

## CONTROL DE ROBOTS COOPERATIVOS CON DISEÑO DE UN OBSERVADOR

Marco A. Arteaga<sup>\*,1</sup> Jorge Gudiño-Lau<sup>\*\*</sup> Paul Maya-Ortiz<sup>\*</sup>

*\* Departamento de Control y Robótica  
División de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Apdo. Postal 70-256, México, D. F., 04510, México  
Tel.: + 52 55-56-22-30-13 Fax: + 52 55-56-16-10-73  
E-mail: arteaga@verona.fi-p.unam.mx  
paul.rolas@gmail.com*

*\*\* Facultad de Ingeniería Electromecánica. Universidad de Colima  
Km. 20 Carretera Manzanillo-Barra de Navidad  
Manzanillo, Colima, México, C. P. 28860  
Tel.-Fax: + 52 31-43-31-12-07  
E-mail: jglau@ucol.mx*

Resumen: Uno de los principales problemas en la implementación de controladores para que un robot realice labores de destreza, es la complejidad de integrar una gran cantidad de sensores cuando se tienen arquitecturas pequeñas. Además, el costo de operación se ve incrementado. En este artículo se considera el control de robots cooperativos sin mediciones de velocidad, con el fin de manipular un objeto firmemente. La teoría desarrollada se avala con resultados experimentales.  
*Copyright ©2007 CEA-IFAC.*

Palabras clave: Control de robots cooperativos, diseño de observadores.

### 1. INTRODUCCIÓN

La destreza es uno de los comportamientos más deseables que se demanda a un robot manipulador; puede lograrse con una mano robot con una combinación de buen desempeño entre el control de posición y el de fuerza. Hoy en día, las manos mecánicas (así como también los robots cooperativos) encuentran muchas áreas de aplicación (Murray *et al.*, 1994). Por ejemplo,

en los manipuladores industriales, que se caracterizan por un número limitado de aplicaciones. Asimismo, existe un interés constante hacia el diseño de prótesis para personas que hayan perdido algún miembro. Finalmente, la telemanipulación con destreza es una aplicación tecnológica muy deseable en la actualidad.

Los primeros intentos para establecer una relación entre el control automático y los robots que realizan una tarea compartida, están referidos a la formulación del espacio operacional de Khatib (1987). Durante los años ochenta del Siglo XX, los resultados más importantes consideraban la

<sup>1</sup> Este trabajo fue desarrollado gracias a la DGAPA-UNAM, convenio IN109306, y al CONACYT con apoyo de becas de doctorado.

evolución del contacto durante la manipulación, lo que requiere una combinación perfecta del control de posición y fuerza. Algunos de los primeros enfoques que persiguen este objetivo son presentados en Li *et al.* (1989) y Cole (1990), donde se considera explícitamente la dinámica del objeto. En Parra y Arimoto (1996), Liu *et al.* (1997) y Parra-Vega *et al.* (2001), se diseñaron esquemas de control que no necesitan del conocimiento de la dinámica del objeto, sino de las restricciones de movimiento. Los enfoques de control presentados en estos trabajos tienen la ventaja de que no requieren del conocimiento exacto de los parámetros del sistema, dado que se introduce un enfoque adaptable. Más recientemente, en Schlegl *et al.* (2001) se muestran algunos avances en enfoques de control híbridos.

A pesar de que Mason y Salisbury (1985) propusieron la base para la manipulación sin sensores en los años ochenta, existen pocos algoritmos de control para robots cooperativos que tomen en cuenta la falta de mediciones de velocidad. Esto debido, quizás, a que usualmente se emplea una computadora digital en la implementación de leyes de control y puede obtenerse una buena aproximación del vector de velocidades por medio de diferenciación numérica. Sin embargo, resultados experimentales recientes sugieren que un observador (digitalizado) en una ley de control, tiene un mejor desempeño (Arteaga-Pérez y Kelly, 2004). De este modo, en Gudiño Lau *et al.* (2004) se presenta un algoritmo de control descentralizado con diseño de un observador para manipuladores cooperativos (o manos robot), el cual garantiza estabilidad asintótica de seguimiento de las posiciones y fuerzas deseadas. Aunque el resultado antes mencionado ha demostrado que funciona bien experimentalmente, no tiene la simplicidad del esquema propuesto en Arteaga-Pérez y Kelly (2004). En este artículo se introduce un filtro lineal para el error de fuerza de tal forma que el observador para la velocidad se vuelve más simple y fácil de implementar.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se presentan la ley de control y el observador propuestos, mientras que la Sección 3 muestra resultados experimentales. Algunas conclusiones finales se proporcionan en la Sección 4.

## 2. CONTROL CON ESTIMACIÓN DE VELOCIDAD

Considérese un sistema cooperativo con  $l$ -dedos, cada uno de los cuales tiene  $n_i$  grados de libertad y con  $m_i$  restricciones al contacto con el objeto sostenido. Entonces, el número total de grados de

libertad está dado por  $n = \sum_{i=1}^l n_i$  con un total de  $m = \sum_{i=1}^l m_i$  restricciones, donde  $n_i > m_i$ . La dinámica del  $i$ -ésimo dedo está dada por (Parra-Vega *et al.*, 2001)

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)\boldsymbol{\lambda}_i, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones,  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica positiva definida,  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de pares gravitacionales,  $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es una matriz diagonal semipositiva definida que representa los coeficientes de fricción viscosa para cada articulación,  $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de pares que actúan en las uniones, y  $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange (que físicamente representan la fuerza aplicada en el punto de contacto). Se asume en este artículo que  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) = \nabla\varphi_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  es de rango completo.  $\nabla\varphi_i(\mathbf{q}_i)$  denota el gradiente (o la matriz Jacobiana) del vector de superficies que describen al objeto  $\varphi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ . Mapea un vector sobre el plano normal al plano tangente que se presenta en el punto de contacto descrito por

$$\varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Nótese que la ecuación (2) implica que se están considerando restricciones homogéneas (Parra-Vega *et al.*, 2001). El sistema completo está sujeto a  $m$  restricciones holonómicas dadas por  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ , donde  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_l) \in \mathbb{R}^m$ . Esto significa que el objeto a ser manipulado y el entorno son modelados por esta restricción.

Al valor propio más grande (pequeño) de una matriz se le denota por  $\lambda_{\max}(\cdot)$  ( $\lambda_{\min}(\cdot)$ ). La norma de un vector  $\mathbf{x}$  de  $n \times 1$  está definida por  $\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ , mientras que la norma de una matriz  $\mathbf{A}$  de  $m \times n$  es la correspondiente norma inducida  $\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ . Si por simplicidad se consideran sólo articulaciones de revolución, se puede establecer la siguiente propiedad (Parra-Vega *et al.*, 2001):

*Propiedad 1.* El vector  $\dot{\mathbf{q}}_i$  puede ser escrito como

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{p}}_i, \quad (3)$$

donde  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \triangleq (\mathbf{I}_{n_i \times n_i} - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i})$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_i}^T (\mathbf{J}_{\varphi_i} \mathbf{J}_{\varphi_i}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$  es la pseudoinversa

de Penrose y  $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  satisface  $\text{rango}(\mathbf{Q}_i) = n_i - m_i$ . Estas dos matrices son ortogonales, *i.e.*  $\mathbf{Q}_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ = \mathbf{O}$  (y  $\mathbf{Q}_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^T = \mathbf{O}$ ).  $\dot{\mathbf{p}}_i \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  es la llamada velocidad restringida. Dado que se consideran restricciones homogéneas, de (2) se tiene

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad (4)$$

para  $i = 1, \dots, l$ .  $\mathbf{p}_i$  se conoce como la restricción de posición.  $\triangle$

Otra serie de propiedades muy útiles se presentan en Gudiño Lau *et al.* (2004). Considérese ahora la siguiente suposición.

*Suposición 1.* Los  $l$  robots del sistema satisfacen las restricciones (2) y (4) para todo tiempo. Además, ninguno de los robots es redundante ni está en una singularidad.  $\triangle$

Nótese que la Suposición 1 es común en el ámbito de los robots cooperativos. Ninguno de los robots debe ser redundante ni estar en una singularidad para garantizar que (2) sea satisfecha sólo por vectores acotados  $\mathbf{q}_i$ .

## 2.1 Ley de control

En esta sección, se estudia el problema de control de seguimiento de un sistema cooperativo compuesto por robots rígidos. Considérese el modelo (1) y defínanse los errores de seguimiento y de observación como

$$\tilde{\mathbf{q}}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di} \quad (5)$$

$$\mathbf{z}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \hat{\mathbf{q}}_i, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{q}_{di}$  es una trayectoria deseada suave y acotada que satisface la restricción (2), y  $(\hat{\cdot})$  representa el valor estimado de  $(\cdot)$ . Otras definiciones de errores son

$$\Delta \mathbf{p}_i \triangleq \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{di} \quad (7)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_i \triangleq \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_{di}, \quad (8)$$

donde  $\mathbf{p}_{di}$  es la posición restringida deseada que satisface (4).  $\boldsymbol{\lambda}_{di}$  es la fuerza deseada a ser aplicada por cada dedo. Otras definiciones útiles son<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Estas definiciones se basan en el trabajo de Slotine y Li (1987). El vector  $\mathbf{s}_i$  es una variable deslizante, tal que si tiende a cero, los términos ortogonales  $\mathbf{s}_{pi}$  y  $\mathbf{s}_{fi}$  también

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq \mathbf{Q}_i (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \boldsymbol{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) \quad (9)$$

$$+ \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i)$$

$$\mathbf{s}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \quad (10)$$

$$= \mathbf{Q}_i (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i + \boldsymbol{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{z}_i)$$

$$+ \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i)$$

$$\triangleq \mathbf{s}_{pi} + \mathbf{s}_{fi}$$

$$\Delta \mathbf{F}_i \triangleq \int_0^t \Delta \boldsymbol{\lambda}_i(\vartheta) d\vartheta, \quad (11)$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda}_i = k_i \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  con  $k_i > 0$ , y  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_i, \boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  son matrices diagonales positivas definidas, y  $\beta_i$  es una constante positiva. Para obtener (10) se ha utilizado la igualdad  $\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di} = \tilde{\mathbf{q}}_i - \mathbf{z}_i$ . Nótese también que  $\mathbf{s}_{pi}$  y  $\mathbf{s}_{fi}$  son vectores ortogonales.  $\boldsymbol{\phi}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  es la salida del filtro lineal dado por

$$\dot{\mathbf{w}}_i = -\mathbf{A}_i \mathbf{w}_i + \Delta \boldsymbol{\lambda}_i \quad \mathbf{w}_i(0) = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{w}_i. \quad (13)$$

$\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  son matrices diagonales positivas definidas y  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  es el estado del filtro. También, se define

$$\begin{aligned} \zeta_i &\triangleq \frac{d}{dt} \boldsymbol{\phi}_i = -\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i \mathbf{w}_i + \mathbf{B}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i \\ &= -\mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{B}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Considérese ahora la siguiente definición

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} & \dots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i 1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} & \dots & \frac{\partial a_{n_i n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} \end{bmatrix},$$

donde  $a_{\alpha\beta}$  es el elemento  $\alpha\beta$  de  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$ , con

$$\dot{\mathbf{q}}_{oi} \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{z}_i. \quad (15)$$

Entonces, es posible calcular

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i) \triangleq \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}), \quad (16)$$

donde

$$\mathbf{r}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{oi} = \dot{\mathbf{z}}_i + \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{z}_i. \quad (17)$$

Se propone la siguiente sustitución para  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$

---

lo harán. Entonces, de manera indirecta se prueba después que todos los errores de seguimiento tienden a cero a su vez. Esta metodología es más fácil de llevar a cabo que una demostración directa en términos de los errores de seguimiento.

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} \triangleq & \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \left( \ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di} \right) \right) \\
& + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \left( \ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) \right. \\
& \quad \left. + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\zeta}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i \right) \\
& + \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_{oi}) \left( \dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\tilde{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di}) \right) \\
& + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_{oi}) \left( \dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i \right),
\end{aligned} \tag{18}$$

donde  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_{oi})$  está definido de la misma manera que  $\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_{oi})$ , y la dependencia de  $\mathbf{q}_i$  se omite por simplicidad. Nótese que se sigue utilizando  $\dot{\mathbf{p}}_i$  dado que este valor se conoce de (4) (de hecho, se tiene  $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$ ). Después de realizar manipulación matemática, se obtiene

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} = \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i, \tag{19}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_i \triangleq & -\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{r}_i) \left( \dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i \right) \\
& - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{r}_i) \left( \dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i \right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Entonces, el controlador propuesto (de manera independiente) para cada entrada es

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_i \triangleq & \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} \\
& + \mathbf{D}_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{R_i} (\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \\
& - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \left( \boldsymbol{\lambda}_{di} + \mathbf{B}_i^{-1} \boldsymbol{\zeta}_i - \mathbf{K}_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i \right),
\end{aligned} \tag{21}$$

donde  $\mathbf{K}_{R_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\mathbf{K}_{F_i} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  son matrices diagonales definidas positivas. Dado que de (10) y (17) se tiene  $\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri} = \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i$ , y tomando en cuenta (19), al sustituir (21) en (1), se obtiene la dinámica en lazo cerrado como

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i \\
& + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \left( \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{K}_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i \right) \\
& - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i + \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{r}_i,
\end{aligned} \tag{22}$$

después de alguna manipulación, donde  $\mathbf{K}_{DR_i} \triangleq \mathbf{K}_{R_i} + \mathbf{D}_i$ . Con el fin de obtener (22), se utilizó la propiedad  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x}) \mathbf{y} = \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{y}) \mathbf{x} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_i}$  (Gudiño Lau *et al.*, 2004).

## 2.2 Definición del observador

La dinámica propuesta para el observador está dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \dot{\mathbf{q}}_{oi} + \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i + k_{di} \mathbf{z}_i \tag{23}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{oi} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} + k_{di} \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i, \tag{24}$$

donde  $k_{di}$  es una constante positiva. Este observador es más simple que el presentado en Gudiño

Lau *et al.* (2004), donde se requiere la inversa de la matriz de inercia y de mediciones de fuerza. De (23) se tiene  $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_i - \mathbf{\Lambda}_i \dot{\mathbf{z}}_i - k_{di} \dot{\mathbf{z}}_i$ , de modo que (24) se transforma en

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + k_{di} \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_i, \tag{25}$$

en vista de (19). Multiplicando ambos lados de (25) por  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ , y tomando en cuenta (22), se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{r}}_i = & -\mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i \\
& - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i \\
& + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \left( \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{K}_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i \right),
\end{aligned} \tag{26}$$

donde  $\mathbf{H}_{rd_i} \triangleq k_{di} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{R_i}$ . Finalmente, usando de nueva cuenta la propiedad  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x}) \mathbf{y} = \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{y}) \mathbf{x}$ , y después de una fuerte manipulación matemática, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{r}}_i = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i - \mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i \\
& + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i \\
& - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i \\
& + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \left( \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{K}_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i \right).
\end{aligned} \tag{27}$$

A continuación se define

$$\mathbf{x}_i \triangleq [\mathbf{s}_i^T \quad \mathbf{r}_i^T \quad \Delta \mathbf{F}_i^T \quad \boldsymbol{\phi}_i^T]^T, \tag{28}$$

como el estado para (11), (14), (22) y (27). La idea principal en el diseño del controlador-observador es mostrar que siempre que  $\|\mathbf{x}_i\|$  tienda a cero, los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ ,  $\Delta \mathbf{p}_i$ ,  $\dot{\Delta \mathbf{p}}_i$  y  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  y los de observación  $\mathbf{z}_i$  y  $\dot{\mathbf{z}}_i$  también lo harán. De (17), esto es algo obvio para  $\mathbf{z}_i$  y  $\dot{\mathbf{z}}_i$ . Por otro lado, en realidad se tiene para todo tiempo que  $\Delta \mathbf{p}_i = \dot{\Delta \mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$ , porque  $\mathbf{p}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_{di} = \dot{\mathbf{p}}_{di} = \mathbf{0}$ . A pesar de esto, se les considera explícitamente a lo largo del artículo porque son importantes para la demostración de la tendencia a cero de los errores de seguimiento,  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ . De hecho,  $\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$  no implica que  $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$ . Considérese a continuación el siguiente lema.

*Lema 1.* Si  $\|\mathbf{x}_i\|$  está acotada por  $x_{\max_i}$  y tiende a cero, entonces se satisface:

- $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  permanecen acotados. Además, si la cota  $x_{\max_i}$  para  $\|\mathbf{x}_i\|$  se elige suficientemente pequeña con el fin de garantizar que  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  para todo  $t$ , con  $\eta_i$  una constante positiva y suficientemente pequeña, entonces  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  también tenderán a cero.
- Adicionalmente, si el vector de velocidades  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  está acotado, entonces  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  permanecerá acotado y tenderá a cero.  $\triangle$

La demostración del Lema 1 se encuentra en el Apéndice A. Ahora, considérese la siguiente función

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i, \quad (29)$$

con  $\mathbf{M}_i \triangleq \text{block diag} \{ \mathbf{H}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{R}_i \}$ , y

$$\mathbf{R}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i^{-1} & -\mathbf{N}_i \\ -\mathbf{N}_i & \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix}, \quad (30)$$

con  $\mathbf{N}_i \triangleq (\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{K}_{F_i}) \mathbf{A}_i^{-1}$ . En el Apéndice B se muestra que  $V_i(\mathbf{x}_i)$  es una función definida positiva. Supóngase que se puede encontrar una región

$$\mathbb{D}_i = \{ \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i} \}, \quad (31)$$

de tal forma que, para todo tiempo,  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0$  con  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ . Si  $x_{\max_i}$  es suficientemente pequeña en el sentido del Lema 1 y por la discusión anterior se puede concluir la convergencia a cero de todas las señales de error. El siguiente teorema establece las condiciones para que los parámetros del controlador-observador garanticen esto.

*Teorema 1.* Considérese la dinámica del sistema cooperativo descrito por (1), (2) y (4), en lazo cerrado con el filtro (12)–(14), la ley de control (21) y el observador (23)–(24), donde  $\mathbf{q}_{di}$  y  $\mathbf{p}_{di}$  son las posiciones deseadas acotadas y las restricciones de posición, cuyas derivadas  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_{di}$ , y  $\ddot{\mathbf{p}}_{di}$  también están acotadas, y todas satisfacen la restricción (4). Asimismo, considérense  $l$  regiones definidas por (31) para cada subsistema, donde las cotas  $x_{\max_i}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , son suficientemente pequeñas de acuerdo con (A.2) en el Apéndice A. Entonces, cualquier señal dinámica y de error permanece acotada y se garantiza la estabilidad asintótica de los errores de seguimiento, de observación y de fuerza, *i. e.*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{0} & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i &= \mathbf{0} & \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i &= \mathbf{0} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i &= \mathbf{0} & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

si se satisfacen las siguientes condiciones

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \geq \mu_{1i} + 1 + \delta_i \quad (32)$$

$$k_{di} \geq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) + \omega_i}{\lambda_{hi}} \quad (33)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{E}_i) \geq \delta_i + 1 \quad (34)$$

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{K}_{F_i}) \geq \delta_i + 1, \quad (35)$$

donde  $\omega_i = \mu_{2i} + \frac{1}{4}(\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i})^2 + \delta_i + \frac{1}{4}c_{1i}^2 a_i^2 b_i^2 + \frac{1}{4}c_{1i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_{F_i})$ ,  $\mathbf{E}_i = \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i +$

$\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{B}_i^{-2} \mathbf{A}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{K}_{F_i} \mathbf{B}_i^{-1}$ ;  $\delta_i$  es una constante positiva y  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\mu_{3i}$ ,  $\mu_{4i}$  y  $\lambda_{Di}$  están definidas en el Apéndice C.  $\triangle$

La demostración del Teorema 1 se encuentra en el Apéndice C.

### 3. EXPERIMENTOS

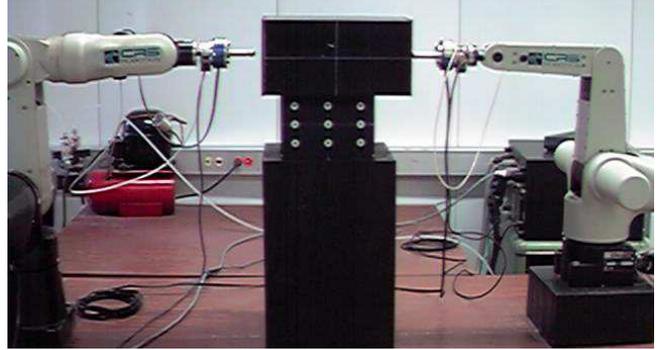


Figura 1: Robots A465 y A255 de *CRS Robotics*.

En esta sección se presentan resultados experimentales. Se utilizó un banco de pruebas con dos robots industriales que se encuentran en el Laboratorio de Robótica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (Figura 1). Son los modelos A465 y A255 de *CRS Robotics*. El primero cuenta con seis grados de libertad y el segundo con cinco, pero sólo se emplearon las tres primeras articulaciones de cada uno para realizar los experimentos, mientras que el resto fueron bloqueadas mecánicamente. Cada articulación es actuada por un motor de CD. Por ello, con el fin de implementar la ley de control (21), se debieron tomar en cuenta las dinámicas de los motores. Es importante notar que, debido a la metodología empleada para el diseño del controlador, los dos manipuladores pueden ser modelados por separado utilizando cualquier procedimiento estándar, como Euler-Lagrange (Kelly y Santibáñez, 2003). El modelo completo del sistema se puede consultar en Gudiño Lau y Arteaga-Pérez (2005). El marco de referencia de coordenadas inercial de todo el sistema está en la base del robot A465, con su eje  $x$  apuntando hacia el otro manipulador. Si la tarea consiste en levantar un objeto y presionarlo con una fuerza deseada, entonces las restricciones en coordenadas cartesianas están dadas por

$$\varphi_i = x_i - b_i = 0, \quad (36)$$

para  $i = 1, 2$  y  $b_i$  una constante positiva. Las trayectorias deseadas están dadas en metros [m] por

$$x_{d1} = 0.626 \quad x_{d2} = 0.936 \quad (37)$$

$$y_{d1,2} = 0.05 \sin(\omega(t - t_i)) \quad (38)$$

$$z_{d1,2} = (0.585 + 0.05 \cos(\omega(t - t_i)) - .05). \quad (39)$$

Estas trayectorias son válidas desde un tiempo inicial  $t_i$  hasta un tiempo final  $t_f$ , mientras que  $\omega$  es un polinomio de quinto orden diseñado para satisfacer  $\omega(t_i) = \omega(t_f) = 0$ . Las derivadas con respecto al tiempo de  $\omega$  también son cero para  $t_i$  y  $t_f$ . Para los experimentos se consideró  $t_i = 20$ s y  $t_f = 60$ s. Al elegir (37)–(39), los robots hacen un círculo en el plano  $y$ - $z$ . La única diferencia entre las trayectorias para los dos robots es el ancho del objeto. La fuerza de empuje deseada está dada en Newtons [N] por

$$f_{dx1,2} = \begin{cases} 1.5(t - 10) & 10 \leq t < 20 \\ 15 + 5 \sin\left(\frac{6\pi(t - 20)}{80}\right) & 20 \leq t \leq 60 \\ 15 - 1.5(t - 60) & 60 < t \leq 20 \end{cases}$$

y  $f_{dy1,2} = f_{dz1,2} = 0$ [N]. Cabe hacer notar que, en vista de las trayectorias deseadas, se puede utilizar un sólo sensor de fuerza (Gudiño Lau *et al.*, 2004). A pesar de que este enfoque fue usado antes porque sólo el robot A465 tenía sensor, los experimentos de este apartado se llevaron a cabo de la misma manera para comprobar que los argumentos dados anteriormente son válidos. Por supuesto, ahora es posible conocer la fuerza al final del efector en el manipulador A255.

Los parámetros para el control y el observador son  $\Lambda_1 = 21I$ ,  $\Lambda_2 = 23I$ ,  $K_{R_1} = 60I$ ,  $K_{R_2} = \text{diag}\{15 \ 13 \ 13\}$ ,  $k_{d1} = k_{d2} = 4$ ,  $K_{f1} = K_{f2} = 3.5I$ ,  $\xi_1 = \xi_2 = 0.001I$ ,  $\xi_1 = \xi_2 = 0.0001I$ ,  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 100I$ . El esquema controlador-observador se programó en una computadora personal, con un tiempo de muestreo de 9ms. El experimento duró 80s. El objeto se sujeta al tiempo  $t = 10$ s. Antes, los robots están en movimiento libre y la ley de control (21) y el observador (23)–(24) son usados con la parte de fuerza igual a cero (*i. e.*  $Q_i = I$  y  $J_{\varphi_i} = O$ ). Es sencillo demostrar que este esquema es estable para un movimiento sin restricciones. Desde  $t = 10$ s hasta  $t = 15$ s, los manipuladores empiezan a presionar el objeto (ver  $f_{dx1,2}$ ), permaneciendo en la misma posición. Desde  $t = 15$ s hasta  $t = 20$ s, se lleva al objeto a la posición inicial para hacer el círculo, mientras que las fuerzas de empuje deseadas se incrementan. Desde  $t = t_i = 20$ s hasta  $t = t_f = 60$ s, los robots forman el círculo y la fuerza deseada es una señal senoidal. Desde  $t = 60$ s hasta  $t = 65$ s se deposita el objeto sobre la mesa y las fuerzas deseadas disminuyen. Desde  $t = 65$ s hasta  $t = 70$ s los robots permanecen quietos mientras que la fuerza deseada tiende a cero. Finalmente, desde  $t = 70$ s hasta  $t = 80$ s, los manipuladores regresan a sus posiciones iniciales. En

la Figura 2 se presentan los errores de seguimiento en coordenadas de las articulaciones  $y$ , en la Figura 3, en coordenadas cartesianas. Puede apreciarse que son más grandes durante el movimiento restringido. Existen muchas razones para esto. En primera instancia, dado que se ha utilizado un esquema de control descentralizado, el impacto de un manipulador sobre el otro empujando el mismo objeto no es compensado explícitamente. Además, se requiere un conocimiento exacto de las dinámicas del robot, mientras que los modelos utilizados en los experimentos no son exactos.

Para la fuerza deseada  $f_{dx1,2}$ , los resultados pueden considerarse buenos, a pesar de que la fuerza principal en la dirección  $x$  muestra algo de ruido alrededor de la trayectoria deseada (ver Figura 4). Por otro lado, las fuerzas sobre  $y$  y  $z$  no son cero como se desea. Sin embargo, esto podía haberse esperado, dado que sólo se usa la restricción (2), y los efectos que actúan sobre el objeto, como la fricción y la fuerza gravitacional, no son considerados. De hecho, si no hubiera fuerza en la dirección  $z$ , el objeto caería. La Figura 5 muestra los errores de observación. Como puede apreciarse, son muy buenos. Dado que el observador no utiliza información de la dinámica de los robots, esto confirma que los errores de seguimiento podrían mejorar tomando en cuenta modelos más exactos de los manipuladores o, de ser posible, eliminar completamente su uso. Finalmente, la Figura 6 muestra los voltajes de entrada, donde puede apreciarse que no hay problemas de saturación en los actuadores. En general, la saturación puede evitarse si no se realizan movimientos bruscos o se aplican fuerzas demasiado grandes.

#### 4. CONCLUSIONES

En este artículo se consideró el problema de control de seguimiento para robots cooperativos sin mediciones de velocidad. La ley de control propuesta es un enfoque descentralizado que toma en cuenta las restricciones de movimiento en vez de la dinámica del objeto sostenido. Asumiendo que las dinámicas de los dedos son bien conocidas y que están disponibles mediciones de las fuerzas de contacto, se propuso un observador lineal para cada dedo que no requiere del conocimiento de las dinámicas de los robots.

Se llevaron a cabo algunos experimentos en un banco de pruebas que consta de dos robots industriales, para probar el enfoque propuesto. A pesar de que ambos manipuladores cuentan con un sensor de fuerza, sólo se utilizó uno de ellos en la ley de control. Esto se hizo así dado que en trabajos previos únicamente uno de los manipuladores contaba con sensor de fuerza y aún así los resultados fueron buenos, de tal forma que se

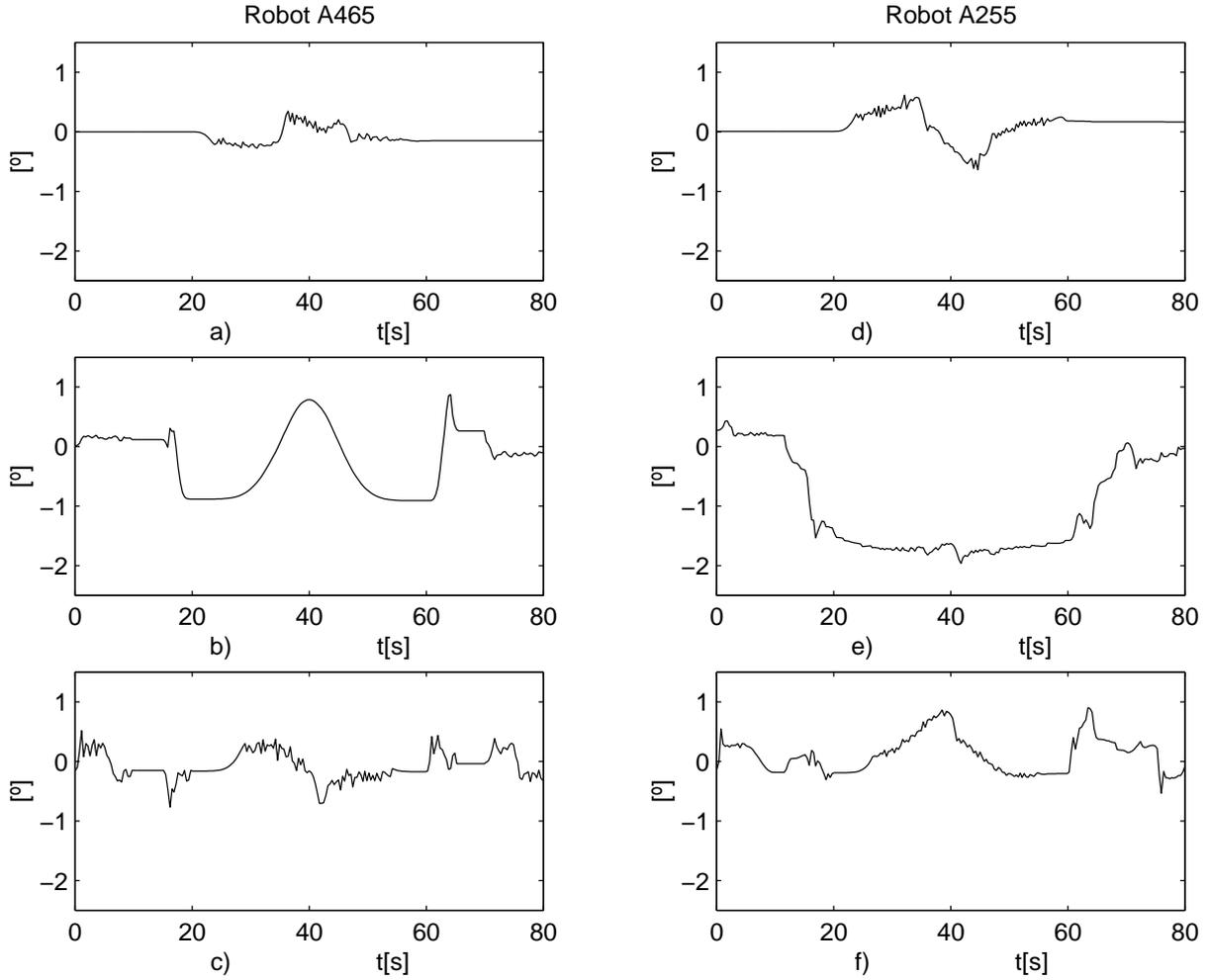


Figura 2: Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a)  $\tilde{q}_{11}$ . b)  $\tilde{q}_{12}$ . c)  $\tilde{q}_{13}$ . d)  $\tilde{q}_{21}$ . e)  $\tilde{q}_{22}$ . f)  $\tilde{q}_{23}$ .

deseaba verificar si la fuerza deseada era realmente seguida por el manipulador cuyo sensor no estaba siendo empleado. Puesto que efectivamente este fue el caso, deben realizarse más investigaciones para saber bajo qué condiciones los sensores de fuerza pueden ser omitidos en el control de robots cooperativos. Por otro lado, todos los resultados pueden considerarse buenos, a pesar de que es claro que el enfoque debería modificarse para tomar en cuenta las inexactitudes de los modelos de los robots.

#### Apéndice A. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1

En este apéndice se presenta la demostración del Lema 1, cuya suposición principal es que  $\mathbf{x}_i = [\mathbf{s}_i^T \ \mathbf{r}_i^T \ \Delta \mathbf{F}_i^T \ \boldsymbol{\phi}_i^T]^T$  está acotado por  $x_{\max_i}$  y tiende a cero.

- a) La demostración de este inciso es la misma que la del inciso b) del Lema 3.1 en Gudiño Lau *et al.* (2004), por lo que sólo se hacen notar dos hechos muy importantes que se explican con todo detalle en la referencia. Primero, el análisis es estrictamente local,

porque se lleva a cabo por medio de una linealización. Por tanto es sólo válido si se satisface

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\eta_i$  es un valor positivo suficientemente pequeño. Segundo, para que la relación anterior se satisfaga, se requiere que la cota máxima para  $\|\mathbf{x}_i\|$  cumpla con

$$x_{\max_i} \leq \frac{\eta_i \alpha_i}{1 + \lambda_{\max}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i) c_{0i} + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} + \sqrt{n_i}}, \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\alpha_i \triangleq k_i - |k_i - \beta_i| - \gamma_i \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_i \triangleq c_{0i} L_i (v_{mi} + \beta_i \eta_i) \quad (\text{A.4})$$

$$c_{0i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\|. \quad (\text{A.5})$$

$v_{mi}$  es una cota para el vector de velocidades deseadas  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ , *i. e.*  $\|\dot{\mathbf{q}}_{di}\| \leq v_{mi}$  para todo tiempo y  $\beta_i$  está definida en (9). En cuanto a  $L_i$ , debe notarse que la matriz  $\mathbf{J}_{\varphi_i}$  es continua y Lipschitz, porque por simplicidad

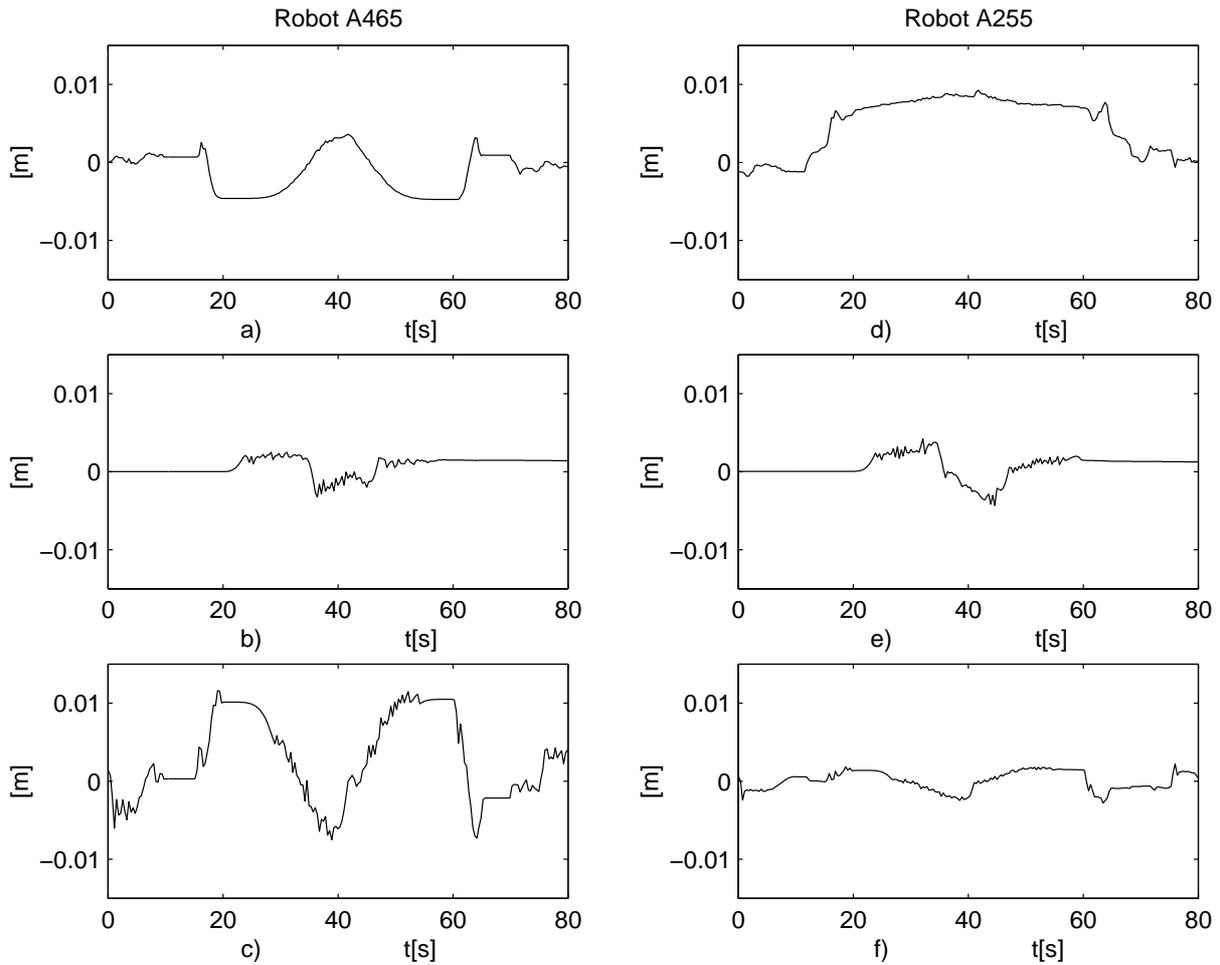


Figura 3: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a)  $\tilde{x}_1$ . b)  $\tilde{y}_1$ . c)  $\tilde{z}_1$ . d)  $\tilde{x}_2$ . e)  $\tilde{y}_2$ . f)  $\tilde{z}_2$ .

se supuso que las articulaciones de los robots son de revolución. Por lo tanto se tiene

$$\|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di})\| \leq L_i \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}\|,$$

para una constante positiva  $L_i$  y para todo  $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{di} \in \mathbb{R}^{n_i}$ . Finalmente, nótese que  $k_i, \beta_i, v_{mi}$  y  $\eta_i$  siempre pueden ser elegidas para obtener  $\alpha_i > 0$ .

- b) Cuando  $\mathbf{x}_i$  (y por lo tanto  $\Delta \mathbf{F}_i$ ) tienden a cero,  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  no necesariamente lo hará ni permanecerá acotada. Para demostrar esto, puede usarse el hecho de que  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i = \Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i = -\bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i$ . La última igualdad es válida dado que la restricción (4) debe satisfacerse, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{s}}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i} \mathbf{s}_i &= -\bar{\boldsymbol{\xi}}_i \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i \quad (\text{A.6}) \\ &= \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{B}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i &= -(\bar{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{B}_i + \boldsymbol{\xi}_i)^{-1} \cdot \\ &\cdot \left( \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i \right), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde se ha usado (14). Por la ecuación (22),  $\dot{\mathbf{s}}_i$  está acotado cuando  $\mathbf{x}_i$  lo está, de tal forma que  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  debe estar acotado (recuérdese la suposición sobre  $\dot{\mathbf{q}}_i$ ). Finalmente, si  $\mathbf{x}_i$  tiende a cero, entonces  $\dot{\mathbf{s}}_i, \mathbf{s}_i$  y  $\boldsymbol{\phi}_i$  también lo hacen y por tanto  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$ .

#### Apéndice B. POSITIVIDAD DE $V_I$ EN (29)

Para demostrar que  $V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i$  en (29) es realmente una función positiva definida, primero recuérdese que una función de este tipo debe satisfacer que  $V_i(\mathbf{0}) = 0$  y  $V_i(\mathbf{x}_i) > 0$  para  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ . Dado que  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$  es una matriz positiva definida, el único problema es que  $\mathbf{R}_i$  en (30) es solamente semipositiva definida. Desarrollando el término en (29) que involucra  $\mathbf{R}_i$  conduce a

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i^T & \Delta \mathbf{F}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i \\ \Delta \mathbf{F}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Gamma}_i^T \mathbf{N}_i \boldsymbol{\Gamma}_i, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\boldsymbol{\Gamma}_i \triangleq \left( \mathbf{B}_i^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\phi}_i - \mathbf{B}_i^{\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{F}_i \right)$  y se ha utilizado el hecho de que  $\mathbf{B}_i$  es una matriz diagonal positiva definida. En vista de que  $\mathbf{N}_i > \mathbf{0}$ , (B.1) solo puede ser cero si se cumple que

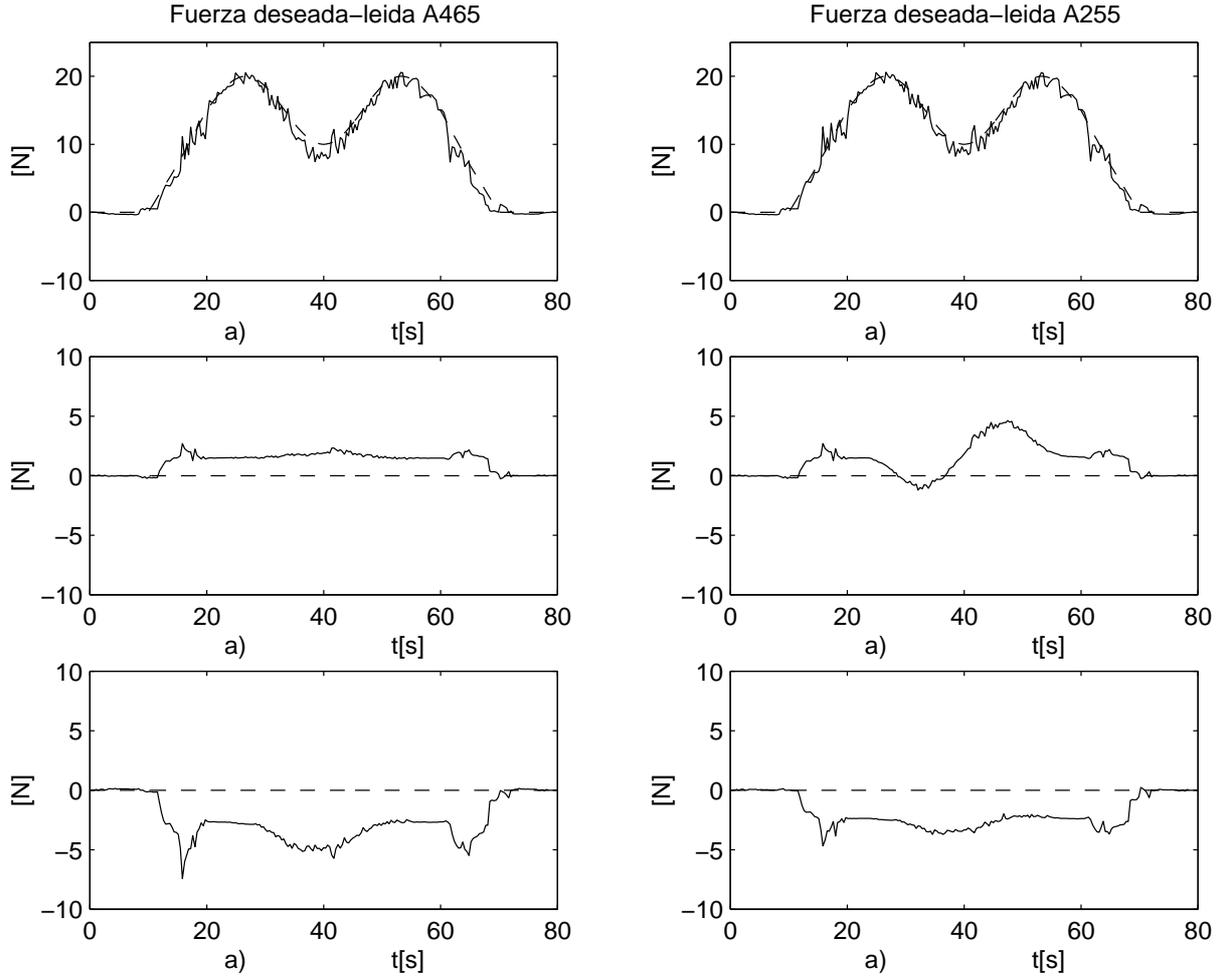


Figura 4: Mediciones de fuerza en los robots A465 y A255. a)  $F_{x_1}$ . b)  $F_{y_1}$ . c)  $F_{z_1}$ . a)  $F_{x_2}$ . b)  $F_{y_2}$ . c)  $F_{z_2}$ . — valor medido. - - - valor deseado.

$$\phi_i = \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{F}_i. \quad (\text{B.2})$$

Por otra parte, nótese que  $V_i(\mathbf{x}_i)$  incluye un término  $\frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i$  que sólo puede ser cero si  $\mathbf{s}_i = \mathbf{0}$ . De otro modo, es positivo. Pero, de la ecuación (10) se tiene que  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{pi} + \mathbf{s}_{fi}$ , donde  $\mathbf{s}_{pi}$  y  $\mathbf{s}_{fi}$  son ortogonales, de tal forma que ambos deben ser cero con el fin de que  $\mathbf{s}_i$  lo sea. En particular, se tiene que  $\mathbf{s}_{fi} = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \phi_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i)$ , con  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$  de rango completo. Entonces, en vista de la restricción (4), se tiene que  $\mathbf{s}_{fi}$  será nulo si y sólo si  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_i \phi_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i$  lo es, es decir, si

$$\phi_i = -\bar{\boldsymbol{\xi}}_i^{-1} \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i. \quad (\text{B.3})$$

Comparando (B.2) con (B.3) se puede concluir que  $\frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i$  y (B.1) no pueden ser cero simultáneamente a menos que  $\phi_i$  y  $\Delta \mathbf{F}_i$  lo sean, debido a que  $\mathbf{B}_i$ ,  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_i$  y  $\boldsymbol{\xi}_i$  son matrices diagonales positivas definidas. En otras palabras,  $V_i(\mathbf{x}_i) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ . Por lo tanto, es una función (continua) positiva definida.

### Apéndice C. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1

Recuérdese el siguiente Teorema (Khalil, 1996).

*Teorema 2.* Sea  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un punto de equilibrio de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene a  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Sea  $V : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continuamente diferenciable, tal que  $V(\mathbf{0}) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) > 0$  en  $\mathbb{D} - \{\mathbf{0}\}$ , y  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  en  $\mathbb{D}$ . Entonces,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es estable. Además, si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  en  $\mathbb{D} - \{\mathbf{0}\}$ , entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable.  $\triangle$

Para poder utilizar el Teorema 2, se deben encontrar dominios  $\mathbb{D}_i$  para los cuales cada  $V_i(\mathbf{x}_i)$  satisface  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) < 0$  en  $\mathbb{D}_i - \{\mathbf{0}\}$  (debido a que cada  $V_i(\mathbf{x}_i)$  es positiva definida en  $\mathbb{R}^{n_i}$ ). De esta forma se puede demostrar que  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{0}$  para toda  $i$  y después emplear el Lema 1 para analizar el comportamiento de las diferentes señales de error. Basándose en la discusión dada en el Apéndice A, se define cada dominio  $\mathbb{D}_i$  como en (31), dónde se elige  $x_{\max_i}$  para satisfacer (A.2) y no puede

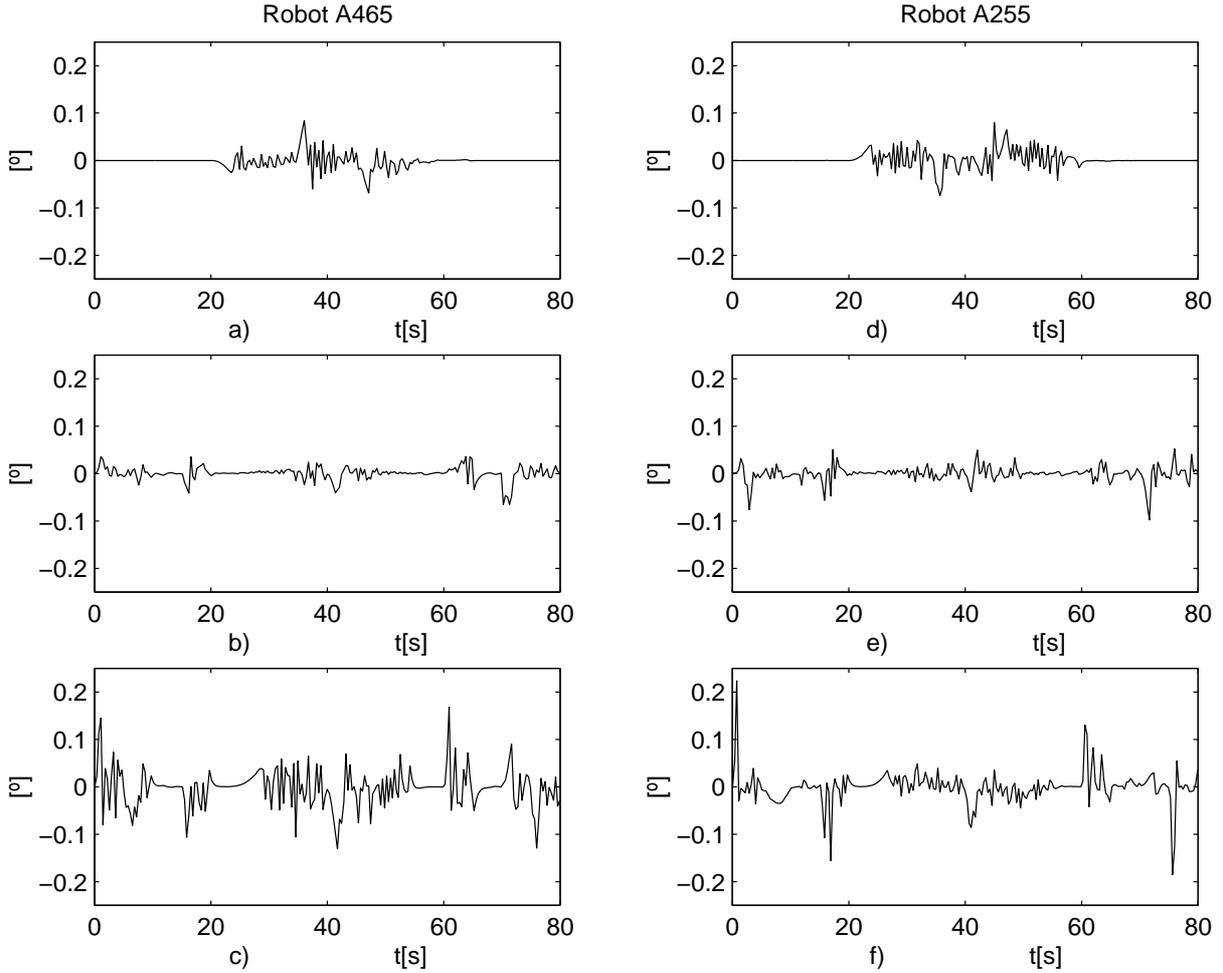


Figura 5: Errores de observación. a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ .

ser hecha arbitrariamente grande. En  $\mathbb{D}_i$  se puede definir

$$\mu_{1i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{C.1})$$

$$\mu_{2i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{C.2})$$

$$\mu_{3i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{C.3})$$

$$\mu_{4i} \triangleq M_{ei} \lambda_{Hi} \quad (\text{C.4})$$

$$\lambda_{\mathbb{D}_i} \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i). \quad (\text{C.5})$$

Nótese que los valores en (C.1)–(C.5) se pueden calcular directamente como funciones de las diferentes constantes definidas en el artículo, pero esto no se hace por simplicidad.  $M_{ei}$  es un valor constante que se puede calcular siempre que  $\|\mathbf{x}_i\|$  está acotado por  $x_{\max_i}$  y que satisface  $\|\mathbf{e}_i\| \leq M_{ei} \|\mathbf{r}_i\| < \infty$ . A continuación se calcula la derivada de la función candidata de Lyapunov en (29), que puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} V_i(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{r}_i \\ &+ \frac{1}{2} [\phi_i^T \quad \Delta \mathbf{F}_i^T] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i^{-1} & -\mathbf{N}_i \\ -\mathbf{N}_i & \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \Delta \mathbf{F}_i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, la derivada de (29) a lo largo de (11), (14), (22) y (27) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{r}_i \quad (\text{C.6}) \\ &- \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{\text{DR}_i} \mathbf{s}_i \\ &+ \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{\text{R}_i} \mathbf{r}_i \\ &+ \mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \mathbf{K}_{\text{F}_i} \Delta \mathbf{F}_i) \\ &- \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i \\ &- \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{\text{rd}_i} \mathbf{r}_i \\ &+ \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i \\ &- \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{\text{DR}_i} \mathbf{s}_i \\ &+ \mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \mathbf{K}_{\text{F}_i} \Delta \mathbf{F}_i) \\ &+ [\phi_i^T \quad \Delta \mathbf{F}_i^T] \mathbf{R}_i [\zeta_i^T \quad \Delta \lambda_i^T]^T, \end{aligned}$$

con  $\mathbf{R}_i$  en (30). Para simplificar (C.6) debe tomarse en cuenta que  $\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{\text{R}_i} \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{\text{DR}_i} \mathbf{s}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \mathbf{K}_{\text{F}_i} \Delta \mathbf{F}_i) = -\phi_i^T \bar{\xi}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i - \phi_i^T (\bar{\xi}_i \mathbf{K}_{\text{F}_i} + \xi_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i) \Delta \mathbf{F}_i - \Delta \mathbf{F}_i^T \xi_i \mathbf{K}_{\text{F}_i} \Delta \mathbf{F}_i$ . La última igualdad es válida en vista de la Propiedad 1, de (10) y dado que la restricción (4) debe satisfacerse para  $\mathbf{p}_i$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_i$ ,  $\mathbf{p}_{di}$  y  $\dot{\mathbf{p}}_{di}$ . Además

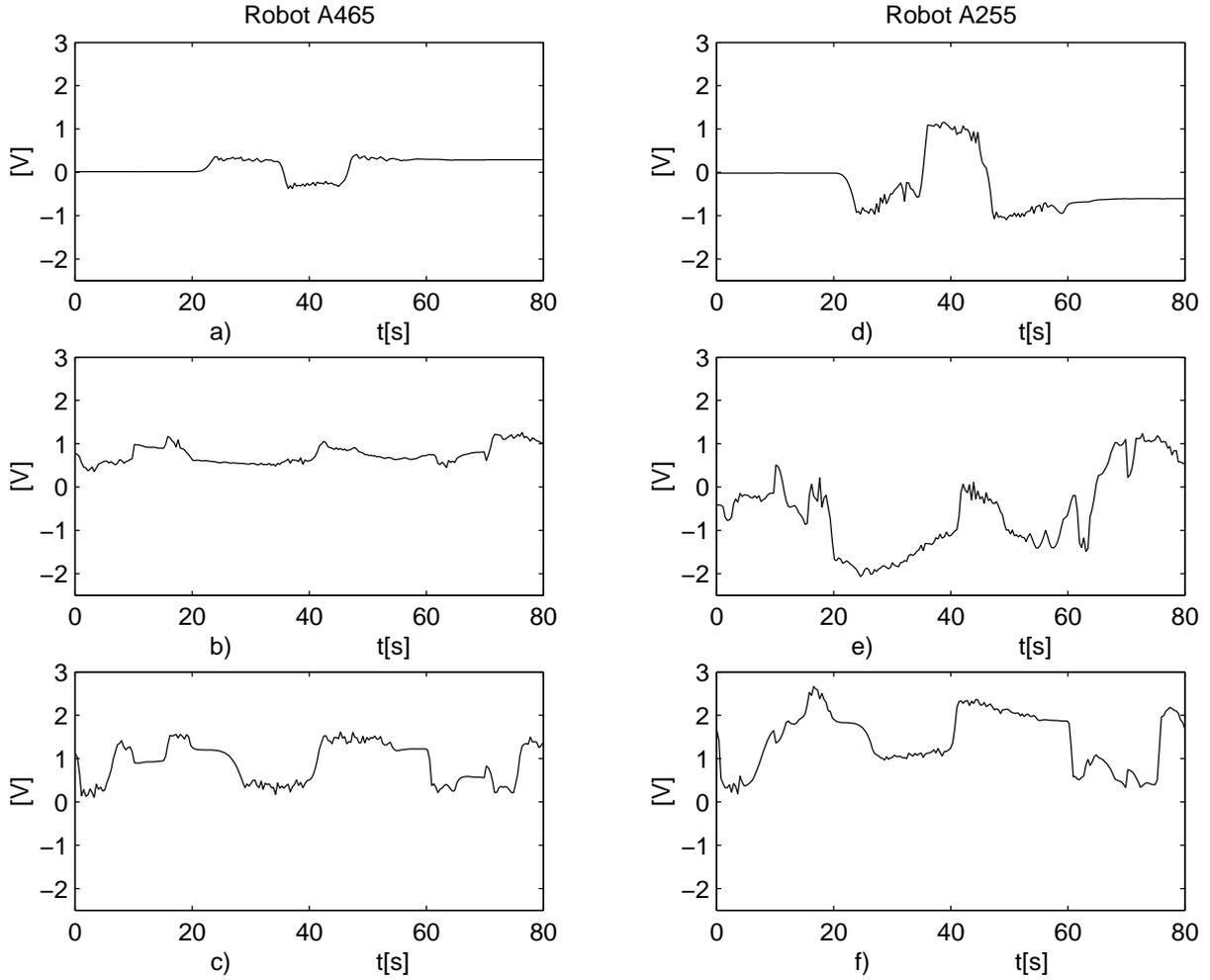


Figura 6: Voltajes de entrada. a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ .

$$\begin{aligned} & [\phi_i^T \quad \Delta F_i^T] \begin{bmatrix} N_i B_i^{-1} & -N_i \\ -N_i & N_i B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix} \\ &= -\phi_i^T N_i B_i^{-1} A_i \phi_i + \Delta F_i^T N_i A_i \phi_i, \end{aligned}$$

en vista de (14). Recuérdese que  $N_i = (\xi_i B_i^{-1} A_i + \bar{\xi}_i K_{Fi}) A_i^{-1}$  y definiendo  $E_i \triangleq \bar{\xi}_i B_i^{-1} A_i + \xi_i B_i^{-2} A_i + \bar{\xi}_i K_{Fi} B_i^{-1}$ , (C.6) puede ser simplificada como

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &\leq -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i \quad (\text{C.7}) \\ &\quad - \phi_i^T E_i \phi_i - \Delta F_i^T \xi_i K_{Fi} \Delta F_i \\ &\quad - \mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i \\ &\quad - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \\ &\quad + \mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) B_i^{-1} A_i \phi_i \\ &\quad + \mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) K_{Fi} \Delta F_i \\ &\quad - \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \\ &\quad + \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i, \end{aligned}$$

tomando en cuenta que la matriz  $\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  es antisimétrica (Gudiño Lau *et al.*, 2004). Dado que sólo se está interesado en el comportamiento de  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i)$  para  $\mathbf{x}_i$  en  $\mathbb{D}_i$ , de (C.1)–(C.5) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \|\mathbf{s}_i\|^2 \quad (\text{C.8}) \\ &\quad - \lambda_{\min}(\mathbf{H}_{rd_i}) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ &\quad - \lambda_{\min}(\mathbf{E}_i) \|\phi_i\|^2 \\ &\quad - \lambda_{\min}(\xi_i K_{Fi}) \|\Delta F_i\|^2 \\ &\quad + \mu_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 + \mu_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ &\quad + (\lambda_{D_i} + \mu_{3i} + \mu_{4i}) \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| \\ &\quad + c_{1i} b_i a_i \|\mathbf{r}_i\| \|\phi_i\| \\ &\quad + c_{1i} \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{Fi}) \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta F_i\|, \end{aligned}$$

donde  $c_{1i}$  está dado por

$$c_{1i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\|, \quad (\text{C.9})$$

y

$$b_i \triangleq \max\{b_{jj}^{-1}\} \quad (\text{C.10})$$

$$a_i \triangleq \max\{a_{jj}\}. \quad (\text{C.11})$$

$a_{jj}$  y  $b_{jj}$ , con  $j = 1, \dots, n_i$ , son elementos de  $\mathbf{A}_i$  y  $\mathbf{B}_i$ , respectivamente. El siguiente paso es elegir las diferentes ganancias para garantizar que  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) < 0$  en  $\mathbb{D}_i - \mathbf{0}$ . Antes que nada, considérese  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i})$  en (32) y  $k_{d_i}$  en (33), tal que la ecuación (C.8) será

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &\leq -\delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ &\quad - \left( \frac{1}{4} c_{1i}^2 a_i^2 b_i^2 + \frac{1}{4} c_{1i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_{Fi}) \right) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ &\quad - \lambda_{\min}(\mathbf{E}_i) \|\phi_i\|^2 \\ &\quad - \lambda_{\min}(\xi_i \mathbf{K}_{Fi}) \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 \\ &\quad + c_{1i} b_i a_i \|\mathbf{r}_i\| \|\phi_i\| \\ &\quad + c_{1i} \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{Fi}) \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \mathbf{F}_i\|. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando  $\lambda_{\min}(\mathbf{E}_i)$  en (34) y  $\lambda_{\min}(\xi_i \mathbf{K}_{Fi})$  en (35) es fácil concluir que

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &\leq -\delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ &\quad - \delta_i \|\phi_i\|^2 - \delta_i \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

o

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i \|\mathbf{x}_i\|^2. \quad (\text{C.13})$$

Aplicando el Teorema 2 se concluye que  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{0}$ . Directamente de (17) se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{0}.$$

Además, en vista de (31) se tiene  $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$  (y por lo tanto  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$ , de la discusión en el Apéndice A). De este modo, del Lema 1 a) se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}.$$

Para aplicar b) del Lema 1, sólo se necesita mostrar que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  está acotado. Este es el caso dado que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  y  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$  lo están. Por lo tanto se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \lambda_i = \mathbf{0}.$$

Finalmente, la estabilidad de todo el sistema puede demostrarse usando

$$V = \sum_{i=1}^l V_i(\mathbf{x}_i).$$

Nótese que no se ha proporcionado una región de atracción. Sin embargo, esta es un subconjunto de  $\mathbb{D}_i$  y no puede ser hecha arbitrariamente grande debido a que  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  debe satisfacerse para todo tiempo (y por lo tanto  $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$  debe ser válida también).

## REFERENCIAS

- Arteaga-Pérez, M. A. y R. Kelly (2004). Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **20**(2), 297–308.
- Cole, A. (1990). Constrained motion of grasped objects by hybrid control. In: *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 1954–1960.
- Gudiño Lau, J. y Arteaga-Pérez (2005). Dynamic model and simulation of cooperative robots: A case study. *Robotica* **23**, 615–624.
- Gudiño Lau, J., M. A. Arteaga-Pérez, L. A. Muñoz y V. Parra-Vega (2004). On the control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **12**(4), 600–608.
- Kelly, R. y V. Santibáñez (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Prentice-Hall. Madrid, España.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems, 2nd ed.* Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Khatib, O. (1987). A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal of Robotics and Automation* **3**, 43–53.
- Li, Z., P. Hsu and S. Sastry (1989). Grasping and coordinated manipulation by a multifingered robot hand. *International Journal of Robotics Research* **8**(4), 33–50.
- Liu, Y.-H., S. Arimoto, V. Parra-Vega y K. Kitagaki (1997). Decentralized adaptive control of multiple manipulators in cooperations. *International Journal of Control* **67**(5), 649–673.
- Mason, M. T. y J. K. Salisbury (1985). *Robot Hands and the Mechanics of Manipulation*. The MIT Press. London, Great Britain.
- Murray, R. M., Z. Li y S. S. Sastry (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press. Boca Raton, Florida, U. S. A.
- Parra, V. y S. Arimoto (1996). A passivity-based adaptive sliding mode position-force control for robot manipulators. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **10**, 365–377.
- Parra-Vega, V., A. Rodríguez – Ángeles, S. Arimoto y G. Hirzinger (2001). High precision constrained grasping with cooperative adaptive handcontrol. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* **32**, 235–254.
- Schlegl, T., M. Buss, T. Omata y G. Schmidt (2001). Fast dextrous regrasping with optimal contact forces and contact sensor based impedance control. In: *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 103–109.
- Slotine, J. J. E. y W. Li (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *International Journal of Robotics Research* **6**(3), 49–59.