SUMA 52
Junio 2006, pp. 15-22

Una familia de juegos infinitos: caracterización del equilibrio

En este artículo se estudia una familia de juegos infinitos y se caracteriza, en dos sentidos diferentes, cuándo se da el equilibrio. El trabajo está escrito para ser aprovechado directamente en el aula, por eso se realiza el estudio desde casos sencillos y particulares y se conduce al lector hacia una primera generalización. Obtenida la primera solución general, se discute su aplicabilidad real y se propone otra generalización, diferente a la primera, en consonancia con la realidad. Esta segunda generalización requiere de la introducción del concepto de apuesta y de la caracterización general de juego justo o equilibrado.

In this article we study a family of infinite games and its equilibrium characterization, in two different senses. The work is written to be taken advantage directly in the classroom, because the study is realized from simple and particular cases and one leads the reader towards the first generalization. Once obtained the first general solution, its application is discussed and one proposes another generalization, differently from the first one, in agreement with the reality up. This second generalization requires the introduction of the concept of bet and of the general characterization of just or balanced game.

Los juegos han formado parte de la vida del hombre desde tiempos inmemoriables. Esto ha sido así porque el hombre se ha sentido atraído y fascinado tanto por la componente lúdica como por el desafío intelectual que siempre posee cualquier tipo de juego. Si buscamos los juegos en nuestras horas de ocio, entonces, ¿por qué ignorar (e incluso despreciar) los juegos en la vida académica? Tal vez algunos docentes estarán pensando que esto es exagerado, pero repasemos nuestras programaciones (fuera de asignaturas singulares como Taller de Matemáticas). ¿Cuántas de ellas contienen siquiera un epígrafe dedicado al estudio de juegos? ¿Y al estudio de su equilibrio o equidad? Al menos las unidades didácticas de azar y probabilidad deberían detenerse a realizar dicho estudio para juegos sencillos.

El hombre se ha sentido atraído y fascinado tanto por la componente lúdica como por el desafío intelectual que siempre posee cualquier tipo de juego.

El objetivo de este trabajo es, utilizando matemáticas elementales propias de un curso de bachillerato, analizar la equidad de una familia de juegos caracterizados por las siguientes reglas:

*R*1: Tratarse de juegos que en principio pueden durar un tiempo infinito y consistentes en alcanzar un objetivo común para todos los participantes, que una vez alcanzado por un jugador se produce el fin del juego.

*R*2: Los jugadores (en un número finito, pero arbitrario) participan según un cierto orden preestablecido.

*R*3: El resultado de la participación del jugador i-ésimo no influye en el resultado del resto de los jugadores.

Ejemplos de este tipo de juegos son muy variados. El más sencillo es el torneo consistente en hacer blanco en una diana, a la cual, por turno, lanzan los participantes. Hay muchos más juegos identificables directamente con estas reglas, y otros, como por ejemplo el parchís, que en una de sus fases puede

Juan Carlos Cortés López
Universidad politécnica de Valencia
Valencia
Gema Calbo Sanjuán
IES Els Évols
L'alcúdia. Valencia

convertirse en un juego de la familia que acabamos de describir. En efecto, si jugando con un dado cúbico, los cuatro (o menos) jugadores del parchís se sitúan con su última ficha en alguna de las cinco últimas casillas de la llegada, entonces comienza un juego como el descrito bajo las reglas R1-R3, donde, si no consideramos el privilegio que puede suponer poseer un turno por delante de otro rival, todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar: 1/6. Obsérvese que en el caso del lanzamiento a la diana, las probabilidades de acierto de cada jugador no tienen por qué ser iguales ya que dependen de la destreza de cada competidor. Además el turno establecido a priori también puede arrojar ventajas. Estas casuísticas y otras serán estudiadas en este trabajo, para caracterizar cuándo un juego regido por las reglas anteriores es equilibrado, y cómo podemos introducir las condiciones deseables de equilibrio mediante la posibilidad de apostar cantidades diferentes.

Lo que sigue aborda el estudio mencionado y está escrito de forma que pueda ser aprovechado en el aula. En este sentido, primero analizaremos algunos casos sencillos y posteriormente motivaremos y resolveremos diferentes generalizaciones del problema. La primera generalización será puramente matemática y en ese sentido es muy natural. Llevada al aula proporciona una situación donde poner en práctica el proceso de generalización. El análisis de su validez práctica debe arrojar una interesante discusión, que conduzca a una generalización diferente y más realista. Para terminar, y con el objeto de proporcionar una metodología de implantación en aula de las ideas desarrolladas, y dado que en muchas situaciones puede no resultar adecuado utilizar la idea de apuesta, hemos ideado un estudio de equilibrio basado en un juego que se desarrolla con dados platónicos.

Estudio de los primeros casos particulares

Para fijar ideas, consideremos el caso particular en que dos jugadores, A y B, lanzan a un blanco según el orden establecido (regla $R2$): $A - B - A - B - A - \ldots$, i.e., primero lanza A, y si falla, luego lanzará B (en caso contrario, el juego habrá acabado y el ganador será A), si falla, después lanzará A (en otro caso, se habrá acabado el juego, siendo B el vencedor), y así sucesivamente. Teóricamente, si ambos jugadores van fallando, el juego puede continuar indefinidamente (regla $R1$). Si denotamos por $p_A \in (0, 1)$, ($q_A = 1 - p_A$) y q_B las probabilidades de que A acierte (falle) y B falle en un lanzamiento, respectivamente, y por $P(A)$ la probabilidad de que A gane el juego, entonces utilizando la propiedad de aditividad de las probabilidades de la unión de sucesos disjuntos, así como la independencia de cada uno de los sucesos descriptores (al no influir el resultado del lanzamiento de un jugador en el resultado del lanzamiento de otro jugador, i.e., se satisface la regla $R3$), se tiene

$$P(A) = \underbrace{p_A}_{(1)} + \underbrace{q_A q_B\, p_A}_{(2)} + \underbrace{\left(q_A q_B\right)^2 p_A}_{(3)} + \ldots \quad (1)$$

obsérvese que en la expresión anterior:

(1): indica que A acierta en su primer lanzamiento y el juego se acaba.

(2): indica que A y B fallan en su primer lanzamiento y A acierta en su segundo lanzamiento, con lo que se concluye el juego.

(3): indica que ambos jugadores fallan en las dos primeras rondas y en su tercer lanzamiento A acierta, finalizando el juego.

$P(A)$ puede calcularse desde (1), al tratarse de una progresión geométrica de razón $q_A\, q_B \in (0, 1)$ y semilla p_A

$$P(A) = \frac{p_A}{1 - q_A q_B} \quad (2)$$

Para calcular la probabilidad $P(B)$, de que B gane el juego, no es necesario plantear y sumar la correspondiente serie geométrica, a saber,

$$P(B) = q_A\, p_B + q_A q_B\, q_A\, p_B + \left(q_A q_B\right)^2 q_A\, p_B + \ldots \quad (3)$$

ya que, como (en tiempo infinito) alguno de ambos jugadores debe ganar, se cumplirá

$$P(B) = 1 - P(A) \quad (4)$$

sustituyendo (2) en (4), y simplificando

$$P(B) = \frac{q_A\, p_B}{1 - q_A\, q_B} \quad (5)$$

tal y como puede comprobarse sumando la serie geométrica de razón $q_A\, q_B$ y término inicial $q_A\, p_B$, dada en (3).

Dado que A es quien empieza la ronda, a priori, la intuición nos indica que A tendrá ventaja sobre B. ¿O no? Pero la intuición también nos indica que si A es peor tirador que B, puede que no haya tal ventaja. ¿Cuánto mejor jugador debe ser B para que este juego sea justo, i.e., para que ambos tengan la misma probabilidad de ganar?

Es claro por (4) que basta exigir que $P(A) = 0{,}5$, por lo que de (2) se tiene

$$P(A)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{p_A}{1-q_A q_B}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow p_B-p_A=p_B p_A \quad (6)$$

Obsérvese que la última relación está en consonancia con nuestro sentido común: se debe cumplir que $p_B > p_A$ (en caso contrario llegaríamos a un absurdo, al obtener probabilidades negativas). Finalmente de (6) se concluye

$$p_B=\frac{p_A}{1-p_A} \quad (7)$$

Si asociamos a (7) la función

$$f(x)=\frac{x}{1-x}$$

sobre el dominio $x \in (0, 1)$, obtendremos algunas conclusiones más. En efecto, como

$$f(0)=0;\ f'(x)=(1-x)^{-2}>0;\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$$

para que $p_B \in (0, 1)$, se debe tener que $p_A \in (0, 1/2)$ (véase figura 1).

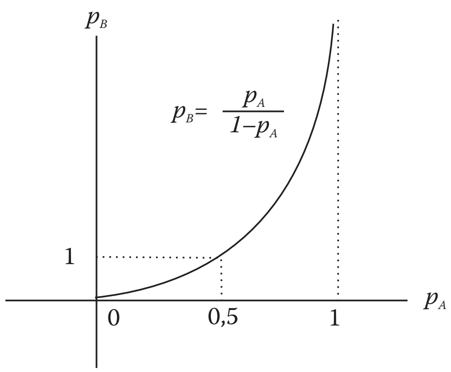

Figura 1. El problema para dos jugadores

Resumiendo, para que este juego de dos jugadores sea justo, debemos establecer el orden $A - B - A - B - A - \ldots$, siendo A el peor tirador, pero además las probabilidades p_A y p_B de acierto de ambos jugadores deben seguir la siguiente relación

$$p_B=\frac{p_A}{1-p_A} \quad \text{siendo} \quad p_A\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \quad (9)$$

En la tabla 1 se han generado valores racionales, según la relación (9).

p_A	p_B
1/10=9/90	1/9=10/90
2/10=4/20	1/4=5/20
3/10=21/70	3/7=30/70
4/10=12/30	2/3=20/30

Tabla 1. Algunos valores de p_A y p_B

Analicemos ahora el caso en que el juego se desarrolla con tres jugadores A, B y C, según el orden $A–B–C–A–B–C–A–\ldots$

Utilizando la correspondiente notación introducida en el caso de dos jugadores se tiene

$$P(A)=p_A+q_A q_B q_C p_A+\left(q_A q_B q_C\right)^2 p_A+\ldots=$$
$$=\frac{p_A}{1-q_A q_B q_C} \quad (10)$$

Para proceder al cálculo de $P(B)$ no es necesario plantear la serie geométrica correspondiente

$$P(B)=q_A p_B+q_A q_B q_C\, q_A p_B+\left(q_A q_B q_C\right)^2 q_A p_B+\ldots$$

ya que B ganará cuando A haya fallado en su primer lanzamiento (lo cual sucede con probabilidad q_A), y una vez esto ha sucedido, el problema es el mismo que el resuelto para A, i.e., es como si empezase el juego y fuese B el primero en lanzar, con lo que su probabilidad de ganar será la misma que la hallada en (10), pero sustituyendo p_A por p_B, es decir,

$$P(B)=q_A\frac{p_B}{1-q_A q_B q_C}=\frac{q_A p_B}{1-q_A q_B q_C} \quad (11)$$

Finalmente, como es seguro que alguno de los tres jugadores ganará,

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=\frac{q_A q_B p_C}{1-q_A q_B q_C} \quad (12)$$

Para que el juego sea justo los tres jugadores deben tener la misma probabilidad de ganar (y de perder) y debe valer 1/3. Para que esto se satisfaga hay que exigir de (10) y (11)

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_A}{1-q_Aq_Bq_C} &= \frac{1}{3}\\ \frac{q_A p_B}{1-q_Aq_Bq_C} &= \frac{1}{3}\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

pues así, se tendrá también que $P(C) = 1/3$.

De (13) se deduce

$$\left.\begin{aligned}3p_A &= 1-q_Aq_Bq_C\\ 3q_A p_B &= 1-q_Aq_Bq_C\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3p_A = 3q_A p_B \Rightarrow p_B = \frac{p_A}{1-p_A} \quad (14)$$

como era lógico esperar: para que el juego sea justo para tres jugadores, en primer lugar debe serlo comparando el primer jugador con el segundo, y se ha visto antes que se debe cumplir (7), que es precisamente la condición deducida en (14). Un razonamiento intuitivo análogo nos conduce a que

$$p_C = \frac{p_B}{1-p_B} \quad (15)$$

para que el juego sea justo entre los jugadores B y C (y por transitividad entre los tres jugadores A, B y C). La condición (15) se deduce matemáticamente de igualar (11) y (12). También de (14) y (15) se tiene la relación entre las probabilidades de acierto de A y C:

$$p_C = \frac{p_A}{1-2p_A} \quad (16)$$

Como veremos más adelante, el factor 2 en (16) puede relacionarse con el orden relativo entre los jugadores A y C establecido en los turnos de tiro.

Como en el caso de dos jugadores, todavía debemos de añadir algunas condiciones más para que todas las deducciones anteriores tengan un sentido matemático correcto. Sin embargo, primero observemos que como en el caso de dos jugadores, el turno $A-B-C$ debe estar dado por el orden de peor jugador a mejor jugador, tal y como nos indica no sólo la intuición, sino también (14) y (15). En efecto, veámoslo desde (15), por ejemplo:

$$p_C = \frac{p_B}{1-p_B} \Rightarrow p_B = (1-p_B)\,p_C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{ q_B = 1-p_B \in \,]0,1[\, \right\} \Rightarrow p_B < p_C \quad (17)$$

Falta por determinar los intervalos permitidos para la variación de p_A y p_B, para que estén bien definidas las relaciones (14) y (15). Por el mismo razonamiento que en el caso de dos jugadores

$$\text{si } p_B \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow p_C \in (0,1) \quad (18)$$

y apoyándonos en (7) se tendrá

$$\text{si } p_A \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow p_B \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (19)$$

Resumiendo, para el caso de tres jugadores A, B y C, el turno debe ordenarse de peor a mejor jugador, digamos, A–B–C, teniendo las probabilidades p_A, p_B y p_C de acierto de cada jugador la siguiente relación

$$p_B = \frac{p_A}{1-p_A},\ p_C = \frac{p_B}{1-p_B} \quad \text{donde}$$
$$p_A \in \left(0, \frac{1}{3}\right),\ p_B \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{y } p_C \in (0,1) \quad (20)$$

En la tabla 2 se han generado distintos valores racionales según las condiciones dadas en (20).

p_A	p_B	p_C
1/10=36/360	1/9=40/360	1/8=45/360
2/10=12/60	1/4=15/60	1/3=20/60
3/10=42/140	3/7=60/140	3/4=105/140

Tabla 2. Algunos valores de p_A, p_B y p_C

El caso general

Abordamos ahora el caso general del problema introducido, es decir, un torneo de N jugadores $A_1, A_2, \ldots, A_N$ que compiten (según el orden $A_1 - A_2 \ldots - A_N - A_1 \ldots$) por hacer blanco en una diana, siendo $p_1, p_2, \ldots, p_N$ las probabilidades respectivas de acertar en un lanzamiento cualquiera ($q_i = 1 - p_i$ será entonces la probabilidad de fallar un lanzamiento para cada jugador A_i con $1 \leq i \leq N$). Como antes denotaremos por $P(A_i)$ $1 \leq i \leq N$, la probabilidad de que gane el jugador A_i. A continuación estudiaremos bajo qué condiciones el juego así planteado es equilibrado. El análisis que sigue es una extensión del realizado antes para $N = 2$ y $N = 3$. Si denotamos por

$$r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_N = \prod_{i=1}^{N} q_i \quad (21)$$

entonces

$$\left.\begin{array}{lcl} P(A_1) & = & p_1 + r\,p_1 + r^2\,p_1 + \ldots \; = \; \dfrac{p_1}{1-r} \\ P(A_2) & = & q_1 \dfrac{p_2}{1-r} \\ P(A_3) & = & q_1\,q_2 \dfrac{p_3}{1-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(A_N) & = & q_1 \cdot \ldots \cdot q_{N-1} \dfrac{p_N}{1-r} \end{array}\right\}$$

es decir,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A_i}) = \frac{p_i}{1-r} \prod_{j=1}^{i-1} q_j, \quad 1 \leq i \leq N \quad (22)$$

Para que el juego sea justo,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A_i}) = \frac{1}{N}, \quad \forall i : 1 \leq i \leq N \quad (23)$$

Imponiendo la condición (23) en (22) se tiene

$$\mathrm{P}(\mathrm{A_i}) = \frac{p_i}{1-r} \prod_{j=1}^{i-1} q_j = \frac{p_{i+1}}{1-r} \prod_{j=1}^{i} q_j = \mathrm{P}(\mathrm{A_{i+1}}), \quad 1 \leq i \leq N-1$$

y simplificando (y trasladando una unidad el índice)

$$p_i = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{p_{i-1}}{1-p_{i-1}}, \quad \forall i : 2 \leq i \leq N \quad (24)$$

que corresponde para $N = 2$ a la relación (7) y para $N = 3$ a las relaciones (14) y (15). Obsérvese que como en (16) podemos establecer la expresión que relaciona p_i y p_1,

$$p_i \overset{(24)}{=} \frac{p_{i-1}}{1-p_{i-1}} = \frac{\dfrac{p_{i-2}}{1-p_{i-2}}}{1-\dfrac{p_{i-2}}{1-p_{i-2}}} = \frac{p_{i-2}}{1-2\,p_{i-2}} \overset{(24)}{=} \frac{\dfrac{p_{i-3}}{1-p_{i-3}}}{1-2\dfrac{p_{i-3}}{1-p_{i-3}}} =$$
$$= \frac{p_{i-3}}{1-3\,p_{i-3}} = \cdots = \frac{p_1}{1-(i-1)\,p_1}$$

Para $N = 2$ e $i = 3$, esta última expresión equivale a (16). Por lo tanto, existe una expresión sencilla entre la relación que deben seguir las probabilidades de hacer diana en un lanzamiento concreto del jugador que tira en la i-ésima posición y el que tira en primer lugar (que es el peor jugador). Y en general, también se puede establecer dicha relación entre dos jugadores cualesquiera del torneo.

Por un argumento análogo al realizado para deducir los intervalos de variación de p_A, p_B y p_C en (18) y (19) se tiene

$$\text{si } p_1 \in \left(0, \frac{1}{N}\right) \Rightarrow p_2 \in \left(0, \frac{1}{N-1}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_i \in \left(0, \frac{1}{N-i+1}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_N \in (0,1) \quad (25)$$

Nadie jugaría con un jugador claramente mejor si, a cambio, no ve compensado el riesgo de perder su apuesta con una atractiva cantidad de dinero mayor que la que arriesga.

Una generalización distinta, pero más realista

El estudio realizado hasta el momento tiene un sabor muy matemático, y en ese sentido creemos que tiene su interés, pero es poco práctico desde el punto de vista de la realidad. En efecto, si queremos que un juego como el descrito sea justo, no podemos preestablecer las probabilidades que deben tener los lanzadores para poder jugar, porque su *puntería* es una cualidad que nos viene dada por la pericia de cada jugador, por lo que no es realista suponer que las condiciones (24) junto a (25) las vayan a cumplir los participantes asistentes a la convocatoria de un torneo que pretendemos sea equilibrado. ¿Cómo adaptarnos a esta nueva situación?

La respuesta natural la encontramos introduciendo el concepto de apuesta. En efecto, asignadas las probabilidades p_i con $1 \leq i \leq N$ (a partir de los datos históricos de los torneos donde ha participado cada jugador) éstas se deben ponderar con una cierta cantidad d_i, $1 \leq i \leq N$, que apostará cada jugador para compensar sus diferencias de puntería (nadie jugaría con un jugador claramente mejor si, a cambio, no ve compensado el riesgo de perder su apuesta con una atractiva cantidad de dinero mayor que la que arriesga). Quien tenga más puntería debería apostar más (es decir, arriesgar más) al tener a priori mayores posibilidades de ganar. Pero, ¿cuál debe ser el valor de d_i, en cada caso, para que el juego sea justo? Obsérvese que este enfoque sí es realista, porque la cantidad d_i está a nuestro servicio y la podemos elegir antes de comenzar el torneo.

Antes de realizar el estudio, recordemos algunos resultados que utilizaremos posteriormente (véase pág. 17, Cortés, 2001).

Consideremos un juego de apuestas donde sólo se pueden dar los siguientes sucesos: $A_1, A_2, \ldots, A_N$ disjuntos dos a dos (es decir $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i, j$: $1 \leq i, j \leq N$ o lo que es equivalente, ningún par de estos sucesos puede darse simultáneamente), cada uno de los cuales se produce con probabilidad $P(A_i)$ para $1 \leq i \leq N$ de modo que

$$\sum_{i=1}^{N} P(A_i) = 1$$

y supongamos que vinculados a cada una de estas ocurrencias A_i, la banca realiza los correspondientes pagos/cobros d_i para $1 \leq i \leq N$, respectivamente. Desde la perspectiva del jugador que apuesta,

$$d_i = \begin{cases} >0 & \text{si el jugador recibe } d_i \text{ euros al producirse el suceso } A_i \\ =0 & \text{si el jugador no recibe nada al producirse el suceso } A_i \\ <0 & \text{si el jugador paga } d_i \text{ euros al producirse el suceso } A_i \end{cases} \quad (26)$$

entonces, la variable aleatoria discreta X que representa la ganancia/pérdida del jugador que apuesta tiene como media

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} d_i\, p_i \quad (27)$$

y puede interpretarse como la ganancia/pérdida esperada al apostar en el juego. Así, se tienen las siguientes posibilidades:

$$E(X) \text{ es } \begin{cases} =0 \Rightarrow \text{El juego es justo o equilibrado} \\ \neq 0 \Rightarrow \text{El juego es injusto} \begin{cases} >0 \Rightarrow \text{Favorece al jugador} \\ <0 \Rightarrow \text{Favorece a la banca} \end{cases} \end{cases} \quad (28)$$

Adaptemos estos resultados a nuestro problema. Denotemos por D el montante total de las apuestas (que se fijará al principio de la competición, como suele hacerse habitualmente)

$$D = \sum_{i=1}^{N} d_i \quad (29)$$

entonces si G_i, $1 \leq i \leq N$ representa la ganancia/pérdida del jugador i-ésimo para que el juego sea justo se deberá cumplir

$$\begin{aligned} 0 = E[G_1] &= (\text{ganancia}(A_1))\text{Probab}(\text{ganar } A_1) + \\ &+ (\text{pérdida}(A_1))\text{Probab}(\text{perder } A_1) = \\ &= \left(\sum_{i=2}^{N} \mathrm{d_i}\right) P(A_1) - d_1(1\text{-}P(A_1)) = D\,P(A_1) - d_1 \end{aligned}$$

despejando y sustituyendo el valor $P(A_i)$ calculado en (22), se tiene

$$d_1 = D\frac{p_1}{1-r} \quad (30)$$

donde r está dado por (21).

En general, para el jugador i-ésimo se tiene que para que el juego sea justo

$$\begin{aligned} 0 = E[G_i] &= \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathrm{d_j}\right) P(A_i) - d_i(1\text{-}P(A_i)) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N} \mathrm{d_j}\right) P(A_i) - d_i = D\,P(A_i) - d_i \end{aligned}$$

de donde utilizando (22), se tiene

$$d_i = D\frac{p_i}{1-r}\prod_{j=1}^{i-1} q_j, \quad 1 \leq i \leq N \quad (31)$$

siendo

$$r = \prod_{i=1}^{N} q_i, \quad q_i = 1 - p_i \quad (32)$$

Por lo tanto, (31) – (32) caracterizan cuándo el juego es equilibrado. Obsérvese que ahora los valores p_i, $1 \leq i \leq N$, no están sujetos a ninguna restricción tipo del (25), por lo que la generalización realizada en este apartado no abarca la desarrollada en el epígrafe anterior, es decir, es matemáticamente diferente, porque no se obtiene aquélla como un caso particular de ésta, pero sí es más rica al ser más realista desde el punto de vista práctico.

Una metodología de actuación en el aula

Muy amablemente, los asesores de la revista que revisaron este trabajo nos aconsejaron, de cara a la introducción en el aula de las ideas antes expuestas, que pensáramos una metodología de actuación que evitara la utilización del juego de las dianas y el uso de apuestas en efectivo.

Gracias a esta iniciativa de los asesores pensamos que deberíamos utilizar un material que realistamente estuviera disponible en cualquier centro educativo y que, además, la obtención de cualquier resultado no dependiera de la pericia de cada jugador, como ocurre en el caso de las dianas.

Aunque se nos ocurrieron diferentes versiones de juegos, casi todos ellos estaban basados en el uso de dados y monedas, y ello nos ha conducido a presentar una forma constructiva de proponer el problema a nuestros alumnos, que describimos a continuación.

Por simplicidad, explicaremos el juego para dos jugadores A y B, pero al igual que el estudio realizado con anterioridad, puede extenderse a más jugadores. El juego consiste en alcanzar un objetivo: gana quien consiga antes un número, por ejemplo, el 6, al lanzar un dado cúbico. Si proponemos este juego a nuestros alumnos, seguramente, después de que practiquen un rato y vayan anotando quién gana más veces, pronto observarán que el primero en lanzar tiene ventaja. De hecho, si les invitamos a que realicen el estudio aprovechando las ideas anteriores, como ahora $p_A = p_B = 1/6$ según (2) y (4):

$$P(A)=\frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{6}{11}>\frac{5}{11}=P(B)$$

por lo que, siguiendo el razonamiento expuesto en la segunda sección, para que el juego sea justo, según (9) se debe satisfacer

$$p_B=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5} \quad \text{siendo} \quad p_A=\frac{1}{6}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

¿Podemos introducir un resultado sobre el dado cúbico que equilibre el juego para el jugador B cuando A gana al obtener un 6 (o cualquier otro número de los seis)? No parece viable (y luego justificaremos que así es cuando, sobre un dado cúbico, A apuesta a un único número). Para evitar la introducción de apuestas podemos sugerir que cambien de tipo de dado (en el mercado del material educativo se pueden adquirir multitud de tipos de dados). Conduciremos así a nuestros alumnos a una interesante pregunta, que les llevará de forma natural a responder cuestiones relativas a la Teoría de Números, más concretamente a la divisibilidad. Invitemos a considerar diferentes tipos de dados, de los que podamos disponer en el centro (tetraédricos, octaédricos, ...) y propugnemos un análisis análogo al anterior. Como paso final, si se dan las condiciones oportunas de asimilación del problema, algunos alumnos pueden llegar a considerar, guiados por nosotros, el caso general: un dado con m caras, de modo que el jugador A gana si obtiene por primera vez alguna de las $a \le m$ caras y el jugador B gana si por primera vez consigue alguna de las $b \le m$ caras en su turno. La condición de equilibrio del juego, está dada por (9), y en este caso es

$$p_B=\frac{\frac{a}{m}}{1-\frac{a}{m}}=\frac{\mathrm{a}}{m-\mathrm{a}} \quad \text{siendo} \quad p_A=\frac{a}{m}\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \quad (33)$$

Tendremos que tener en cuenta la restricción

$$0<a<\left[\frac{m}{2}\right]$$

siendo $[\cdot]$ la parte entera y a un número entero. Como buscamos introducir una apuesta para B (basada no en dinero sino en un subconjunto de caras del dado de entre las m caras) y claramente $p_B = b/m$, según (33) se debe satisfacer que

$$\frac{b}{m}=\frac{a}{m-a}\Rightarrow b=\frac{m\cdot a}{m-a} \quad \text{siendo}$$
$$b\in(0,m) \text{ y } 0<a<\left[\frac{m}{2}\right] \text{ enteros} \quad (34)$$

La respuesta a esta cuestión de Teoría de Números puede hacerse en el aula a través de una estrategia de ensayo y error, recopilando ordenadamente los resultados en una tabla (véase tabla 3). Por ejemplo, si fijamos $m = 20$ (dado icosaédrico), si el jugador A apuesta a obtener $a = 4$ números de sus 20 caras, y el jugador B a obtener $b = 5$ números de sus caras (los cuales pueden incluso coincidir con los de A, porque las tiradas arrojan resultados independientes), el juego será equilibrado, pues en este caso:

$$p_A = \frac{4}{20}, \quad p_B = \frac{5}{20}$$

y se satisfacen las condiciones dadas en (34). Curiosamente, mientras los dados tetraédrico y octaédrico no admiten un juego justo de estas características, el dodecaédrico admite dos posibles soluciones. Los otros dos dados platónicos únicamente proporcionan una solución.

El estudio de un juego y su equilibrio requerirá el uso conjugado de herramientas de Probabilidad, Análisis, Álgebra, etc.

N.º caras del lado m	N.º caras a las que apuesta A	N.º caras a las que apuesta B
4	No puede haber un juego justo	
6	2	3
8	No puede haber un juego justo	
12	3 (4)	4 (6)
20	4	5

Tabla 3. Construcción en el aula de juegos justos a través de dados

Conclusiones

Este trabajo pretende aportar el estudio y caracterización del equilibrio de una familia de juegos regidos por las reglas $R1$-$R3$. El artículo está escrito para ser aprovechado en el aula, ya que en él se afronta el problema desde sencillos casos particulares hasta la generalización, realizándose ésta desde diferentes perspectivas. La primera, más natural desde el punto de vista matemático, debería servir para discutir su validez en la práctica y conducir de forma natural a buscar otro tipo de enfoque, que también generalice el problema y se adapte a la realidad, surgiendo así la segunda generalización.

Las matemáticas que se requieren para abordar el problema son las propias de un curso de bachillerato y muestran el carácter intertemático, dentro de la propia Matemática, cuando se desea estudiar problemas cercanos a la realidad. En este caso, el estudio de un juego y su equilibrio requerirá el uso conjugado de herramientas de Probabilidad, Análisis (suma de series geométricas, comportamiento de funciones a partir de sus gráficas), Álgebra (resolución de ecuaciones, sistemas, inecuaciones), etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELL, R. y CORNELIUS, M. (1990): *Juegos con Tablero y Fichas*, Ed. Labor, Barcelona.

CORTÉS LÓPEZ, J.C. y CALBO SANJUÁN, G. (2001): *Métodos Estadísticos (volumen III)*, Ed. Popular Libros, Albacete.