La probabilidad y el sistema de clasificación de la Federación Internacional de Ajedrez

Apellidos, nombre	**Benítez López, Julio** (jbenitez@mat.upv.es) **Roca Martínez, Alicia** (aroca@mat.upv.es)
Departamento	**Departamento de Matemática Aplicada**
Centro	**Universitat Politècnica de València**

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo mostramos una aplicación de algunas nociones de la probabilidad: Presentamos para ello el cálculo del elo, sistema de puntuación empleado por la Federación Internacional de Ajedrez (FIDE) para medir el nivel de juego de un jugador federado de ajedrez.

A medida que nos vamos aproximando al cálculo del elo, aparece la necesidad de introducir las nociones probabilśiticas de variable aleatoria y distribución normal y de analizar algunas de sus propiedades.

2 Objetivos

Cuando se hayan asimilado los contenidos de este documento, el alumno debe poder

- Explicar cómo se calcula el elo, sistema de puntuación empleado por la Federación Internacional de Ajedrez para medir el nivel de juego de sus jugadores.
- Manejar algunos conceptos y resultados de teoría de probabilidad: experimento aleatorio, variable aleatoria, esperanza y desviación típica de una variable aleatoria, distribución normal y suma de variables aleatorias normales.
- Aplicar los resultados introducidos al estudio de una situación real. En particular, utilizarlos para estimar la fuerza relativa de una jugador frente a otro, para medir su rendimiento, y para efectuar un seguimiento razonado de la evolución de su elo.

3 ¿Qué es el Elo?

¿Sabías que cada jugador federado de ajedrez (los profesionales y no) tiene un número que permite estimar su nivel? Este número es parecido a los puntos de la ATP (Association of Tennis Professionals). Aunque no se calculan de igual forma, los dos cambian en función de los resultados obtenidos. Ese número se denomina **elo** y es otorgado por la Federación Internacional de Ajedrez (FIDE).

Figura 1: Árpád Élő

El elo es el sistema de clasificación usado por la FIDE para ordenar a los jugadores en función de su calidad de juego. En este artículo docente presentamos el cálculo del elo. Veremos que para obtenerlo necesitamos de la teoría de la probabilidad y, en particular, de la distribución normal.

El sistema de clasificación elo debe su nombre al profesor estadounidense (de origen húngaro) Árpád Élő, quien trabajó para la federación de ajedrez de Estados Unidos[1].

[1]Cuando se implantó el sistema elo en la FIDE (1971), su presidente era el neerlandés Max Euwe, quien además de haber sido campeón del mundo, fue doctor en Matemáticas.

Por ejemplo, según datos de mayo de 2020, el elo del campeón del mundo (el noruego Magnus Carlsen) es 2863 y el elo del mejor jugador español (Francisco Vallejo) es 2710 (número 34 mundial). El elo de cualquier jugador federado puede consultarse en `https://ratings.fide.com`.

A continuación vemos una tabla aproximativa de clasificación de los jugadores de ajedrez desde "principiante" a "gran maestro" en función de su elo. En realidad, los títulos de "gran maestro" y "maestro internacional", que son vitalicios, los otorga la FIDE a los jugadores que consiguen unos requisitos específicos y por mucho que baje el elo de un jugador, si éste consigue alguno de estos títulos, este jugador lo retendrá para siempre.

Elo	Grupo	Elo	Grupo
1000—1399	Principiante	2000—2299	Candidato a maestro
1400—1599	Aficionado	2300—2399	Maestro nacional
1600—1799	Jugador medio de club	2400—2499	Maestro internacional
1800—1999	Jugador fuerte de club	2500—	Gran maestro

El elo es, por tanto, orientativo de la fuerza de un jugador. Adelantamos dos hechos: cuanto mayor es el elo, el jugador, en teoría, es más fuerte; y el elo varía en función de los buenos o malos resultados que un jugador vaya obteniendo. Decimos ***en teoría***, ya que es perfectamente posible que un jugador de menos elo gane a un jugador de mayor elo. Algo similar sucede cuando se lanza un dado: es posible sacar un "uno", pese a que la probabilidad de sacar un "uno" es menor que la probabilidad de no sacar un "uno". Vislumbramos que va a entrar en juego la teoría de la probabilidad en el cálculo del elo.

4 Entra en juego la teoría de la probabilidad

Para elaborar una clasificación de los jugadores, debemos estimar la fuerza que un jugador se supone que tiene al jugar frente a otro antes de la partida, y también evaluar el resultado después de la partida o torneo.

4.1 Estimación de la fuerza de un jugador frente a otro

El resultado de una partida no se conoce *a priori*, y por tanto, una partida puede considerarse como un experimento aleatorio. Sabemos que presenta tres posibles resultados: ganar, perder, tablas (en la jerga del ajedrez, cuando una partida acaba en empate, se dice que acaba en tablas). Así, la variable **resultado de una partida** entre dos jugadores A y B es una variable aleatoria que en lo sucesivo denotaremos por X_{AB}. Por tanto:

> El **resultado de una partida** entre los jugadores A y B es una variable aleatoria que denotaremos por X_{AB}.

Como es habitual en ajedrez, a esta variable aleatoria se le asignan los valores

$$X_{\mathrm{AB}} = \begin{cases} 1, & \text{si A gana a B,} \\ 1/2, & \text{si A y B empatan,} \\ 0, & \text{si A pierde frente a B.} \end{cases}$$

Por tanto, X_{AB} es una variable aleatoria discreta que toma valores en $\{0, 1/2, 1\}$.

Problema 1

a) *¿Cuáles son los posibles resultados de ese experimento aleatorio?*

b) *¿Qué describe la variable aleatoria* X_{AB}*?*

c) *¿Qué relación hay entre los posibles valores de la variable aleatoria* X_{AB} *y los resultados del experimento aleatorio?*

Debemos aclarar que la *fuerza de un jugador* es un concepto más bien difuso que no vamos a definir ni precisar de forma matemática. Solo se usará este término de forma intuitiva y por supuesto, no va a influir en ningún momento en los cálculos que se mostrarán más adelante.

Se considera que la **fuerza relativa** del jugador A frente a B es la puntuación esperada del jugador A cuando juega frente a B. Matemáticamente hablando es la esperanza de la variable aleatoria X_{AB}.

> La **fuerza relativa** del jugador A frente a B es la esperanza de la variable aleatoria X_{AB}.

Problema 2

Considera seis jugadores de ajedrez A, B, C, D, E y F que cumplen lo siguiente

$$\mathrm{pr}(X_{\mathrm{AB}} = 1) = 0.4, \quad \mathrm{pr}(X_{\mathrm{AB}} = 1/2) = 0.2, \quad \mathrm{pr}(X_{\mathrm{AB}} = 0) = 0.4,$$

$$\mathrm{pr}(X_{\mathrm{CD}} = 1) = 0.6, \quad \mathrm{pr}(X_{\mathrm{CD}} = 1/2) = 0.2, \quad \mathrm{pr}(X_{\mathrm{CD}} = 0) = 0.2,$$

$$\mathrm{pr}(X_{\mathrm{EF}} = 1) = 0.2, \quad \mathrm{pr}(X_{\mathrm{EF}} = 1/2) = 0.6, \quad \mathrm{pr}(X_{\mathrm{EF}} = 0) = 0.2.$$

Observa que la suma de las probabiliades en cada línea anterior debe ser 1.

a) *Comprueba que la esperanza de* X_{AB} *vale 0.5. Esto quiere decir, de forma intuitiva, que la fuerza de A y la de B son iguales.*

b) *¿Cuánto vale la esperanza de* X_{CD}*? Comprueba que es mayor que 0.5, lo que quiere decir que C es mejor jugador que D.*

c) *Calcula la varianza de* X_{AB} *y la de* X_{EF}*. Observa que la varianza de* X_{EF} *es menor que la de* X_{AB}*, lo que quiere decir que los resultados de las partidas que juegan E y F entre sí son menos irregulares que cuando juegan A y B entre sí.*

A partir de ahora, si X es una variable aleatoria, la esperanza de X será denotada por $\mathrm{E}(X)$ y la varianza de X por $\mathrm{Var}(X)$.

Obviamente, hay muchas (demasiadas) variables aleatorias X_{AB}, siendo A y B jugadores cualequiera: si n es el número de jugadores federados, entonces hay $n(n-1)/2$ emparejamientos posibles, luego hay $n(n-1)/2$ variables aleatorias de este tipo, la mayoría de las cuales nunca serán usadas, por lo que manejar directamente estas variables aleatorias no conduce a nada útil.

> ***Problema 3***
> *Razona por qué si hay n jugadores, entonces hay $n(n-1)/2$ posibles enfrentamientos (sin tener en cuenta si cada jugador juega con blancas o negras). ¿Cuántos posibles enfrentamientos hay si se tienen en cuenta los colores?*

Quizás te preguntes si vamos a tener en cuenta el factor blancas o negras. El propio Árpád Élő señaló que como en un torneo lo usual es que un jugador alterne blancas y negras, el color no afecta mucho en su sistema, y por tanto es más sencillo ignorar este factor.

4.2 Estimación del elo

La idea de Árpád Élő fue asignar un único número a cada jugador, el elo, que estimase su fuerza.

4.2.1 El rendimiento de un jugador

Como no sabemos *a priori* cómo va a jugar un ajedrecista en una partida concreta, podríamos intentar modelar el rendimiento de un jugador A en una partida concreta mediante otra variable aleatoria distinta de la ya comentada X_{AB}.

Árpád Élő consideró que el **rendimiento** de un jugador en una partida concreta es una variable aleatoria normal cuya media es el **elo** de este jugador. Ahora bien, ¿cuál es la desviación típica de esta distribución?

Hay que decir que antes de la elaboración del sistema de puntuación elo, la federación norteamericana de ajedrez ya disponía de unas tablas midiendo la fuerza de los jugadores norteamericanos (el sistema Harkness, el precursor del sistema de puntuación elo). Para ajustarse lo más posible al sistema previo, Árpád Élő tomó el valor 200 como la desviación típica de la variable aleatoria que modela el rendimiento. Árpád Élő asumió que esta desviación típica es la misma para todos los jugadores (aunque en la realidad esto no es así, ya que hay jugadores más regulares que otros), simplificando mucho los cálculos.

> El **rendimiento** r_{A} de un jugador A es una variable aleatoria normal de media el elo de A, μ_{A} y desviación típica 200.

4.2.2 Relación entre la fuerza relativa y el rendimiento

Veamos la relación entre las variables aleatorias r_{A}, r_{B} y X_{AB}. En realidad nos interesa contestar esta pregunta: ¿cuándo el jugador A gana a B? Por supuesto, cuando en la partida, el rendimiento de A es mayor que el de B, es decir, cuando $r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}}$. De forma similar podemos decir que si $r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}}$, entonces A y B hacen tablas; y si $r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}}$, entonces B le gana a A. Luego podemos redefinir X_{AB} como sigue:

$$X_{\mathrm{AB}} = \begin{cases} 1, & \text{si } r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}}, \\ 1/2, & \text{si } r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}}, \\ 0, & \text{si } r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}}. \end{cases} \tag{1}$$

Ahora podemos calcular la puntuación esperada de A cuando juega contra B, es decir la esperanza E_{AB} de la variable aleatoria X_{AB}. Debido a (1), se tiene que

$$E_{AB} = 1 \cdot \mathrm{pr}(r_A > r_B) + \frac{1}{2}\,\mathrm{pr}(r_A = r_B) + 0 \cdot \mathrm{pr}(r_A < r_B) = \mathrm{pr}(r_A > r_B) + \frac{1}{2}\,\mathrm{pr}(r_A = r_B).$$

Desde luego, hemos de calcular $\mathrm{pr}(r_A > r_B)$ y $\mathrm{pr}(r_A = r_B)$ y para ello estudiaremos la variable aleatoria $r_A - r_B$.

Supongamos que los rendimientos de los jugadores A y B no dependen unos de los otros (en términos probabilísticos, las variables aleatorias r_A y r_B son independientes). Con esta suposición (ya hecha por el profesor Élő) la diferencia de rendimientos es otra variable normal cuya media y varianza son

$$\mathrm{E}(r_A - r_B) = \mathrm{E}(r_A) - \mathrm{E}(r_B) = \mu_A - \mu_B,$$

$$\mathrm{Var}(r_A - r_B) = \mathrm{Var}(r_A) + \mathrm{Var}(r_B) = 200^2 + 200^2 = 2 \cdot 200^2.$$

La **diferencia de rendimientos** $r_A - r_B$ es una variable aleatoria normal de media $\mu_A - \mu_B$ y varianza $2 \cdot 200^2$.

La desviación típica de $r_A - r_B$ es $200\sqrt{2}$. Como la variable aleatoria $r_A - r_B$ es continua con varianza no nula, $\mathrm{pr}(r_A = r_B) = 0$. Ahora, ya que $r_A - r_B$ es una variable aleatoria normal,

$$\mathrm{pr}(r_A > r_B) = \mathrm{pr}(r_A - r_B > 0) = \mathrm{pr}\left(\frac{r_A - r_B - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}} > -\frac{\mu_A - \mu_B}{200\sqrt{2}}\right).$$

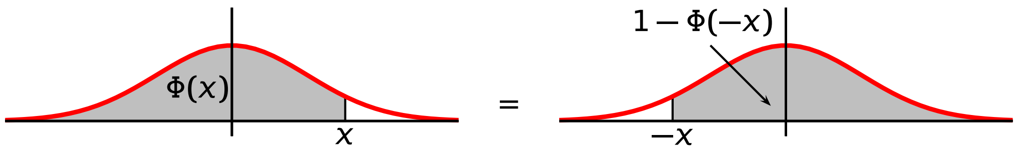

Figura 2: Demostración visual de $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Recuerda que el área entre la campana de Gauss y el eje horizontal es 1.

Denotemos

$$Y = \frac{r_A - r_B - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}}.$$

Observemos que Y es una variable aleatoria normal estándar. Si denotamos por Φ la función de distribución de la normal estándar, entonces como $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ (mira la figura 2). Por tanto,

$$\mathrm{pr}(r_A > r_B) = \mathrm{pr}\left(Y > -\frac{\mu_A - \mu_B}{200\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_A - \mu_B}{200\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_A - \mu_B}{200\sqrt{2}}\right).$$

Luego la puntuación esperada por A cuando juega contra B viene dada por

$$E_{AB} = \Phi\left(\frac{\mu_A - \mu_B}{200\sqrt{2}}\right). \tag{2}$$

> La **puntuación esperada** E_{AB} solo depende de la diferencia de elos $\mu_A - \mu_B$.

Por ejemplo, si los elos de los jugadores A, B, C y D son respectivamente $\mu_A = 2332$, $\mu_B = 2179$, $\mu_C = 1834$ y $\mu_D = 1681$, como $\mu_A - \mu_B = \mu_C - \mu_D$, entonces la puntuación esperada de A frente a B es la misma que la puntuación esperada de C frente a D.

En la siguiente tabla resumimos los conceptos introducidos hasta ahora y sus notaciones.

Rendimiento del jugador A	r_A	Variable aleatoria
Elo del jugador A	μ_A	$E(r_A)$. Constante conocida
Puntuación del jugador A contra B	X_{AB}	Variable aleatoria definida en (1)
Punt. esperada del jugador A contra B	E_{AB}	$E(X_{AB})$. Se calcula con (2)

4.2.3 Ejemplo de cálculo de la puntuación esperada de un jugador

Veamos un ejemplo sencillo usando Octave.

El comando de Octave `normcdf(x)` calcula el valor en `x` de la función de distribución de una variable normal estándar. La puntuación esperada por el jugador A de elo $\mu_A = 1834$ cuando juega contra el jugador B cuyo elo es $\mu_B = 2179$ se puede calcular fácilmente usando (2) con los comandos

```
muA = 1834; muB = 2179;
sigma = 200*sqrt(2);
normcdf((muA-muB)/sigma)
```

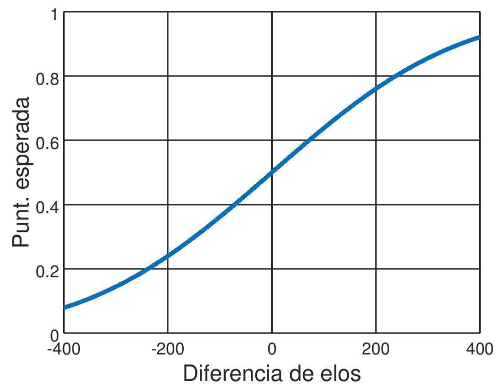

Figura 3: Relación entre la diferencia de elos y la puntuación esperada.

obteniendo 0.11128. En la figura 3 puedes ver la gráfica que relaciona la diferencia de elos $\mu_A - \mu_B$ entre dos jugadores A y B y la puntuación esperada para el jugador A cuando juega contra B.

Si la puntuación de una partida es 1, 0.5 o bien 0, ¿qué quiere decir que la puntuación esperada sea 0.11? Si A y B juegan, digamos 100 partidas, entonces se espera que A conseguirá alrededor de 11 puntos (y B, obviamente, cerca de 89).

> ***Problema 4***
> *Si el elo del jugador A es 1834 y el elo del jugador B es 2179 y si juegan 10 partidas, ¿cuál es la probabilidad de que A consiga* exactamente *3 puntos? ¿Cuál es la probabilidad de que A consiga* al menos *3 puntos?*

4.3 Algunas consecuencias

• Si $\mu_A > \mu_B$, entonces de (2) se deduce $E_{AB} > 0.5$, lo que es intuitivo, puesto que en teoría, si $\mu_A > \mu_B$, entonces A es mejor jugador que B. De forma análoga se cumple que $\mu_A = \mu_B$ si y solo si $E_{AB} = 0.5$ (lo que equivale a decir que los jugadores tienen la misma fuerza si y solo si la puntuación esperada de los dos jugadores es 0.5).

- Como hemos visto, la función de distribución de una variable normal estándar cumple $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. De esto, se deduce que

$$E_{AB} + E_{BA} = 1,$$

lo que es coherente con el hecho de que la suma de las puntuaciones obtenidas por dos jugadores que se enfrentan en una partida siempre es 1, independientemente del resultado de la partida.

Problema 5

Calcula (usando Octave) varios valores de E_{AB} en las dos siguientes situaciones

a) *Cuando el elo de B es fijo y el elo de A poco a poco va aumentando.*

b) *Cuando el elo de A es fijo y el elo de B poco a poco va disminuyendo.*

¿Qué observas? ¿Ves alguna relación con la figura 3?

- De (2) se deduce también que a medida que $\mu_A - \mu_B$ aumenta, entonces E_{AB} crece asintóticamente a 1, lo que equivale a decir que a medida que un jugador es más fuerte que otro, la puntuación esperada aumenta hasta el tope superior 1 (y análogamente si $\mu_A - \mu_B$ disminuye progresivamente, entonces E_{AB} tiende asintóticamente a 0).

Problema 6

Árpád Élö asumió que la varianza del rendimiento es la misma para todos los jugadores, lo que simplifica mucho las expresiones. ¿Cómo se debe modificar (2) si no se supone que $\mathrm{Var}(r_A) = \mathrm{Var}(r_B) = 200^2$? ¿Qué le ocurre a E_{AB} cuando $\mathrm{Var}(r_A)$ crece o decrece si $\mathrm{Var}(r_B)$ permanece fija?

Problema 7

La normativa de la FIFA (las siglas en francés de la Federación Internacional de Fútbol) premia la victoria con 3 puntos y el empate con un punto (la derrota no suma ningún punto). ¿Cómo se modificaría (2) con este sistema de puntuación?

Problema 8

Un jugador no federado (por tanto sin elo) juega 10 partidas contra otro ajedrecista de elo 1800 y consigue 3 puntos. ¿Cuál es una estimación del elo del primer jugador?

Puedes ver la normativa de la FIDE respecto al sistema de clasificación en
`https://handbook.fide.com/chapter/B022017`.

Como curiosidad, en este reglamento se puede leer (artículo 12.1) que

$$F_{AB} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{\mu_B - \mu_A}{400}}} \tag{3}$$

es una buena aproximación a E_{AB}. Es más curioso aún que la *Wikipedia* (en el artículo *Sistema de puntuación Elo*) afirme que (3) sea la fórmula exacta, en contradicción con la normativa de la FIDE. En la tabla 1 se puede apreciar la bondad de la aproximación $E_{AB} \simeq F_{AB}$, donde E_{AB} es la puntuación esperada dada en (2) y F_{AB} es la aproximación dada en (3).

$\mu_A - \mu_B$	0	50	100	150	200	250	300	350	400
E_A	0.5	0.570	0.638	0.702	0.760	0.812	0.856	0.882	0.921
F_A	0.5	0.571	0.640	0.703	0.760	0.808	0.849	0.882	0.909

Tabla 1: La expresión F_{AB} es una buena aproximación de E_{AB}.

4.4 Una extensión no contemplada por la FIDE

Si quieres, te puedes saltar esta subsección y pasar directamente a la sección 5 ya que en en esta subsección veremos una pequeña modificación del sistema Elo no contemplada por la federación internacional de ajedrez.

Si observamos los cálculos hechos hasta ahora, de (1) se deduce $\mathrm{pr}(X_{AB} = 1/2) = 0$, es decir, que la probabilidad de que dos jugadores hagan tablas es 0. Lo cual es verdaderamente extraño. Deberíamos modificar la variable aleatoria X_{AB} definida en (1) de modo que si los rendimientos en una partida concreta son similares, entonces la partida tenga cierta probabilidad de acabar en tablas. Para ello definimos otra variable aleatoria como sigue

$$Y_{AB} = \begin{cases} 1, & \text{si } r_A - r_B > \varepsilon, \\ 1/2, & \text{si } |r_A - r_B| \le \varepsilon, \\ 0, & \text{si } r_B - r_A > \varepsilon, \end{cases}$$

para un valor fijo de $\varepsilon > 0$. Calculemos la esperanza de Y_{AB} y veamos su diferencia con E_{AB}. Como

$$\mathrm{E}(Y_{AB}) = \mathrm{pr}(Y_{AB} = 1) + \frac{1}{2}\mathrm{pr}(Y_{AB} = 1/2),$$

calculemos las dos probabilidades involucradas en la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}(Y_{AB} = 1) = \mathrm{pr}(r_A - r_B > \varepsilon) &= \mathrm{pr}\left(\frac{r_A - r_B - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}} > \frac{\varepsilon - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_A - \mu_B - \varepsilon}{200\sqrt{2}}\right), \\
\mathrm{pr}(Y_{AB} = 1/2) = \mathrm{pr}(-\varepsilon < r_A - r_B < \varepsilon) & \\
&= \mathrm{pr}\left(\frac{-\varepsilon - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}} < \frac{r_A - r_B - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}} < \frac{\varepsilon - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\varepsilon - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon - (\mu_A - \mu_B)}{200\sqrt{2}}\right),
\end{aligned}$$

Si denotamos $\alpha = (\mu_A - \mu_B - \varepsilon)/200\sqrt{2}$ y $\beta = (\mu_A - \mu_B + \varepsilon)/200\sqrt{2}$, entonces $\mathrm{pr}(Y_{AB} = 1) = \Phi(\alpha)$ y $\mathrm{pr}(Y_{AB} = 1/2) = 1 - \Phi(\alpha) - (1 - \Phi(\beta)) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, por lo que

$$\mathrm{E}(Y_{AB}) = \Phi(\alpha) + \frac{1}{2}(\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)) = \frac{1}{2}(\Phi(\alpha) + \Phi(\beta)). \tag{4}$$

Problema 9
Comprueba cuando $\varepsilon = 0$, entonces (4) se reduce a (2).

Se puede apreciar en la tabla 2 que las esperanzas de las variables aleatorias X_{AB} y Y_{AB} (para dos valores razonables de ε) son realmente parecidas.

$\mu_A - \mu_B$	0	50	100	150	200	250	300
E_{AB}	0.5	0.5702	0.6382	0.7021	0.7603	0.8116	0.8556
$E(Y_{AB})$ con $\varepsilon = 10$	0.5	0.5701	0.6380	0.7019	0.7601	0.8115	0.8554
$E(Y_{AB})$ con $\varepsilon = 20$	0.5	0.5700	0.6378	0.7016	0.7597	0.8110	0.8550

Tabla 2: Valores de la esperanza de X_{AB} y de Y_{AB} para dos valores de ε.

Como conclusión podemos afirmar que aunque sea más natural tomar la variable aleatoria Y_{AB} para asegurar que la probabilidad de que una partida acabe en tablas no sea nula[2], la elección de X_{AB} simplifica los cálculos y no supone mucha diferencia.

Problema 10
Este ejercicio es difícil y puede saltarse. El objetivo se este problema es dar una cota superior de $|E_{AB} - E(Y_{AB})|$ en términos de ε. Sean α y β los valores definidos anteriormente y $\gamma = (\alpha+\beta)/2 = (\mu_A - \mu_B)/(200\sqrt{2})$.

a) *Prueba que* $E_{AB} - E(Y_{AB}) = \frac{1}{2}[(\Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)) - (\Phi(\beta) - \Phi(\gamma))]$.

b) *Usa el teorema del valor medio para demostrar que existen* $\xi_1 \in [\alpha, \gamma]$ *y* $\xi_2 \in [\gamma, \beta]$ *tales que* $E_{AB} - E(Y_{AB}) = \varepsilon(\Phi'(\xi_1) - \Phi'(\xi_2))/(400\sqrt{2})$.

c) *Usa de nuevo el teorema del valor medio para demostrar que*

$$|E_{AB} - E(Y_{AB})| \leq \frac{\varepsilon^2}{80000\sqrt{2\pi}} e^{-1/2}.$$

5 El parámetro K

Hasta ahora, hemos definido y usado el elo de un jugador. Pero una pregunta que todavía no hemos respondido es cómo se calcula el elo de un jugador. También se ha de tener en cuenta que la fuerza de un jugador cambia a lo largo de su vida: la calidad de juego puede mejorar o empeorar, es decir, parece lógico que el elo de un jugador debe poder modificarse. Esta sección trata de responder a estas preguntas.

¿Cómo se calcula la puntuación esperada en un torneo? Veamos un ejemplo sencillo:

El elo del jugador A es 1800 y se ha enfrentado a los jugadores X, Y y Z. Los resultados se muestran en la tabla 3.

[2] Se tiene, con la notación del párrafo anterior, que $\mathrm{pr}(Y_{AB} = 1/2) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \neq 0$, siempre que $\varepsilon \neq 0$.

Rivales	Elo de los rivales	Punt. esperada	Resultado	Ptos. obtenidos
X	$\mu_X = 1860$	$E_{AX} = 0.42$	Victoria	1
Y	$\mu_Y = 1770$	$E_{AY} = 0.54$	Tablas	0.5
Z	$\mu_Z = 2000$	$E_{AZ} = 0.24$	Derrota	0
Totales		1.2		1.5

Tabla 3: Actuación del jugador A en un torneo.

La puntuación esperada en el torneo es la suma de las tres puntuaciones esperadas cuando A juega contra X, Y y Z:

$$\text{Puntuación total esperada} = E_{AX} + E_{AY} + E_{AZ} = 0.42 + 0.54 + 0.24 = 1.2.$$

Observemos que podemos hallar la puntuación esperada, no es necesario conocer la puntuación obtenida. Pero un jugador puede obtener una puntuación distinta de la esperada. En este ejemplo, el jugador A ha obtenido una puntuación mayor (1.5) que la esperada (1.2); por tanto parece que su elo debería aumentar. Es aquí donde entra un factor también propuesto por Árpád Élő.

Si un jugador con elo μ espera conseguir E puntos; pero consigue S puntos, entonces el nuevo elo viene dado por la fórmula

$$\text{Nuevo elo} = \mu + K(S - E). \tag{5}$$

Este número K es un parámetro cuyo valor es fijado de una manera más o menos arbitraria por la FIDE. Pero, ¿qué valor asignar a K? Si el valor de K es alto, la estimación del elo es demasiado sensible a los resultados recientes. Si es pequeño, el sistema responde lentamente a los cambios de fuerza de un jugador.

Veamos un ejemplo con dos valores de K distintos. Supongamos que un jugador tiene 1800 puntos elo, ha jugado un torneo en donde espera sacar 4 puntos y ha conseguido 5 puntos, ¿cuál es su nuevo elo?

$$K = 20 \;\rightarrow\; \text{Nuevo elo} = 1800 + 20 \cdot (5 - 4) = 1820.$$

$$K = 40 \;\rightarrow\; \text{Nuevo elo} = 1800 + 40 \cdot (5 - 4) = 1840.$$

Quermeos destacar que el factor K no determina la fuerza de un jugador, solo pretende intenta acelerar la adaptación de la fuerza estimada a la fuerza real.

Puedes ver los valores concretos de K para cada categoría de jugador según la normativa de la FIDE en `http://www.fide.com/fide/handbook.html`. En resumen, podemos decir que los jugadores con menos partidas computadas tienen mayor valor de K. Esto se debe a que si se posee poca información sobre un jugador, entonces su fuerza estimada puede ser imprecisa y necesita una mayor corrección.

Por último, es necesario resaltar que, de acuerdo a la normativa de la FIDE, el valor de $|\mu_A - \mu_B|$ en (2) está acotado por 400, "*a difference in rating of more than 400 points shall be counted for rating purposes as though it were a difference of 400 points*", y que la actualización del elo de acuerdo a lo visto en esta sección se hace después de ciertos períodos ("*for a given tournament, or Rating period*"), no después de cada partida.