

## Conjunto de alcanzabilidad de un sistema mecánico controlable y condiciones de estabilidad robusta

Temoltzi-Ávila, R.<sup>a,\*</sup>, Ávila-Pozos, R.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Matemáticas y Física, Carr. Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C. P. 42184.

**To cite this article:** Temoltzi- Ávila, R., Ávila-Pozos, R. 2020. Attainability set of a mechanical controlable system and conditions of robust stability. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 17, 285-293. <https://doi.org/10.4995/riai.2020.11938>

### Resumen

En este trabajo se determina de forma numérica la frontera del conjunto de alcanzabilidad de una ecuación diferencial de segundo orden con una perturbación externa, empleando la solución del problema de la variación máxima de las amplitudes de oscilación de sus soluciones. El método consiste en determinar en un conjunto de funciones dado, la perturbación externa que provoque amplitudes de oscilación máxima en las soluciones de la ecuación diferencial que describe, como caso particular, la dinámica de un sistema mecánico controlable con impactos. Con ayuda de esta perturbación, se determina la existencia de una trayectoria cerrada que describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad, lo cual permite establecer condiciones suficientes sobre la estabilidad robusta de las soluciones de la ecuación diferencial. Los resultados se ilustran de forma numérica en casos particulares.

*Palabras clave:* Ecuaciones diferenciales, sistemas de control no lineal, perturbaciones, estabilidad robusta.

### Attainability set of a mechanical controlable system and conditions of robust stability

#### Abstract

In this work, the boundary of the attainability set of a second order differential equation with an external perturbation is determined numerically, using the solution of the problem of the maximum variation of the oscillation amplitudes of its solutions. The method consists in determining, in a given set of functions, the external perturbation that causes maximum oscillation amplitudes in the solutions of the differential equation that describes, as a particular case, the dynamics of a controllable mechanical system with impacts. With the help of this perturbation, the existence of a closed path that describes the boundary of the reachability set is determined, which allow to establish sufficient conditions on the robust stability of the solutions of the differential equation. The results are illustrated numerically in particular cases.

*Keywords:* Differential equations, nonlinear systems of control, perturbations, robust stability.

### 1. Introducción

Un problema de interés en el estudio de los sistemas dinámicos que admiten perturbaciones externas, consiste en determinar, y en el mejor de los casos, en aproximar la región  $D_T$  en el espacio de estados al que las soluciones pueden acceder en un instante  $T > 0$  considerando diferentes acciones de las perturbaciones admisibles. Este conjunto se llama *conjunto de alcan-*

*zabilidad*, y es una de las construcciones más importantes debido a las aplicaciones en la teoría de problemas de optimización y sistemas dinámicos, ver (Kurzhanski and Valyi, 1999; Holzinger and Scheeres, 2011; Gusev, 2014; Gómez et al., 2015).

En particular, en el planteamiento de este problema es útil conocer la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_T$  cuando  $T \rightarrow \infty$ .

\*Autor para correspondencia: temoltzi@uaeh.edu.mx

Si los sistemas dinámicos se describen por ecuaciones diferenciales no lineales con perturbaciones externas restringidas, existen diferentes técnicas para aproximar los conjuntos de alcanzabilidad. Por ejemplo, en los trabajos (Kumkov and Zhari-nov, 2004; Vinnikov, 2015; Parshikov and Matviychuk, 2017), se presentan algoritmos que permiten estimar de forma numérica tales conjuntos cuando los valores de las perturbaciones pertenecen a un conjunto cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^m$ . Un caso particular de interés en este contexto, es la estimación de los conjuntos de alcanzabilidad de los sistemas difusos Takagi-Sugeno bajo perturbaciones persistentes, ver Pitarch et al. (2015).

Cuando los sistemas dinámicos se describen por sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con perturbaciones externas con algún tipo de restricción, existen diferentes trabajos en los que se han desarrollado y propuesto diferentes métodos para estimar y describir el conjunto de alcanzabilidad y, en particular, la frontera de este conjunto. Por ejemplo, en el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo o politópicos, en Boyd et al. (1994) se presenta un método de aproximación basado en desigualdades matriciales lineales. Usando este método, en Bugrov (2016) se describe un procedimiento que permite aproximar de forma interna y externa el conjunto de alcanzabilidad mediante elipsoides. Otro enfoque diferente sobre el mismo problema se puede encontrar en (Gusev, 2012, 2014). Por otra parte, en el caso de sistemas lineales con retardo, en (Fridman and Shaked, 2010; Shen and Zhong, 2011) se presenta un método que permite estimar conjuntos de alcanzabilidad empleando también elipsoides. En el caso particular de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden tres, en (Bugrov and Formal'skii, 2017) se presenta un método geométrico que permite determinar de forma numérica el conjunto de alcanzabilidad en instantes  $T > 0$  considerando diferentes tipos de restricciones.

Un método alternativo que se puede emplear para determinar la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  en algunos sistemas lineales de orden dos, se obtiene como solución del problema de desviación máxima de B. V. Bulgakov, cuya formulación se puede consultar en Elishakoff and Ohsaki (2010). La importancia de este método se debe, principalmente, a la posibilidad de construir la frontera del conjunto de alcanzabilidad a partir de la solución de una ecuación diferencial. Tomando en consideración esto, en este trabajo se muestra como dicho método permite construir, de forma numérica, la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  de una familia de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden definidas por tramos y con una perturbación externa.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se establece la familia de ecuaciones diferenciales que es el objeto principal de estudio. En esta familia se presenta, como un ejemplo particular, un modelo que describe un sistema mecánico con impactos conocido en la literatura. En la sección 3 se construye una trayectoria cerrada  $C^*$  a partir de un elemento de esta familia, y se muestra que esta trayectoria describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  de la familia considerada. Finalmente, empleando la construcción de la trayectoria cerrada  $C^*$ , en la sección 4 se establecen condiciones suficientes de estabilidad robusta para la familia de ecuaciones diferenciales.

## 2. Descripción del modelo

Un objeto de estudio en diferentes aplicaciones de sistemas mecánicos es la familia de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2H(x)\dot{x} + K(x, u) = u, \\ u \in \mathcal{U} := \{u \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) : |u(t)| \leq \delta\}, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $K : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas a trozos,  $u = u(t)$  es una perturbación,  $\delta > 0$  es una constante dada, y  $\mathcal{KC}(\mathbb{R})$  denota el conjunto de funciones continuas a trozos definidas sobre  $\mathbb{R}$ . El conjunto de alcanzabilidad de la familia (1) con condiciones iniciales nulas se define como

$$D_\infty = \{\mathbf{x}_u(t) \in \mathbb{R}^2 : u \in \mathcal{U}, t \geq 0\}.$$

donde  $\mathbf{x}_u := (x_u, \dot{x}_u)^\top$ ,  $x_u$  es la solución de (1) asociada a una elección  $u \in \mathcal{U}$ , y  $^\top$  denota el símbolo de transposición. Se supone además definida la norma vectorial

$$\|\mathbf{x}_u(t)\|_\infty = \max\{|x_u(t)|, |\dot{x}_u(t)|\}, \quad t \geq 0.$$

Algunas investigaciones de los elementos de (1) se realizan en (Weger and der Water, 2000; Ibrahim, 2009).

En la literatura se conocen varias propiedades del conjunto  $D_\infty$  de algunos casos de la familia (1). Por ejemplo, si  $H(x) = \mu$  y  $K(x, u) = \omega^2 x$ , donde  $0 < \mu < \omega$ , entonces se sabe que la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  se describe por un ciclo límite  $C$  que es global y orbitalmente estable, ver (Zhermolenko, 1980; Bugrov, 2016). En este caso, el ciclo límite se obtiene como solución del problema de desviación máxima de los semi-periodos de oscilación sobre el eje  $\dot{x} = 0$ . Por otra parte, si  $H(x) = \mu$  y  $K(x, u) = (1 + \alpha u)x$ , donde  $0 < \mu < \sqrt{1 - \alpha\delta}$ , se conoce que (1) posee un ciclo límite  $C$  que se obtiene como solución del problema de desviación máxima de los semi-periodos de oscilación sobre el eje  $\dot{x} = 0$ , y que este describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  de (1), ver (Bugrov, 2016; Aleksandrov et al., 2007; Zhermolenko, 2007). La existencia de este ciclo límite, y su dependencia respecto al parámetro  $\delta$  que define el conjunto  $\mathcal{U}$ , permite establecer un criterio de estabilidad robusta para las soluciones de la familia de ecuaciones diferenciales (1), ver Aleksandrov et al. (2010, 2016).

**Planteamiento del problema.** Como caso concreto de (1), se tiene interés en determinar la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  de la familia de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2H_0(x)\dot{x} + K_0(x)x = u, \\ u \in \mathcal{U}_0 := \{u \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) : |u(t)| \leq L\omega^2\}, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $L > 0$  y los coeficientes son las funciones constantes a trozos:

$$H_0(x) = \begin{cases} \mu, & x \geq -L, \\ \mu_p, & x < -L, \end{cases} \quad K_0(x) = \begin{cases} \omega^2, & x \geq -L, \\ \omega_p^2, & x < -L, \end{cases}$$

con  $0 < \mu < \omega$  y  $0 < \mu_p < \omega_p$ .

En la familia (2) se encuentra incluido un modelo que se estudia en Ma et al. (2006), el cual describe la dinámica de un móvil con impactos cuando se considera la perturbación externa admisible  $u(t) = L\omega^2 \cos(\varphi t)$  y los parámetros  $\mu = c_1/2m$ ,  $\mu_p = (c_1 + c_2)/2m$ ,  $\omega^2 = k_1/m$  y  $\omega_p^2 = (k_1 + k_2)/m$ . El sistema consiste de un móvil de masa  $m$  que se desliza sin fricción y que

está sujeto en uno de sus extremos por un resorte y un amortiguador con constantes de elasticidad y viscosidad  $k_1$  y  $c_1$ . Cuando este resorte se encuentra en estado estacionario, el extremo izquierdo del móvil se halla a una distancia  $L$  de un segundo móvil carente de masa que está sujeto en el extremo opuesto por un resorte y un amortiguador con constantes de elasticidad y viscosidad  $k_2$  y  $c_2$ , ver la Figura 1. Cuando  $x > -L$  se tiene un modelo clásico masa-resorte-amortiguador, pero si  $x \leq -L$ , entonces este modelo admite impactos en su dinámica.

Otros casos particulares de la familia (2) se describen en la literatura, por ejemplo en (Natsiavas, 1990; Dyskin et al., 2012).

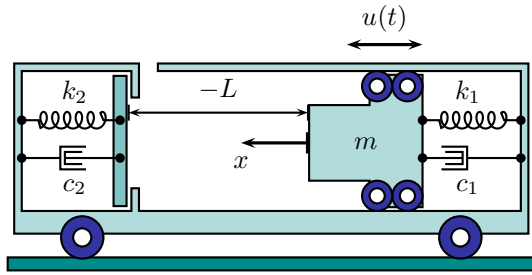


Figura 1: Ejemplo de un sistema mecánico con una perturbación externa modelado por un elemento del problema (2).

### 3. Soluciones de amplitud máxima

Cada elemento de la familia de ecuaciones diferenciales (2) asociado a una perturbación  $u \in \mathcal{U}_0$ , se puede representar de forma equivalente a la siguiente ecuación diferencial no lineal de primer orden con una perturbación externa

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -K_0(x)\frac{x}{\dot{x}} - 2H_0(x) + \frac{u}{\dot{x}}.$$

Luego, de los resultados que se presentan en (Zhermolenko, 2007; Formal'skii, 2010), si se busca la perturbación externa en  $\mathcal{U}_0$  que provoque el mayor valor absoluto de la derivada  $d\dot{x}/dx$  sobre cualquier punto del plano de fases que pertenece a la trayectoria de la solución, se obtiene la perturbación externa

$$u^*(t) := \arg \left( \max_{u \in \mathcal{U}_0} \left\{ -K_0(x)\frac{x}{\dot{x}} - 2H_0(x) + \frac{u}{\dot{x}} \right\} \right) = L\omega^2 \text{sign} \dot{x}(t),$$

la cual provoca amplitudes máximas de oscilación en la solución del siguiente elemento de la familia de ecuaciones diferenciales (2),

$$\ddot{x} + 2H_0(x)\dot{x} + K_0(x) = L\omega^2 \text{sign} \dot{x}, \quad (3)$$

en comparación con las amplitudes de oscilación de las soluciones de los demás elementos de esta familia. La función  $u^*(t) = L\omega^2 \text{sign} \dot{x}(t)$  es llamada *peor perturbación externa* en el contexto del problema de desviación máxima de B. V. Bulgakov, ver (Zhermolenko, 1980, 2007; Aleksandrov et al., 2016).

De la definición de las funciones  $H_0$  y  $K_0$ , así como de la definición de la peor perturbación externa, el espacio de fases

$\Omega = \mathbb{R}^2$  de la solución de (3) se divide en las regiones

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(x, \dot{x})^\top \in \mathbb{R}^2 : -L < x \text{ y } \dot{x} < 0\}, \\ \Omega_2 &:= \{(x, \dot{x})^\top \in \mathbb{R}^2 : x < -L \text{ y } \dot{x} < 0\}, \\ \Omega_3 &:= \{(x, \dot{x})^\top \in \mathbb{R}^2 : x < -L \text{ y } 0 < \dot{x}\}, \\ \Omega_4 &:= \{(x, \dot{x})^\top \in \mathbb{R}^2 : -L < x \text{ y } 0 < \dot{x}\}, \end{aligned}$$

en cada una de las cuales (3) resulta ser una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Se observa además que existen dos superficies de discontinuidad

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \{(x, \dot{x})^\top \in \mathbb{R}^2 : \dot{x} = 0\}, \\ \Sigma_2 &:= \{(x, \dot{x})^\top \in \mathbb{R}^2 : x = -L\}. \end{aligned}$$

Se muestra en los siguientes apartados que la ecuación diferencial (3) posee una trayectoria cerrada como solución, y que esta cruza de forma transversal las superficies de discontinuidad de cada dos regiones adyacentes, es decir, que no admite ningún tipo de deslizamiento sobre cada superficie de discontinuidad, ver Yakubovich et al. (2004). Finalmente, se muestra que la trayectoria cerrada describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad de la familia de ecuaciones diferenciales (2).

#### 3.1. Construcción del primer semi-ciclo de oscilación

Se elige un punto  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top \in \Sigma_1$ , con  $\alpha_0 > 0$  suficientemente pequeño tal que  $\mathbf{p}_0 \in D_\infty$ , y se suponen condiciones iniciales para (3) de la forma  $(x_{u^*}(0), \dot{x}_{u^*}(0))^\top = \mathbf{p}_0$ . Entonces la solución de (3) en  $\Omega_1$  se describe por

$$x_{u^*}(t) = (L + \alpha_0) e^{-\mu t} \left( \cos \vartheta t + \frac{\mu}{\vartheta} \sin \vartheta t \right) - L,$$

donde  $\vartheta := \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ . De esta expresión se obtiene el primer instante  $T_1 > 0$  en el cual admiten solución las ecuaciones  $x_{u^*}(T_1) = -L$  y  $\dot{x}_{u^*}(T_1) = -R_0$ , donde

$$T_1 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\mu}{\vartheta} \right).$$

y  $R_0 = R(\alpha_0)$ , con

$$R(\alpha) = \omega(L + \alpha) e^{-\mu T_1}.$$

El instante  $T_1$  determina en el plano de fases el punto de transición  $\mathbf{q}_1 = (-L, -R_0)^\top \in \Sigma_2$  entre las regiones  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , y ya que  $R_0 \neq 0$ , se sigue que la solución de (3) interseca de forma transversal la superficie de discontinuidad  $\Sigma_2$  en el instante  $T_1$ . Esto permite continuar la solución de (3) en  $\Omega_2$  tomando las condiciones iniciales  $(x_{u^*}(T_1), \dot{x}_{u^*}(T_1))^\top = \mathbf{q}_1$ .

Del valor que toma la peor perturbación externa y los valores de los coeficientes de la ecuación diferencial (3) sobre  $\Omega_2$ , la solución sobre este conjunto es

$$\begin{aligned} x_{u^*}(t) = & -e^{-\mu_p(t-T_1)} \left( L\omega_- \cos \vartheta_p(t-T_1) + \right. \\ & \left. + \frac{L\omega_- \mu_p + R_0}{\vartheta_p} \sin \vartheta_p(t-T_1) \right) - \frac{L\omega^2}{\omega_p^2}, \end{aligned}$$

donde  $\omega_- := 1 - \omega^2/\omega_p^2$  y  $\vartheta_p := \sqrt{\omega_p^2 - \mu_p^2}$ . Esta expresión permite hallar el primer instante  $T_2 > T_1$  en el que se cumplen las ecuaciones  $x_{u^*}(T_2) = -\alpha_1$  y  $\dot{x}_{u^*}(T_2) = 0$ , para cierto  $\alpha_1 > 0$ , donde

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{\vartheta_p} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} + \frac{\omega_p^2}{R_0 \vartheta_p} L \omega_- \right) \right).$$

La solución de (3) con condición inicial  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top$  definida en  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , describe un semi-ciclo inferior de oscilación para  $t \in [0, T_2]$ , con la propiedad de que la siguiente intersección con la superficie de discontinuidad  $\Sigma_1$  se da en un punto  $\mathbf{p}_1 = (-\alpha_1, 0)^\top$ , donde el parámetro  $\alpha_1 > 0$  determina una función secuencial  $\alpha_1 := F(\alpha_0)$  definida por:

$$\alpha_1 = \frac{R_0 \vartheta_p}{\omega_p^2} e^{-\mu_p(T_2 - T_1)} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} + \frac{\omega_p^2}{R_0 \vartheta_p} L \omega_- \right)^2} + \frac{L \omega^2}{\omega_p^2}. \quad (4)$$

El instante  $T_1$  es constante y depende únicamente de los parámetros de la ecuación diferencial (3), no obstante, el instante  $T_2$  no es constante y depende de la condición inicial. Lo anterior muestra que el tiempo necesario que se requiere para construir un semi-ciclo inferior de oscilación de la solución de (3) es variable, y que este depende de la condición inicial  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top$  que se considere.

### 3.2. Construcción del segundo semi-ciclo de oscilación

Se considera el siguiente procedimiento. Se supone que existe  $Q_0 > 0$  tal que la solución de la ecuación diferencial (3) permite construir dos arcos solución  $\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_2$  y  $\mathbf{q}_2 \mathbf{p}_2$  que describen el semi-ciclo superior de oscilación, suponiendo que el punto  $\mathbf{q}_2$  es la condición inicial de la ecuación diferencial (3), y  $\mathbf{p}_2 = (\alpha_2, 0)^\top$  es un punto sobre la superficie de discontinuidad  $\Sigma_1$ . Si el supuesto anterior es válido, entonces debe existir un instante  $T_3 > T_2$  en el cual la solución cumple  $(x_{u^*}(T_3), \dot{x}_{u^*}(T_3))^\top = \mathbf{q}_2$ .

De acuerdo con los valores que toman los coeficientes de la ecuación diferencial (3) y la peor perturbación externa, suponiendo el cambio de coordenadas  $y_{u^*}(t) = x_{u^*}(T_3 - t)$  donde  $t \in (T_3 - T_2, T_3)$ , la parametrización  $(y_{u^*}(t), \dot{y}_{u^*}(t))^\top$  describe el arco  $\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_2$  recorrido en tiempo inverso, es decir, desde el punto  $\mathbf{q}_2$  hasta el punto  $\mathbf{p}_1$  en  $\Omega_3$ . Bajo este cambio de variable, la solución de (3) está dada por

$$x_{u^*}(t) = -e^{\mu_p t} \left( L \omega_+ \cos \vartheta_p t - \frac{L \omega_+ \mu_p - Q_0}{\vartheta_p} \sin \vartheta_p t \right) + \frac{L \omega^2}{\omega_p^2},$$

donde  $\omega_+ := 1 + \omega^2/\omega_p^2$ . De la elección del nuevo sistema de coordenadas, se observa que se cumplen las ecuaciones  $y_{u^*}(T_3 - T_2) = -\alpha_1$  y  $\dot{y}_{u^*}(T_3 - T_2) = 0$ , donde

$$T_3 - T_2 = \frac{1}{\vartheta_p} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} - \frac{\omega_p^2}{Q_0 \vartheta_p} L \omega_+ \right) \right).$$

De esto se obtiene una función secuencial  $\alpha_1 = G(Q_0)$  que se define por:

$$\alpha_1 = \frac{Q_0 \vartheta_p}{\omega_p^2} e^{\mu_p(T_3 - T_2)} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} - \frac{\omega_p^2}{Q_0 \vartheta_p} L \omega_+ \right)^2} - \frac{L \omega^2}{\omega_p^2}. \quad (5)$$

Se sigue de (5) que existe una dependencia implícita del parámetro  $Q_0$  y el parámetro  $\alpha_1$  definido en (4), lo cual permite concluir que es posible expresar, al menos de manera local, una relación de la forma  $Q_0 = G^{-1}(\alpha_1)$ . Esto permite construir una solución de (3) definida en  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  que interseca de forma transversal las superficies de discontinuidad  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  en los instantes  $T_1 < T_2 < T_3$ .

La construcción del arco  $\mathbf{q}_2 \mathbf{p}_2$  se obtiene considerando que la solución de (3) tiene recorrido en sentido positivo, es decir, desde el punto  $\mathbf{q}_2$  hasta el punto  $\mathbf{p}_2$ . Así, la solución de (3) en  $\Omega_4$  es

$$x_{u^*}(t) = -e^{-\mu(t - T_3)} \left( 2L \cos \vartheta(t - T_3) + \frac{2L\mu - Q_0}{\vartheta} \sin \vartheta(t - T_3) \right) + L.$$

Del hecho de que se satisfacen las ecuaciones  $x_{u^*}(T_4) = \alpha_2$  y  $\dot{x}_{u^*}(T_4) = 0$ , se sigue que

$$T_4 - T_3 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{Q_0 \vartheta} \right) \right)$$

y que es posible expresar una función secuencial  $\alpha_2 = H(Q_0)$  definida por

$$\alpha_2 = \frac{Q_0 \vartheta}{\omega^2} e^{-\mu(T_4 - T_3)} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{Q_0 \vartheta} \right)^2} + L. \quad (6)$$

Se extiende la observación que se hizo al final de la subsección 3.1: los instantes  $T_3$  y  $T_4$  no son constantes debido a que estos dependen de  $T_2$ , el cual a su vez, depende de la condición inicial  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top$ . Por tanto, resulta que el tiempo necesario que se requiere para describir un ciclo de oscilación de la solución de (3) es variable, y este depende de la condición inicial que se considere.

### 3.3. Existencia de una trayectoria cerrada

En la construcción del primer ciclo de oscilación de la solución de (3) se observa una dependencia implícita entre los parámetros  $\alpha_2$  y  $\alpha_0$ , la cual se obtiene de las expresiones  $\alpha_2 = H(Q_0)$ ,  $Q_0 = G^{-1}(\alpha_1)$ ,  $\alpha_1 = F(R_0)$  y  $R_0 = R(\alpha_0)$ . Luego

$$\alpha_2 = H(G^{-1}(F(R(\alpha_0)))).$$

Como esta relación no depende de la elección del parámetro  $\alpha_0$ , si este procedimiento se repite de forma iterativa suponiendo que para  $n \geq 2$  se tiene una condición inicial  $\mathbf{p}_n = (\alpha_n, 0)^\top$ , con  $\alpha_n > 0$  suficientemente pequeño de tal manera que  $\mathbf{p}_n \in D_\infty$ , se obtiene para la ecuación diferencial (3) un ciclo de oscilación tal que la nueva intersección con la superficie de discontinuidad  $\Sigma_1$  se da en un punto de la forma  $\mathbf{p}_{n+2} = (\alpha_{n+2}, 0)^\top$ , donde el parámetro  $\alpha_{n+2} > 0$  se describe por la relación de recurrencia

$$\alpha_{n+2} = H(G^{-1}(F(R(\alpha_n)))),$$

la cual se obtiene de:  $\alpha_{n+2} = H(Q_n)$ ,  $Q_n = G^{-1}(\alpha_{n+1})$ ,  $\alpha_{n+1} = F(R_n)$  y  $R_n = R(\alpha_n)$ , donde el parámetro  $Q_n > 0$  se determina de manera implícita de la ecuación  $\alpha_{n+1} = G(Q_n)$ . Sin embargo, ya que no es posible conocer de forma explícita cada una de las relaciones  $Q_n = G^{-1}(\alpha_{n+1})$  para cada  $n \geq 0$ , resulta una tarea

difícil el hallar de forma explícita el comportamiento asintótico de la sucesión  $\{\alpha_n\}$  que describe las intersecciones de la solución con el eje  $\dot{x} = 0$  a partir de esta relación de recurrencia.

No obstante, es posible determinar si la ecuación diferencial (3) posee una trayectoria cerrada  $C^*$  al determinar si existen parámetros  $\alpha_0 > 0$  y  $Q_0 > 0$  tales que  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_2$ . Este problema es equivalente al problema de obtener solución al sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} F(R(\alpha_0)) - G(Q_0) &= 0, \\ \alpha_0 - H(Q_0) &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

el cual se obtiene de (4), (5) y (6). Si (7) posee soluciones, éstas se denotan respectivamente por  $\alpha_0^*$  y  $Q_0^*$ .

La existencia de los valores  $\alpha_0^*$  y  $Q_0^*$  permiten definir los puntos de intersección de la trayectoria cerrada con las superficies de discontinuidad en el plano de fases, los cuales se denotan por:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^* &= (\alpha_0^*, 0)^\top, & \mathbf{p}_1^* &= (-\alpha_1^*, 0)^\top, \\ \mathbf{q}_1^* &= (-L, -R_0^*)^\top, & \mathbf{q}_2^* &= (-L, Q_0^*)^\top, \end{aligned} \tag{8}$$

donde  $\alpha_1^* = F(\alpha_0^*)$  y  $R_0^* = R(\alpha_0^*)$ . En la Figura 2 se ilustra este esquema de construcción.

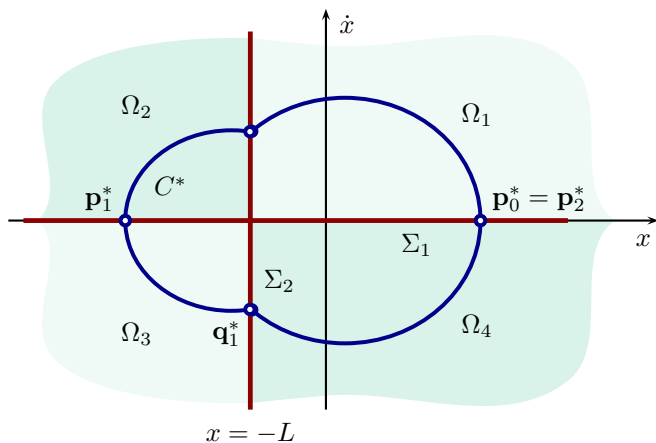


Figura 2: Esquema sobre la construcción de una trayectoria cerrada de la ecuación diferencial (3).

Ya que no es posible determinar de manera analítica los parámetros  $\alpha_0^*$  y  $Q_0^*$  en (7) debido a la presencia de términos trascendentales, el empleo de métodos numéricos permite simplificar la tarea. En este contexto, es conveniente determinar de forma numérica el parámetro  $Q_0^*$  debido a su naturaleza implícita y, con ello, determinar los parámetros  $\alpha_0^*$ ,  $R_0^*$  y  $\alpha_1^*$  a partir de este valor.

La dependencia del parámetro  $\alpha_1$  que se describe por las ecuaciones  $\alpha_1 = F(R_0)$  y  $\alpha_1 = G(Q_0)$  en las relaciones (4) y (5), permite escribir la primera de las ecuaciones del sistema no lineal (7) en la forma equivalente

$$a_+(Q_0)e^{b_+(Q_0)} - a_-(R_0)e^{b_-(R_0)} - \frac{2L\omega^2}{\omega_p^2} = 0, \tag{9}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{\pm}(s) &= \frac{\vartheta_p s}{\omega_p^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_p}{\vartheta_p} \mp \frac{\omega_p^2}{\vartheta_p s} L\omega_{\pm}\right)^2}, \\ b_{\pm}(s) &= \pm \frac{\mu_p}{\vartheta_p} \left(\frac{\pi}{2} \pm \arctan\left(\frac{\mu_p}{\vartheta_p} \mp \frac{\omega_p^2}{\vartheta_p s} L\omega_{\pm}\right)\right); \end{aligned}$$

mientras que de la dependencia del parámetro  $\alpha_2$  que se presenta en la ecuación  $\alpha_0 = \alpha_2 = H(Q_0)$  que se describe en (6), se sigue que la segunda ecuación no lineal de (7) es equivalente a

$$H(Q_0) = a(Q_0)e^{b(Q_0)} + L, \tag{10}$$

donde

$$\begin{aligned} a(s) &= \frac{\vartheta s}{\omega^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{\vartheta s}\right)^2}, \\ b(s) &= -\frac{\mu}{\vartheta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{\vartheta s}\right)\right). \end{aligned}$$

Las representaciones (9) y (10) permiten escribir el sistema no lineal de ecuaciones (7) como una ecuación no lineal con una incógnita de la forma

$$h(Q_0) = 0, \tag{11}$$

donde

$$h(s) = a_+(s)e^{b_+(s)} - a_-(R(H(s)))e^{b_-(R(H(s)))} - \frac{2L\omega^2}{\omega_p^2}.$$

Se obtienen los siguientes resultados.

**Proposición 1.** La ecuación (11) posee una única solución  $Q_0^* > 0$ .

Para demostrar la proposición 1, se observa que de la definición de las funciones  $a$  y  $b$  se cumple

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 2L \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right) + L$$

y, por consiguiente,  $\lim_{s \rightarrow 0} R(H(s)) = A$ , donde

$$A = 2L\omega \left(1 + \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right)\right) \exp\left(-\frac{\mu}{\vartheta} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right)\right)\right).$$

En consecuencia, resulta que

$$\lim_{s \rightarrow 0} h(s) = L\omega_- - a_-(A)e^{b_-(A)} < 0.$$

Por otra parte, como

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} b_{\pm}(s) = \pm \frac{\mu_p}{\vartheta_p} \left(\frac{\pi}{2} \pm \arctan\left(\frac{\mu_p}{\vartheta_p}\right)\right),$$

y  $\lim_{s \rightarrow +\infty} a_{\pm}(s) = +\infty$ , se obtiene  $\lim_{s \rightarrow +\infty} h(s) = +\infty$ . Esto muestra que existe  $Q_0^* > 0$  tal que  $h(Q_0^*) = 0$ . Ahora bien, como  $h$  es una función creciente para  $s \geq 0$ , se sigue que la raíz  $Q_0^*$  es única.

**Proposición 2.** Existe una única constante  $\lambda > 0$  tal que  $Q_0^* = \lambda L$ .

Para demostrar la proposición 2, es suficiente con observar que existen funciones  $A_{\pm}(\lambda)$  y  $B_{\pm}(\lambda)$  que sólo dependen de los parámetros de la ecuación diferencial (3), excepto de  $L$ , y que

$$h(\lambda L) = L \cdot g(\lambda)$$

donde

$$g(\lambda) = A_+(\lambda)e^{B_+(\lambda)} - A_-(\lambda)e^{-B_-(\lambda)} - \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}.$$

Tales funciones se obtienen de observar la validez de las siguientes expresiones:

$$a_-(R(H(\lambda L))) = LA_-(\lambda), \quad a_+(\lambda L) = LA_+(\lambda), \\ b_-(R(H(\lambda L))) = B_-(\lambda), \quad b_+(\lambda L) = B_+(\lambda).$$

Se sigue de la proposición 2 que  $\lambda$  se puede poner en función de los parámetros de la ecuación diferencial (3), excepto de  $L$ .

De las proposiciones 1 y 2 se concluye que la solución de la ecuación no lineal (11) implica la existencia de una única trayectoria cerrada  $C^*$  para la ecuación diferencial (3) que es independiente de las condiciones iniciales, y que sólo depende de los parámetros que definen la ecuación diferencial (3), excepto de  $L$ . Como conclusión de estas proposiciones, se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 1.** La ecuación diferencial (3) posee una única trayectoria cerrada  $C^*$ .

### 3.4. Frontera del conjunto de alcanzabilidad

Se mostró en el apartado anterior que la ecuación diferencial (3) posee una única trayectoria cerrada  $C^*$  cuya construcción se ha realizado en las regiones  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$  que dividen al plano de fases  $\Omega$  mediante dos superficies de discontinuidad  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , las cuales son determinadas bajo el efecto de la peor perturbación externa y de la definición de los coeficientes no lineales de la ecuación diferencial (3), como se muestra en la Figura 2.

Por otra parte, de la definición de la peor perturbación externa, se sigue que la trayectoria cerrada  $C^*$  describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2), de acuerdo con los resultados de Formal'skii (2010). Para ver porque esto es así, es suficiente con observar que si existe alguna otra perturbación externa  $\hat{u} \in \mathcal{U}_0$  tal que la correspondiente trayectoria solución  $\Gamma := \{\mathbf{x}_{\hat{u}}(t) \in \Omega : t \geq 0\}$  asociada a la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2H_0(x)\dot{x} + K_0(x) = \hat{u},$$

con condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top \in D_\infty$ , abandona el conjunto  $D_\infty$  en algún instante  $\tau > 0$ , entonces para ese instante tiene lugar la desigualdad

$$\frac{d\dot{x}_{u^*}}{dx_{u^*}}(\tau) < \frac{d\dot{x}_{\hat{u}}}{dx_{\hat{u}}}(\tau),$$

lo cual naturalmente contradice la definición de la peor perturbación externa. Esta contradicción muestra que  $C^*$  debe describir la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  para la familia de ecuaciones diferenciales (2).

En este contexto,  $C^*$  es llamada *trayectoria cerrada máxima* de la familia de ecuaciones diferenciales (2).

Se concluye que toda solución  $\mathbf{x}_u = (x_u, \dot{x}_u)^\top$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2) asociada a una perturbación externa  $u \in \mathcal{U}_0$  con condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 \in D_\infty$ , satisface la propiedad geométrica siguiente:  $\mathbf{x}_u(t) \in D_\infty$  para todo instante  $t \geq 0$ .

## 4. Estabilidad robusta

En la subsección 3.3 se mostró que la ecuación (11) posee solución única  $Q_0^* = \lambda L$  para alguna constante  $\lambda > 0$  y, por consiguiente, la ecuación diferencial (3) posee una única trayectoria cerrada máxima  $C^* = \{\mathbf{x}_{u^*}(t) \in \Omega : t \in [0, T_4]\}$  que describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2). Las intersecciones de  $C^*$  con las rectas  $\dot{x} = 0$  y  $x = -L$  se dan en los puntos  $\mathbf{p}_0^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{q}_1^*$  y  $\mathbf{q}_2^*$  definidos en (8).

Con ayuda de la construcción de  $C^*$ , en este apartado se establece un criterio de estabilidad robusta para la familia de ecuaciones diferenciales (2), empleando la siguiente definición que se basa en el concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante introducido por G. N. Duboshin e I. G. Malkin, ver (Elsgoltz, 1969; Aleksandrov et al., 2016).

**Definición 1.** La solución trivial  $\bar{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0}$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2) es llamada robustamente estable para cada condición inicial  $\mathbf{x}_u(0)$  y toda perturbación externa  $u \in \mathcal{U}_0$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$  y  $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$  tales que la siguiente condición es válida: si  $|u(t)| \leq \delta_1$  para todo  $t \geq 0$  y  $\|\mathbf{x}_u(0)\|_\infty \leq \delta_2$ , entonces  $\|\mathbf{x}_u(t)\|_\infty \leq \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ .

Para mostrar que la solución trivial de (2) satisface la definición 1, se busca hallar una cota de la norma  $\|\mathbf{x}_{u^*}(t)\|_\infty$  para cada  $0 \leq t \leq T_4$ , considerando los siguientes conceptos (Zhermolenko, 1980; Aleksandrov et al., 2007): se denominan *desviaciones máximas* de la solución  $\mathbf{x}_u = (x_u, \dot{x}_u)^\top$  de (2) respecto a las coordenadas  $x$  y  $\dot{x}$  en un intervalo  $[t_0, t_1]$  a los respectivos valores

$$\alpha^* := \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |x_u(t)|, \quad \beta^* := \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |\dot{x}_u(t)|.$$

Considerando las desviaciones máximas de la solución  $\mathbf{x}_{u^*}$  en las regiones  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$  del espacio de fases, se busca establecer una desigualdad que relacione los valores  $\alpha^*$  y  $\beta^*$  con las cotas de  $\|\mathbf{x}_u(t)\|_\infty$  para cada  $u \in \mathcal{U}_0$ . Por tanto, se supone que  $Q_0^*, \alpha_0^*, R_0^*$  y  $\alpha_1^*$  son los parámetros que determinan la trayectoria cerrada máxima  $C^*$  con condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0^* = (\alpha_0^*, 0)^\top$ .

De las expresiones (5) y (6), así como la proposición 2, se sabe que la desviación máxima de oscilación de  $\mathbf{x}_{u^*}$  respecto a la coordenada  $x$  es

$$\alpha^* = L\omega^2 \cdot \text{máx} \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1\}, \tag{12}$$

con

$$\hat{\alpha}_0 := \frac{1}{\omega^2} \exp\left(-\frac{\mu}{\vartheta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2\omega^2}{\lambda\vartheta}\right)\right)\right) \times \\ \times \frac{\lambda\vartheta}{\omega^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2\omega^2}{\lambda\vartheta}\right)^2} + \frac{1}{\omega^2} \\ \hat{\alpha}_1 := \frac{1}{\omega^2} \exp\left(\frac{\mu_p}{\vartheta_p} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\mu_p}{\vartheta_p} - \frac{\omega_+ \omega_p^2}{\lambda\vartheta_p}\right)\right)\right) \times \\ \times \frac{\lambda\vartheta_p}{\omega_p^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_p}{\vartheta_p} - \frac{\omega_+ \omega_p^2}{\lambda\vartheta_p}\right)^2} - \frac{1}{\omega_p^2}.$$

Resta determinar las desviaciones máximas de  $\mathbf{x}_{u^*}$  respecto a la coordenada  $\dot{x}$ .

De la solución de la ecuación diferencial (3) en el conjunto  $\Omega_4$ , se obtienen las siguientes desigualdades de los límites laterales en los instantes  $t = 0$  y  $t = T_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u^*}(0^+) &= -\omega^2(L + \alpha_0^*) < 0, \\ \dot{x}_{u^*}(T_1^-) &= 2\mu\omega(L + \alpha_0^*)e^{-\mu T_1} > 0. \end{aligned}$$

El cambio de signo muestra que existe  $S_1 \in (0, T_1)$  tal que la trayectoria  $\Gamma_1 = \{\mathbf{x}_{u^*}(t) \in \Omega_4 : 0 \leq t \leq T_1\}$  posee en  $\Omega_4$  un vector tangente en el instante  $t = S_1$  que es paralelo al eje  $\dot{x} = 0$ , donde

$$S_1 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\vartheta} \right).$$

Para este instante se tiene  $\dot{x}_{u^*}(S_1) = -\beta_0^*$ , con  $\beta_0^* = L\omega^2 \cdot \hat{\beta}_0$  y

$$\hat{\beta}_0 = \frac{(1 + \hat{\alpha}_0)e^{-\mu S_1}}{\omega}. \quad (13)$$

El valor  $\beta_0^*$  corresponde a la desviación máxima de la coordenada  $\dot{x}$  sobre la región  $\Omega_4$ .

Si se considera la solución de (3) en la región  $\Omega_3$ , se observa que los límites laterales satisfacen las siguientes desigualdades en los instantes  $t = T_1$  y  $t = T_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u^*}(T_1^+) &= L\omega - \omega_p^2 + 2R_0^*\mu_p > 0, \\ \dot{x}_{u^*}(T_2^-) &= \sqrt{(L\omega - \omega_p^2 + R_0^*\mu_p)^2 + R_0^{*2}\vartheta_p^2}e^{-\mu_p(T_2-T_1)} > 0. \end{aligned}$$

La trayectoria  $\Gamma_2 = \{\mathbf{x}_{u^*}(t) \in \Omega_3 : T_1 \leq t \leq T_2\}$  en  $\Omega_3$  no posee vectores tangentes que sean paralelos al eje  $\dot{x} = 0$ .

En la región  $\Omega_2$ , se obtienen los siguientes límites laterales en los instantes  $t = T_2$  y  $t = T_3$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u^*}(T_2^+) &= \sqrt{(L\omega + \omega_p^2 - Q_0^*\mu_p)^2 + Q_0^{*2}\vartheta_p^2}e^{\mu_p(T_3-T_2)} > 0, \\ \dot{x}_{u^*}(T_3^-) &= L\omega + \omega_p^2 - 2Q_0^*\mu_p. \end{aligned}$$

Si se cumple la desigualdad  $\omega + \omega_p^2 > 2\lambda\mu_p$ , entonces la trayectoria  $\Gamma_3 = \{\mathbf{x}_{u^*}(t) \in \Omega_2 : T_2 \leq t \leq T_3\}$  no posee vectores tangentes que sean paralelos al eje  $\dot{x} = 0$  en la región  $\Omega_2$ . Así, la desviación máxima de la coordenada  $\dot{x}$  de la solución de (3) sobre el conjunto  $\Omega_2$  toma el valor  $\dot{x}_{u^*}(T_3^-) = \beta_1^*$ , donde  $\beta_1^* = L\omega^2 \cdot \hat{\beta}_1$  y

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\lambda}{\omega^2}. \quad (14)$$

Por el contrario, si se satisface  $\omega + \omega_p^2 \leq 2\lambda\mu_p$ , entonces existe  $S_2 \in (T_2, T_3)$  tales que  $\dot{x}_{u^*}(S_2) = 0$ . Bajo la validez de este supuesto resulta

$$S_2 = T_3 - \frac{1}{\vartheta_p} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} + \frac{\lambda\omega_p^2}{\vartheta_p(\omega + \omega_p^2 - 2\lambda\mu_p)} \right) \right)$$

y, por consiguiente, la desviación máxima respecto de la coordenada  $\dot{x}$  de la solución de (3) sobre el conjunto  $\Omega_2$  toma el valor  $\dot{x}_{u^*}(S_2) = \beta_1^*$ , donde  $\beta_1^* = L\omega^2 \cdot \hat{\beta}_1$  y

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\omega^2\omega_p} \sqrt{(\omega + \omega_p^2 - \lambda\mu_p)^2 + \lambda^2\vartheta_p^2}e^{\mu_p(T_3-S_2)}. \quad (14')$$

Finalmente, en la región  $\Omega_1$  se obtienen los siguientes límites laterales para los instantes  $t = T_3$  y  $t = T_4$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u^*}(T_3^+) &= 2(L\omega^2 - Q_0^*\mu), \\ \dot{x}_{u^*}(T_4^-) &= -\sqrt{(2L\omega^2 - Q_0^*)^2 + Q_0^{*2}\vartheta^2}e^{-\mu(T_4-T_3)} < 0. \end{aligned}$$

En el caso en que  $\omega^2 < \lambda\mu$  es válida, resulta que la trayectoria  $\Gamma_4 = \{\mathbf{x}_{u^*}(t) \in \Omega_1 : T_3 \leq t \leq T_4\}$  no admite vectores tangentes que sean paralelos al eje  $\dot{x} = 0$ . Luego, la desviación máxima respecto a la coordenada  $\dot{x}$  de la solución de (3) sobre  $\Omega_1$  toma el valor  $\dot{x}_{u^*}(T_3^+) = \beta_2^*$ , con  $\beta_2^* = L\omega^2 \cdot \hat{\beta}_2$  y

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\lambda}{\omega^2}. \quad (15)$$

Por el contrario, si  $\omega^2 \geq \lambda\mu$ , entonces existe  $S_3 \in (T_3, T_4)$  tales que  $\dot{x}_{u^*}(S_3) = 0$ . Se sigue que

$$S_3 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\mu}{\vartheta} + \frac{\lambda\omega^2}{2\vartheta(\omega^2 - \lambda\mu)} \right) \right) + T_3,$$

de donde se obtiene el valor  $\dot{x}_{u^*}(S_3) = \beta_2^*$ , con  $\beta_2^* = L\omega^2 \cdot \hat{\beta}_2$  y

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\omega^3} \sqrt{(2\omega^2 - \lambda\mu)^2 + \lambda^2\vartheta^2}e^{-\mu(S_3-T_3)}. \quad (15')$$

De acuerdo con (13), (14)-(14') y (15)-(15'), se obtiene la desviación máxima de oscilación de  $C^*$  respecto a la coordenada  $\dot{x}$ :

$$\beta^* = L\omega^2 \cdot \max\{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\} \quad (16)$$

Se observa de (12) y (16) que las desviaciones máximas admiten el factor  $L\omega^2$ , lo cual permite observar la siguiente propiedad de las soluciones de la familia de ecuaciones diferenciales (2): para cada  $\epsilon > 0$ , el estimado  $\|\mathbf{x}_u(t)\|_\infty \leq \epsilon$  para todo  $t \geq 0$  y toda perturbación externa  $u \in \mathcal{U}_0$ , se obtiene de determinar, de forma numérica, el factor  $L\omega^2 := \delta_1(\epsilon)$  de la expresión

$$\frac{\epsilon}{\delta_1(\epsilon)} = \max\{\max\{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1\}, \max\{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}\}, \quad (17)$$

siempre que la condición inicial  $\mathbf{x}_u(0) = \mathbf{p}_0$  satisfaga la desigualdad

$$\|\mathbf{p}_0\|_\infty \leq \delta_2(\epsilon) := \delta_1(\epsilon) \cdot \min\{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1\}. \quad (18)$$

Considerando lo anterior, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.** Para la estabilidad robusta de la solución trivial de la familia de ecuaciones diferenciales (2) es suficiente que para cualquier  $\epsilon > 0$  se cumplan las siguientes condiciones:  $\max\{\alpha^*, \beta^*\} \leq \epsilon$  y  $\|\mathbf{x}_u(0)\| \leq \min\{\alpha^*, \beta^*\}$ . Si no se cumplen ambas condiciones, entonces (2) no es robustamente estable.

*Demostración.* La primera condición  $\max\{\alpha^*, \beta^*\} \leq \epsilon$  significa que la cota  $L\omega^2$  del conjunto de perturbaciones externas  $\mathcal{U}_0$  es tan pequeña que la trayectoria cerrada  $C^*$ , la cual describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$ , se encuentra dentro de un cuadrado de radio  $\epsilon$ . La segunda condición  $\|\mathbf{x}_u(0)\|_\infty \leq \min\{\alpha^*, \beta^*\}$ , significa que la condición inicial se encuentra estrictamente dentro de  $C^*$ . Por tanto, cualquier solución también se encuentra estrictamente dentro de  $C^*$ , de donde,  $\|\mathbf{x}_u(t)\|_\infty \leq \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ . Si no se cumplen ambas condiciones, entonces, al elegir las condiciones iniciales de (2) en el punto de  $C^*$  menos alejado del origen de coordenadas, se encuentra que la condición  $\|\mathbf{x}_{u^*}(t)\|_\infty \leq \epsilon$  no se cumple en el punto más alejado del origen de coordenadas.  $\square$

En los siguientes ejemplos se muestran estos resultados para una elección particular de parámetros que satisfagan las condiciones  $0 < \mu < \omega$  y  $0 < \mu_p < \omega_p$ , así como diferentes perturbaciones externas. En ellos se emplea el software *Wolfram Mathematica*® 8 para obtener las gráficas correspondientes.

**Ejemplo 1.** Como caso particular de la familia de ecuaciones diferenciales (2) se consideran los valores  $\mu = 0.2$ ,  $\mu_p = 0.8$ ,  $\omega = 1.0$  y  $\omega_p = 1.2$ . Se elige  $\epsilon = 1$  y se buscan soluciones  $\mathbf{x}_u = (x_u, \dot{x}_u)^\top$  tal que  $\|\mathbf{x}_u(t)\|_\infty \leq \epsilon$  para todo  $t \geq 0$  y toda perturbación externa  $u \in \mathcal{U}_0$ . De acuerdo con el teorema 2, para conseguir lo anterior basta con elegir como cota del conjunto de perturbaciones externas  $\mathcal{U}_0$  el valor

$$L\omega^2 \approx 0.396892.$$

Además, de acuerdo con los valores propuestos, la ecuación  $g(\lambda) = 0$  tiene por solución  $\lambda \approx 1.40765$  y, por consiguiente, la ecuación (11) admite una única solución  $Q_0^* \approx 0.558684$ . La representación gráfica de la función  $h$  que aparece en (11) se muestra en la Figura 3.

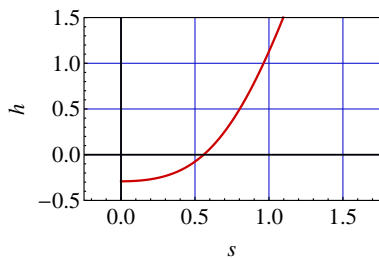


Figura 3: Representación gráfica de la función  $h$  definida en la ecuación (11).

Del valor  $Q_0^*$  que se obtiene, es posible determinar los puntos de intersección de  $C^*$  sobre las superficies de discontinuidad, los cuales son:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^* &\approx (0.9256, 0)^\top, & \mathbf{p}_1^* &\approx (-0.7178, 0)^\top, \\ \mathbf{q}_1^* &\approx (-0.3969, -0.9211)^\top, & \mathbf{q}_2^* &\approx (-0.3969, 0.5587)^\top. \end{aligned}$$

La desviación máxima de  $\mathbf{x}_{u^*}$  respecto a la coordenada  $x$  está dada por  $\alpha_0^* \approx 0.925623$ , mientras que respecto a la coordenada  $\dot{x}$  corresponde a  $\beta_0^* = 1$ .

Si se considera la condición inicial nula  $\mathbf{p}_0 = (0, 0)^\top$ , entonces la trayectoria  $\mathbf{x}_{u^*}(t) = (x_{u^*}(t), \dot{x}_{u^*}(t))^\top$ ,  $t \geq 0$ , asociada a la peor perturbación externa  $u^* = L\omega^2 \text{sign } \dot{x}(t)$  converge a  $C^*$ , como se muestra en la Figura 4.

Por otra parte, si se consideran las perturbaciones externas  $\hat{u}(t) = L\omega^2 \cos(1.2t)$  y  $\tilde{u}(t) = -L\omega^2 \text{sat}(0.2t)$ , donde  $\text{sat}(s)$  describe la función saturación, entonces las correspondientes soluciones con condiciones iniciales nulas, satisfacen la propiedad  $\mathbf{x}_{\hat{u}}(t), \mathbf{x}_{\tilde{u}}(t) \in D_\infty$  para todo  $t \geq 0$ , tal como se muestra en la Figura 4.

En cada uno de los casos se observa que las soluciones no se alejarán del origen de coordenadas a una distancia mayor que  $\epsilon = 1$ . Por tanto, son válidos los estimados siguientes:

$$\|\mathbf{x}_{u^*}(t)\|_\infty \leq 1, \quad \|\mathbf{x}_{\hat{u}}(t)\|_\infty \leq 1, \quad \|\mathbf{x}_{\tilde{u}}(t)\|_\infty \leq 1, \quad t \geq 0.$$

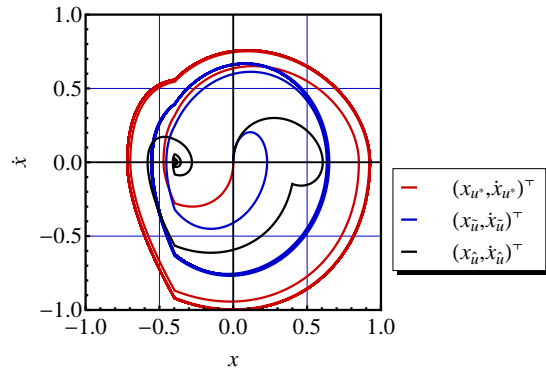


Figura 4: Soluciones periódicas y trayectoria cerrada máxima  $C^*$  obtenida con  $\mu = 0.2$ ,  $\mu_p = 0.8$ ,  $\omega = 1.0$  y  $\omega_p = 1.2$ . Se elige  $\epsilon = 1.0$ .

**Ejemplo 2.** Se consideran ahora como nuevo caso particular de la ecuación diferencial (2) los valores  $\mu = 0.7$ ,  $\mu_p = 0.8$ ,  $\omega = 1.3$  y  $\omega_p = 0.9$ . Se elige  $\epsilon = 0.25$  y se buscan soluciones  $\mathbf{x}_u = (x_u, \dot{x}_u)^\top$  tal que  $\|\mathbf{x}_u(t)\|_\infty \leq \epsilon$  para todo  $t \geq 0$  y toda perturbación externa  $u \in \mathcal{U}_0$ . De acuerdo con el teorema 2, esto se consigue con elegir como cota para el conjunto de perturbaciones externas  $\mathcal{U}_0$  el valor

$$L\omega^2 \approx 0.201883,$$

con lo cual se obtiene  $\lambda \approx 1.48871$  y  $Q_0^* \approx 0.177836$ . Con este último valor de  $Q_0^*$  que se obtiene, es posible determinar los puntos de intersección de  $C^*$  sobre las superficies de discontinuidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^* &\approx (0.1594, 0)^\top, & \mathbf{p}_1^* &\approx (-0.25, 0)^\top, \\ \mathbf{q}_1^* &\approx (-0.1195, -0.0924)^\top, & \mathbf{q}_2^* &\approx (-0.1195, 0.1778)^\top. \end{aligned}$$

Por tanto, la desviación máxima de  $\mathbf{x}_{u^*}$  respecto a  $x$  es  $\alpha_0^* \approx 0.25$  y la desviación máxima respecto a  $\dot{x}$  es  $\beta_0^* = 0.203749$ .

Se elige la condición inicial  $\mathbf{p}_0 = (\frac{1}{4}\epsilon, 0)^\top$  y las perturbaciones externas  $u^* = L\omega^2 \text{sign } \dot{x}(t)$ ,  $\hat{u}(t) = L\omega^2 \sin(0.2t)$  y  $\tilde{u}(t) = L\omega^2 \text{sat}(t)$ . Las correspondientes soluciones satisfacen la propiedad  $\mathbf{x}_{u^*}(t), \mathbf{x}_{\hat{u}}(t), \mathbf{x}_{\tilde{u}}(t) \in D_\infty$  para todo  $t \geq 0$ . Por tanto, en cada uno de los casos son válidos los estimados:

$$\|\mathbf{x}_{u^*}(t)\|_\infty \leq \frac{1}{4}, \quad \|\mathbf{x}_{\hat{u}}(t)\|_\infty \leq \frac{1}{4}, \quad \|\mathbf{x}_{\tilde{u}}(t)\|_\infty \leq \frac{1}{4}, \quad t \geq 0,$$

tal como se muestra en la Figura 5.

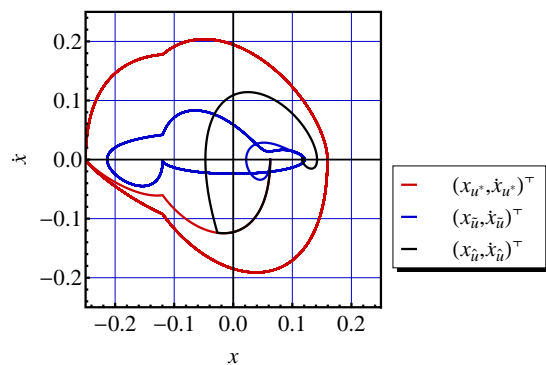


Figura 5: Soluciones periódicas y trayectoria cerrada máxima  $C^*$  obtenida con  $\mu = 0.7$ ,  $\mu_p = 0.8$ ,  $\omega = 1.3$  y  $\omega_p = 0.9$ . Se elige  $\epsilon = 0.25$ .



## 5. Conclusión

Se ha presentado un método que permite construir de forma numérica una trayectoria cerrada  $C^*$  para la ecuación diferencial (3), la cual a su vez, describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2). El método muestra que  $C^*$  siempre existe y se puede determinar de forma numérica.

Debido a que las desviaciones máximas de la solución de la ecuación diferencial (3) que describen la trayectoria cerrada  $C^*$  dependen linealmente del factor  $L\omega^*$ , ha sido posible ajustar las dimensiones del conjunto de alcanzabilidad  $D_\infty$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2), lo cual a su vez, ha permitido establecer una condición suficiente de estabilidad robusta para la familia de ecuaciones diferenciales (2), tomando como base el concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante de G. N. Duboshin e I. G. Malkin. La validez de los resultados se ha mostrado de forma numérica.

## Agradecimientos

Los autores agradecen las observaciones hechas a este trabajo por parte de los revisores, las cuales ayudaron a enriquecer la forma final del mismo.

## Referencias

- Aleksandrov, V.V., Aleksandrova, O.V., Konovalenko, I., Tikhonova, K.V., 2016. Perturbed stable systems on a plane. Part 1. Moscow University Mechanics Bulletin 71, 108–113. doi:10.3103/S0027133016050022.
- Aleksandrov, V.V., Alexandrova, O.V., Prikhod'ko, I.P., Temoltzi-Avila, R., 2007. Synthesis of self-oscillations. Moscow University Mechanics Bulletin 62, 65–68. doi:10.3103/S0027133007030016.
- Aleksandrov, V.V., Reyes-Romero, M., Sidorenko, G.Y., Temoltzi-Avila, R., 2010. Stability of controlled inverted pendulum under permanent horizontal perturbations of the supporting point. Mechanics of Solids 45, 187–193. doi:10.3103/S0025654410020044.
- Boyd, S., Ghaoui, L.E., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, Philadelphia.
- Bugrov, D.I., 2016. Estimation of the attainability set for a linear system based on a linear matrix inequality. Moscow University Mathematics Bulletin 71, 253–256. doi:10.3103/S0027132216060061.
- Bugrov, D.I., Formals'kii, A.M., 2017. Time dependence of the attainability regions of third order systems. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 81, 106–113. doi:10.1016/j.jappmathmech.2017.08.004.
- Dyskin, A.V., Pasternak, E., Pelinovsky, E., 2012. Periodic motions and resonances of impact oscillators. Journal of Sound and Vibration 331, 2856–2873. doi:10.1016/j.jsv.2012.01.031.
- Elishakoff, I., Ohsaki, M., 2010. Optimization and anti-optimization of structures under uncertainty. Imperial College Press, London.
- Elsogt, L., 1969. Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Mir, Moscú.
- Formals'kii, A.M., 2010. On the synthesis of optimal control for second order systems. Doklady Mathematics 81, 164–167. doi:10.1134/S1064562410010448.
- Fridman, E., Shaked, U., 2010. On reachable sets for linear systems with delay and bounded peak inputs. Automatica 39, 2005–2010. doi:10.1016/S0005-1098(03)00204-8.
- Gómez, L.M., Botero, H., Alvarez, H., di Sciascio, F., 2015. Análisis de la controlabilidad de estado de sistemas irreversibles mediante teoría de conjuntos. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 12, 145–153. doi:10.1016/j.riai.2015.02.002.
- Gusev, M.I., 2012. External estimates of the reachability sets of nonlinear controlled systems. Automation and Remote Control 73, 450–461. doi:10.1134/S0005117912030046.
- Gusev, M.I., 2014. Internal approximations of reachable sets of control systems with state constraints. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 287, 77–92. doi:10.1134/S0081543814090089.
- Holzinger, M.J., Scheeres, D.J., 2011. Reachability set subspace computation for nonlinear systems using sampling methods. 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 7317–7324. doi:10.1109/CDC.2011.6160728.
- Ibrahim, R.A., 2009. Vibro-impact dynamics. Modelling, mapping and applications. Springer-Verlag, Berlin.
- Kumkov, S.S., Zharinov, A.N., 2004. Constructing attainability sets for nonlinear controlled systems in the plane. IFAC Proceedings Volumes 37, 158–168. doi:10.1016/j.jmaa.2007.01.109. iFAC Workshop GSCP-04: Generalized solutions in control problems, Pereslavl-Zalessky, Russia, September 21-29, 2004.
- Kurzanski, A., Valyi, I., 1999. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser, Boston.
- Ma, Y., Agarwal, M., Banerjee, S., 2006. Border collision bifurcations in a soft impact system. Physics Letters A 354, 281–287. doi:10.1016/j.physleta.2006.01.025.
- Natsiavas, S., 1990. On the dynamics of oscillators with bi-linear damping and stiffness. International Journal of Non-Linear Mechanics 25(5), 535–554. doi:10.1016/0020-7462(90)90017-4.
- Parshikov, G.V., Matviychuk, A.R., 2017. On resource-efficient algorithm for non-linear systems approximate reachability set construction. AIP Conference Proceedings 1895, 120007. doi:10.1063/1.5007424.
- Pitarch, J.L., Sala, A., Arino, C.V., 2015. Estabilidad de sistemas Takagi-Sugeno bajo perturbaciones persistentes: estimación de conjuntos inescapables. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 12, 457–466. doi:10.1016/j.riai.2015.09.007.
- Shen, C., Zhong, S., 2011. The ellipsoidal bound of reachable sets for linear neutral systems with disturbances. Journal of the Franklin Institute 348, 2570–2585. doi:10.1016/j.jfranklin.2011.07.017.
- Vinnikov, E.V., 2015. Construction of attainable sets and integral funnels of nonlinear controlled systems in the Matlab environment. Computational Mathematics and Modeling 26, 107–119. doi:10.1007/s10598-014-9259-5.
- Weger, J.D., der Water, V.V., 2000. Grazing impact oscillations. Physical Review E 62, 2030–2041. doi:10.1103/PhysRevE.62.2030.
- Yakubovich, V.A., Leonov, G.A., Gelig, A.K., 2004. Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities. Series on Stability, Vibration and Control of Systems, World Scientific, New Jersey.
- Zhermolenko, V.N., 1980. Sobre el problema de Bulgakov referente a la desviación máxima de un sistema oscilatorio de segundo orden. Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1: Mat. Mekh. 2, 87–91. [En ruso].
- Zhermolenko, V.N., 2007. Maximum deviation of oscillating system of the second order with external and parametric disturbances. Journal of Computer and Systems Sciences International 46, 407–411. doi:10.1134/S1064230707030094.