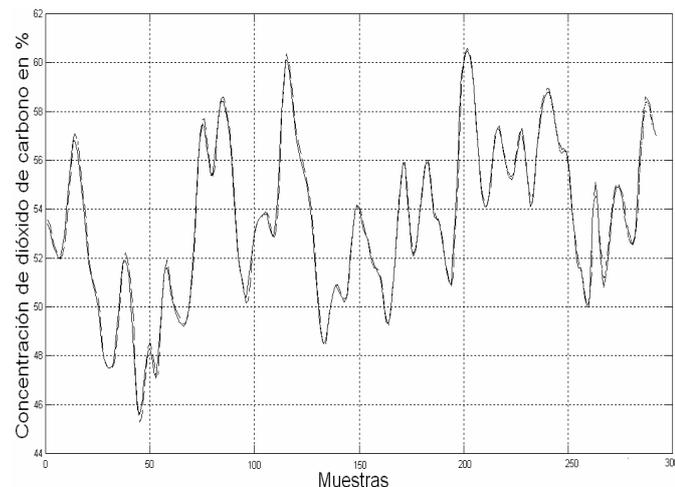


Figura 6. Desempeño del modelo borroso del horno de gas de Box-Jenkins

La tabla 2 muestra una comparación con los resultados obtenidos con otros métodos

Tabla 2. Comparación de resultados de varios métodos al problema del horno de gas de Box-Jenkins

Modelo	MSE	Reglas	Parámetros
Modelo SI de Kim et al (1998)	0.048	2	110
Modelo de Gaweda y Zurada (2003)	0.055	2	38
Nuestro modelo	0.066	2	6
Modelo de Wang y Langari (1995)	0.066	2	N/A
Modelo ARMA. Box-Jenkins (1976)	0.202	N/A	N/A

4.2 Serie Caótica de Mackey-Glass

La serie de tiempo de Mackey_Glass es una de las más empleadas para probar métodos de identificación, y está descrita por la ecuación

$$\dot{x}(t) = \frac{0.2x(t - \tau)}{1 + x^{10}(t - \tau)} - 0.1x(t) \quad (14)$$

Se asume que $x(t) = 0$ para $t < 0$; un intervalo de tiempo de 0.1; $x(0) = 1.2$ y $\tau = 17$. Se emplean $x(t - 18)$, $x(t - 12)$, $x(t - 6)$ y $x(t)$ para predecir $x(t + 6)$.

Se utilizaron 500 datos para el entrenamiento y 500 datos para validación. El modelo borroso obtenido finalmente tiene 3 conjuntos triangulares por variable (Bajo B, Medio M y Alto A) y 9 reglas. El número de parámetros de ajuste es de 21, el cual es muy inferior a los requeridos por otros métodos. La figura 7 muestra la comparación entre los datos de la serie y la salida del modelo borroso. El error cuadrático medio RMSE alcanzado fue

de 0.0223 en el entrenamiento y 0.0229 en la validación

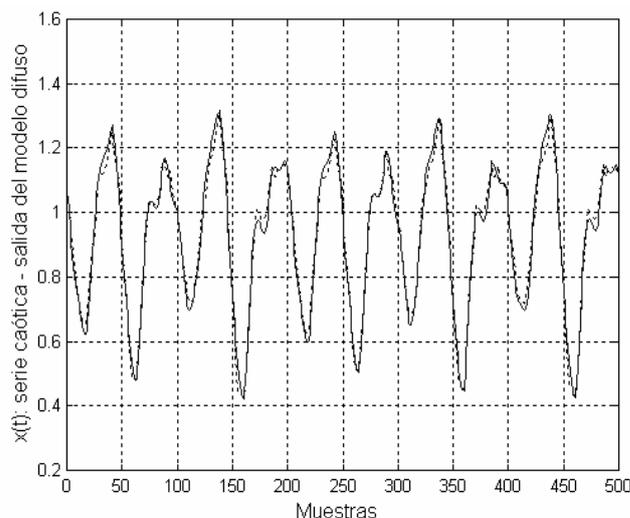


Figura 7. Desempeño del modelo borroso de la serie de Mackey-Glass

La tabla 3 muestra la base de reglas. La ubicación de los consecuentes singletons generados por la proyección de los valores modales de los conjuntos borrosos de cada variable de entrada ha sido modificada por el empleo del algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con el fin de minimizar el error de aproximación. Si no se colocan restricciones, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos puede ubicar los consecuentes fuera del espacio de salida, sin que esto afecte la interpretabilidad del modelo. La tabla 4 muestra una comparación de los resultados alcanzados mediante el algoritmo de identificación borroso propuesto con respecto a aquellos obtenidos con otros métodos.

Tabla 3. Descripción lingüística del sistema borroso

Regla	$x(k-18) \wedge x(k-12) \wedge x(k-6) \wedge x(k)$	\Rightarrow	$\frac{-k}{y}$	
1	A	A	0.1680	
2		M	0.0273	
3		M	0.6373	
4		A	B	0.2039
5		M		1.6417
6		B		1.1118
7		B	A	-0.0597
8	B		A	1.0408
9	M			1.3301

Tabla 4. Comparación de resultados de varios métodos al problema de la serie de Mackey-Glass

Modelo	RMSE	Reglas	Parámetros
Modelo ANFIS	0.0070	16	104
Modelo propuesto	0.0221	9	21
Modelo de Paiva y Dourado (2004)	0.0239	9	92
Gaweda y Zurada (2003)	0.0310	3	39
Nexfprox (Nauck y Kruse, 1999)	0.0671	26	38

4.3 Ángulo de cabeceo de un helicóptero

Se aplicó el método propuesto a la identificación de un modelo a escala de helicóptero (ángulo de cabeceo) en el benchmark propuesto por García-Sanz et al (2006). Se emplearon como variables de entrada la señal de voltaje $x(k)$ y el ángulo de cabeceo $y(k)$ para predecir el ángulo de cabeceo en $y(k+1)$. Se consideró un rango de la señal de voltaje de -10 a +10. La señal de salida se encuentra en el rango de -0.0520 a 0.2348 radianes.

El modelo borroso obtenido tiene 2 conjuntos triangulares por cada variable (Bajo y Alto) distribuidos uniformemente, 4 reglas y solo requiere de 8 parámetros de ajuste. La base de reglas obtenida inicialmente a partir de la ubicación de los consecuentes generados por cada conjunto de cada una de las variables de entrada quedó de la forma

$$\begin{aligned} \text{Si } y(k) \text{ es Bajo, entonces } \overline{y}^k \text{ es } -0.0520 \\ \text{Si } x(k) \text{ es Alto, entonces } \overline{y}^k \text{ es } 0.0937 \\ \text{Si } x(k) \text{ es Bajo, entonces } \overline{y}^k \text{ es } 0.1704 \\ \text{Si } y(k) \text{ es Alto, entonces } \overline{y}^k \text{ es } 0.2348 \end{aligned}$$

Con esta base de reglas se obtuvo un error cuadrático medio de 0.0174. Luego del ajuste de los consecuentes, empleando mínimos cuadrados, se obtuvo la base de reglas mostrada en la tabla 5. El error cuadrático medio alcanzado es de 2.487×10^{-6} . La figura 8 muestra la comparación entre el proceso real y el modelo borroso.

Tabla 5. Descripción Lingüística Del Sistema Borroso

Regla	$x(k)$	\wedge	$y(k)$	\Rightarrow	\overline{y}^k
1			Bajo		-0.1563
2	Alto				0.1016
3	Bajo				0.1055
4			Alto		0.1328

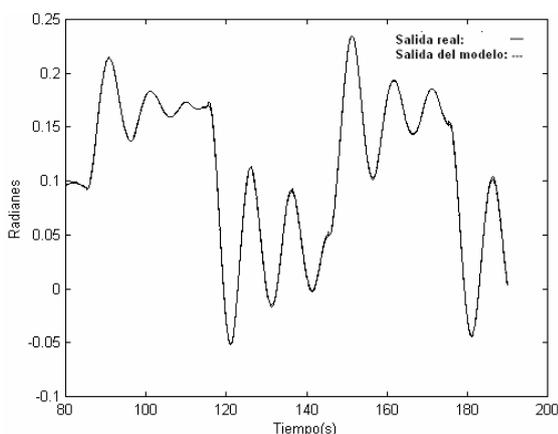


Figura 8. Desempeño del modelo borroso para ángulo de cabeceo de helicóptero

5. CONCLUSIONES

Se presenta un método basado en la minimización del error de

inferencia para la identificación de sistemas a partir de los datos, mediante modelos borrosos interpretables con ajuste de parámetros consecuentes, tipo singleton, mediante mínimos cuadrados. El método no requiere del empleo de otras técnicas de inteligencia artificial.

La aplicación del método en la identificación de procesos dinámicos clásicos permitió obtener modelos borrosos con alta precisión sin sacrificar la interpretabilidad, como ocurre con la mayoría de los métodos existentes. Lo anterior se evidencia en el cumplimiento de los tres criterios básicos que definen la interpretabilidad de un modelo borroso.

El empleo de consecuentes tipo singleton no afecta la interpretabilidad del modelo borroso ya que éstos pueden ser etiquetados de acuerdo a su ubicación en el espacio de salida y con asignaciones de clara comprensión para un operador humano. Por ser un procedimiento matemático, sin restricciones, el ajuste por mínimos cuadrados puede ubicar los consecuentes por fuera del espacio de salida sin que esto afecte la interpretabilidad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a los revisores por sus valiosos comentarios y constructivas sugerencias

REFERENCIAS

- Bezdek J. C. (1987). Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms. Ed. Plenum Press. New York, USA.
- Box, G., Jenkins, G., (1976) Times Series Analysis: Forecasting and Control, Holden Day Inc., San Francisco, USA.
- Chen, W., and Saif, M. (2005). A Novel Fuzzy System with Dynamic Rule Base, IEEE Trans. Fuzzy Systems, **vol. 13**(5), pp.569-582.
- Contreras, J., Misa, R., Paz, J.,(2006). Building Interpretable Fuzzy Systems: a New Approach to Fuzzy Modeling. In proceedings of Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference CERMA. IEEE Computer Society. pp.: 172-178
- Díez J. L., Navarro J. L., Sala A. (2004). Algoritmos de Agrupamiento en la Identificación de Modelos Borrosos. RIAI: Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, **vol. 1** (2), pp. 32-41.
- Espinosa, J., Vandewalle, J. (2000), Constructing Fuzzy Models with Linguistic Integrity from Numerical Data-Afrel Algorithm, IEEE Trans. Fuzzy Systems, **vol. 8**(5), pp. 591 – 600.
- Espinosa, J., Vandewalle, J. (2005), Wertz, V, Fuzzy Logic, Identification and Predictive Control. Springer. USA.
- García-Sanz, M., Elso, J., Egaña, I. (2006), Control de Ángulo de Cabeceo de un Helicóptero como Benchmark de Diseño de Controladores, RIAI, **vol. 3**(2), pp.111-116.
- Gaweda, A., Zurada, J. (2003), Data-Driven Linguistic Modeling Using Relational Fuzzy Rules, IEEE Trans. Fuzzy System, **vol. 11**(1), pp.121-134.
- Guillaume, S., Charnomordic, B. (2004), Generating an Interpretable Family of Fuzzy Partitions from Data, IEEE Trans. Fuzzy Systems, **vol. 12**(3), pp. 324 – 335.

- Gustafson E. E., Kessel W. C. (1979). Fuzzy Clustering with a Fuzzy Covariance Matrix. In Proceedings of the IEEE CDC, pp. 503 – 516.
- Joo M.G., and Lee, J.S. (2002) Universal Approximation by Hierarchical Fuzzy Systems with Constraints on the Fuzzy Rules, *Fuzzy Sets and Systems*, **vol. 130**(2), pp 175-188.
- Joo M.G., and Lee, J.S. (2005). A Class of Hierarchical Fuzzy Systems with Constraints on the Fuzzy Rules, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, **vol. 13**(2), pp.194-203, 2005.
- Kim, E., Park, M, Kim, S. (1998), A Transformed Input-Domain Approach to Fuzzy Modeling, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, **vol. 6**(4), pp. 596-604.
- Nauck, D., Kruse, R., (1995). Nefclass - a Neuro-Fuzzy Approach for the Classification of Data, In Proceedings of the Symposium on Applied Computing.
- Nauck, D., Kruse, R. (1999), Neuro-Fuzzy Systems for Function Approximation. *Fuzzy Sets and System*, **vol. 101**(2), pp. 261-271.
- Paiva, R. P., Dourado, A. (2004), Interpretability and Learning in Neuro-Fuzzy Systems, *Fuzzy Sets and System*, **vol. 147**(1), pp. 17-38. 2004.
- Pedrycz, W. (1994) Why Triangular Membership Functions?, *IEEE Trans. Fuzzy Sets and System*, **vol. 64**(1), pp.21-30, 1994
- Sala, A. (1998). Validación y Aproximación Funcional en Sistemas de Control Basados en Lógica Borrosa. Universidad Politécnica de Valencia. Tesis Doctoral, España.
- Sala, A., Albertos, P. (2001), Inference Error Minimisation: Fuzzy Modelling of Ambiguous Functions. *Fuzzy Sets and Systems*, **vol. 121**(1), pp. 95 – 111.
- Sugeno, M., Yasukawa, T. (1993), A Fuzzy Logic Based Approach to Qualitative Modeling. *Transactions on Fuzzy Systems*, **vol. 1**(1), pp. 7-31. 1993
- Wang, L-X, Langari, R.(1995), Building Sugeno- Type Models Using Fuzzy Discretization and Orthogonal Parameter Estimation Techniques, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **vol. 3**(4), pp. 454-458.
- Wang, L-X, Mendel, J.M.(1992), Generating Fuzzy Rules by Learning from Examples, *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, **vol. 22**(6), pp. 1414-1427.