

Control de posición y fuerza con estimación de masa para sistemas cooperativos

Sánchez-Sánchez, P.^{a,*}, Arteaga-Pérez, M. A.^b

^aBenemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Departamento de Robótica y Control, Puebla, México

^bUniversidad Nacional Autónoma de México, División de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería, Departamento de Control y Robótica, México, CDMX

To cite this article: Sánchez-Sánchez, P., Arteaga-Pérez, M. A. 2020. Position and force control with mass estimation for cooperative systems. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 17, 368-379.
<https://doi.org/10.4995/riai.2020.12432>

Resumen

La manipulación cooperativa de un objeto por dos o más brazos robóticos requiere controlar tanto el movimiento del objeto como las fuerzas ejercidas por los manipuladores. En términos de cinemática y estática, el enfoque elegido se basa en la denominada formulación simétrica. Se diseña un algoritmo de control que utiliza una modificación del método híbrido de torque computarizado basado en el Principio de ortogonalización. Además, la masa del objeto se estima calculando la fuerza aplicada por cada efector final para sostener el objeto. El método propuesto es una extensión natural del esquema de control adaptativo previamente reportado para manipuladores geoméricamente restringidos. La prueba de estabilidad se desarrolla utilizando la teoría de Lyapunov. Se presentan resultados experimentales.

Palabras clave: Robots cooperativos, control adaptable, control de fuerza, restricciones holonómicas, función tangente hiperbólica

Position and force control with mass estimation for cooperative systems

Abstract

The cooperative manipulation of an object by two or more robotic arms requires controlling both the object's movement and the forces exerted by the manipulators. In terms of kinematics and static, the chosen approach is based on the so-called symmetric formulation. A control algorithm using a modified hybrid computed-torque method based on the Principle of Orthogonalization is designed. In addition, the mass of the object is estimated by calculating the force applied by each end-effector to hold the object. The proposed method is a natural extension of an adaptive control scheme previously reported for geometrically restricted manipulators. The stability test is developed using Lyapunov's theory. Experimental results are presented.

Keywords: Cooperative robots, adaptive control, force control, holonomic constraints, hyperbolic tangent functions

1. Introducción

A principio de la década de los setenta, poco después de la aparición de las tecnologías robóticas, los investigadores comenzaron a estudiar los sistemas de robots de brazos múltiples (Fujii y Kurono, 1975). Este interés se debió principalmente a las limitaciones de los robots de un solo brazo en aplicaciones industriales. De hecho, muchas tareas que son difíciles o imposibles de ejecutar por un solo robot se vuelven factibles cuando

dos o más manipuladores se utilizan de forma cooperativa, por lo que el uso de sistemas cooperativos ha aumentado debido a las ventajas que ofrecen. Los sistemas cooperativos pueden compartir información y recursos, permiten la interacción con un objeto, tienen mayor tolerancia a fallas y con este tipo de sistemas se pueden hacer tareas que serían imposibles de realizar con un solo robot. Ejemplos de trabajos de investigación que incluyen este tipo de sistemas son los realizados por Fujii y Kurono (1975) y Nakano *et al.* (1974). En estos trabajos se in-

*Autor para correspondencia: pablo.sanchez@correo.buap.mx

vestigaron cuestiones clave en el control de robots cooperativos tales como: el control amo/esclavo, el control de fuerza/cumplimiento y el control del espacio de tareas. En los ochenta, sobre los resultados obtenidos en robots de un solo brazo se renovó el interés en los sistemas robóticos de múltiples brazos (Koivo y Bekey, 1987). Este interés se centró en definir el vector de tareas con respecto al objeto a manipular (Dauchez y Zapata, 1985), en determinar la dinámica y el control de la cadena cinemática cerrada formada por los robots y el objeto (McClamroch, 1986; Tarn *et al.*, 1988), y resolver problemas de control de fuerza tales como el control híbrido (posición/fuerza) (Hayati, 1986; Uchiyama *et al.*, 1987; Uchiyama y Dauchez, 1988). Siendo el control híbrido el que formó una base teórica sólida para el control de múltiples robots. La parametrización de las restricciones de fuerza/momento sobre el objeto, en función de todo el modelo dinámico del sistema cooperativo, se ha reconocido como un problema crítico. De hecho, esta parametrización lleva a la definición de variables de tarea para el control y, por lo tanto, a la respuesta de una de las preguntas más frecuentes en el campo de la robótica cooperativa: ¿cómo controlar simultáneamente la trayectoria del objeto, las fuerzas internas y los momentos (mecánicas tensiones), la carga compartida, e incluso las fuerzas/momentos externos actuando sobre el objeto? (Uchiyama y Dauchez, 1988).

Para resolver el problema de controlar robots con restricciones geométricas que sostienen un objeto rígido, es necesario definir adecuadamente las trayectorias y fuerzas deseadas que se aplicarán por cada efector final (Rivera y Arteaga, 2013). Raitbert y Craig (1981) propusieron el llamado control híbrido de posición/fuerza al introducir una *matriz de selección de cumplimiento* que distingue el control de posición de los componentes de control de fuerza en coordenadas cartesianas; es decir, en este método, todo el espacio de control se divide en dos subespacios: uno de ellos es el subespacio para el control de posición y el otro es para el control de fuerza (Gudiño y Arteaga, 2003). Casi todos los trabajos que utilizan este método suponen que se dispone de un conocimiento perfecto de la dinámica del manipulador y, por lo tanto, todos los términos no lineales pueden compensarse (Khatib, 1987).

Por otro lado, Arimoto *et al.* (1993) propusieron el *Principio de Ortogonalización* como una noción ampliada del control de fuerza/posición para robots manipuladores bajo restricciones geométricas basadas en la separación de *las señales de retroalimentación de posición*, de *las señales de retroalimentación de fuerza* mediante el uso de matrices de proyección. La idea principal es separar los errores de posición/velocidad y fuerza en dos espacios ortogonales, uno tangente a la restricción física en el punto de contacto y el otro perpendicular a él. Yun-Hui *et al.* (1996) se ocuparon del control descentralizado de múltiples manipuladores en tareas de cooperación holonómicas basadas en el *Principio de Ortogonalización*. Debe notarse que en un controlador descentralizado cada robot está dirigido por su propio controlador. En dicho esquema, se realiza una tarea cooperativa multi-robot controlando sus respectivas fuerzas de interacción (Yun-Hui *et al.*, 1996). La convergencia de los errores se demuestra eligiendo una condición inicial apropiada y considerando una superficie restringida suave sin suponer una excitación persistente de las trayectorias deseadas (Arimoto, Liu *et al.*, 1993).

En el caso del control de un sistema cooperativo cuyo propósito es manipular un objeto, hay que tener en cuenta que los efectores finales de los manipuladores están sujetos a restricciones geométricas más complicadas. Cuando los manipuladores están firmemente unidos al objeto, se forma una cadena cinemática cerrada, por lo tanto, la condición de mantener las posiciones relativas de los puntos de contacto invariables conduce a restricciones geométricas. Además, surgen fuerzas de contacto entre los efectores finales y el objeto. Para el sistema cooperativo, es necesario controlar tanto el movimiento del objeto como las fuerzas ejercidas por los efectores finales de los manipuladores (Naniwa *et al.*, 1994). En particular, es importante controlar las fuerzas internas de los manipuladores que no afectan el movimiento del objeto. Entre muchas técnicas de control que se pueden encontrar en toda la literatura para sistemas cooperativos, Hwang *et al.* (2005) estudiaron la fuerza de agarre para la telemicromanipulación de esclavos múltiples con un solo amo. Murphey y Horowitz (2008) consideraron las incertidumbres del ambiente, concluyendo que estos efectos pueden mitigarse mediante el uso de técnicas adaptativas descentralizadas. Además, para mejorar el rendimiento, Rahman y Ikeura (2012) tienen en cuenta que la percepción del peso debido a la inercia puede ser diferente a la gravedad al levantar un objeto. Más recientemente, Rugthum y Tao (2014) propusieron un algoritmo adaptativo para sistemas cooperativos en caso de fallas de los actuadores, al tiempo que garantizaban la estabilidad asintótica de los errores en lazo cerrado. Los robots cooperativos también se han abordado con restricciones variantes en el tiempo (Pliego y Arteaga, 2017).

En este artículo, se propone una ley de control adaptativo basada en la función tangente hiperbólica y la estimación de masa. El control propuesto es una extensión natural del esquema definido en (Gudiño y Arteaga, 2003). Por lo cual este trabajo se organiza de la siguiente forma: en la Sección 2 se presenta el modelo dinámico del sistema y sus propiedades. La estructura de control se describe en la Sección 3. Mientras que en la Sección 4, se muestran los resultados experimentales. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección 5.

2. Dinámica del sistema cooperativo

Considérese un sistema cooperativo formado por dos robots, cada uno con n_i grados de libertad y c_i restricciones, donde $n_i > c_i$; cuya tarea es manipular un objeto (Figura 1). Para generalizar la notación, se asume $n_i = n$ y $c_i = 1$.

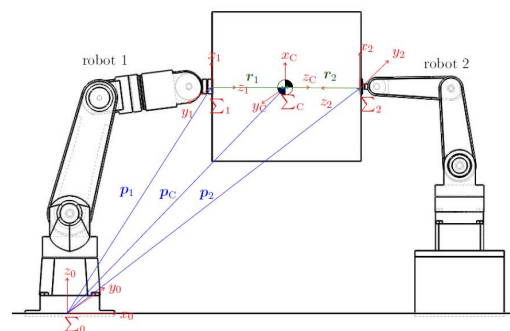


Figura 1: Sistemas de referencia del sistema cooperativo

En el centro de masa del objeto se localiza el sistema de referencia Σ_C cuya posición con respecto al sistema de referencia fijo Σ_0 viene dada por el vector $\mathbf{p}_C \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$ describe la posición de los puntos de contacto entre los efectores y el objeto, todo expresado con respecto al sistema de referencia Σ_0 . El sistema de referencia del i -ésimo efector final está dado por i , (Uchiyama y Dauchez, 1993). El modelo dinámico del sistema cooperativo de dos robots ($i = 1, 2$) viene dado por

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\lambda}_i + \mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}_i) \mathbf{f}_i \quad (1)$$

donde $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas articulares; $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, que es simétrica y positiva definida; $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de Coriolis y fuerza centrípeta; $\mathbf{D}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^n$ es una matriz diagonal positiva semi-definida que describe los coeficientes de fricción viscosa en las articulaciones; $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de par gravitacional; $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares que actúan en las articulaciones, (Kelly y Santibáñez, 2003); $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano analítico del manipulador; $\lambda_i \in \mathbb{R}$ es el multiplicador de Lagrange que representa la fuerza aplicada en el punto de contacto; $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_{xi}}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) = \nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ que en este documento se supone que tiene rango completo; $\mathbf{J}_{\varphi_{xi}}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ describe la dirección de la fuerza aplicada en el punto de contacto (dirección normal), y $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^n$ es la fuerza de inercia debida al movimiento del objeto, (Gudiño y Arteaga, 2003). Por simplicidad, se supone que todos los robots tienen articulaciones rotacionales por lo que se pueden establecer las siguientes propiedades.

Propiedad 1. [Gudiño et al. (2004)] $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ satisface $\lambda_{h_i} \|\mathbf{x}_i\|^2 \leq \mathbf{x}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{x}_i \leq \lambda_{H_i} \|\mathbf{x}_i\|^2 \forall \mathbf{q}_i, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ donde $\lambda_{h_i} \triangleq \min_{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i))$, $\lambda_{H_i} \triangleq \max_{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i))$, y $0 < \lambda_{h_i} \leq \lambda_{H_i} < \infty$.

Propiedad 2. [Gudiño et al. (2004)] Con la definición adecuada de $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$, la matriz $[\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)]$ es antisimétrica.

Propiedad 3. [Gudiño et al. (2004)] El vector $\dot{\mathbf{q}}_i$ puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (2)$$

donde $\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ y $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ con rango(\mathbf{Q}_i) = $n_i - m_i$; \mathbf{I} es la matriz identidad; $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) [\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)]^{-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ es la pseudoinversa de Moore-Penrose. $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$ y $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$ son ortogonales, es decir, $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}$. Ya que $\varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}$, se tiene que $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$ y $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i$.

Suposición 1. [Gudiño y Arteaga (2003)] Se considera que existen constantes finitas positivas c_{0i} y c_{1i} tal que satisfacen

$$c_{0i} \triangleq \max_{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\| \quad (3)$$

$$c_{1i} \triangleq \max_{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\|. \quad (4)$$

La **Suposición 1** es bastante razonable para robots con articulaciones de revolución, puesto que los elementos de \mathbf{q}_i aparecen como argumentos de funciones trigonométricas (senos y cosenos). Esta es la razón de que (3) y (4) sean válidas.

Observación 1. [Gudiño y Arteaga (2003)] De igual forma, el vector $\dot{\mathbf{x}}_i$ puede expresarse como:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{P}_{xi}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i, \quad (5)$$

con $\mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{I} - \mathbf{J}_{\varphi_{xi}}^+(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_{xi}}(\mathbf{q}_i)$ donde rango $\mathbf{Q}_{xi} = n_i - c_i$; $\mathbf{P}_{xi}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_{xi}}^+(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_{xi}}(\mathbf{q}_i)$. Una vez más $\mathbf{J}_{\varphi_{xi}}^+(\mathbf{q}_i)$ y $\mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i)$ son ortogonales.

Se considera que la trayectoria deseada cumple con la restricción $\varphi_{xi}(\mathbf{x}_{di}) = \mathbf{0}$, por lo que el error de seguimiento es:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{di} \\ &= \mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i + \mathbf{P}_{xi}(\mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i - \mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_{di}) \mathbf{x}_{di} - \mathbf{P}_{xi}(\mathbf{x}_{di}) \mathbf{x}_{di}. \end{aligned} \quad (6)$$

Hecho 1. [Sánchez y Arteaga (2017)] Para errores lo suficientemente pequeños es posible obtener la siguiente aproximación:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{di}] = \mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{x}}_i, \quad (7)$$

donde $\mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ proyecta a $\tilde{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ en el sub-espacio de la posición Θ_i . Además, para (5) se cumple:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) [\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_{di}] = \mathbf{Q}_{xi}(\mathbf{x}_i) \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i. \quad (8)$$

Esto significa que un análisis de estabilidad local puede realizarse en una región lo suficientemente pequeña alrededor de $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}$, donde (7) y (8) se satisfacen. En la Figura 2(a), se observa el caso donde el error de seguimiento es grande, mientras que en la Figura 2(b) se puede observar que $\tilde{\mathbf{x}}_i$ tiende a ser tangente a la superficie mientras se vuelve más pequeña (McClamroch y Wang, 1990). Debe tenerse en cuenta que por simplicidad para ilustrar esta suposición se usan las coordenadas del espacio de trabajo. Sin embargo, se puede llegar a la misma conclusión en coordenadas articulares, es decir, si existe una η_i lo suficientemente pequeña tal que si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \geq \eta_i \quad (9)$$

entonces

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \tilde{\mathbf{q}}_i \quad (10)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i \quad (11)$$

manteniéndose válido para errores $\tilde{\mathbf{q}}_i$ lo suficientemente pequeños.

El uso del principio de ortogonalización permite desacoplar la ley de control en dos subespacios ortogonales: uno para la posición y otro para la fuerza, los cuales, aunque estén desacoplados, no pueden ser tratados como problemas independientes, puesto que la fuerza aplicada por los manipuladores es el resultado del movimiento del manipulador, y los errores de movimiento son resultado de la fuerza de reacción sobre los efectores finales causada por los manipuladores (Gudiño y Arteaga, 2003).

Suposición 2. [Gudiño y Arteaga (2003)] Se asume que $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\Lambda}_i = \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$ donde $\boldsymbol{\Lambda}_i > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$.

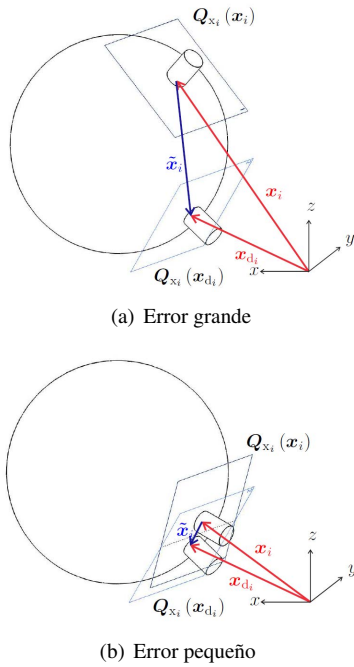


Figura 2: Plano tangente a la superficie (error de seguimiento)

2.1. Dinámica del objeto

Sea un objeto de masa m cuyo movimiento es producido por las fuerzas aplicadas \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 , como se observa en el diagrama de cuerpo libre descrito en la Figura 3. La ecuación de movimiento del objeto en coordenadas de articulación se define como:

$$m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 \quad (12)$$

donde $m \in \mathbb{R}$ es la masa del objeto, \mathcal{F}_i es la fuerza aplicada la cual se define como

$$\mathcal{F}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)\lambda_i + \mathbf{f}_i. \quad (13)$$

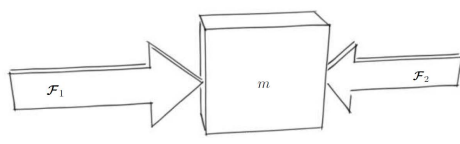


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre

Suposición 3. [Gudiño y Arteaga (2003)] $\mathbf{J}_{\varphi_{x1}}^T(\mathbf{q}_1)\lambda_1$ y $\mathbf{J}_{\varphi_{x2}}^T(\mathbf{q}_2)\lambda_2$ son colineales, tienen la misma magnitud pero en sentido opuesto, tal y como se observa en la Figura 3, es decir,

$$\mathbf{J}_{\varphi_{x1}}^T(\mathbf{q}_1)\lambda_1 - \mathbf{J}_{\varphi_{x2}}^T(\mathbf{q}_2)\lambda_2 = \mathbf{0}. \quad (14)$$

Cabe señalar que la fuerza de contacto requerida para sostener el objeto y evitar su deslizamiento debe satisfacer

$$\lambda \leq \frac{mg}{2\mu} \quad (15)$$

donde $\mu \in (0, 1]$ es el coeficiente de fricción estática y $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$.

Suposición 4. La fuerza aplicada en el punto de contacto λ_i y su derivada $\frac{d}{dt}(\lambda_i)$ pertenecen a \mathcal{L}_∞ .

3. Control propuesto

Para el análisis del controlador de posición/fuerza se asume $n_1 = n_2 = n$ y $c_i = 1$. Además, se definen las siguientes variables auxiliares

$$\Delta\lambda_i \triangleq \lambda_i - \lambda_{di} \quad (16)$$

$$\Delta F_i \triangleq \int_0^t \Delta\lambda_i d\tau \quad (17)$$

$$\Delta m \triangleq \hat{m} - m \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di} \quad (19)$$

$$\mathbf{s}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \quad (20)$$

donde $\mathbf{q}_{di} \in \mathbb{R}^{n_i}$ es la trayectoria deseada la cual es suave y acotada que satisface $\varphi_i(\mathbf{q}_{di}) = 0$, $\dot{\mathbf{q}}_{ri} \in \mathbb{R}^n$ es la señal de referencia nominal, $\lambda_{di} > 0$ es la fuerza deseada aplicada por cada manipulador sobre el objeto, $\hat{(\cdot)}$ y $\Delta(\cdot)$ representan el error de (\cdot) y $\hat{(\cdot)}$ es el valor estimado de (\cdot) .

Se define la siguiente señal de referencia nominal

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)[\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i\tilde{\mathbf{q}}_i] + \xi_i\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\tanh(\Delta F_i) \quad (21)$$

donde $\xi_i > 0$, $\Lambda_i > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con rango $(\mathbf{Q}_i) = n - 1$; \mathbf{I} es la matriz identidad; $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)[\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)]^{-1} \in \mathbb{R}^n$ es la pseudoinversa de Moore-Penrose. Sustituyendo (2) y (21) en (20) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)[\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i\tilde{\mathbf{q}}_i] - \xi_i\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\tanh(\Delta F_i) \\ &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)[\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di} + \Lambda_i\tilde{\mathbf{q}}_i] - \xi_i\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\tanh(\Delta F_i) \\ &= \underbrace{\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i\tilde{\mathbf{q}}_i]}_{\mathbf{s}_{pi}} + \underbrace{[-\xi_i\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\tanh(\Delta F_i)]}_{\mathbf{s}_{fi}} \end{aligned} \quad (22)$$

donde \mathbf{s}_{pi} y \mathbf{s}_{fi} son ortogonales. Derivando (21) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{ri} &\triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)[\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i\tilde{\mathbf{q}}_i] + \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)[\ddot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i] \\ &\quad + \xi_i\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\tanh(\Delta F_i) + \xi_i\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\text{sech}^2(\Delta F_i)\Delta\lambda_i \end{aligned} \quad (23)$$

donde $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \frac{\partial \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i}\dot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i}\dot{\mathbf{q}}_i & \dots & \frac{\partial a_{1n}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i}\dot{\mathbf{q}}_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i}\dot{\mathbf{q}}_i & \dots & \frac{\partial a_{nn}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i}\dot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

con a_{jk} elementos de $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$, $j, k = 1, \dots, n$ (Gudiño y Arteaga, 2003; Gudiño et al., 2004), y $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^n$ se define de la misma forma que $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ en (24). Considerando $i = 1, 2$ de (13) se obtiene

$$\mathcal{F}_1 = \mathbf{J}_{\varphi_{x1}}^T(\mathbf{q}_1)\lambda_1 + \mathbf{f}_1 \quad (25)$$

$$\mathcal{F}_2 = \mathbf{J}_{\varphi_{x2}}^T(\mathbf{q}_2)\lambda_2 + \mathbf{f}_2. \quad (26)$$

Sustituyendo (25) y (26) en (12) se tiene

$$m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{J}_{\varphi_{x1}}^T(\mathbf{q}_1)\lambda_1 - \mathbf{J}_{\varphi_{x2}}^T(\mathbf{q}_2)\lambda_2. \quad (27)$$

Aplicando la **Suposición 3** se puede reducir (27) a

$$m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2. \quad (28)$$

Despejando \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 de (28) se tiene

$$\mathbf{f}_1 = m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{f}_2 \quad (29)$$

$$\mathbf{f}_2 = -m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i - m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{f}_1. \quad (30)$$

Sustituyendo (29) en (1) para $i = 1$ se tiene

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) = \boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1)\lambda_1 + \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)[m\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + m\dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1] + \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)\mathbf{f}_2. \quad (31)$$

Sustituyendo (30) en (1) para $i = 2$ se tiene

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{D}_2\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_2) = \boldsymbol{\tau}_2 + \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2)\lambda_2 - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2)[m\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + m\dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{q}}_2] + \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2)\mathbf{f}_1. \quad (32)$$

Se propone la siguiente ley de control para $i = 1$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) - \mathbf{K}_1\mathbf{s}_1 - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)[\boldsymbol{\beta}_1 + \hat{m}\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \hat{m}\dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1] - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)\mathbf{f}_2 - \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1)[\lambda_{d1} - \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] \quad (33)$$

con $\boldsymbol{\beta}_1$ por definir. Se propone la siguiente ley de control para $i = 2$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_{r2} + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\dot{\mathbf{q}}_{r2} + \mathbf{D}_2\dot{\mathbf{q}}_{r2} + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_2) - \mathbf{K}_2\mathbf{s}_2 + \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2)[\boldsymbol{\beta}_2 + \hat{m}\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \hat{m}\dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{q}}_2] - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2)\mathbf{f}_1 - \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2)[\lambda_{d2} - \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] \quad (34)$$

con $\boldsymbol{\beta}_2$ por definir.

Sustituyendo (16), (18) y (33) en (31) se puede calcular la dinámica en lazo cerrado de la siguiente forma

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\mathbf{s}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{s}_1 = \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1)[\Delta\lambda_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m\dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1] - \mathbf{K}_1\mathbf{s}_1. \quad (35)$$

Sustituyendo (16), (18) y (34) en (32) se puede calcular la dinámica en lazo cerrado de la siguiente forma

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\mathbf{s}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{s}_2 = \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2)[\Delta\lambda_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] + \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2)[\boldsymbol{\beta}_2 + \Delta m\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \Delta m\dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{q}}_2] - \mathbf{K}_2\mathbf{s}_2. \quad (36)$$

De (35) se despeja $\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{s}}_1$

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m\dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1] + \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1)[\Delta\lambda_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] - \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_1\mathbf{s}_1 - \mathbf{D}_1\mathbf{s}_1. \quad (37)$$

De (36) se despeja $\mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{s}}_2$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{s}}_2 = +\mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2)[\boldsymbol{\beta}_2 + \Delta m\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \Delta m\dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{q}}_2] + \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2)[\Delta\lambda_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] - \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\mathbf{s}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{s}_2 - \mathbf{D}_2\mathbf{s}_2. \quad (38)$$

El vector de estados se define como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \Delta m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta m \end{bmatrix} \quad (39)$$

para (17), (37) y (38) donde Δm , definida en (18), es el error paramétrico cuya dinámica está dada por (72). La idea principal del diseño del controlador es mostrar que, cuando $\|\mathbf{x}_a\|$ tiende a cero, los errores de seguimiento $\tilde{\mathbf{q}}_i$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ y $\Delta\lambda_i$ también tenderán a cero.

Se propone la siguiente función definida positiva

$$V = \frac{1}{2}[\mathbf{s}_1^T\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2^T\mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\mathbf{s}_2 + m\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_1 + m\mathbf{s}_2^T\mathbf{s}_2 + \gamma\Delta m^2 + 2\xi_1 \ln[\cosh(\Delta F_1)] + 2\xi_2 \ln[\cosh(\Delta F_2)]] \quad (40)$$

la cual, para facilitar el análisis, se puede separar de la siguiente forma $V = V_1 + V_2 + V_3$ tal que:

$$V_1 = \frac{1}{2}[\mathbf{s}_1^T\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\mathbf{s}_1 + m\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_1] + \xi_1 \ln[\cosh(\Delta F_1)] \quad (41)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{s}_2^T\mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\mathbf{s}_2 + m\mathbf{s}_2^T\mathbf{s}_2] + \xi_2 \ln[\cosh(\Delta F_2)] \quad (42)$$

$$V_3 = \frac{1}{2}\gamma\Delta m^2 \quad (43)$$

donde $\xi_1, \xi_2 > 0$ y $\gamma > 0$. Derivando (41) se obtiene

$$\dot{V}_1 = \mathbf{s}_1^T\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{s}}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_1^T\dot{\mathbf{H}}_1(\mathbf{q}_1)\mathbf{s}_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)\Delta\lambda_1 + m\mathbf{s}_1^T\dot{\mathbf{s}}_1. \quad (44)$$

Sustituyendo (37) en (44)

$$\dot{V}_1 = \mathbf{s}_1^T[-\mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m\dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1] - \mathbf{D}_1\mathbf{s}_1 - \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_1\mathbf{s}_1 + \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1)[\Delta\lambda_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)]] + \frac{1}{2}\mathbf{s}_1^T\dot{\mathbf{H}}_1(\mathbf{q}_1)\mathbf{s}_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)\Delta\lambda_1 + m\mathbf{s}_1^T\dot{\mathbf{s}}_1. \quad (45)$$

Acomodando (45) y aplicando la propiedad de antisimetría (**Propiedad 2**) se tiene

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{s}_1^T\mathbf{D}_1\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T\mathbf{K}_1\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_1^T\mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1)[\Delta\lambda_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] - \mathbf{s}_1^T\mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m\dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1] + m\mathbf{s}_1^T\dot{\mathbf{s}}_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)\Delta\lambda_1. \quad (46)$$

Usando la **Propiedad 3** y (22) se obtiene

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i = -\xi_i\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\tanh(\Delta F_i) \quad (47)$$

como $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)[\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)]^{-1}$ se puede reescribir (47) de la siguiente forma

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i = -\xi_i \tanh(\Delta F_i). \quad (48)$$

Sustituyendo (48) en el término de fuerza se tiene

$$s_i^T J_{\varphi_i}^T(q_i) [\Delta \lambda_i + \xi_i \tanh(\Delta F_i)] = -\xi_i \tanh(\Delta F_i) \Delta \lambda_i - \xi_i^2 \tanh^2(\Delta F_i). \quad (49)$$

Sustituyendo (49) en (46) se tiene

$$\dot{V}_1 = -s_1^T D_1 s_1 - s_1^T K_1 s_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) + m s_1^T \dot{s}_1 - s_1^T J_1^T(q_1) [\beta_1 + \Delta m J_1(q_1) \ddot{q}_1 + \Delta m \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1]. \quad (50)$$

Sustituyendo (20) en (50) se tiene

$$\dot{V}_1 = -s_1^T D_1 s_1 - s_1^T K_1 s_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) + s_1^T [m \ddot{q}_1 - m \ddot{q}_{r1}] - s_1^T J_1^T(q_1) [\beta_1 + \Delta m J_1(q_1) \ddot{q}_1 + \Delta m \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1]. \quad (51)$$

De (28) se despeja $m \ddot{q}_i$

$$m \ddot{q}_i = J_i^{-1}(q_i) [f_i - f_2 - m \dot{J}_i(q_i) \dot{q}_i]. \quad (52)$$

Sustituyendo para $i = 1$ (52) en (51)

$$\dot{V}_1 = s_1^T [J_1^{-1}(q_1) [f_1 - f_2] - m J_1^{-1}(q_1) \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1 - J_1^T(q_1) \beta_1 - m \ddot{q}_{r1} - \Delta m J_1^T(q_1) J_1(q_1) \ddot{q}_1 - \Delta m J_1^T(q_1) \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1] - s_1^T D_1 s_1 - s_1^T K_1 s_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1). \quad (53)$$

Definiendo

$$J_1^T(q_1) \beta_1 = J_1^{-1}(q_1) [f_1 - f_2] - \hat{m} J_1^{-1}(q_1) \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1 - \hat{m} \ddot{q}_{r1} + K_{D1} s_1. \quad (54)$$

Sustituyendo (18) y (54) en (53)

$$\dot{V}_1 = s_1^T [J_1^{-1}(q_1) \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1 + \ddot{q}_{r1} - J_1^T(q_1) J_1(q_1) \ddot{q}_1 - J_1^T(q_1) \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1] \Delta m - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - s_1^T D_1 s_1 - s_1^T K_1 s_1 - s_1^T K_{D1} s_1. \quad (55)$$

Se define

$$Y_1 \Delta m = (J_1^{-1}(q_1) \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1 + \ddot{q}_{r1} - J_1^T(q_1) J_1(q_1) \ddot{q}_1 - J_1^T(q_1) \dot{J}_1(q_1) \dot{q}_1) \Delta m. \quad (56)$$

Así se tiene

$$\dot{V}_1 = -s_1^T D_1 s_1 - s_1^T K_1 s_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - s_1^T K_{D1} s_1 + s_1^T Y_1 \Delta m. \quad (57)$$

Derivando (42)

$$\dot{V}_2 = s_2^T H_2(q_2) \dot{s}_2 + \frac{1}{2} s_2^T \dot{H}_2(q_2) s_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2) \Delta \lambda_2 + m s_2^T \dot{s}_2. \quad (58)$$

Sustituyendo (38) en (58)

$$\dot{V}_2 = s_2^T [J_2^T(q_2) [\beta_2 + \Delta m J_2(q_2) \ddot{q}_2 + \Delta m \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2] - D_2 s_2 - C_2(q_2, \dot{q}_2) s_2 - K_2 s_2 + J_{\varphi_2}^T(q_2) [\Delta \lambda_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2)]] + \frac{1}{2} s_2^T \dot{H}_2(q_2) s_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2) \Delta \lambda_2 + m s_2^T \dot{s}_2. \quad (59)$$

Acomodando (59) y aplicando la propiedad de antisimetría (**Propiedad 2**) se tiene

$$\dot{V}_2 = -s_2^T D_2 s_2 - s_2^T K_2 s_2 + s_2^T J_{\varphi_2}^T(q_2) [\Delta \lambda_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] + s_2^T J_2^T(q_2) [\beta_2 + \Delta m J_2(q_2) \ddot{q}_2 + \Delta m \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2] + m s_2^T \dot{s}_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2) \Delta \lambda_2. \quad (60)$$

Usando (49) en (60) se obtiene

$$\dot{V}_2 = s_2^T J_2^T(q_2) [\beta_2 + \Delta m J_2(q_2) \ddot{q}_2 + \Delta m \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2] - s_2^T D_2 s_2 - s_2^T K_2 s_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) + m s_2^T \dot{s}_2. \quad (61)$$

Sustituyendo (20) en (61) se tiene

$$\dot{V}_2 = s_2^T J_2^T(q_2) [\beta_2 + \Delta m J_2(q_2) \ddot{q}_2 + \Delta m \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2] - s_2^T D_2 s_2 - s_2^T K_2 s_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) + s_2^T [m \ddot{q}_2 - m \ddot{q}_{r2}]. \quad (62)$$

Sustituyendo para $i = 2$ (52) en (62)

$$\dot{V}_2 = s_2^T [J_2^{-1}(q_2) [f_1 - f_2] - m J_2^{-1}(q_2) \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2 - J_2^T(q_2) \beta_2 - m \ddot{q}_{r2} - \Delta m J_2^T(q_2) J_2(q_2) \ddot{q}_2 - \Delta m J_2^T(q_2) \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2] - s_2^T D_2 s_2 - s_2^T K_2 s_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2). \quad (63)$$

Definiendo

$$J_2^T(q_2) \beta_2 = J_2^{-1}(q_2) [f_1 - f_2] - \hat{m} J_2^{-1}(q_2) \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2 - \hat{m} \ddot{q}_{r2} + K_{D2} s_2. \quad (64)$$

Sustituyendo (18) y (64) en (63)

$$\dot{V}_2 = s_2^T [J_2^{-1}(q_2) \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2 + \ddot{q}_{r2} - J_2^T(q_2) J_2(q_2) \ddot{q}_2 - J_2^T(q_2) \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2] \Delta m - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) - s_2^T D_2 s_2 - s_2^T K_2 s_2 - s_2^T K_{D2} s_2. \quad (65)$$

Se define

$$Y_2 \Delta m = (J_2^{-1}(q_2) \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2 + \ddot{q}_{r2} - J_2^T(q_2) J_2(q_2) \ddot{q}_2 - J_2^T(q_2) \dot{J}_2(q_2) \dot{q}_2) \Delta m. \quad (66)$$

Así se tiene

$$\dot{V}_2 = -s_2^T D_2 s_2 - s_2^T K_2 s_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) - s_2^T K_{D2} s_2 + s_2^T Y_2 \Delta m. \quad (67)$$

Se deriva (43)

$$\dot{V}_3 = \gamma \Delta m \frac{d}{dt}(\Delta m). \quad (68)$$

Se suma (57), (67) y (68) para analizar la dinámica completa del sistema de lazo cerrado

$$\dot{V} = -s_1^T D_1 s_1 - s_1^T K_1 s_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - s_1^T K_{D1} s_1 + s_1^T Y_1 \Delta m - s_2^T D_2 s_2 - s_2^T K_2 s_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) - s_2^T K_{D2} s_2 + s_2^T Y_2 \Delta m + \gamma \Delta m \frac{d}{dt}(\Delta m). \quad (69)$$

Se realiza la siguiente asignación

$$K_{a_i} = D_i + K_i + K_{di}. \quad (70)$$

Factorizando (69) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -s_1^T K_{a_1} s_1 - s_2^T K_{a_2} s_2 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) \\ & + \left[Y_1^T s_1 + Y_2^T s_2 + \gamma \frac{d}{dt}(\Delta m) \right] \Delta m. \end{aligned} \quad (71)$$

Se propone la siguiente ley de adaptación

$$\dot{m} = -\frac{1}{\gamma} \left[Y_1^T s_1 + Y_2^T s_2 \right] \quad (72)$$

puesto que m es constante se tiene $\frac{d}{dt}(\Delta m) = \dot{m}$. Finalmente, sustituyendo (72) en (71) se obtiene

$$\dot{V} = -s_1^T K_{a_1} s_1 - s_2^T K_{a_2} s_2 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) \leq 0. \quad (73)$$

donde \dot{V} es negativa semi-definida, esto implica que el estado x , definido en (39), está acotado.

Para probar que $\dot{V} \rightarrow 0$ y con ello $s_1, s_2, \Delta F_1$ y $\Delta F_2 \rightarrow 0$ se usa el siguiente lema.

Lema 4.3 (Lyapunov-Like Lemma) [Slotine y Li (1991)] Si una función escalar $V(x, t)$ cumple con las siguientes condiciones

- $V(x, t)$ está acotada por abajo
- $\dot{V}(x, t)$ es semi-definida negativa
- $\dot{V}(x, t)$ es uniformemente continua en el tiempo

entonces $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Por el **Lema 4.3 (Lyapunov-Like Lemma)** de (Slotine y Li, 1991), $\dot{V} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si (73) es uniformemente continua. Una condición suficiente para que (73) sea considerada como uniformemente continua es que su derivada, es decir \ddot{V} , esté acotada.

Bajo esta premisa se deriva (73) tal que

$$\begin{aligned} \ddot{V} = & -2\xi_1^2 \tanh(\Delta F_1) \left[1 - \tanh^2(\Delta F_1) \right] \Delta \lambda_1 - 2s_1^T K_{a_1} \dot{s}_1 \\ & - 2\xi_2^2 \tanh(\Delta F_2) \left[1 - \tanh^2(\Delta F_2) \right] \Delta \lambda_2 - 2s_2^T K_{a_2} \dot{s}_2. \end{aligned} \quad (74)$$

Para determinar que \ddot{V} está acotada supóngase que los errores son lo suficientemente pequeños, tal que se cumplen (9), (10) y (11) bajo la **Suposición 2**, por lo cual (22) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\ddot{\tilde{q}}_i + \Lambda_i \tilde{q}_i = s_i + \xi_i J_{\varphi_i}^+(q_i) \tanh(\Delta F_i). \quad (75)$$

Ya que \dot{V} , ecuación definida en (73), es negativa semi-definida, y esto implica que el estado x , descrito en (39), está acotado, se puede concluir que el lado derecho de (75) también está acotado, y debido a que el lado izquierdo de (75) es un filtro lineal estable de primer orden entonces \tilde{q}_i y $\dot{\tilde{q}}_i$ también están acotados. Adicionalmente, q_i y \dot{q}_i están acotadas debido a que por diseño q_{di} y \dot{q}_{di} están acotadas. Multiplicando (75) por \tilde{q}_i^T se obtiene

$$\tilde{q}_i^T \ddot{\tilde{q}}_i = \tilde{q}_i^T s_i + \xi_i \tilde{q}_i^T J_{\varphi_i}^+(q_i) \tanh(\Delta F_i) - \Lambda_i \|\tilde{q}_i\|^2. \quad (76)$$

Ya que la derivada de $\tilde{q}_i^T \tilde{q}_i$ se puede representar como

$$\frac{d}{dt}(\tilde{q}_i^T \tilde{q}_i) = 2\tilde{q}_i^T \dot{\tilde{q}}_i = \frac{d}{dt}(\|\tilde{q}_i\|^2) = 2\|\tilde{q}_i\| \frac{d}{dt}(\|\tilde{q}_i\|) \quad (77)$$

se puede definir la siguiente relación

$$\tilde{q}_i^T \dot{\tilde{q}}_i = \|\tilde{q}_i\| \frac{d}{dt}(\|\tilde{q}_i\|). \quad (78)$$

Sustituyendo (78) en (76) se tiene

$$\|\tilde{q}_i\| \frac{d}{dt}(\|\tilde{q}_i\|) = \tilde{q}_i^T s_i + \xi_i \tilde{q}_i^T J_{\varphi_i}^+(q_i) \tanh(\Delta F_i) - \Lambda_i \|\tilde{q}_i\|^2. \quad (79)$$

Considerando (3) y las siguientes relaciones

$$\bar{\xi}_i \triangleq \lambda_{\max}\{\xi_i\} \quad (80)$$

$$\lambda_{\Lambda_i} \triangleq \lambda_{\min}\{\Lambda_i\} \quad (81)$$

$$|\tanh(\Delta F_i)| \leq |\Delta F_i|, \quad (82)$$

se puede reescribir (79) de la siguiente forma

$$\|\tilde{q}_i\| \frac{d}{dt}(\|\tilde{q}_i\|) \leq \|\tilde{q}_i\| \|s_i\| + \bar{\xi}_i \|\tilde{q}_i\| c_{0i} |\Delta F_i| - \lambda_{\Lambda_i} \|\tilde{q}_i\|^2. \quad (83)$$

Dividiendo (83) entre $\|\tilde{q}_i\|$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\|\tilde{q}_i\|) \leq \|s_i\| + \bar{\xi}_i c_{0i} |\Delta F_i| - \lambda_{\Lambda_i} \|\tilde{q}_i\| = \rho_{\max i} - \lambda_{\Lambda_i} \|\tilde{q}_i\| \quad (84)$$

donde

$$\|s_i\| + \bar{\xi}_i c_{0i} |\Delta F_i| \leq \rho_{\max i} \quad \forall t \quad (85)$$

donde $\rho_{\max i}$ existe ya que $\dot{V} \leq 0$ siempre que los errores satisfacen (10) y (11). Lo que se busca con (84) son las condiciones que deben cumplir las ganancias para garantizar que el **Hecho 1** se cumple, es decir que la proyección del error por $Q_i(q_i)$ es tangente a la trayectoria. Nótese que (84) es válida solamente si cumple (9) donde η_i es una constante positiva lo suficientemente pequeña. Por simplicidad se considera $\eta_1 = \eta_2 = \eta$.

La solución de (84) se obtiene usando el **Lema de Comparación** de (Khalil, 1996) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}_i\| & \leq \|\tilde{q}_i(0)\| e^{-\lambda_{\Lambda_i} t} + \int_0^t e^{-\lambda_{\Lambda_i}(t-\tau)} \rho_{\max i} d\tau \\ & \leq e^{-\lambda_{\Lambda_i} t} \left(\|\tilde{q}_i(0)\| + \int_0^t e^{\lambda_{\Lambda_i} \tau} \rho_{\max i} d\tau \right) \\ & \leq e^{-\lambda_{\Lambda_i} t} \left(\|\tilde{q}_i(0)\| + \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda_i}} e^{\lambda_{\Lambda_i} t} \Big|_0^t \right) \\ & \leq e^{-\lambda_{\Lambda_i} t} \left(\|\tilde{q}_i(0)\| + \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda_i}} e^{\lambda_{\Lambda_i} t} - \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda_i}} \right). \end{aligned} \quad (86)$$

De (86) se puede concluir

$$\|\tilde{q}_i\| \leq e^{-\lambda_{\Lambda_i} t} \left(\|\tilde{q}_i(0)\| - \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda_i}} \right) + \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda_i}} \leq \eta \quad \forall t \geq 0. \quad (87)$$

Por lo tanto, (9) se cumple si

$$\|\tilde{q}_i(0)\| \leq \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda_i}} \leq \eta, \quad (88)$$

lo que implica que

$$\rho_{\max i} \leq \lambda_{\Lambda_i} \eta. \quad (89)$$

Por simplicidad se busca que

$$\|\mathbf{x}_a\| \leq x_{a \text{ máx}}, \quad (90)$$

lo que conlleva a

$$\|s_i\| \leq x_{a \text{ máx}} \quad (91)$$

$$\|\Delta F_i\| \leq x_{a \text{ máx}}. \quad (92)$$

Sustituyendo (89), (91) y (92) en (85) se obtiene

$$x_{a \text{ máx}} \leq \frac{\lambda_{\Lambda_i}}{(1 + \bar{\xi}_i c_{0i})} \eta. \quad (93)$$

Esto significa que la cota de $x_{a \text{ máx}}$ debe ser lo suficientemente pequeña para garantizar que (9) se cumpla. En este caso, si $\|\mathbf{x}_a\|$ tiende a cero, es claro en la ecuación (84) que $\|\dot{\mathbf{q}}_i\|$ también tenderá a cero, lo que conlleva a la convergencia a cero de $\|\ddot{\mathbf{q}}_i\|$. Sin embargo, para que este análisis pueda ser válido falta hallar $\|\mathbf{x}_a\|$ tal que se garantice que (9) se cumpla. Para lo cual se considera la siguiente cota

$$\frac{1}{2} \Delta F_i^2 \leq 2 \ln (\cosh (\Delta F_i)) \leq \Delta F_i^2. \quad (94)$$

Nótese que V , descrita en (40), satisface

$$\frac{1}{2} \left(\lambda_{h1} \|s_1\|^2 + \frac{1}{2} |\Delta F_1|^2 + \lambda_{h2} \|s_2\|^2 + \frac{1}{2} |\Delta F_2|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right) \leq V \leq \frac{1}{2} \left(\lambda_{H1} \|s_1\|^2 + |\Delta F_1|^2 + \lambda_{H2} \|s_2\|^2 + |\Delta F_2|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right), \quad (95)$$

por lo que se pueden definir

$$\varepsilon_1 = \min_{\forall q \in \mathbb{R}^n} \left\{ \lambda_{h1}, \frac{1}{2}, \lambda_{h2} \right\} \quad (96)$$

$$\varepsilon_2 = \max_{\forall q \in \mathbb{R}^n} \left\{ \lambda_{H1}, 1, \lambda_{H2} \right\}. \quad (97)$$

De tal forma que, de acuerdo con (39) y (95), se tiene

$$\frac{1}{2} \left[\varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right] \leq V \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a\|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right]. \quad (98)$$

Se observa que (98) siempre se cumple, pero si $\dot{V} \leq 0$ entonces también se satisface

$$\frac{1}{2} \left[\varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right] \leq V \leq V(0) \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a(0)\|^2 + \gamma |\Delta m(0)|^2 \right]. \quad (99)$$

Puesto que

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right] \quad (100)$$

se puede redefinir (99) de la siguiente forma

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 \leq V \leq V(0) \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a(0)\|^2 + \gamma |\Delta m(0)|^2 \right]. \quad (101)$$

Como lo que se busca es una cota para $\|\mathbf{x}_a\|$ cuando $\dot{V} \leq 0$, por simplicidad se impone la siguiente condición

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a(0)\|^2 + \gamma |\Delta m(0)|^2 \right] \leq \frac{1}{2} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2, \quad (102)$$

donde $x_{a \text{ máx}}$ satisface (93). Se observa que de (102) se obtiene

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 \leq \frac{1}{2} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2$$

$$\|\mathbf{x}_a\| \leq x_{a \text{ máx}}. \quad (103)$$

Dado que se supone que (103) es cierta para toda t , se propone la siguiente condición

$$\frac{1}{2} \varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a(0)\|^2 \leq \frac{1}{4} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2 \quad (104)$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{x}_a(0)\| \leq \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} x_{a \text{ máx}} \leq x_{a \text{ máx}} \quad (105)$$

donde $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Tal que, de (102), $\Delta m(0)$ debe satisfacer

$$\frac{1}{2} \gamma |\Delta m(0)|^2 \leq \frac{1}{2} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} x_{a \text{ máx}}^2$$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2$$

$$\leq \frac{1}{4} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2. \quad (106)$$

Esto impone la siguiente condición sobre la ganancia γ

$$\gamma \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2}{|\Delta m(0)|^2}. \quad (107)$$

Se debe mencionar que no hay forma de garantizar a priori que se cumpla (107), así que a lo más γ solo se puede hacer muy pequeña. Por otro lado, considerando la relación de fuerza, descrita en (28), se puede despejar $\ddot{\mathbf{q}}_i$ de la siguiente forma

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \frac{1}{m} \mathbf{J}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) [f_1 - f_2] + \dot{\mathbf{J}}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (108)$$

donde $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)$ es de rango completo, existe y está acotada. Además, se supone que f_1 y f_2 están acotadas, luego entonces, $\ddot{\mathbf{q}}_i$ está acotada. Por otro lado, dado que por diseño las señales deseadas están acotadas, se tiene que λ_{di} está acotada, y de la **Suposición 4** se considera que λ_i está acotada, por lo que $\Delta \lambda_i$ está acotada. Considerando (3), (4) y el hecho que $\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{q}_{di}, \dot{\mathbf{q}}_{di}, \ddot{\mathbf{q}}_{di}, \ddot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, s_i, \Delta F_i$ y $\Delta \lambda_i$ están acotadas implica que $\dot{\mathbf{q}}_{ri}$, definida en (21), y $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$, definida en (23), están acotadas, lo que a su vez significa que \dot{s}_i está acotada. Lo que permite concluir que \dot{V} , definida en (74), está acotada.

Por el **Lema 4.3 (Lyapunov-Like Lemma)** se puede concluir que \dot{V} , definida en (73), tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ya que es uniformemente continua, puesto que su derivada \ddot{V} , definida en (74), está acotada. Por lo tanto, s_1 y s_2 tienden a cero, lo que implica que $\ddot{\mathbf{q}}_i$ y $\dot{\mathbf{q}}_i$ también tienden a cero. De igual forma ΔF_1 y ΔF_2 tienden a cero.

Para probar que $\Delta \lambda_i \rightarrow 0$ se usa el siguiente lema.

Lema 4.2 (Barbalat) Slotine y Li (1991) Si una función diferenciable $f(t)$ tiene un límite finito conforme $t \rightarrow \infty$, y si $\dot{f}(t)$ es uniformemente continua, entonces $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Por el **Lema 4.2 (Barbalat)** de Slotine y Li (1991), $\Delta\lambda_i \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si $\Delta\lambda_i$ es uniformemente continua, es decir, si su derivada $\frac{d}{dt}(\Delta\lambda_i)$ está acotada. Partiendo de esta idea se deriva (16), tal que

$$\frac{d}{dt}(\Delta\lambda_i) = \frac{d}{dt}(\lambda_i) - \frac{d}{dt}(\lambda_{di}). \quad (109)$$

Se observa que (109) está acotada ya que $\frac{d}{dt}(\lambda_{di})$ está acotada por diseño y de la **Suposición 4** se tiene que $\frac{d}{dt}(\lambda_i) \in \mathcal{L}_\infty$ está acotada, por lo que $\frac{d}{dt}(\Delta\lambda_i) \in \mathcal{L}_\infty$ está acotada, de manera que se puede concluir que $\Delta\lambda_i$ tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ya que es uniformemente continua.

Teorema 1. *Considérese la dinámica del sistema cooperativo dado por (1) en lazo cerrado con la ley de control descrita en (33) y (34) y la ley de adaptación definida en (72), donde q_{di} es una trayectoria deseada suave y acotada en coordenadas articulares; y cuyas derivadas \dot{q}_{di} y \ddot{q}_{di} , también están acotadas. Se supone que f_1 y f_2 están acotadas. Considérese también (3), (4), (80), (81), (82) y (94) tal que $x_{a\max}$ satisface (93) siendo lo suficientemente pequeña para garantizar que (9) se cumpla. Además, teniendo en cuenta la **Suposición 4** donde λ_i y su derivada están acotadas, y satisfaciendo las condiciones impuestas (102), (103), (104), (105), (106) y con una γ tal que se satisface (107), entonces si las siguientes condiciones se cumplen*

$$\lambda_{\min}(K_{a_i}) = \delta_i \quad (110)$$

$$|\bar{\xi}_1| = \sqrt{\delta_i} \quad (111)$$

las señales de error \tilde{q}_i , $\dot{\tilde{q}}_i$ y $\Delta\lambda_i$ permanecen acotadas y tienen convergencia asintótica, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}_i = \mathbf{0} \quad (112)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}_i = \mathbf{0} \quad (113)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\lambda_i = 0. \quad (114)$$

La demostración del **Teorema 1** es directa de todo el análisis realizado en la presente sección.

4. Resultados experimentales

Para probar la teoría presentada en la sección anterior, se han realizado algunas pruebas experimentales.

4.1. Descripción del sistema

El sistema cooperativo está formado por dos robots industriales de la empresa **CRS Robotics**, Figura 4. Los robots empleados son el **CRS-A255** (5 DOF) y el **CRS-A465** (6 DOF). Considérese que sólo se usan las tres primeras articulaciones de cada robot y las articulaciones restantes se frenan mecánicamente. Cada articulación es accionada por un motor de CD con codificadores ópticos. La dinámica del actuador se ha tenido en cuenta para la implementación de control como se explica en Gudiño *et al.* (2004). El sistema de referencia del sistema está en la base del robot A465. Ambos manipuladores tienen

un dispositivo de protección contra choques en el efector final y un sensor de fuerza instalado en él. Cada efector final es una herramienta intercambiable, ubicada justo después del sensor de fuerza. El sistema de adquisición consiste en un **CompactRIO** (controlador industrial en tiempo real) de **National Instruments**, que lee y procesa las señales de cada codificador incremental y una tarjeta PCI de **JR3 Inc.** que recibe las señales del sensor de fuerza. Los experimentos se realizan en una computadora con un procesador **Intel Xeon E5462** a 2.8 GHz. El tiempo de muestreo es de 5 ms (lo más rápido posible). Los controladores están programados en **Visual C ++**. El objeto es un cubo de melamina blanca de 0.400 kilogramos. Las dimensiones del cubo 0.15 [m] \times 0.15 [m] \times 0.311 [m].

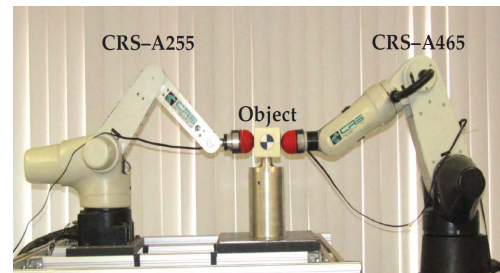


Figura 4: Sistema cooperativo

4.2. Trayectoria deseada

La trayectoria deseada se genera para guiar los movimientos del robot desde una configuración actual a una posterior requerida. Las trayectorias se describen en el espacio operativo del robot y luego se usa la cinemática inversa para calcular q_{di} , para $i = 1, 2$ (Slotine y Li, 1991). La trayectoria deseada es un círculo en el plano yz definido por

$$y_{d1} = y_{c1} + r \sin(\omega(t - t_i)) \quad (115)$$

$$z_{d2} = z_{c2} - r \cos(\omega(t - t_i)) \quad (116)$$

donde r es el radio, el centro del círculo se define como (y_{c1}, z_{c2}) , t_i tiempo inicial, t_f tiempo final, ω es un polinomio de quinto orden que satisface $\omega(t_i) = \omega(t_f) = 0$. Las derivadas de ω también son cero en t_i y t_f (Spong *et al.*, 2006). El esquema de control ha sido programado con un tiempo de muestreo de 5 ms (lo más rápido posible permitido por la computadora). El experimento dura 18 segundos desde el momento en que se sostiene el objeto.

4.3. Parámetros experimentales

La tarea que debe realizar el sistema cooperativo es agarrar un objeto y seguir la trayectoria deseada aplicando la fuerza deseada. Los parámetros se muestran en la **Tabla 1**.

Tabla 1: Parámetros usados en los experimentos.

Parámetro	Valor	Unidades
Centro de la trayectoria A255	(0.4900, 0.5500)	[m]
Centro de la trayectoria A465	(0.5550, 0.5500)	[m]
Radio	0.0500	[m]
Punto inicial A255	(0.4900, 0.5027)	[m]
Punto inicial A465	(0.5500, 0.5027)	[m]
Tiempo de ejecución	18.000	[s]
Masa del objeto	0.3500	[Kg]
Dimensiones del objeto	0.15 \times 0.15 \times 0.311	[m]

Se considera conocida la ubicación del centro de masa del objeto, no así su peso. Los parámetros de la ley de control y la señal de referencia se describen en la **Tabla 2**.

Tabla 2: Ganancias del sistema

Parámetro	A255	A465
Δ_i	{150.0, 150.0, 20.00}	{600.00, 600.00, 250.0}
K_i	{8.090, 8.090, 0.809}	{14.562, 14.562, 3.236}
K_{Di}	{16.18, 16.18, 8.090}	{16.180, 16.180, 8.090}
ξ_1	1.618	1.618
γ	0.0007	0.0007

4.4. Resultados

La Figura 5 muestra la trayectoria seguida por los robots en el plano yz. Como se observa ambos robots siguen la trayectoria deseada sujetando el objeto.

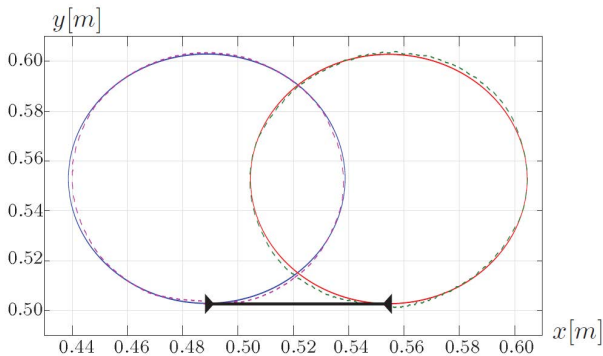


Figura 5: Trayectoria en el plano yz. Trayectoria deseada A255 (—), Trayectoria seguida por el robot A255 (- - -), Trayectoria deseada A465 (—), y Trayectoria seguida por el robot A465 (- - -).

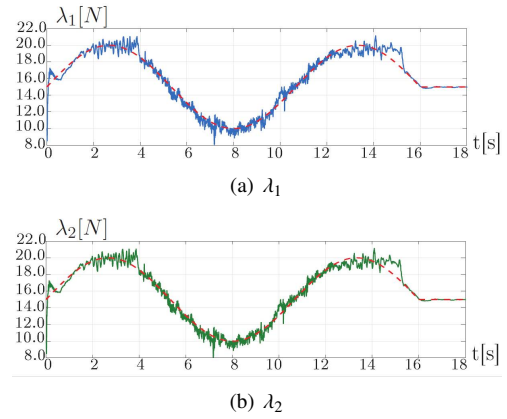


Figura 6: Seguimiento de fuerza. Fuerza aplicada por el robot A255 (- - -), fuerza aplicada por el robot A465 (- - -) y fuerza deseada (—).

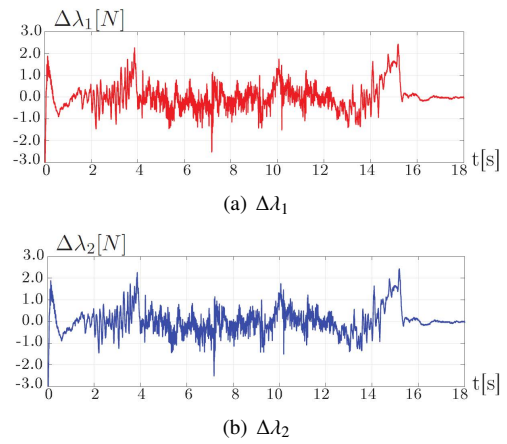


Figura 7: Error de fuerza

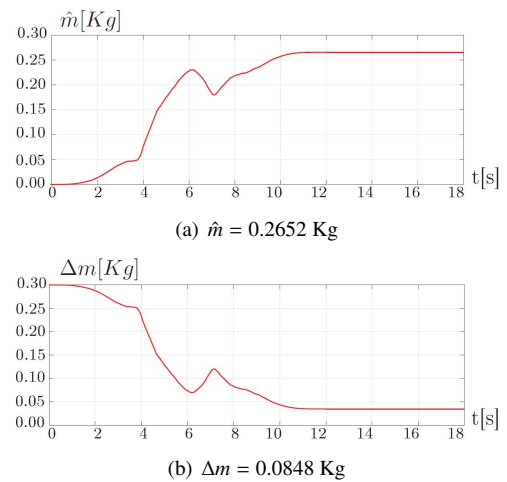


Figura 8: Masa estimada y error paramétrico.

La fuerza aplicada por los manipuladores se muestra en la Figura 6. Las variaciones que se observan son debido al seguimiento de la trayectoria deseada. El error de fuerza para ambos manipuladores se encuentra en el rango de ± 1 N, Figura 7. Durante el experimento se estima la masa del objeto, Figura 8(a), con un error paramétrico que converge a 0.00848 Kg, Figura 8(b). El error paramétrico Δm no tiende a cero debido a que la masa m es desconocida y se realiza solo una aproximación. Este hecho físico hace que, al ser el error paramétrico Δm parte del estado x , la demostración de convergencia y acotamiento del estado se divide en dos elementos x_a y Δm , tal y como se observa en (39). Se ha demostrado que x_a está acotada y converge a cero, mientras que del error paramétrico Δm solo se demuestra que está acotado. La Figura 10 muestra el seguimiento de la trayectoria deseada (en coordenadas articulares) por los robots A255 y A465, mientras que en la Figura 11 se muestra el error al seguir dicha trayectoria. De las Figuras 10 y 11 se puede concluir que los robots son capaces de seguir, a través del uso del control propuesto, la trayectoria deseada con un error muy cercano a cero. Mientras que de las Figuras 6 y 7 se puede inferir que los robots aplican la fuerza necesaria para no dejar caer el objeto, lo que les permite seguir la trayectoria deseada, tal y como se observa en la Figura 5. Cabe mencionar que la fuerza que aplican los robots depende de la estimación de la masa, la cual se obtiene durante la ejecución de la tarea, Figura 8.

4.5. Índice de desempeño

Como el control propuesto está basada en Gudiño y Artega (2003), se realiza la comparación entre ambos controles bajo las mismas condiciones. Es posible realizar la comparación del desempeño de los controladores usando el valor escalar estándar de la norma \mathcal{L}_2 , que es una medida objetiva de la curva

de error numérico. La norma \mathcal{L}_2 mide el promedio cuadrático medio del error y está definida como

$$\mathcal{L}_2\{\tilde{(\cdot)}\} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_1} \|\tilde{(\cdot)}\|^2 dt}. \quad (117)$$

donde $\tilde{(\cdot)}$ representa una función de error del parámetro físico analizado (posición, fuerza, etcétera), y $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$ son los tiempos inicial y final, respectivamente. Un pequeño valor de \mathcal{L}_2 representa un pequeño error de la variable analizada; por lo tanto, el valor más pequeño de \mathcal{L}_2 representa el error más pequeño que indica el mejor rendimiento. Como se observa en la Figura 9 y en la Tabla 3 el control propuesto tiene un mejor desempeño que el control planteado en (Gudiño y Arteaga, 2003).

Tabla 3: índice de desempeño

Control	\mathcal{L}_2	Unidades
Propuesto	0.46231	[m]
en (Gudiño y Arteaga, 2003)	0.36125	[m]

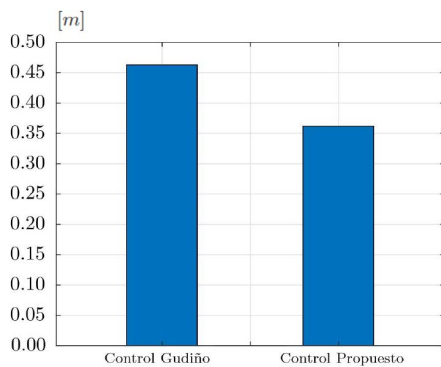


Figura 9: Índice de desempeño.

5. Conclusión

Se diseñó una estructura de control usando una modificación del principio de ortogonalización, que consiste en incorporar la función tangente hiperbólica en el término de fuerza y agregar un término que contenga la masa estimada. La ley de control propuesta mejora el desempeño del término de fuerza lo que permite cumplir la tarea designada a pesar de estar manipulando un objeto de masa desconocida. Como caso de estudio, se analizó un sistema formado por dos manipuladores. Una vez que los manipuladores sostienen el objeto, sus variables se acoplan cinemática y dinámicamente con el modelo dinámico del objeto para obtener una descripción completa del sistema cooperativo. El control propuesto es descentralizado; es decir, tiene en cuenta las restricciones de movimiento en lugar de la dinámica del objeto a manipular. A pesar de que el análisis de estabilidad es complejo, el controlador no lo es. Se supone que la dinámica del robot es conocida y que usando la diferenciación numérica se tiene acceso a la velocidad. Se cuenta con la medición de las fuerzas de contacto gracias a los sensores de fuerza colocado en los efectores finales de los robots. Los resultados teóricos se validan con un experimento cuyo objetivo es aplicar una fuerza sobre un objeto de masa desconocida y seguir la trayectoria deseada. La aplicación de la fuerza se mantiene todo el experimento lo que evita que el objeto caiga.

Trabajo futuro

El siguiente paso es implementar observadores de velocidad para mejorar el desempeño del control al seguir la trayectoria deseada aplicando la fuerza necesaria para no dejar caer el objeto realizando la debida demostración de estabilidad usando la teoría de Lyapunov.

Agradecimientos

Los autores agradecen a **PRODEP (PROMEP)** con el folio **BUAP-811** y al proyecto **PAPIIT IN117820**.

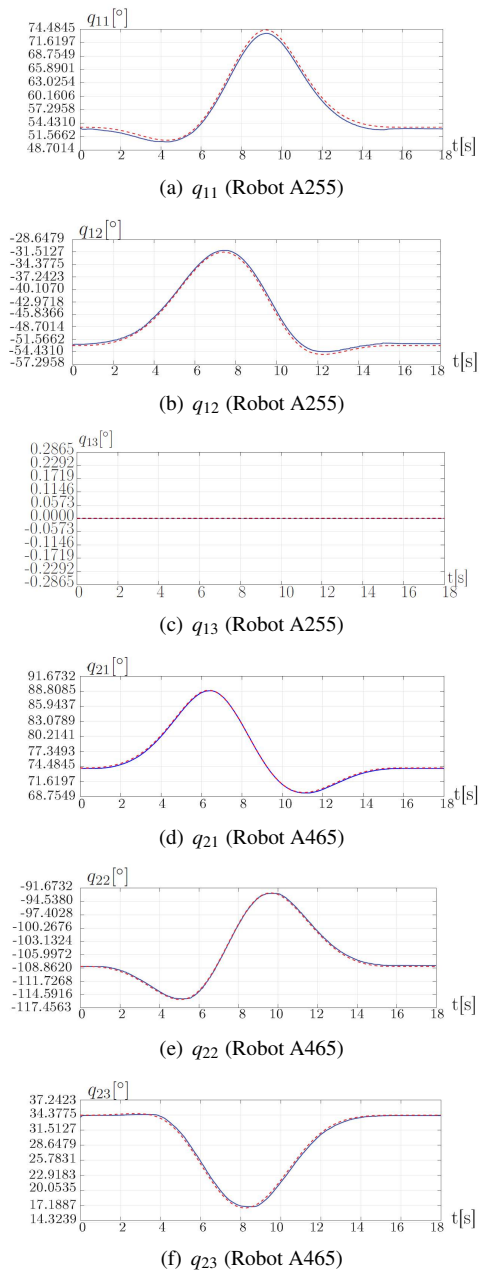


Figura 10: Seguimiento de posición en coordenadas articulares. Trayectoria deseada (---) y trayectoria seguida por el robot (—).

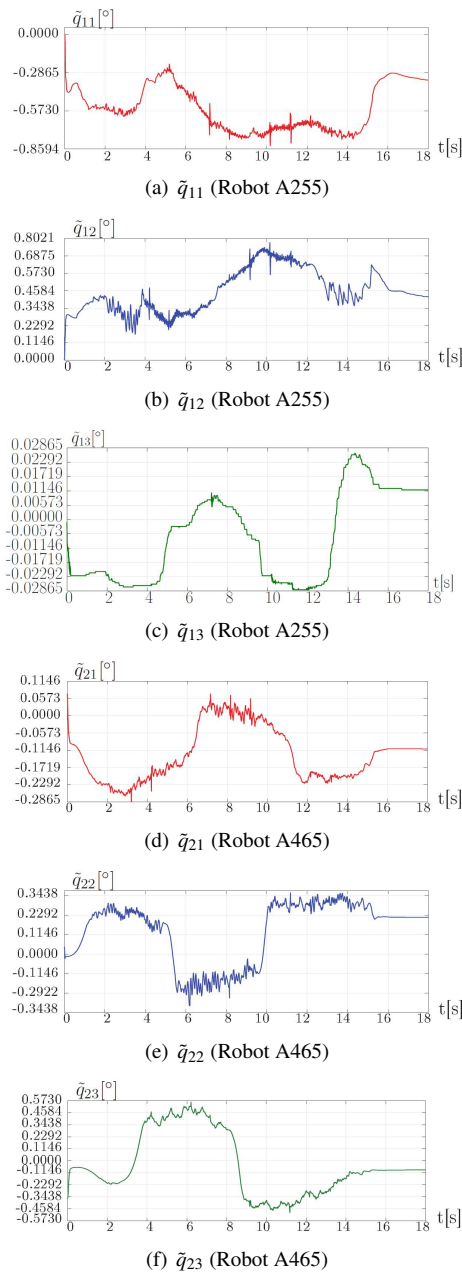


Figura 11: Error de posición en coordenadas articulares.

Referencias

Arimoto, S. and Liu, Y. H. and Naniwa, T., 1993. Principle of Orthogonalization for Hybrid Control of Robot Arms. Proceedings of the IFAC 12th Triennial World Congress. Volume 26, Issue 2, Part 3, 335–340. Sidney, Australia.
 DOI: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)48744-1](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)48744-1)

Arimoto, S. and Liu, Y. H. and Naniwa, T., 1993. Model-Based Adaptive Hybrid Control for Geometrically Constrained Robots. Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. 618–623. Atlanta, GA, USA.
 DOI: 10.1109/ROBOT.1993.292047

Dauchez, P. and Zapata, R., 1985. Co-ordinated control of two cooperative manipulators: the use of a kinematic model. Proceedings 15th Int. Symp. Industrial Robots. 641–648. Tokyo, Japan.

Fujii, S. and Kurono, S., 1975. Coordinated computer control of a pair of manipulators. Proceedings 4th IFToMM World Congress, University of Newcastle upon Tyne. 411–417. England.
 DOI: 10.1299/jsmemag.78.682.804

Gudiño-Lau, J. and Arteaga-Pérez, M. A., 2003. Force Control with a Velocity Observer. Proc. European Control Conference (ECC 2003). 52–55. Cambridge, UK.
 DOI: 10.23919/ECC.2003.7086506

Gudiño-Lau, J. and Arteaga-Pérez, M. A. and Muñoz, L. A. and Parra-Vega, V., 2004. On the control of cooperative robots without velocity measurements. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 12 (4) 600–608.
 DOI: 10.23919/ECC.2003.10.1109/TCST.2004.824965

Hayati, S., 1986. Hybrid position/force control of multi-arm cooperating robots. Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 82–89. San

Francisco, CA, USA.
 DOI: 10.1109/ROBOT.1986.1087650

Hwang, G. and Hashimoto, H. and Szemes, P. and Ando, N., 2005. An evaluation of grasp force control in single-master multi-slave tele-micromanipulation. Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2179–2184. Alberta, Canada.
 DOI: 10.1109/IR05.2005.1545074

Kelly, R. and Santibáñez, V., 2003. Control de Movimiento de Robots Manipuladores, Pearson Prentice-Hall, Madrid, España.
 ISBN-10: 8420538310 / ISBN-13: 9788420538310

Khalil, H. K., 1996. Nonlinear Systems (2nd Ed), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
 ISBN-10: 9332542031 / ISBN-13: 978-9332542037

Khatib, O., 1987. A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation. IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. 3(1), 43–53.
 DOI: 10.1109/JRA.1987.1087068

Koivo, A. J. and Bekey, G. A., 1987. Report of the Workshop on Coordinated Multiple Robot Manipulators: Planning, Control and Applications. IEEE Transactions on Robotics and Automation (IEEE Trans Robot Autom), 4(1) 91–93.
 ISSN: 1042-296X

McClamroch, N. H., 1986. Singular systems of differential equations as dynamic models for constrained robot systems. Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, CA, USA 21–28
 DOI: 10.1109/ROBOT.1986.1087712

McClamroch, H. and Wang, D., 1990. Linear feedback control of position and contact force for a nonlinear constrained mechanism. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 112(4), 640–645.
 DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2896189>

Murphey, T. D. and Horowitz, M., 2008. Adaptive cooperative manipulation with intermittent contact. Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Pasadena, California. USA 1483–1488
 DOI: 10.1109/ROBOT.2008.4543411

Nakano, E. and Ozaki, S. and Ishida, T. and Kato, I., 1974. Cooperational control of the anthropomorphic manipulator MELARM. Proceedings 4th Int. Symp. Industrial Robots, 251–260. Tokyo, Japan.

Naniwa, T. and Arimoto, S. and Parra-Vega, V., 1994. A model-based adaptive control scheme for coordinated control of multiple manipulators. Proceedings of the IEEE/RSJ/IGI International Conference on Intelligent Robots and Systems, Munich, Germany 695–702.
 DOI: 10.1109/IR05.1994.407357

Pliège-Jiménez, J. and Arteaga-Pérez, M., 2017. On the adaptive control of cooperative robots with time-variant holonomic constraints. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 31(8) 1217–1231.
 DOI: 10.1002/acs.2758

Rahman, S. M. M. and Ikeura, R., 2012. Weight-perception-based novel control for cooperative lifting of objects with a power assist robot by two humans. International Conference on Biomedical Robotics and Biomechanics (BioRob), Rome, Italy 228–233.
 DOI: 10.1109/BioRob.2012.6290259

Raibert, M. and Craig, J., 1981. Hybrid position/force control of manipulators. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 103(2), 126–133.
 DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3139652>

Rivera-Dueñas, J. C. and Arteaga-Pérez, M. A., 2013. Robot force control without dynamic model: Theory and experiments. Robotica, Vol. 31(1) 149–171.
 DOI: <https://doi.org/10.1017/S026357471200015X>

Rugthum, T. and Tao, G., 2014. An adaptive actuator failure compensation scheme for a cooperative manipulator system. Proc. American Control Conference, Portland, Oregon, USA 1951–1956.
 DOI: 10.1109/CDC.2015.7403208

Sánchez-Sánchez, P. and Arteaga-Pérez, M. A., 2017. Improving force tracking control performance in cooperative robots. International Journal of Advanced Robotic Systems, 14(4) 1–15.
 DOI: <https://doi.org/10.1177/1729881417708969>

Slotine, J. J. E. and Li, W., 1991. Applied Nonlinear Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
 ISBN-10: 0130408905 / ISBN-13: 978-0130408907

Spong, M. W. and Hutchinson, S. and Vidyasagar, M., 2006. Robot Modeling and Control. John Wiley and Sons, USA.
 ISBN-10: 0471649902 / ISBN-13: 978-0471649908

Tarn, T. J. and Bejczy, A. K. and Yun, X., 1988. New nonlinear control algorithms for multiple robot arms. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 24(5) 571–583
 DOI: 10.1109/7.9685

Uchiyama, M. and Iwasawa, N. and Hakomori, K., 1987. Hybrid position/force control for coordination of a two-arm robot. Proceedings of 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1242–1247, Raleigh, NC, USA
 DOI: 10.1109/ROBOT.1987.1087766

Uchiyama, M. and Dauchez, P., 1988. A symmetric hybrid position/force control scheme for the coordination of two robots. Proceedings of 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 350–356, Philadelphia, PA, USA
 DOI: 10.1109/ROBOT.1988.12073

Uchiyama, M. and Dauchez, P., 1993. Symmetric kinematic formulation and non-master/slave coordinated control of two-arm robots. Journal Advanced Robotics. 7(4) 361–383.
 DOI: <https://doi.org/10.1163/156855393X00221>

Yun-Hui, L. and Parra-Vega, V. and Arimoto, S., 1996. Decentralized Cooperation Control: Joint-Space Approaches for Holonomic Cooperations. Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, Minnesota 2420–2425.
 DOI: 10.1109/ROBOT.1996.506526