Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial

ISSN: 1697-7912. Vol. 3, Núm. 3, Julio 2006, pp. 108-115

http://riai.isa.upv.es

MINIMIZACIÓN DEL TIEMPO DE VUELO DE SATÉLITES UTILIZANDO PROGRAMACIÓN DINÁMICA.

Valery Moreno Vega, Dirk Aeyels

Dpto Automática y Computación, CUJAE, Habana, Cuba
SYSTeMS Research Group, Ghent University, Belgium

Resumen: La explosión tecnológica de los últimos 30 años ha afectado el desarrollo de casi todas las ciencias. Una de las ramas del saber en la que se ha reflejado este impacto con mayor claridad es en el de las comunicaciones, y en particular, las comunicaciones digitales por satélite. Hoy en día la sociedad depende de los satélites de muchas formas, desde las comunicaciones de voz y datos hasta la televisión. El sector militar también utiliza sistemáticamente la tecnología basada en satélites. Durante el ciclo de vida útil de un satélite se debe efectuar un grupo de maniobras que se calculan desde la etapa de diseño y que tienen como objetivo mantenerlo en órbita. Sin embargo, muchas veces dicho satélite debe ser reposicionado debido a situaciones no previstas o de emergencia y en esos casos se debe hacer en un tiempo mínimo y con un consumo de energía adecuado. En este artículo se ofrece una solución al problema de minimización del tiempo de vuelo de satélites cuando se produce una maniobra que los cambia de posición. A diferencia de los procedimientos de optimización estándares basados en el cálculo variacional y en el Principio del Máximo de Pontryagin, aquí se propone el uso de un algoritmo basado en el principio de Programación Dinámica y una metodología para su aplicación. Con esto se garantiza que la solución se aproxime tanto como se quiera a una solución globalmente óptima. Se brinda un ejemplo de su utilización en un caso típico. *Copyright © 2006 CEA-IFAC*

Palabras Clave: Control óptimo, Programación Dinámica

1. INTRODUCCIÓN

Es conocido que los satélites en el espacio siguen un movimiento descrito por los parámetros de una sección cónica elíptica o circular y que define a la órbita que describen con su movimiento. Sin importar el tipo de órbita que describen, los satélites tienen que corregir su curso cada cierto tiempo debido a la fuerza de gravedad del cuerpo sobre el cual orbitan (por ejemplo, la Tierra) y a otros factores externos.

Las maniobras que reposicionan al satélite en su órbita se calculan en función del tiempo de diseño de la misión y no acortan el tiempo de vida de un satélite (Sidi,1997).

A pesar de todos los cálculos que se consideran y de las posibles situaciones de emergencia, es muy difícil predecir todos los eventos que pudieran tener lugar en un lapso de 10 años. Esto implica que en muchos casos hay que enfrentarse a problemas en los cuales los satélites necesitan modificar su curso debido a situaciones no previstas. En estos casos las maniobras deben realizarse dentro de un tiempo mínimo, pues durante ellas el satélite deja de ofrecer los servicios para los cuales fue enviado al espacio. Dichas maniobras pueden, además, afectar el tiempo de vida del satélite, sobre todo si el motor no es eléctrico y usa propelente, debido a que el satélite tiene una capacidad limitada para almacenarlo. A continuación, y a modo de motivación, se citan algunos ejemplos que ilustran estas situaciones de emergencia:

Supóngase que hay una red de microsatélites que dan servicios de transmisión de voz y de datos. Del funcionamiento de los satélites depende la calidad del servicio. Si en esa situación algún satélite sale de operaciones, debería sustituirse por otro en un tiempo mínimo, pues mientras mayor sea el tiempo que la red no ofrezca el servicio de comunicaciones, mayores serán las pérdidas económicas para el proveedor del servicio (Sheriff and Fun,2001).

Un evento importante en la Tierra (un huracán, el derrame de un barco petrolero, un accidente a gran escala, etc.) requiere de un seguimiento continuo. Supóngase que el satélite que está realizando esta función necesita recargar sus unidades de energía eléctrica cada cierto intervalo de tiempo. En esta situación, se podría pensar en reemplazar el satélite por otro en un tiempo mínimo y de manera cíclica (sale uno de operación y entra el otro).

Un meteorito se acerca a la Tierra. Se ha calculado su curso y un satélite geoestacionario será golpeado. Como este tipo de satélite es operacional sólo cuando su posición es invariante con respecto a la de la Tierra, debería sacarse de su órbita solamente el tiempo imprescindible para evitar el impacto, retornando después a su órbita geoestacionaria en un tiempo mínimo.

Estos ejemplos plantean un problema de optimización cuyo objetivo primario es minimizar el tiempo de vuelo que consume el satélite cuando se desplaza de una posición a otra. El problema se puede replantear de la manera siguiente: encontrar un camino óptimo entre dos puntos con restricciones, tomando como función objetivo una expresión del tiempo de vuelo.

Hasta este momento las soluciones encontradas para resolver el problema planteado son localmente óptimas (Bryson and Ho,2001; Koon, 1999; Howell, 1997; Lo, 2001; Serban,2002). Sin embargo, ¿pudiera pensarse en alguna técnica mediante la cual se obtenga un procedimiento de optimización que tienda mucho más a una solución globalmente óptima? En este artículo se desarrolla un algoritmo basado en Programación Dinámica (DP) que responde afirmativamente a la pregunta formulada.

2. DESARROLLO

2.1 Fundamentos

En el presente, los métodos utilizados para el diseño de trayectorias de transferencia nominales óptimas entre dos puntos de una misión espacial se derivan del Principio Máximo de la teoría del control óptimo (Koon,1999; Howell,1997; Pontryagin,1965; Axelrod,2002) o de algún método derivado del cálculo variacional. En esencia, estos métodos parten de una trayectoria nominal que no es óptima, aunque probablemente esté cerca, y calculan una nueva trayectoria, óptima con relación a una función objetivo, en la vecindad de esa trayectoria nominal inicialmente supuesta. Como se puede apreciar estas trayectorias son óptimas en el sentido local (o dicho de otra forma constituyen subóptimos de la solución global) pues ellas conllevan un menor costo que las trayectorias cercanas. Otra de las desventajas de estos métodos (basados en el cálculo variacional) es que requieren de un tiempo de computación que en el caso de las aplicaciones espaciales no puede despreciarse. Téngase en cuenta que a las velocidades en que se mueve un vehículo en el espacio, un segundo más con los propulsores de la nave encendidos puede representar una desviación de kilómetros con respecto al punto de llegada deseado.

Estos métodos presentan además otras desventajas, que se enumeran a continuación:

En el espacio, para producir un movimiento en el vehículo que cambie su curso, o la órbita sobre la cual se mueve, se necesita modificar su velocidad. Esto se realiza mediante impulsos discretos, o sea, se encienden los motores (para frenar o acelerar el vehículo) por un tiempo muy pequeño comparado con el tiempo de vuelo total, provocándose un desvío en la trayectoria. A estas fases se les conoce por el nombre de maniobras impulsivas, pues el cambio en la velocidad se modela mediante una función impulsiva aplicada a los motores de la nave, siendo la más común la denominada transferencia de Hohmann (Sidi,1997) (ver Figura 1). La función objetivo que deberá ser optimizada involucra controles discontinuos, pues las maniobras impulsivas son modeladas como saltos en la velocidad del vehículo.

Como el problema de optimización para estas aplicaciones se afronta utilizando algoritmos de control óptimo que demandan de una función objetivo, diferenciable es entonces necesaria una reformulación adecuada del problema original. La función de costo también debe ser diferenciable, pues maniobras impulsivas de valor cero (que no producen cambios en la trayectoria) pueden aparecer durante la misión. Esto significa que, en general, no se puede tomar la suma del valor absoluto de cada maniobra realizada durante la misión como la función de costo (que es, en realidad la que mayor significado físico tiene), tomándose en su lugar la suma cuadrática. Aunque esta función de costo es diferenciable en todo el dominio real, tiene la desventaja de dar lugar, en algunas situaciones particulares, a nuevos problemas (Serban,2002).

Las soluciones que se derivan del cálculo variacional son sensibles a la selección inicial que se haga de la trayectoria sobre la cual se calculará la óptima, pues se trabaja en una vecindad de esa selección inicial. Si en algún momento se abandona esa vecindad la optimización de la solución no puede garantizarse.

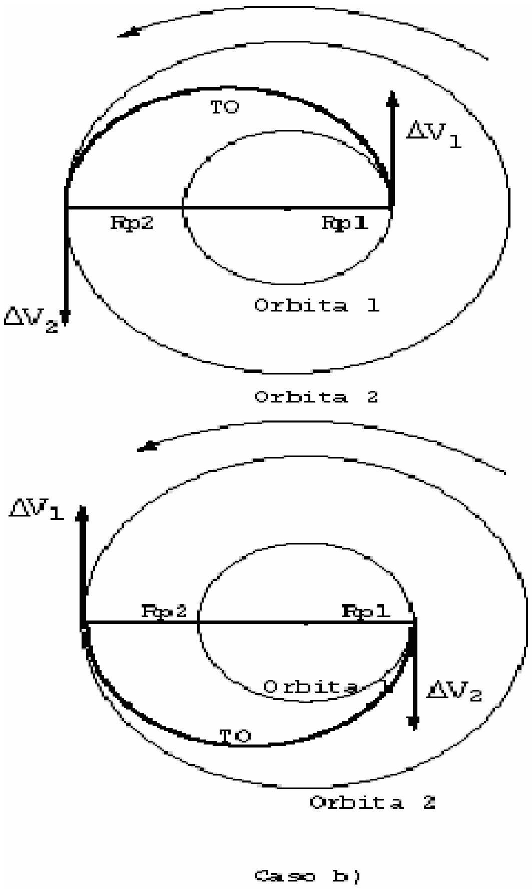

Figura 1. Transferencia de Hohmann. Los ΔV son los impulsos, TO es la órbita de transferencia (semielipse), Rp1 y Rp2 son respectivamente los radios de las órbitas 1 y 2 involucrados en la transferencia.

2.1 Método de Programación Dinámica

De manera general, se puede decir que el método de programación dinámica (DP) permite calcular el camino óptimo entre dos puntos, que como es óptimo, tiene la propiedad de que cualquiera sean los estados y decisiones iniciales, las decisiones restantes deben constituir una estrategia óptima con relación al estado resultante de la primera decisión. Una característica muy importante de este método es que proporciona una solución óptima global de forma realimentada. El método compara la decisión óptima con todas las demás decisiones (en este sentido una trayectoria óptima es globalmente óptima). Esta comparación global conduce a condiciones suficientes de optimización. Más aún, DP no requiere diferenciabilidad ni condiciones de convexidad (ni incluso ser restringida a un espacio de estado de dimensión finita). Resolviendo la ecuación recursiva del método (conocida como la ecuación de Bellman) se obtiene el control realimentado óptimo.

Hace unas décadas, cuando la Programación Dinámica se introdujo por primera vez, la principal preocupación relacionada con el método era la cantidad de cálculos que se necesitaban para resolver un problema en particular. Sin embargo, hoy en día este inconveniente es relativo debido a la explosión tecnológica en el campo de la computación, que ha llevado a desarrollos impensables décadas atrás. Como se verá, este problema también se reduce en estas aplicaciones, pues se tomará ventaja de algunas características estructurales del problema mencionadas en la sección anterior (por ejemplo, maniobras de control impulsivas discretas, conservación de la energía, etc.) para disminuir el tiempo de cómputo requerido e incrementar la precisión de la solución; todo esto sin un costo significativo en tiempo de computación.

Formulación general. Dado un sistema descrito con la relación siguiente (caso discreto):

$$x(i+1) = f(x(i), u(i), i) \qquad (1)$$

con $x(0) = x_0$, el problema de optimización consiste en encontrar las acciones de control u que minimizan un índice de rendimiento J cuando el estado $x \in X$ para algún X evoluciona desde x(0) hasta un estado final x(N) o un conjunto de estados x(N) pertenecientes a un conjunto S dado.

En lugar de tratar un problema de control óptimo, la idea fundamental en el método de Programación Dinámica es considerar una familia de problemas de control óptimo que compartan la misma dinámica, la misma función objetivo y restricciones de control, pero con diferentes estados y tiempos iniciales, o sea, matemáticamente, para cada $x(i) \in X$ e i entre 0 y N-1 (denotando estados), el problema es minimizar la función (caso discreto):

$$\sum_{i=k}^{N-1} g_i(x(i), u(i)) + h(x(N)) \qquad (2)$$

teniendo en cuenta que:

Dinámica: $x(i+1) = f(i, x(i), u(i))$ donde $i = k, k+1, ..., N-1$, $f(i,\cdot,\cdot) : X \times U \longrightarrow \Re^n$ condiciones iniciales $x(k) = x_{k0}$ y restricciones de control $u(i) \in \Omega_i$ donde $i = k, k+1, ..., N-1$ con Ω_i siendo subconjuntos fijos de U y $h : X \longrightarrow \Re$ una función de costo terminal. X y U son, respectivamente, el espacio de estado y de control. La función $g_i(x(i), u(i))$ expresa el costo producido para ir desde el estado x en el instante i hasta todos los posibles estados x en el instante i+1, donde $i \in \{1, ..., N-1\}$.

Cuando un satélite se mueve en el espacio exterior lo hace siguiendo una trayectoria que se obtiene a partir de la aplicación del modelo reducido de los dos cuerpos, cuya ecuación se expresa como (Sidi,1997; Sheriff and Fun,2001):

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cdot \cos(\theta - \theta_0)} \qquad (3)$$

donde: $\frac{h^2}{\mu}$ es una constante geométrica de la órbita en la cual el vehículo describe su movimiento y μ es un parámetro gravitatorio. En la ecuación anterior, además, r es la distancia radial del vehículo con respecto al cuerpo inercial (la Tierra), θ es un ángulo polar (θ_0 es el ángulo polar inicial), e es la excentricidad de la órbita y h es el valor absoluto del momento angular específico.

La ecuación (3) es la ecuación fundamental para órbitas keplerianas (denominadas así debido a Kepler, que las describió por primera vez). Estas órbitas expresan la forma de una sección cónica y salvo para los casos en los que los satélites van camino a otros planetas (en cuyo caso la sección cónica es una hipérbola o una parábola) describe una órbita circular o una elíptica. Nótese que en esta solución en forma cerrada no está incluido el tiempo, lo cual significa que se ha perdido el rastro de la posición en la que el vehículo se encuentra para un tiempo específico dado. No obstante, la ecuación (3) ayuda a describir la geometría de la órbita, lo cual, como se verá a continuación, es de gran importancia.

2.2 Aplicación del método de Programación Dinámica.

Para poder aplicar el método de Programación Dinámica en su versión discreta, el espacio exterior se discretizará. Al inspeccionar la ecuación (3) se puede ver, como ya se mencionó, que la geometría de la órbita en la que el vehículo se mueve corresponde con una sección cónica. Si además $e \approx 0$, entonces la sección cónica descrita por medio de (3) es un círculo. Es por tanto natural dividir o cuantificar el espacio por medio de estas órbitas circulares. Estas Órbitas circulares se llamarán Órbitas de Parqueo Terrestres (EPO). En la Figura 2 se muestra una representación de las EPO.

Para garantizar que se evalúen todas las posibles soluciones y se aplique la óptima, la cantidad de órbitas de parqueo puede determinarse de manera tal que los valores de energía asociados a dos órbitas consecutivas i y j no varíen significativamente. Con esta división del espacio exterior en órbitas circulares se está definiendo el espacio de estado o dominio de definición de las funciones g_i y h de la ecuación (2), que serán la posición y velocidad del vehículo referido al sistema inercial de coordenadas con respecto al cual se definieron las órbitas, o sea, con respecto a la Tierra.

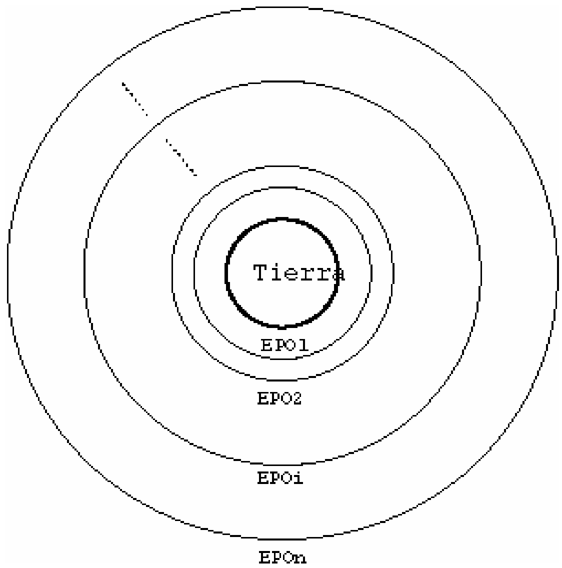

Figura 2. Representación de las órbitas de parqueo terrestres (circulares).

Conociendo las órbitas, se puede definir la función de costo o índice de rendimiento J evaluado por el procedimiento de optimización, que en este caso, será una función del tiempo de vuelo (TOF). Dicha función se puede definir de la siguiente manera (Sidi,1997;Sheriff and Fun,2001;Bate,1971; Prussing and Conway,1993; Lawden, 1963):

$$TOF = \pi \cdot \sqrt{\frac{a^3_{transferencia}}{\mu}} \qquad (4)$$

donde: $a_{transferencia} = \frac{r_1 + r_2}{2}$, siendo r_1 y r_2 los radios de las órbitas circulares de partida y de llegada de la transferencia (ver Figura 1).

Una vez que se ha definido la función objetivo del proceso de optimización y el dominio de definición sobre el cual se optimizará el tiempo de vuelo, se puede reformular el problema original de la siguiente forma: encontrar las maniobras o acciones de control que realizadas con el menor consumo de tiempo de vuelo, conduzcan al vehículo desde una localización a otra conociendo para ello:

- La localización desde la cual el vehículo partirá y la localización donde finalizará.
- El costo de cada transferencia.

Obsérvese que no se menciona la evolución detallada en el tiempo del estado cuando se realiza el movimiento desde la posición inicial a la final. A diferencia de otros métodos, el enfoque que introduce la Programación Dinámica retorna una solución óptima conociéndose solamente la información especificada anteriormente. Con sólo esa información no sería posible aplicar otros métodos, pues se necesitaría una posible trayectoria inicial y más aún, ecuaciones explicitas y diferenciables que describen la dinámica de movimiento del satélite. La Figura 3 (que también servirá de base para el ejemplo de la Sección 3) muestra la integración de esta información en un esquema apropiado. Nótese que los nodos representan posiciones (órbitas) o localizaciones del satélite. Dichos nodos se enumeran desde la localización inicial hasta la final. Los arcos representan valores de costo, o sea, los costos generados cuando se realiza una transferencia entre los nodos conectados por dichos arcos. El problema inicial entonces se reformula para encontrar la solución óptima en términos de menor tiempo de vuelo para un satélite que se mueve desde la localización correspondiente al nodo 1 hasta su arribo a la del nodo N, pudiendo para ello pasar por múltiples localizaciones intermedias. La solución específica del problema de minimización del tiempo de vuelo con DP será:

Determínese la estrategia de control u(k) que minimiza el índice de rendimiento J(x(k),k) con J(x(k),k) expresado por:

$$J(x(k),k) = \sum_{i=k}^{N-1} g_k(x(k),u(k)) + h(x(N)) \quad (5)$$

para cada $0 \le k \le N-1$ y $x(k) \in X$.

Obviamente el problema de optimización original se corresponde con k=0.

Defínase la función $J^*(x(k),k)$ como el costo mínimo de (5) para cada k y el conjunto S de localizaciones en el instante N; a la función $J^*(x(k),k)$ se le denominará "el costo-para-ir". La función $J^*(x(k),k)$ se define para todo $x \in X$, y todo $0 \le k \le N$.

Aplíquese la ecuación recursiva de Bellman (Bellman,1962; Sontag,1998): la función de costo mínimo $J^*(x(k),k)$ evaluada para todo $x \in X$ satisface la relación recursiva ($0 \le k \le N-1$):

$$\begin{aligned} J^*(x(k),k) &= \min_u \{g_k(x(k),u(k)) + \\ &J^*(f(x(k),u(k),k),k+1)\} \end{aligned} \quad (6)$$

con la minimización realizada sobre toda $u \in \Omega_k$ para la cual $f(x(k),u(k),k) \in X$, con k<N-1 y $f(x(N-1),u(N-1),N-1) \in S$.

En la formulación anterior es conveniente recalcar que la función "g" define el índice de rendimiento, por lo que para este caso: g=TOF (ecuación (4)). Por otra parte, la función "f" se utiliza para determinar el estado siguiente (o sea, la órbita a la cual llegará el satélite) cuando se aplique una transferencia (acción de control "u") determinada. La metodología que a continuación se ofrece permite determinar todos los posibles valores de f y g y evaluar (6):

Calcular para todo $x \in S$ los valores de $J^*(x,N)$ como $J^*(x,N) = h(x)$ (este valor es, en muchos casos, cero).

Minimizar (para todo $x \in X$ desde el cual el estado (órbita final) N puede alcanzarse por medio de la dinámica descrita por (1)) a:

$$\begin{aligned} &g_{N-1}(x(N-1),u(N-1)) + \\ &J^*(f(x(N-1),u(N-1),N-1),N) \end{aligned} \quad (7)$$

La minimización tiene lugar sobre toda $u \in \Omega_k$ para la cual $f(x(N-1),u(N-1),N-1) \in S$. Se obtiene para toda x una realimentación óptima: $u(N-1) = \varphi(x(N-1),N-1)$ y una nueva $J^*(x(N-1),N-1)$, dada por el mínimo de (7).

Minimizar (para todo $x \in X$ desde el cual el estado N-1 puede alcanzarse por medio de la dinámica descrita por (1)) a:

$$\begin{aligned} &g_{N-2}(x(N-2),u(N-2)) + \\ &J^*(f(x(N-2),u(N-2),N-2),N-1) \end{aligned} \quad (8)$$

La minimización tiene lugar sobre toda $u \in \Omega_k$ para la cual $f(x(N-2),u(N-2),N-2) \in X$. Se obtiene para toda x una realimentación óptima: $u(N-2) = \varphi(x(N-2),N-2)$ y una nueva $J^*(x(N-2),N-2)$ dada por el mínimo de (8).

El paso c) se repite para N-3, N-4,..., 0.

Cuando este procedimiento se aplica se obtiene para toda $x \in X$ y $0 \le k \le N-1$ el "costo-para-ir" $J^*(x(k),k)$ y $\varphi(x(k),k)$. El control óptimo realimentado es $u(k) = \varphi(x(k),k)$.

Una vez más, nótese que no se ha hecho uso de ninguna ecuación diferencial que describa el movimiento del vehículo. La función "f" determina la localización del vehículo cuando se aplica u, pero ninguna formulación explícita se ha realizado acerca de ella. De hecho, si se supone el caso más general (desde una localización u órbita se puede ir a cualquier otra) entonces la función f no habría que definirla pues el siguiente estado x(k+1) sería uno de todas las posibles órbitas y g se calcularía evaluando el tiempo de vuelo del satélite para las transferencias desde la órbita actual a todas ellas.

Es importante señalar que la solución obtenida no tiene en cuenta todos los posibles cambios de órbita intermedios para llegar a su órbita final (el espacio se discretiza y entre una órbita de parqueo y otra siempre se podrá definir una más) por lo que desde ese punto de vista el óptimo que se obtiene no es global. Sin embargo, la discretización puede hacerse tan densa como se quiera, o sea, se puede considerar la diferencia entre los radios de las órbitas circulares tan pequeña como se quiera. La consecuencia directa de disminuir esta diferencia es el aumento en el volumen de cálculos, pero este problema es relativo, debido al largo tiempo que transcurre desde el diseño de una misión hasta su realización, tiempo suficiente para realizar muchos cálculos con las potentes computadoras actuales. Mientras menor sea esa diferencia, más nos acercaremos a la solución óptima global. Además, debe considerarse también que los cálculos realizados para una misión pueden servir para otra que considere el mismo cuerpo central (la Tierra en el ejemplo de este artículo) pues el espacio es el mismo, por lo que con el tiempo y las misiones se dispondrá de más y más órbitas de parqueo y de datos de costos relacionados con posibles transferencias entre ellas, y la discretización cubrirá el espacio con una precisión suficiente. Desde este punto de vista el método de DP brinda un enfoque general y consistente con muchas situaciones diferentes, a diferencia de los métodos clásicos de optimización que ofrecen formulaciones particulares a problemas particulares. DP proporciona la cantidad óptima de cambios de órbita para poder minimizar el tiempo, otra diferencia con los métodos de control clásico.

Otro aspecto a señalar es que se debe tener en cuenta que aunque el objetivo primario es la minimización del tiempo de vuelo, se pudieran agregar algunas restricciones importantes en la práctica (por ejemplo, un límite en el gasto de combustible para la maniobra a realizar) que sería más fácil de abordar y resolver con DP que con otros métodos.

Por último, se quiere hacer notar la importancia de tener en cuenta la combinación del método de DP con otros enfoques clásicos. La solución brindada con DP puede utilizarse como una muy buena trayectoria inicial sobre la cual elaborar la óptima con métodos clásicos, por ejemplo, para casos en que no se consideren sólo trayectorias impulsivas tipo Hohmann y se incluyan impulsos de menor magnitud (intermedios) entre la órbita inicial y la final.

3. EJEMPLO.

3.1 Introducción.

Considérese el siguiente escenario de misión y el planteamiento del problema a resolver: un satélite (denotado por ST) debe ser enviado desde la Tierra para reforzar una constelación de múltiples satélites localizada en una órbita terrestre media (MEO) a 20000 km de altura sobre la superficie de la Tierra (Sheriff and Fun,2001). El diseño de la misión debe tener en cuenta que el satélite también debe estar preparado para servir como unidad de respaldo de otro satélite localizado en una órbita geoestacionaria. Esto significa que si uno de los satélites geoestacionarios falla la unidad de respaldo debe ser enviada desde su formación como parte de la red de satélites MEO, para reemplazarlo en el menor tiempo posible.

3.2 Solución óptima. Algoritmo.

Para poder brindar una solución a este problema, se deben encontrar las maniobras que minimicen el tiempo de vuelo del satélite de respaldo para que la trayectoria entre la órbita MEO y la GEO sea óptima con relación al tiempo consumido en recorrerla. La Figura 3 representa el problema a resolver, así como las posibles transferencias. Los nodos de la figura son las órbitas.

Para resolver el problema se puede aplicar la metodología descrita, aunque el algoritmo para resolver la ecuación recursiva de Bellman debe redefinirse. En la versión clásica de dicho algoritmo (Bellman,1962), cuando el “costo-para-ir” desde un estado “i” (en este caso órbita) hasta el estado final “N” ha sido minimizado en el instante o iteración “k”, éste no vuelve a cambiar su valor, o sea, ese mínimo no se altera pues se supone que implícitamente en el método se encuentra el hecho de que el costo mínimo $J^*(x(k),k)$ no será afectado por las iteraciones $1,....,k-1$. Sin embargo, obsérvese en la Figura 3 que en el ejemplo que aquí se plantea hay arcos que conectan a nodos que representan órbitas con radio mayor con órbitas de radio menor (arco x en la Figura 3) o lo que es lo mismo, que las transferencias se pueden hacer en cualquier orden: Debido a ello, $J^*(x(k),k)$ puede depender del resultado de las iteraciones $1,....,k-1$.

Aunque es posible demostrar que la dependencia de $J^*(x(k),k)$ con relación a las iteraciones $1,....,k-1$ se puede eliminar reformulando el problema original, en el presente trabajo, se presenta otra solución. Esto se hace con el objetivo de ilustrar la potencialidad del método de DP como un enfoque general y consistente con muchas situaciones diferentes, donde a diferencia de los métodos clásicos de optimización que ofrecen formulaciones particulares a problemas particulares, la formulación DP no depende del problema, siendo un método sistemático.

La Figura 4 (Caso (a)) muestra la solución obtenida para este ejemplo. Con el fin de efectuar comparaciones, se ha incluido el caso de una transferencia directa (sin viajar a otras órbitas antes de llegar a la final) desde la MEO hasta la GEO

(Caso (b)). El número de órbitas considerado fue de 4216, con la primera órbita a 100km de la superficie de la Tierra. La distancia entre órbitas fue de 10 km.

El algoritmo utilizado para la obtención de los resultados y que sintetiza la metodología explicada es el siguiente:

1. Crear un arreglo "A" de "N" elementos (N=órbitas). Inicializar $A[i] = \infty$ para todo $i \in \{1,....,N-1\}$ y A[N]=0. ∞ representa un número lo suficientemente grande.

2. Crear un arreglo B, B[j] ($j \in \{1,....,N\}$) siendo un puntero a una lista "L". Definir cada nodo de "L" como una estructura con dos campos: un valor entero y un puntero al siguiente elemento de la lista. Inicializar cada B[j] para referenciar a una lista con un único nodo que contenga el valor de "N".

3. Crear un conjunto "V" que contenga las localizaciones que han cambiado su costo mínimo (el valor de J en la sección anterior). Inicialmente V={N}. Inicializar un conjunto auxiliar $U = \{\phi\}$.

4. Crear un conjunto J= {1,..., N-1}.

5. Calcular el "costo-para-ir", "c" para cada órbita o locación $j \in J$ desde la cual existe un arco a la locación u órbita $v \in V$.

6. Si c < A[j] actualizar A[j] como A[j]=c. Insertar un nodo en B[j] con el valor de la locación "j".

7. Incorporar la locación "j" en el conjunto U.

8. Repetir todo desde el paso e) hasta que cada locación $v \in V$ haya sido considerada.

9. Si U no está vacío, hacer V=U, $U = \{\phi\}$ y repetir desde e).

El tiempo de vuelo mínimo para ir desde la locación inicial hasta la final se almacena en A[1]. El camino óptimo, y por tanto las acciones de control a realizar (o sea, la secuencia de órbitas hacia las que hay que viajar camino a la final) está contenido en la lista B[1]. El tiempo de vuelo mínimo para ir desde la locación i hasta la locación final está almacenado en A[i] y el camino óptimo a seguir está almacenado en B[i].

Los aspectos cualitativos de la solución utilizando la programación dinámica han sido el objetivo principal de esta presentación. En el artículo no se incluye un ejemplo de algoritmo programado en algún lenguaje pues se trata de presentar una solución que puede implementarse en diferentes plataformas y lenguajes. Sin embargo, para la presentación de los resultados numéricos del ejemplo, se desarrolló una versión de este algoritmo sobre MatLab 6.1 que se encuentra disponible y los autores pueden enviarla a quien la solicite. En la evaluación de los aspectos cuantitativos del ejemplo, se utiliza para los cálculos los tipos de datos de este lenguaje y las rutinas que incluye MatLab para garantizar más de seis dígitos de precisión (sin propagación de errores de aproximación hasta 6 dígitos después del punto decimal). También es importante señalar que el procedimiento mostrado aquí puede programarse incluso en microprocesadores o microcontroladores a bordo de los satélites (autónomos) o en computadoras dedicadas a control de vuelo (control remoto del satélite). Para estos casos se debe tener especial cuidado en la implementación de las necesarias rutinas para trabajo con punto flotante en bajo nivel, de modo que los inevitables errores introducidos por las aproximaciones numéricas no sean significativos en la solución. Una posible solución a este problema puede ser el realizar los cálculos de los costos y caminos óptimos en tiempo de diseño de la misión e incorporarse a una memoria (que trabajaría como una especie de Look-up table) para reducir la carga de trabajo y las aproximaciones que de otra manera estarían presentes al implementarse en esos microcontroladores las fórmulas desarrolladas en la sección 2. Bajo esas condiciones, en una situación en la cual se tuviera que relocalizar el satélite ya estarían almacenadas en dicha memoria las acciones a realizarse, con el nivel de precisión que se haya establecido de antemano durante la fase de diseño.

3.3 Conclusión del ejemplo.

La solución óptima (ver Figuras 3 y 4) consiste en dos maniobras: 1) La primera de ellas consiste en el envío del satélite a una órbita localizada a 100km sobre la superficie de la Tierra, y 2) La segunda consiste en enviarlo desde allí hasta la órbita geoestacionaria final. Existe una diferencia de aproximadamente 37 minutos entre la transferencia directa (usualmente la respuesta con un método clásico) y la brindada con la aplicación del método propuesto aquí. Si el satélite de respaldo debe reemplazar a un satélite geoestacionario dedicado a redes de comunicación, entonces esta diferencia puede reducir significativamente las pérdidas económicas debido a la interrupción del servicio.

4. CONCLUSIONES.

1. En el artículo se presenta una nueva solución para problemas de minimización del tiempo de vuelo de satélites espaciales.

2. El óptimo alcanzado con el método expuesto depende de la discretización del espacio considerada.

3. La solución aportada aquí se basa en el uso de la técnica de Programación Dinámica y demuestra que su aplicación es factible y brinda resultados más generales que el empleo de otras técnicas de optimización de naturaleza local.

4. El algoritmo de búsqueda de la solución óptima presentado aquí se puede programar e incluir en los programas de contingencia y control de los satélites.

REFERENCIAS

Axelrod, A. (2002) *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Optimal Control of Interplanetary Trajectories Using Electrical Propulsion with Discrete Thrust Levels, **25**(5):932.

Bate, R.R (1971). *Fundamentals of Astrodynamics*, pp. 97-178, New York, Dover.

Bellman, R.E. (1962) *Applied Dynamic Programming*. pp. 1-150, New Jersey, Princeton University Press.

Bryson, A.E. and Ho, Y.C. (1975) *Applied Optimal Control.* pp. 1-200, Washington DC, Hemisphere.

Howell, K.C. (1997) *The Journal of the Astronautical Sciences,* Application of Dynamical Systems Theory to Trajectory Design for a Libration Point Mission, **45**(2), pp. 161-178.

Koon, W.S (1999). The Genesis Trajectory and Heteroclinic Connections, In: AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 1999, pp. 451-457.

Lawden, D.F. (1963) *Optimal Trajectories for Space Navigation.* pp. 1-205, London, Butterworths.

Lo, M.W (2001) *The Journal of the Astronautical Sciences,* Genesis Mission Design, **49**(1), pp. 169-184.

Pontryagin, L.S. (1965) *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, 360 pp. New York, John Wiley & Sons, Interscience Publishers, 3rd printing, 1965.

Prussing, J.E. and Conway B.A. (1993) *Orbital mechanics.* pp 99-118, New York, Oxford University Press.

Serban, R. (2002) *Automatica*. Halo Orbit Mission Correction Maneuvers Using Optimal Control, **38**(4), pp.571-583.

Sheriff, R.E. and Fun H.Y.(2001) *Mobile Satellite Communication Networks*. 368 pp. London, John Wiley & Sons, Ltd, 2001.

Sidi, M.J. (1997) *Spacecraft Dynamics & Control: A Practical Engineering Approach*. 409 pp Cambridge Aerospace Series 7, Cambridge, Cambridge University Press.

Sontag, E.D. (1998) *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems.* 457 pp, New York-Heidelberg-Berlin-, Springer-Verlag, 2nd. Edition.

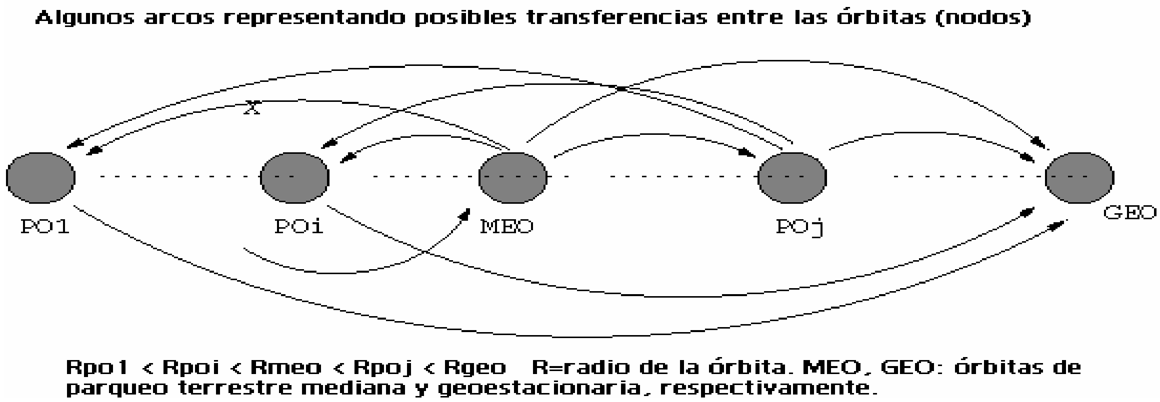

Figura 3. Un ejemplo de representación del problema bajo estudio: encontrar la trayectoria óptima (en términos de tiempo de vuelo) entre la localización 1 (PO1) y la N (GEO).

Calculos basados en transferencias de tipo Hohmann	TOF
(a) **Trayectoria Óptima.** MEO ⟶ PO ⟶ GEO (20000 km) (6478 km) (42164 km)	8h:9m:11s
(b) **Transferencia Directa** MEO ⟶ GEO (20000 km) (42164 km)	8h:46m:10

Figura 4. Solución numérica del ejemplo presentado en la Sección 3.