Aleatorizando el modelo de crecimiento malthusiano

J.C. Cortés López, E. García Moreno, A. Navarro Quiles

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València

Resumen

Este trabajo ilustra, mediante el modelo de crecimiento clásico malthusiano, cómo introducir la aleatoriedad utilizando el enfoque markoviano. Se prueba que la función generatriz de probabilidad del proceso estocástico solución, denominado de nacimiento, es una distribución binomial negativa desplazada. Se detalla una técnica para simular el proceso estocástico solución. También se realiza una breve digresión acerca de otras formas posibles de introducir la incertidumbre en el modelo determinista malthusiano.

This paper deals with the randomization of the classical malthusian model using a markovian approach. We show that the solution stochastic process, usually referred to as *birth process*, corresponds to the shift negative binomial distribution. A simulation procedure is included. A brief discussion regarding alternative ways to consider randomness into the malthusian model are also included.

Introducción

La ubicuidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) en la modelización matemática de fenómenos reales (leyes físicas, reacciones químicas, procesos biológicos, etc) tiene sus raíces en los trabajos pioneros de los hermanos Bernoulli en el siglo XVII y llega hasta nuestros días. La aplicación de las EDOs clásicas a datos reales requiere asignar un valor nominal para cada uno de los *inputs* (coeficientes, término fuente, condiciones iniciales y/o frontera). Sin embargo, debido a la incertidumbre de los fenómenos bajo estudio y/o de los errores asociados a las mediciones para fijar los valores nominales de los *inputs*, es natural considerar aleatoriedad en la formulación de las EDOs de los modelos matemáticos. En este trabajo se estudia, a partir de un ejemplo sencillo -el modelo de crecimiento de Malthus- una forma de introducir aleatoriedad en modelos matemáticos basados en EDOs usando para ello un enfoque markoviano. A lo largo del trabajo la terna $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ denotará un espacio de probabilidad.

Como se verá posteriormente la distribución binomial negativa desempeñará un papel clave en el estudio que se realizará en este trabajo. Por ello, empezaremos recordando que una variable aleatoria (v.a.) X se dice que tiene una distribución binomial negativa de parámetros $n \in \{1, 2, \dots\}$ y $p \in (0, 1)$, $X \sim Bineg(n; p)$, si su función de probabilidad (f.p.) es

$$f_X(x) = \mathbb{P}\left[X = x\right] = \left(\begin{array}{c} x+n-1 \\ n-1 \end{array} \right) p^n (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

El valor de $f_X(x)$ puede ser interpretado como la probabilidad de n éxitos en $n + x$ intentos o pruebas, siendo p la probabilidad de éxito. Se puede probar que la función generatriz de probabilidad (f.g.p.) de X está dada por

$$\mathcal{P}_X(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right] = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j = \frac{p^n}{(1-(1-p)z)^n}, \; z \in \mathbb{R}, \; p_j = f_X(j), \; j = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

siendo $\mathbb{E}[\,\cdot\,]$ el operador esperanza, [3, 8, 10]. Además, utilizando las conocidas relaciones de la f.g.p. y los momentos estadísticos respecto del origen se puede probar, aplicando (2), que la media y la varianza de X están dadas, respectivamente, por

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \mathcal{P}'_X(1) = \frac{n(1-p)}{p}, \tag{3}$$

$$\sigma_X^2 = \mathbb{V}[X] = \mathcal{P}''_X(1) + \mathcal{P}'_X(1) - \left[\mathcal{P}'_X(1)\right]^2 = \frac{n(1-p)}{p^2}. \tag{4}$$

A partir de (1) se puede definir la f.p., $f_Y(y)$, de una v.a. binomial negativa desplazada, $Y \sim \widehat{Bineg}(n;p)$, que en lugar de empezar en el valor $y = 0$ empieza en el valor $y = n$, siendo n un entero positivo (téngase en cuenta (1) y que $x = y - n$)

$$f_Y(y) = \left(\begin{array}{c} y-1 \\ n-1 \end{array} \right) p^n (1-p)^{y-n}, \quad y = n, n+1, \ldots \tag{5}$$

Por tanto, la f.g.p. de $Y \sim \widehat{Bineg}(n;p)$ está dada por

$$\mathcal{P}_Y(z) = \mathbb{E}\left[z^Y\right] = \mathbb{E}\left[z^{X+n}\right] = z^n \mathbb{E}\left[z^X\right] = z^n \mathcal{P}_X(z) = \frac{(pz)^n}{(1-(1-p)z)^n}. \tag{6}$$

Claramente como $Y = X + n$, por las propiedades de la media y la varianza se tiene, por (3) y (4), que

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] + n = \frac{n}{p}, \tag{7}$$

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}[X] = \frac{n(1-p)}{p^2}. \tag{8}$$

1. El modelo de crecimiento malthusiano determinista: una revisión

Uno de los modelos clásicos de crecimiento más conocidos y, posiblemente el más sencillo, es el modelo de crecimiento geométrico o malthusiano. Si se asumen las siguientes hipótesis:

H1: Inicialmente hay n_0 individuos.

H2: Ningún individuo muere, es decir, solo se producen nacimientos.

H3: No existe interacción entre los individuos.

H4: La tasa de nacimiento, $b > 0$, para todos los individuos es la misma, denotando por $n(t)$ el número de individuos en el instante $t > 0$, entonces por la ley de conservación de masas (en este caso de la población) en un intervalo de longitud Δt, se cumple:

$$n(t + \Delta t) - n(t) = bn(t)\Delta t, \tag{9}$$

donde se asume que la variación de la población en el intervalo $(t, t + \Delta t)$, dada por $n(t + \Delta t) - n(t)$, es directamente proporcional a la población al inicio del intervalo, $n(t)$, y al tiempo transcurrido, Δt, siendo la constante de proporcionalidad la tasa de nacimiento $b > 0$ (que por la hipótesis H4 no depende de t). De (9) se deduce, mediante un paso al límite cuando $\Delta t \to 0$ y utilizando la definición de derivada, que

$$\begin{aligned} \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t} &= bn(t), \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} bn(t), \\ n'(t) &= bn(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis H1 (tomando como tiempo inicial $t_0 = 0$),

$$n(0) = n_0, \tag{11}$$

y resolviendo el problema de valor inicial (PVI) (10)–(11), se obtiene la dinámica poblacional en cualquier instante t finito,

$$n(t) = n_0 \, \mathrm{e}^{bt} \,. \tag{12}$$

Este modelo ha sido aplicado para estudiar, por ejemplo, el crecimiento de especies en intervalos de tiempo finitos donde es plausible asumir las hipótesis H1-H4, pero obviamente no es válido en el largo plazo, ya que, al ser $b > 0$, la expresión (12) predice un crecimiento ilimitado ($n(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$), y los recursos siempre son limitados [5].

2. Aleatorización del modelo de crecimiento malthusiano: ecuaciones de Kolmogorov

El objeto de este apartado es mostrar una posible aleatorización del modelo de Malthus (10)–(11), basado en el hecho de que los nacimientos, en la práctica, no se producen de forma “segura”, sino con cierta probabilidad. En primer lugar, conviene señalar que existen diferentes formas de llevar a cabo la aleatorización:

- Asumiendo directamente que la tasa de nacimiento $b > 0$ es una v.a. positiva, B, en cuyo caso la ecuación (10) se denomina **Ecuación Diferencial Aleatoria** (EDA), y la solución del PVI (10)–(11) es el proceso estocástico, [11],
$$N^{\text{EDA}}(t) = n_0\, \mathrm{e}^{Bt}, \tag{13}$$
siendo las funciones media, $\mu_N(t)$, y desviación típica, $\sigma_N(t)$,
$$\mu_{N^{\text{EDA}}}(t) = n_0 \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{Bt}\right], \tag{14}$$
$$\sigma_{N^{\text{EDA}}}(t) = (n_0)^2 \left\{ \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{2Bt}\right] - \left(\mathbb{E}\left[e^{Bt}\right]\right)^2 \right\}. \tag{15}$$

- Perturbando la tasa de nacimiento b mediante un ruido aleatorio con cierta intensidad $\sigma > 0$. Típicamente se elige esta perturbación a través de la derivada del proceso de Wiener, $W'(t)$, que se denomina ruido blanco. Esto conduce a una **Ecuación Diferencial Estocástica** (EDE) de tipo Itô:
$$n'(t) = bn(t) \xrightarrow[n(t)\equiv N(t)]{b \Rightarrow b+\sigma W'(t),\, b,\sigma>0} \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \big(b + \sigma W'(t)\big)\, N(t),$$
$$\mathrm{d}N(t) = \big(b + \sigma W'(t)\big)\, N(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{d}N(t) = bN(t)\mathrm{d}t + \sigma N(t) W'(t)\mathrm{d}t,$$
y teniendo en cuenta la definición formal de la diferencial, $\mathrm{d}W(t) = W'(t)\mathrm{d}t$ se llega a
$$\mathrm{d}N(t) = bN(t)\mathrm{d}t + \sigma N(t)\mathrm{d}W(t). \tag{16}$$

El modelo (11) y (16) se ha utilizado en el área de las Finanzas para estudiar la dinámica de un subyacente, [1, 6]. Utilizando el cálculo de Itô se puede probar, [6],

$$N^{\mathrm{EDE}}(t) = n_0 \, \mathrm{e}^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}, \tag{17}$$

$$\mu_{N^{\mathrm{EDE}}}(t) = n_0 \, \mathrm{e}^{bt}, \tag{18}$$

$$\sigma^2_{N^{\mathrm{EDE}}}(t) = (n_0)^2 \, \mathrm{e}^{2bt} \left(\mathrm{e}^{\sigma^2 t} - 1 \right). \tag{19}$$

En estas páginas adoptamos otro enfoque, inspirado en [7, Cap.1], para introducir la aleatoriedad en el modelo malthusiano, asumiendo que el número de ejemplares de la población, en lo sucesivo denotado por N_t, solo puede tomar los valores discretos, n_0, n_0+1, n_0+2, ..., en cualquier instante de tiempo $t > 0$. Por tanto, formalmente tenemos un proceso estocástico discreto en tiempo continuo:

$$\{N_t \, : \, t \geq 0 \, : \, N_t \in \{n_0, n_0+1, \dots\}\}, \tag{20}$$

y, por conveniencia, introducimos la siguiente notación:

$$P_n(t) = \mathbb{P}\left[N_t = n\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1, n_0, n_0 + 1, \dots, \tag{21}$$

asumiendo que al inicio, la población es n_0 con probabilidad 1:

$$P_{n_0}(0) = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1, n_0 + 1, \dots, \tag{22}$$

y que en ningún instante hay un número de ejemplares menor que el inicial, n_0:

$$P_n(t) = 0, \quad \forall n = 0, 1, \dots, n_0 - 1. \tag{23}$$

Esta condición asegura que $\{N_t, \, t \geq 0\}$ es un *proceso de nacimiento.*

Del mismo modo que en el modelo malthusiano determinista se han asumido las hipótesis H1-H4, en el contexto aleatorio en lo sucesivo se asumirán las siguientes hipótesis

$\hat{\mathrm{H}}$1: Inicialmente la población es n_0:

$$P_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = n_0, \, t = 0, \\ 0 & \text{si} \quad n \neq n_0, \, t = 0. \end{cases} \tag{24}$$

$\hat{\mathrm{H}}2$: La misma que H2.

$\hat{\mathrm{H}}3$: La misma que H3.

$\hat{\mathrm{H}}4$: La probabilidad de que en un intervalo de tiempo de longitud Δt ocurra:

- un nacimiento es $b\Delta t + o(\Delta t)$,
- más de un nacimiento es $o(\Delta t)$.

siendo $o(\cdot)$ la notación "o"pequeña de Landau, es decir, $f = o(g)$ cuando $t \to t_0$ si y solo si $\forall \epsilon > 0$, $|f(t)| < \epsilon |g(t)|$, $\forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, [2, pp. 41–50]. Esta hipótesis nos indica que si Δt es suficientemente pequeño, en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ hay un nacimiento con probabilidad $b\Delta t$ más una cantidad despreciable con respecto al tamaño Δt.

Observemos que a partir de estas hipótesis se deducen las siguientes probabilidades para los incrementos de los nacimientos,

$$\Delta N_t = N_{t+\Delta t} - N_t,$$

$$P_{n+j,n}(\Delta t) = \mathbb{P}\left[\Delta N_t = j \mid N_t = n\right] = \begin{cases} 1 - bn\Delta t + o(\Delta t) & \text{si} \quad j = 0, \\ bn\Delta t + o(\Delta t) & \text{si} \quad j = 1, \\ o(\Delta t) & \text{si} \quad j \geq 2, \\ 0 & \text{si} \quad j < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Por tanto, obsérvese que los incrementos, ΔN_t, solo pueden tomar los valores 0 (no hay ningún nacimiento), ó 1 (si hay exactamente un nacimiento), en intervalos de longitud Δt; y el resto de posibles valores del incremento son probabilísticamente despreciados. Esto implica que en el instante $t + \Delta t$ la población es de tamaño n si en el instante t era de:

· tamaño n y no se ha producido ningún nacimiento, o

· tamaño $n - 1$ y se ha producido 1 nacimiento,

durante el incremento de tiempo transcurrido, Δt.

Ahora vamos a establecer una relación clave, similar a la expresión (9) usada en el escenario determinístico, que mediante un paso al límite nos va a permitir establecer una ecuación diferencial cuya incógnita es la distribución de probabilidad $P_n(t)$. Para ello, obsérvese que teniendo en cuenta (21), (25) y aplicando el Teorema de la Probabilidad Total se tiene

$$\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= \mathbb{P}\left[\Delta N_t = 0 \mid N_t = n\right] \mathbb{P}\left[N_t = n\right] \\
&+ \mathbb{P}\left[\Delta N_t = 1 \mid N_t = n-1\right] \mathbb{P}\left[N_t = n-1\right] \\
&= P_{n,n}(t) P_n(t) + P_{n,n-1}(t) P_{n-1}(t) \\
&= \left(1 - bn\Delta t + o(\Delta t)\right) P_n(t) + \left(b(n-1)\Delta t + o(\Delta t)\right) P_{n-1}(t),
\end{aligned}$$

es decir, reordenando términos

$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = b(n-1)\Delta t P_{n-1}(t) - bn\Delta t P_n(t) + (P_{n-1}(t) + P_n(t)) o(\Delta t).$$

Ahora dividiendo por Δt se llega a

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = b(n-1) P_{n-1}(t) - bn P_n(t) + (P_{n-1}(t) + P_n(t)) \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

y tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ y teniendo en cuenta que por definición de $o(\Delta t)$ se cumple

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

se obtiene

$$P_n'(t) = b(n-1) P_{n-1}(t) - bn P_n(t), \quad t > 0, \quad n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots \tag{26}$$

Obviamente por (22) y (23) se tiene

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(t) = 0, \quad t > 0, \quad n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, \\ P_n(0) = 0. \end{array}\right\} \tag{27}$$

3. Resolviendo las ecuaciones de Kolmogorov

En este apartado resolveremos las ecuaciones diferenciales dadas en (26) y (27), denominadas ecuaciones de Kolmogorov, que determinan la distribución de probabilidad $P_n(t)$ de que en el instante $t > 0$ haya n individuos. Empezamos por el PVI (27), que es más sencillo, y cuya solución es

$$P_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, \quad t \geq 0. \tag{28}$$

Ahora observemos que tomando $n = n_0$ en (26) y considerando que por (28) $P_{n_0-1} = 0$, se tiene

$$P'_{n_0}(t) = b(n_0 - 1)P_{n_0-1}(t) - bn_0 P_{n_0}(t) = -bn_0 P_{n_0}(t), \quad t > 0. \tag{29}$$

Por tanto, de (29) y de la primera condición de (24) se obtiene el siguiente PVI

$$\left.\begin{array}{rcl} P'_{n_0}(t) & = & -bn_0 P_{n_0}(t), \quad t > 0, \\ P_{n_0}(0) & = & 1, \end{array}\right\}$$

cuya solución es

$$P_{n_0}(t) = \mathrm{e}^{-bn_0 t}, \quad t \geq 0. \tag{30}$$

Esto nos indica que la probabilidad de que haya n_0 individuos en cualquier instante t decrece exponencialmente con la tasa de natalidad b y el tiempo, siendo esta probabilidad 1 en $t = 0$ (obsérvese que $P_{n_0}(t) \in [0, 1[$, $\forall t > 0$, $\forall b > 0$, pues $n_0 > 0$).

Vamos ahora a determinar las probabilidades $P_n(t)$ para $n = n_0, n_0+1, \ldots$ y $t > 0$ (incluimos el valor $n = n_0$, aunque ya se ha calculado en (30) porque como veremos puede incluirse en la fórmula final), teniendo en cuenta la definición de la f.g.p. del proceso estocástico $N(t)$, [9],

$$\mathcal{P}_N(z, t) = \mathbb{E}\left[z^{N(t)}\right] = \sum_{n=n_0}^{\infty} P_n(t) z^n, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

siendo $P_n(t)$ la probabilidad definida en (21).

Para ello vamos a establecer una ecuación en derivadas parciales para la f.g.p. $\mathcal{P}_N(z, t)$ manipulando adecuadamente la relación (26) y teniendo en cuenta (31). El "truco" consiste en multiplicar (26) por z^n para $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ y sumar las expresiones obtenidas:

$$\begin{array}{llcl} n = n_0: & P'_{n_0}(t) z^{n_0} & = & b(n_0 - 1)P_{n_0-1}(t) z^{n_0} - bn_0 P_{n_0}(t) z^{n_0}, \\ n = n_0 + 1: & P'_{n_0+1}(t) z^{n_0+1} & = & bn_0 P_{n_0}(t) z^{n_0+1} - b(n_0 + 1) P_{n_0+1}(t) z^{n_0+1}, \\ \vdots & & & \vdots \end{array}$$

realizando la suma de estas expresiones se obtiene:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P'_n(t) z^n = b \sum_{n=n_0}^{\infty} (n - 1) P_{n-1}(t) z^n - b \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^n.$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P_n'(t) z^n = bz^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} (n-1) P_{n-1}(t) z^{n-2} - bz \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1},$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P_n'(t) z^n = bz^2 \sum_{n=n_0-1}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1} - bz \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1},$$

y como por (23), $P_{n_0-1}(t) = 0$, el primer sumatorio del miembro de la derecha puede expresarse de la siguiente forma equivalente, manteniendo la relación anterior

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P_n'(t) z^n = bz^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1} - bz \sum_{n=n_0}^{\infty} n P_n(t) z^{n-1}. \tag{32}$$

Asumiendo que la serie que define la f.g.p. converge uniformemente respecto t y z, para poder conmutar la derivada respecto de t y z y la suma infinita que la define, de (31) y (32), formalmente se deduce

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathcal{P}_N(z,t) \right) = bz^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{P}_N(z,t) \right) - bz \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{P}_N(z,t) \right),$$

$$\left. \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial}{\partial t} \left(\mathcal{P}_N(z,t) \right) & = & bz(z-1) \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{P}_N(z,t) \right), \\ \mathcal{P}_N(z,0) & = & z^{n_0}. \end{array} \right\} \tag{33}$$

Obsérvese que se ha formulado una ecuación en derivadas parciales (EDP) para la f.g.p., $\mathcal{P}_N(z,t)$, y una condición inicial, la cual ha sido establecida teniendo en cuenta (31) y que n_0 es un valor determinístico

$$\mathcal{P}_N(z,0) = \mathbb{E}\left[z^{N(0)} \right] = \mathbb{E}\left[z^{n_0} \right] = z^{n_0}.$$

Ahora necesitamos resolver el PVI (33), y para ello usaremos el método de las características [4]. Mediante este método se asume que la EDP puede ser expresada como un sistema de EDOs a lo largo de las curvas características, las cuales se expresan en términos de ciertas variables auxiliares, s y r:

$$\mathcal{P}_N(z,t) \equiv \mathcal{P}_N(z(s,r), t(s,r)) \equiv \mathcal{P}(s,r).$$

Se asume que a lo largo de las curvas características la variable s es constante, por lo que

$$\mathcal{P}_N(z(s,r), t(s,r)) = \mathcal{P}(z(r), t(r)).$$

Las curvas características se determinan resolviendo los siguientes sistemas de EDOs (véase (33))

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} & = & 1, \\ t(s,0) & = & 0, \end{array}\right\} \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & = & -bz(z-1), \\ z(s,0) & = & s, \end{array}\right\} \text{(II)} \tag{34}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_N}{\mathrm{d}r} & = & 0, \\ \mathcal{P}_N(s,0) & = & s^{n_0}. \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Obsérvese que el método funciona porque a lo largo de las curvas características, las soluciones de las ecuaciones dadas en (34) son también soluciones de la EDP (33):

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 & \overset{\text{(III)}}{=} & \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_N}{\mathrm{d}r} = \dfrac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} + \dfrac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} \underset{\text{(II)}}{\overset{\text{(I)}}{=}} -bz(z-1)\dfrac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial t}, \\ z^{n_0} & = & \mathcal{P}_N(z,0) = \mathcal{P}_N(s,0) \overset{\text{(III)}}{=} s^{n_0}. \end{array}\right\}$$

Ahora resolveremos los sistemas de EDOs (34) y $\mathcal{P}_N$ quedará expresado en términos de s y r, $\mathcal{P}_N(s,r)$, que luego expresamos en términos de las variables originales z y t, $\mathcal{P}_N(z,t)$.

La solución del PVI (34)–(I) es claramente

$$t(s,r) = r. \tag{35}$$

La del PVI (34)–(II) se obtiene por el método de separación de variables y es

$$z(s,r) = \frac{s}{s + (1-s)\,\mathrm{e}^{-br}}. \tag{36}$$

Y la del PVI (34)–(III) es

$$\mathcal{P}_N(s,r) = s^{n_0}. \tag{37}$$

Por tanto, sustituyendo (35) en (36) se tiene

$$z = \frac{s}{s + (1-s)\,\mathrm{e}^{-bt}},$$

y despejando de aquí s en función de t se llega a

$$s = \frac{z\,\mathrm{e}^{-bt}}{z\,\mathrm{e}^{-bt} - (z-1)},$$

que sustituido en (37) nos da la solución buscada

$$\mathcal{P}_N(z,t) = \left(\frac{z\,\mathrm{e}^{-bt}}{z\,\mathrm{e}^{-bt} - (z-1)}\right)^{n_0} = \frac{z^{n_0}\,\mathrm{e}^{-bn_0t}}{[1 - z(1-\mathrm{e}^{-bt})]^{n_0}}. \tag{38}$$

Observemos que fijado t, (38) se corresponde con la f.g.p. de una v.a. binomial negativa desplazada (véase (6)) tomando

$$n = n_0, \quad p = \mathrm{e}^{-bt} \in (0,1). \tag{39}$$

Utilizando la identificación $Y = N_t$ y las relaciones (7) y (8), a partir de (38) se deduce el valor de las funciones media y varianza del proceso malthusiano de nacimiento, $\{N_t\,: t \geq 0\}$, definido en (20)–(23)

$$\mu_N(t) = n_0\,\mathrm{e}^{bt}, \tag{40}$$

$$\sigma_N^2(t) = n_0\,\mathrm{e}^{2bt}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right) = n_0\,\mathrm{e}^{bt}\left(e^{bt} - 1\right). \tag{41}$$

En la Fig. 1 se muestra, para diferentes instantes temporales $\hat{t}$ fijos, la f.p. del proceso estocástico solución, $P_n(t)$, del modelo malthusiano, la cual está dada por (5), con $Y \equiv N_{\hat{t}}$ y, n y p dados por (39).

Es interesante comparar estas expresiones de las funciones media y varianza del modelo malthusiano aleatorizado según el enfoque markoviano con las expresiones que se obtienen vía Ecuaciones Diferenciales Aleatorias (EDAs) y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs). Esta comparativa se detalla

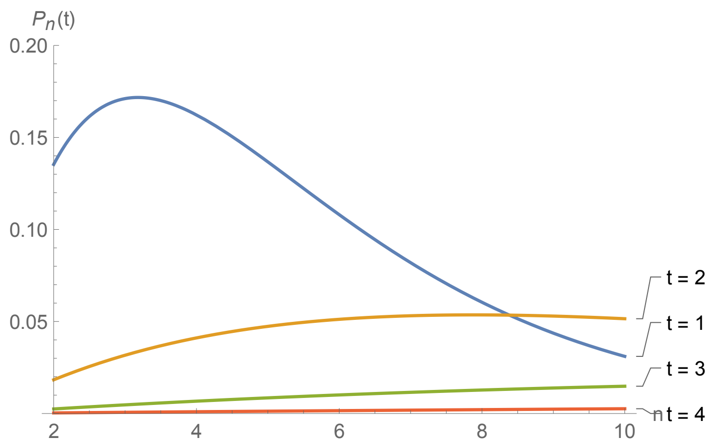

Figura 1: Representación de la f.p. del proceso estocástico solución del modelo malthusiano aleatorizado tomando, $n_0 = 2$, $b = 1$, para los instantes temporales $t = 1, 2, 3, 4$ sobre el dominio $n = 2, 3, \ldots, 10$.

en el Cuadro 1. A partir de estos resultados se observan importantes diferencias, sobre todo a nivel de variabilidad (varianza) que indican el impacto que tiene la forma de modelizar la incertidumbre incluso en un modelo básico como es el proceso de nacimiento o modelo de crecimiento malthusiano. Este análisis comparativo se puede extender a otros momentos estadísticos de orden superior.

4. Simulación

En aras de poder realizar simulaciones del proceso estocástico $\{N_t : t \geq 0\}$, definido en (20)–(23) es necesario a su vez simular los instantes temporales en los cuales tiene lugar un nacimiento. Con este propósito supongamos que $N_{T_i} = n$ y que $N_{T_{i+1}} = n + 1$ (ahora los tiempos se denotan con letras mayúsculas porque se enfatiza el hecho de que son consideradas como v.a.'s), y denotemos por $\tau_i = T_{i+1} - T_i$ la v.a. continua y positiva que representa el tiempo hasta el siguiente nacimiento dado que el proceso está en el estado n (τ_i se denomina *tiempo entre eventos*). Y sea $H_n(t)$ la probabilidad de que el

Enfoque	Media	Varianza
EDAs	$n_0\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{Bt}\right]$	$(n_0)^2\left\{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{2Bt}\right]-\left(\mathbb{E}\left[e^{Bt}\right]\right)^2\right\}$
EDEs	$n_0\,\mathrm{e}^{bt}$	$(n_0)^2\,\mathrm{e}^{2bt}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2 t}-1\right)$
Markoviano	$n_0\,\mathrm{e}^{bt}$	$n_0\,\mathrm{e}^{bt}\left(e^{bt}-1\right)$

Cuadro 1: Comparación de la media y de la varianza de la solución de un proceso de nacimiento en función del enfoque utilizado para introducir la incertidumbre en el modelo determinístico: Ecuaciones Diferenciales Aleatorias (EDA's), Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs) y el enfoque Markoviano.

proceso permanezca en el estado n durante un período de tiempo t, es decir

$$H_n(t)=\mathbb{P}[t+T_i<T_{i+1}]=\mathbb{P}[\tau_i>t].$$

Asumiendo que la probabilidad de permanecer en el estado n durante un período de tiempo mayor, $t+\Delta t$, vendrá dado por la probabilidad de permanecer en el estado n durante un tiempo t, por la probabilidad de pasar del estado n al mismo estado en un paso de tiempo Δt, y teniendo en cuenta (25), se tiene

$$H_n(t+\Delta t)=H_n(t)P_{n,n}(\Delta t)=H_n(t)(1-bn\Delta t+o(\Delta t)). \qquad (42)$$

Restando $H_n(t)$ a ambos lados de la igualdad anterior, dividiendo por Δt y tomando límites nos queda:

$$\frac{\mathrm{d}H_n(t)}{\mathrm{d}t}=-bnH_n(t).$$

Como $H_n(0)=\mathbb{P}[\tau_i>0]=1$, resolviendo este problema de valor inicial obtenemos su solución:

$$H_n(t):=\mathbb{P}[\tau_i>t]=\mathrm{e}^{-bnt},$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}[\tau_i<t]=1-H_n(t)=1-\mathrm{e}^{-bnt},$$

lo cual nos indica que la v.a. tiempo τ_i tiene una función de distribución exponencial de parámetro bn, ($\tau_i \sim \text{Exp}(bn)$), [8]. Entonces, como para una v.a. exponencial se cumple $\mathbb{E}(\tau_i) = 1/(bn)$, el tiempo medio que estaremos esperando hasta que se produzca un nuevo nacimiento será $1/(bn)$. Es importante observar que la relación (42) es intrínseca a la distribución exponencial [8], y ello implica la propiedad de *falta de memoria* que tiene el proceso markoviano $\{N_t : t \geq 0\}$ para sus tiempos entre eventos, τ_i. En base a la distribución exponencial de τ_i y utilizando el método de la función de distribución inversa para simular v.a.'s (véase [9]), a continuación se indican los pasos necesarios para obtener M simulaciones $t = \tau_i(\omega)$, $\omega \in \Omega$:

Paso 1: Generar un valor u de una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$: $u = U(\omega)$, $\omega \in \Omega$, siendo $U \sim \text{U}([0, 1])$.

Paso 2: Calcular $t = -\dfrac{\ln(1-u)}{bn}$.

Paso 3: Repetir M veces los Pasos 1 y 2.

En la Fig. 2 se muestran 2 simulaciones del proceso estocástico solución, $\{N_t : t \geq 0\}$, del modelo malthusiano. También se han representado en dicha figura las funciones media más/menos una desviación típica a partir de las expresiones (40)–(41). Las simulaciones se han realizado con el software Mathematica© usando el siguiente código basado en los Pasos 1–3.

```
b = 1;
time = 5;
init = 2;
t = List[0];
i = List[init];
j = 1;
While[i[[j]] > 0 && t[[j]] < time,
 U1 = RandomReal[];
 a = b*i[[j]];
 t = Append[t, t[[j]] - Log[U1]/a];
 i = Append[i, i[[j]] + 1];
 j = j + 1; ]
```

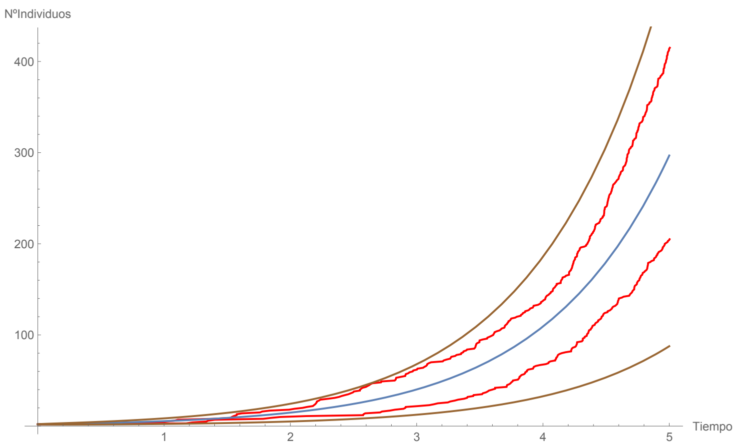

Figura 2: Dos simulaciones del proceso estocástico solución del modelo malthusiano aleatorizado tomando, $n_0 = 2$, $b = 1$ (líneas quebradas) junto a su función media (línea central) y la media más/menos una desviación típica (líneas continuas superior e inferior).

5. Conclusiones

En este trabajo se han estudiado, con cierto detalle, los fundamentos matemáticos para introducir aleatoriedad en un sencillo, pero importante modelo, el modelo de crecimiento malthusiano. Para ello se ha seguido el paradigma markoviano. Al mismo tiempo, se han subrayado las diferencias a nivel de función media y varianza del proceso estocástico solución, respecto de otros importantes enfoques disponibles en la literatura. También se ha estudiado un método para simular el proceso estocástico solución. Las ideas expuestas en este trabajo pueden generalizarse a otros modelos relevantes de la biología, como por ejemplo el modelo logístico. Sin embargo, el principal objetivo de este trabajo es estimular la introducción de la incertidumbre en los modelos clásicos deterministas, lo cual constituye un importante área de investigación en la actualidad que creemos debería también reflejarse, poco a poco, en la tarea docente tratando de incorporar la probabilidad, en las clases de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales.

Referencias

[1] Calbo, G. (2009): El modelo matemático lognormal para valorar activos financieros: un enfoque didáctico. Bol. Puig Adam 81, pp: 13–25.

[2] Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L. y Stein, C. (2001): Introduction to Algorithms. Second Edition. MIT Press and McGraw–Hill.

[3] DeGroot, M.H. (1988): Probabilidad y Estadística, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. Madrid.

[4] Evans, L.C. (2010): Partial Differential Equations, American Math. Soc. New Jersey.

[5] Martínez Pérez, M.C. y Pérez de Vargas, A. (1993): Métodos Matemáticos en Biología. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.

[6] Mikosch, T. (2000): Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. WorldScientific. Singapore.

[7] Allen, L. (2008): Mathematical Epidemiology (Eds. Brauer, F., van den Driessche, P. y Wu, J.). Mathematical Biosciences Subseries. Lecture Notes in Mathematics. Springer. Heildelberg.

[8] Quesada, V. y García A. (1988): Lecciones de Cálculo de Probabilidades, Ed. Díaz de Santos. Madrid.

[9] Ross, S.M. (1997): Simulación. 2ª edición. Ed. Pearson-Prentice Hall. Madrid.

[10] Ross, S.M. (2009): Introduction to Probability Models. 10th ed. Ed. Academic Press. New York.

[11] Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Ed. Academic Press. New York.