

COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL MODELO HÍBRIDO DE UN CIRCUITO ELEVADOR

E. Zulueta, T. Rico*, I. Manero**

*Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

**Departamento de Ingeniería Eléctrica

E.U.I. de Vitoria-Gasteiz (Universidad del País Vasco)

Resumen: En este artículo vamos a tratar el comportamiento dinámico de un circuito elevador mediante un modelo híbrido. El circuito es analizado para el caso en el que la carga que alimenta es una batería. Por tanto el circuito actúa como un cargador de baterías. El circuito analizado hace uso de la modulación PWM para el fijar el punto de funcionamiento del transistor (corte o saturación). El modelo ha sido implementado mediante el motor de simulación Simulink. Se describe su dinámica en lazo abierto, en el cual se plantea un modelo a tiempo discreto equivalente para un circuito elevador. Debido a que el algoritmo de control utilizado presenta cierta discontinuidad se ha estudiado si este sistema presenta un comportamiento caótico. Para esto se ha analizado el circuito a partir de la Transformación de Poincare que tenga en cuenta la estrategia de control basada en imponer dos únicos valores posibles de *duty cycle* entre los que se decide según el resultado de la comparación (sincronizada con reloj) de la corriente del inductor con cierta referencia. Se ha demostrado que si bien esta al borde de presentar sensibilidad a las condiciones iniciales, que es una condición necesaria para que el sistema se pueda definir como caótico, el sistema no tiene un comportamiento caótico aunque si complejo. También es cierto que se puede modificar la ley de control para que el sistema presente un comportamiento caótico.
Copyright © 2006 CEA-IFAC

Palabras Clave: Modelado de un circuito elevador, dinámica híbrida

1. INTRODUCCIÓN

Vamos a comenzar estudiando el circuito elevador DC-DC. Este circuito permite cargar una fuente de tensión, a partir de una fuente de tensión de menor valor. Este circuito se presenta como un dispositivo que permite la carga de una fuente de tensión. Hay que recordar que la carga ha sido modelada como una fuente de tensión puesto que se trata de una batería. En este artículo se emplea la definición de sistema híbrido de (Simic *et al.*, 2002). El modelo que se presenta a continuación es una modificación del modelo híbrido presentado en (Zulueta *et al.*, 2003a) y en (Zulueta *et al.*, 2003b).

1.1 Modelo híbrido del elevador de tensión

El proceso de modelado consiste en obtener una recurrencia discreta del sistema, esto se consigue de

forma similar a la Transformación de Poincare discutida en (Sastry *et al.*, 1999). La fuente de tensión de la entrada es V_e , y la tensión de la fuente que es cargada es V_s . Se considera que la tensión de entrada es menor que la tensión de salida.

$$V_e < V_s \quad (1)$$

La inductancia tiene un valor L . El transistor funciona en corte y saturación. Tanto el transistor como el diodo se suponen que son ideales y que no presentan caída alguna en conducción en directa. Se supone que se dispone de un periodo T , que se divide en dos lapsos de tiempo. En el primer tramo de tiempo el transistor conduce permitiendo cargar la bobina con energía. Ese tramo de tiempo va desde 0 hasta T_{on} . En el segundo tramo de tiempo el transistor no conduce. Esto fuerza que el diodo conduzca puesto que la corriente de la bobina no puede desaparecer inmediatamente. El segundo tramo de tiempo va desde T_{on} hasta T .

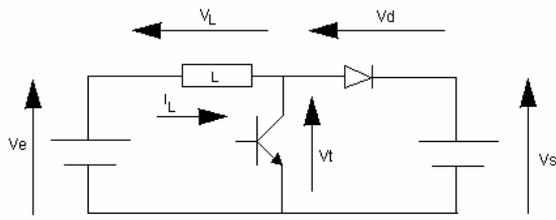


Figura 1. Circuito elevador.

Para comprender la naturaleza híbrida del sistema, se estudia las tres dinámicas posibles en este circuito. Estas dinámicas están ligadas a las diferentes situaciones en las que se puede encontrar este circuito. La primera de ellas es la de conducción del transistor. A esta dinámica se denomina Son. La segunda dinámica posible se da cuando el transistor no conduce pero la corriente de la bobina no se ha extinguido. A esta segunda dinámica se le denomina Soff. La tercera dinámica se da cuando estando el transistor abierto y la corriente en la bobina se ha extinguido. A esta última se la denomina dinámica de no conducción o Snc. A cada situación le corresponde una dinámica diferente, que se representa mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales. Por otro lado a este conjunto de dinámicas se le asocia un autómata que permite la determinación de la situación del sistema en cada instante. Las ecuaciones que describen a cada dinámica se presentan a continuación.

Son:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_e}{L} \quad (2)$$

Soff:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_e - V_s}{L} \quad (3)$$

Snc:

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \quad (4)$$

Como se puede apreciar i_L es la corriente que pasa por la bobina. V_e y V_s son las tensiones de entrada y salida respectivamente. L es el valor que toma la bobina. Como se ha descrito anteriormente el transistor actúa en periodos de tiempo T . En cada uno de estos periodos se presenta dos lapsos de tiempo. Al comienzo de cada periodo el transistor se cierra. Esto hace que la bobina esté alimentada directamente por la tensión de entrada. Este primer lapso de tiempo tiene una duración de T_{on} . Como consecuencia el sistema estaría descrito por la dinámica Son. En el segundo lapso de tiempo el transistor se abre y fuerza a la corriente de la bobina a pasar por el diodo. Por tanto esta hace que la tensión vista por la bobina sea en este caso la

diferencia de tensiones entre la entrada y la salida. Debido a que la tensión de salida se supone que es mayor que la tensión de entrada la corriente de la bobina decrece. En esta situación el sistema se regiría por las ecuaciones asociadas a Soff. En esta situación se pueden dar dos situaciones. La primera de ellas es que la corriente no se extinga antes de que pase el periodo entero, y como consecuencia se pase a Son. Se recuerda que el tiempo que transcurre desde que el transistor se abre hasta que se vuelve a cerrar es igual a la diferencia entre T y T_{on} . La segunda posibilidad es que la corriente de la bobina se extinga antes de que transcurra el periodo. Esto implica que el sistema pasaría a Snc, y que la corriente de la bobina sería igual a cero. Una vez que ha transcurrido el periodo entero, el transistor volvería a cerrarse, y se pasaría a Son. El autómata se muestra en la siguiente figura.

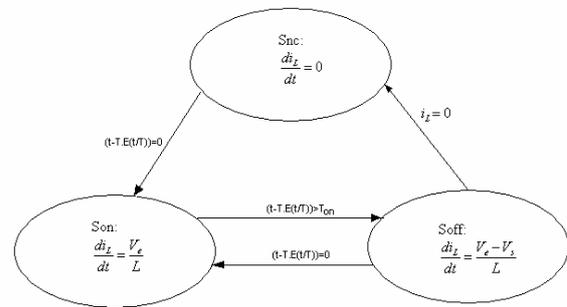


Figura 2. Autómata Diferencial asociado.

Matemáticamente las transiciones para pasar de Soff a Son y de Snc a Son, se describen mediante la función de parte entera $E()$. Debido a que el sistema siempre esta forzado a pasar por Son, se define un sistema discreto asociado a este modelo. Este sistema discreto permite describir el comportamiento dinámico de la corriente de la bobina para los instantes en los que comienza cada periodo, $t=0, T, 2T, \dots, nT$. Este sistema discreto permite definir una función de retorno ó Transformación de Poincaré. Mediante esta herramienta se va estudiar el comportamiento del sistema, sobre todo en cuestiones relacionadas con la estabilidad del sistema así como su comportamiento caótico. La corriente de la bobina en los instantes en los que el autómata entra en a Son, describe la siguiente ecuación en diferencias.

$$i(nT) = \begin{cases} i(nT-T) + \Delta & \text{Si } i(nT-T) + \Delta \geq 0 \\ 0 & \text{Si } i(nT-T) + \Delta < 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta = \frac{V_e T - V_s (T - T_{on})}{L}$$

Como se puede observar este sistema discreto tiene un comportamiento lineal a trozos, pero que en su generalidad no lo es. En la figura numero 3 se muestra una grafica $i(nT)$ frente a $i(nT-T)$. Es evidente que si Δ es negativo la corriente tomará un valor nulo cuando t tienda a infinito. Sin embargo el sistema se vuelve inestable cuando Δ es positivo, puesto que la corriente toma cada vez valores positivos mayores.

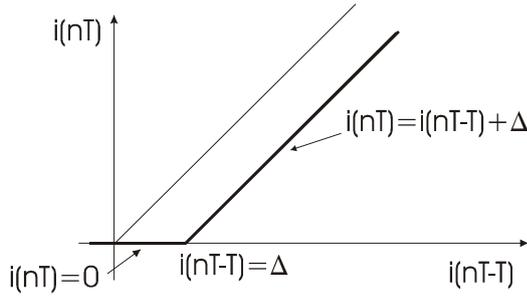


Figura 3. Comportamiento dinámico del sistema discreto equivalente.

2. ESTRATEGIA EN LAZO CERRADO

2.1 Proposición de la estrategia de control

Se define una corriente I_c de consigna para la carga de la fuente de tensión de la salida. La ley de control se define de la siguiente forma: Si la corriente de la bobina en cada inicio de ciclo de tiempo es menor que la corriente I_c de consigna, se impone un ciclo de trabajo que haga que Δ sea positivo. Esto hará que la corriente se incremente. Si la corriente es mayor que la corriente I_c de consigna, se impone un ciclo de trabajo que haga que Δ sea negativo.

Matemáticamente la ley de control se puede definir de la siguiente forma.

$$\delta_{on} = \begin{cases} \delta_{on,1}, & \text{Si } i(nT-T) \leq I_c \\ \delta_{on,2}, & \text{Si } i(nT-T) > I_c \end{cases} \quad (6)$$

El ciclo de trabajo implica que Δ tome un valor determinado según la igualdad siguiente.

$$\Delta = (V_e - V_s + V_s \delta_{on}) \frac{T}{L} \quad (7)$$

Por tanto $\delta_{on,1}$ forzará un valor de Δ_1 positivo y $\delta_{on,2}$ forzará un valor de Δ_2 negativo.

$$\Delta_1 = (V_e - V_s + V_s \delta_{on,1}) \frac{T}{L} > 0 \quad (8)$$

$$\Delta_2 = (V_e - V_s + V_s \delta_{on,2}) \frac{T}{L} < 0 \quad (9)$$

La ley de control hace que el comportamiento a tiempo discreto varíe sustancialmente. La relación entre la corriente $i(nT)$ y la corriente $i(nT-T)$ queda definida de la siguiente forma.

$$i(nT) = \begin{cases} i(nT-T) + \Delta_2, & \text{Si } i(nT-T) \geq I_c \\ i(nT-T) + \Delta_1, & \text{Si } \begin{cases} I_c \geq i(nT-T) \\ i(nT-T) + \Delta_1 \geq 0 \end{cases} \\ 0, & \text{Si } i(nT-T) + \Delta_1 < 0 \end{cases} \quad (10)$$

2.2 Estudio dinámico del sistema en lazo cerrado

Cuando la corriente entre dentro del rango $[I_c + \Delta_2, I_c + \Delta_1]$, el sistema no sale de este ciclo, puesto que si la corriente de la bobina esta en el rango $[0, I_c + \Delta_2]$ la ley que va a seguir la corriente es el segundo caso de la ecuación (10). Por tanto la corriente tiende a incrementarse en saltos de Δ_1 , esto hace que la corriente hasta un valor máximo que se encontrará entre I_c y $I_c + \Delta_1$. Una vez que llegamos a ese valor de corriente, la ley de control actúa haciendo que la dinámica de la corriente siga el primer caso de la ecuación (10). Debido a que Δ_2 es negativo la corriente bajará en descensos de Δ_2 . La corriente bajará hasta un valor mínimo que se encontrará entre I_c y $I_c + \Delta_2$. En ese momento que se encontrará entre I_c y $I_c + \Delta_2$, la corriente cambiará de dinámica al segundo caso de la ecuación (10). Esto hace que la corriente tienda de nuevo a subir. Se logra la misma conclusión si comenzamos nuestro razonamiento desde una corriente superior a $I_c + \Delta_1$. Como se puede observar este tipo de control hace que el sistema entre dentro del rango $[I_c + \Delta_2, I_c + \Delta_1]$ independientemente de la corriente inicial que se utilice. El problema que se plantea en esta ocasión es si el sistema presenta un comportamiento caótico puesto que es fácil observar que este sistema con la ley de control que se ha propuesto puede presentar comportamientos periódicos de diferentes longitudes.

2.3 Estudio dinámico del elevador en lazo cerrado

En el estudio del comportamiento dinámico preliminar anterior se ha demostrado que el sistema presenta un rango de corrientes al cual converge el sistema desde cualquier corriente inicial. Por otra parte, una vez que el sistema se encuentra dentro de este rango de corrientes, el sistema se queda dentro de este rango. El segundo paso a realizar es el estudio del comportamiento dinámico del sistema dentro de este rango de corrientes. Resulta obvio que el sistema no tiene un punto de equilibrio puesto que nunca se podrá lograr que $i(nT)$ sea exactamente a $i(nT-T)$, ya que Δ_2 y Δ_1 no son nulos.

Ya que el sistema no presenta un punto de equilibrio estable, y que el sistema no sale del rango de corrientes $[I_c + \Delta_2, I_c + \Delta_1]$, se propone realizar un análisis de su posible comportamiento caótico debido a que el sistema puede presentar trayectorias repetitivas de diferentes periodos en función de los valores que toman Δ_2 y Δ_1 . Una de las condiciones para que un sistema sea considerado caótico es que el sistema debe presentar sensibilidad a las condiciones iniciales. Para esto se debe calcular el exponente de Lyapunov. El exponente de Lyapunov asociado al sistema en lazo cerrado se calcula basándonos en la ecuación (10). Esta ecuación se puede escribir de la forma en la que aparece en (11).

$$i(nT) = F_{\Delta_1, \Delta_2}(i(nT-T)) \quad (11)$$

Aplicando la definición del exponente de Lyapunov, en la que I_0 es la corriente inicial, se obtiene lo siguiente.

$$\lambda(I_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{q=n-1} \ln \left(\frac{\partial F(i(qT))}{\partial i(qT)} \right) \right]_{i(0)=I_0} \quad (12)$$

Debido a que la corriente una vez que entra dentro de $[I_c + \Delta_2, I_c + \Delta_1]$, la derivada parcial toma el valor de 1. Se puede llegar a la conclusión que el exponente de Lyapunov toma un valor nulo.

$$\left[\frac{\partial F(i(qT))}{\partial i(qT)} \right]_{I_c + \Delta_2 < i(qT) < I_c + \Delta_1} = 1 \quad (13)$$

$$\lambda(I_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{q=n-1} \ln(1) \right]_{i(0)=I_0} \quad (14)$$

$$\lambda(I_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{q=n-1} 0 \right] = 0$$

El hecho de que el exponente de Lyapunov sea nulo hace que el sistema no presente un comportamiento caótico (Parker and Chua, 1989). Aunque el exponente de Lyapunov no está definido para una trayectoria que pase por la corriente de consigna I_c . Si la ley de control hiciese que las rectas de las que consta la dinámica en lazo cerrado definida por la ecuación (10), tuviesen una recta con una pendiente mayor que uno el sistema presentaría un comportamiento caótico.

2.4 Comportamiento periódico del sistema en lazo cerrado

Si el modelo definido por la ecuación (10) presenta una trayectoria periódica, se debe cumplir la siguiente ecuación.

$$\Delta_1 n_1 + \Delta_2 n_2 = 0 \quad (15)$$

Donde Δ_1 y Δ_2 están definidos por las ecuaciones (8) y (9). n_1 representa la cantidad de veces que el convertidor trabaja con un ciclo de trabajo de δ_1 y n_2 representa la cantidad de veces que el convertidor trabaja con un ciclo de trabajo de δ_2 . Debido a que n_1 y n_2 son variables que deben tomar valores enteros, por tanto el cociente de Δ_2 entre Δ_1 debe ser racional, puesto que sino no se podría dar un periodo de repetición.

$$\frac{n_1}{n_2} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \quad (16)$$

En la figura siguiente se presenta el comportamiento simulado del circuito cuando Δ_2 toma un valor irracional como es $\sqrt{2}$.

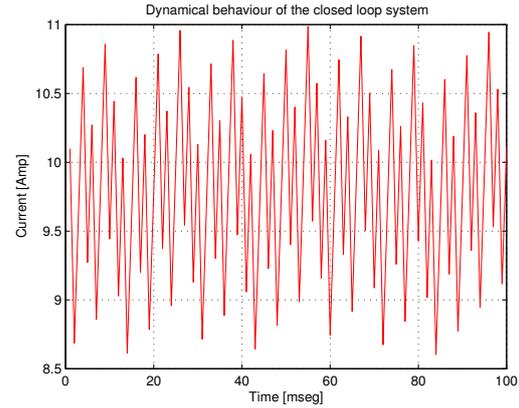


Figura 4. Comportamiento dinámico del circuito sin un periodo de repetición.

Como se ha demostrado anteriormente si Δ_1 y Δ_2 no forman un cociente racional en el circuito no va haber un periodo de repetición. Si Δ_1 y Δ_2 toman valores racionales entonces se podrán definir trayectorias periódicas bajo ciertas condiciones que estudiaremos a continuación. Sin pérdida de generalidad supongamos que Δ_1 y Δ_2 cumplen la siguiente inecuación. Si se cumpliera la inecuación contraria se podría realizar el mismo estudio.

$$\Delta_1 \leq |\Delta_2| \quad (17)$$

Si se cumple la inecuación (17), una vez de que se encuentra dentro del rango de corrientes $[I_c + \Delta_2, I_c + \Delta_1]$, no se van a dar mas de una conmutación con el ciclo de trabajo δ_j . En una trayectoria periódica la igualdad (15) se puede escribir de la siguiente forma.

$$\Delta_1 \left(\sum_{j=1}^{j=q} n_{1,j} \right) + \Delta_2 \left(\sum_{j=1}^{j=q} n_{2,j} \right) = 0 \quad (18)$$

Donde $n_{1,j}$ representa la cantidad de conmutaciones que se han realizado seguidas con el ciclo de trabajo de δ_j . El subíndice j indica el número del conjunto de conmutaciones realizadas con el mismo ciclo de trabajo de forma consecutiva. $n_{2,j}$ representa la cantidad de conmutaciones que se han realizado seguidas con el ciclo de trabajo de δ_2 . Como se ha observado, si se cumple la condición (17) todas las variables $n_{2,j}$ son igual a uno. Esto hace que la ecuación (18) se describa así.

$$\Delta_1 \left(\sum_{j=1}^{j=q} n_{1,j} \right) + \Delta_2 q = 0 \quad (19)$$

Se puede concluir fácilmente que el valor de $n_{1,j}$ es el valor entero que se encuentra entre las dos cotas dadas en (20) una vez que se está dentro de la región de corrientes $[I_c + \Delta_2, I_c + \Delta_1]$. (Recuérdese que $E()$ representa la parte entera del número que aparece entre paréntesis)

$$E\left(\frac{|\Delta_2|}{\Delta_1}\right) \leq n_{1,j} < E\left(\frac{|\Delta_2|}{\Delta_1}\right) + 1 \quad (20)$$

Por tanto el valor que toman las variables $n_{1,j}$ es el número entero más cercano mayor al cociente entre $|\Delta_2|$ y Δ_1 , y lo definimos como función ceil:

$$n_{1,q} = \text{ceil}\left(\frac{|\Delta_2|}{\Delta_1}\right) \quad (21)$$

Esta claro que la cantidad de posibles soluciones de la ecuación (18) nos indicara las posibles trayectorias periódicas que se pueden dar en ese sistema, y que la ecuación (21) hace que esta cantidad se reduzca. Por otra parte una solución de la ecuación (18) no indica necesariamente que el sistema presente una trayectoria periódica que siga las series de conmutación que representan las soluciones de la ecuación (18). Por el contrario todas las trayectorias periódicas del sistema cumplirán la ecuación (18). Si sustituimos en (19) la ecuación (21) se obtiene la siguiente expresión que relacionan Δ_1 y Δ_2 para el caso de una trayectoria periódica.

$$-\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \text{ceil}\left(\frac{|\Delta_2|}{\Delta_1}\right) \quad (22)$$

Como se puede observar para que el sistema presente una trayectoria periódica hace falta que el cociente entre $|\Delta_2|$ y Δ_1 sea entero. Por tanto para el resto de los casos el sistema presentará un comportamiento no periódico.

3. CONCLUSIONES

Para finalizar el estudio dinámico del elevador de tensión se presentan ciertas conclusiones:

1.-El modelo de la carga hace que el comportamiento caótico de un circuito varíe. Según se puede concluir que en el circuito elevador con una batería como carga, implica que el sistema esta al borde del caos pero que no presenta un comportamiento completamente caótico. En (Deane *et al.*, 1991) y en (El Aroudi and Leyva, 1999) se demuestra que bajo ciertas condiciones este tipo de circuitos presentan caos.

2.-Un circuito elevador no presenta caos, pero esta al límite de estarlo puesto que su exponente de Lyapunov es nulo. Si el algoritmo de control fuese otro el sistema podría presentar sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. Luego un sistema que en un primer momento no presenta un comportamiento ni complejo ni caótico, en lazo cerrado puede presentar un comportamiento complejo.

3.-Un sistema dinámico en lazo cerrado que no siendo caótico, puede presentar un comportamiento complejo, y como se ha visto para ciertos valores de

parámetros, en este caso Δ_1 y Δ_2 , el sistema puede estar dentro de cierta región sin que tienda nunca a una trayectoria periódica.

4.-El circuito elevador presenta un comportamiento periódico para valores concretos de Δ_1 y Δ_2 , que son parámetros del algoritmo de control y no del sistema en lazo abierto. Esto hace que una mala elección de los parámetros del algoritmo de control puede hacer que el sistema presente un comportamiento complejo.

REFERENCIAS

- Deane J.H.C., Hamill, D.C., (1991) *Chaotic behaviour in current-mode dc-dc converters*, Electronics letters, vol. 27, nº13, pp1172-1173.
- El Aroudi, A., Leyva R., (1999) *Quasi-periodic route to chaos in a PWM voltaje controlled dc-dc boost converter*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 48, nº8, pp967-978.
- Parker, T.S., & Chua, L.O. (1989). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. New York: Springer-Verlag.
- Sastry, S. (1999). *Nonlinear systems: analysis, stability, and control*. New York: Springer-Verlag.
- Simic, S.N., Johansson, K.H., Lygeros, J. & Sastry, (2002). Hybrid limit cycles & hybrid Poincare Bendixson. *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona, July 2002.
- Zulueta E., Rico, T. y Gonzalez de Durana, J.M. (2003a). Modelos híbridos de convertidores dc-dc en lazo abierto. *Actas de la XXIV Jornadas de Automática, León, España, Septiembre 2003*
- Zulueta E., Rico T. y González de Durana, J.M. (2003b). Hybrid modelling of open loop DC-DC converters. *Revista facultad de ingeniería, U.T.A. ,Chile*, vol. 11 N°2, 2003, pp.41-47.