

# Funciones analíticas a partir de un modelo estocástico de las extracciones de una presa hidroeléctrica después de la temporada de lluvias

## *Analytical functions from a stochastic model for extractions of a hydroelectric reservoir after the rainy season*

De la Cruz-Courtois, O.A.<sup>a</sup>, Guichard, D.<sup>b</sup>, Arganis, M.L.<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Chiapas, C.P. 29050, Chiapas, México.  
E-mail: <sup>a</sup>omar.courtois@unach.mx

<sup>b</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas, C.P.29000, Chiapas, México.  
E-mail: <sup>b</sup>dguich@unach.mx

<sup>c</sup>Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Ingeniería, C.P. 04510, Ciudad de México, México.  
E-mail: <sup>c</sup>marganisj@iingen.unam.mx

Recibido: 06/09/2019

Aceptado: 21/09/2020

Publicado: 31/10/2020

**Citar como:** De la Cruz-Courtois, O.A., Guichard, D., Arganis, M.L. 2020. Analytical functions from a stochastic model for extractions of a hydroelectric reservoir after the rainy season. *Ingeniería del agua*, 24(4), 235-253. <https://doi.org/10.4995/ia.2020.12311>

---

## RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo el planteamiento de ecuaciones estocásticas para la resolución de los niveles de embalse de un sistema hidroeléctrico que opera en cascada a través de 2 presas, en los meses posteriores a la época de lluvias, específicamente, los meses de noviembre y diciembre. A partir de los modelos de control markovianos se establecen el espacio de estados, el espacio de acciones, el kernel de transición y las funciones de ganancia y costo, para luego proponer una función objetivo que maximice una ecuación de optimalidad mediante variables continuas. Como resultado se determinan ecuaciones de los beneficios esperados en unidades energéticas de GW-hora, así como un modelo de políticas óptimas basado en estados continuos. En conclusión, se obtiene un conjunto de funciones analíticas que dependen de la época del año y los volúmenes actuales de cada uno de los embalses, para así determinar la mejor política de decisión para obtener el mayor beneficio de energía sin poner en riesgo la seguridad de la población por posibles derrames y minimizando déficits.

**Palabras clave** | modelo de control Markoviano; espacio de estados continuos; espacio de acciones; energía; sistema hidroeléctrico.

---

## ABSTRACT

*The objective of the present work is the approach of stochastic models that allow to determine the level of a hydroelectric system that operates in cascade through two reservoirs, in the months after the rainy season, specifically, the months of November and December. The components that determine the control model are the state space, the action set, the transition kernel, and the so-called reward and cost functions, and with them it is proposed to maximize the optimality equation through the objective function by continuous variables. The result is the obtaining of benefit equations given in GW-hour, as well as obtaining an optimal policy model through the continuous states. It is concluded that analytical functions can be obtained that only depend on the current volumes of the reservoirs and the time of the year, and thereby establish the optimal policy to maximize energy and minimize spills avoiding situations of risk to the population and minimizing deficits.*

**Key words** | Markovian control model; continuous state space; action set; energy; hydroelectric system.

## INTRODUCCIÓN

Los modelos de optimización para sistemas de embalses se han desarrollado desde los últimos 60 años. Las técnicas han evolucionado desde métodos analíticos hasta complejos sistemas. Domínguez y Arganis (2001) adaptaron los modelos de optimización de políticas de extracciones de un sistema de presas, considerando el valor relativo de la energía llamada de pico respecto a la energía llamada de base, incorporando restricciones de energía mínima propuesta por la Comisión Federal de Electricidad (CFE) de México. Sánchez y Andreu (2002) trabajaron la expansión óptima de sistemas de recursos hídricos superficiales; presentaron dos sistemas para ser ampliados de manera óptima en su infraestructura hidráulica a partir de algoritmos genéticos en España. Sánchez y Wagner (2003) determinaron reglas de operación óptima para dos embalses utilizando un algoritmo genético en el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA) en México. Barros (2003) utilizó un modelo donde unió la Programación Lineal, la Programación No Lineal y la Programación Lineal Sucesiva, en donde mediante un algoritmo de series de Taylor buscó la convergencia a una política óptima a través de algoritmos computacionales. Asimismo, Sánchez y Wagner (2004) modelaron numéricamente la operación óptima de un hidrosistema de aguas superficiales. Ailing Li (2004) trabajó en un estudio a gran escala mediante un método de sistema de descomposición para determinar políticas óptimas de un sistema hidroeléctrico; esto lo empleó en sistemas de presas trabajando en serie en China. Labadie (2004) realizó una recopilación de diferentes modelos de optimización y los cataloga entre Modelos Explícitos Estocásticos de Optimización y Modelos Implícitos Estocásticos de Optimización; realiza un contraste entre la Programación lineal, la programación dinámica determinista, la programación dinámica estocástica y los métodos computacionales.

Domínguez et al. (2006) generaron nuevas políticas de operación para los sistemas hidrológicos de México, considerando avenidas y eventos extremos meteorológicos. Labadie y Lee (2007) utilizaron el método de Aprendizaje Reforzado, donde a partir de una discretización del tiempo, tratando de corregir deficiencias de otros métodos en el área de la alta dimensionalidad de los espacios de estados en los almacenamientos hidroeléctricos; además, contrastó el método con la programación dinámica estocástica implícita y la programación dinámica estocástica de muestreo. Arganis et al. (2008) realizaron estudios de la operación de un sistema de presas en cascada para generación hidroeléctrica tomando en cuenta condiciones reales de operación y el uso de muestras sintéticas para pronósticos. En dicho estudio se justificó el uso de la programación dinámica estocástica demostrando que de haber empleado sus políticas propuestas, se hubieran evitado problemas de pérdidas de energía y daños materiales provocados en 1998 y 2001 en el Sureste de México, debido a las inundaciones. También dichos autores realizaron simulaciones para determinar si era más viable construir obras de protección para inundaciones y no imponer restricciones a los niveles de una presa, o el hecho de poner restricciones a los niveles y no construir dichas obras. Por medio de un análisis estadístico estimó que a largo plazo conviene construir obras de protección y con la energía extra generada pagar los gastos de la inversión en plazos inferiores a los 15 años. Arganis et al. (2008) también incorporaron al análisis dos requisitos de las dependencias gubernamentales; poder satisfacer las condiciones mínimas de energía mensual según la capacidad instalada a nivel nacional y también solventar la energía de pico con respecto a la energía de base.

Abolghasemi (2008) utilizó un modelo de programación lineal a partir de 5 centrales hidroeléctricas y un canal en el lago de Columbia Británica. Alegría (2010) obtuvo políticas de operación óptima del sistema de presas del Río Grijalva considerando los efectos de la curva guía. Rani y Moreira (2010) realizaron una encuesta sobre diferentes modelos de optimización y simulación de embalses. Además incorporaron algoritmos basados tanto en la simulación como en la modelación en conjunto, tales como programación dinámica programación no lineal, algoritmos genéticos, lógica difusa y computación evolutiva. Rani y Moreira (2010) realizaron un estudio de los diferentes modelos de optimización como la Programación Lineal, Programación No lineal, programación dinámica determinista y estocástica, computación evolutiva, teoría de conjuntos difusos, redes neuronales artificiales, técnicas de optimización a largo plazo, optimización multiobjetivo, entre otros, así como un estudio de diferentes modelos de simulación y algoritmos computacionales, explicando ventajas, desventajas y todas las variantes de los diferentes códigos y algoritmos empleados en los sistemas hidroeléctricos. Asmadi y Ahmed (2014) desarrollaron algoritmos computacionales para optimización de almacenamientos de agua. A través de la computación evolutiva y optimización multiobjetivo construyeron políticas de niveles de embalse adjuntando variables del tipo de cambio climático. Además propusieron adjuntar nuevas técnicas como la ABS (*Artificial Bee Colony*) y la GSA (*Gravitational Search Algorithm*). Vijendra y Yadab (2018) desarrollaron los algoritmos llamados TLBO (*Teaching Learned Based Optimization*) y JA (*Jaya Algorithm*) para trabajar múltiples embalses controlando las variables poblacionales para incorporar los cálculos en presas hidroeléctricas que operan en cascada. De la

Cruz-Courtois et al. (2018) determinaron políticas de operación óptima para presas a partir de modelos estocásticos de control markoviano, considerando los niveles del embalse como estados continuos, para presas de generación hidroeléctrica. A partir de los registros de escurrimientos históricos, desarrollaron un modelo probabilístico y con restricciones propuestas por dependencias del gobierno, calcularon las extracciones permitidas posibles de cada embalse.

El presente trabajo es un Modelo de Control Markoviano, el cual parte de los principios de los modelos de la programación dinámica estocástica, pero con la diferencia importante que el tratamiento analítico de los estados se aproxima mediante funciones continuas, y la incertidumbre se plantea a partir de las funciones de distribución de probabilidad.

## Planteamiento del problema y justificación

Existen diversos problemas a resolver cuando se trata del manejo y gestión de un sistema hidroeléctrico. Uno de ellos es satisfacer las demandas inusuales o excesivas de energía en intervalos cortos de tiempo. Otro consiste en determinar qué cantidad de agua se debe almacenar para los siguientes días, o semanas o meses, previendo las temporadas de sequías próximas. Debe existir un balance entre la cantidad de agua almacenada para garantizar las demandas de energía y evitar posibles desbordes por un sobrealmacenamiento. El número de variables a considerar aumenta si el sistema opera en forma múltiple, es decir, si los objetivos de éste no son sólo energéticos, sino también recreativos, de navegación, de riego o abastecimiento de agua (Rani y Moreira, 2010; Crichigno y Talavera, 2012).

El satisfacer demandas energéticas implica niveles altos en el embalse de la presa, esto implica posibilidades de desborde en la cortina, o bien el requerimiento de apertura de las obras de excedencia, llámense canales vertedores o compuertas de emergencia. Maximizar los niveles puede ser sinónimo de maximizar riesgos aguas abajo de la presa, y esto se traduce en posibles inundaciones en las zonas inmediatas; sobre todo, cuando los ingresos de agua a la presa dependen de las condiciones meteorológicas inciertas de la región. En este sentido, disponer de una política que determine el nivel de un embalse, estará ligado a la disposición de la información de las precipitaciones cercanas a la zona, ya que los niveles de agua se verán afectados, no sólo por la cantidad de agua que llueva en el lugar, sino por el agua acumulada en la cuenca propia a través de escurrimientos. Esta información depende de las mediciones meteorológicas directas o indirectas con que se cuente en el lugar de estudio.

El grado de incertidumbre afectará la toma de decisiones a corto y a largo plazo. La complejidad del sistema se incrementará debido a las variaciones impredecibles del clima con respecto al tiempo, y los modelos que planteen soluciones del problema deben ser capaces entonces de cubrir tantos los requerimientos energéticos como los requerimientos de seguridad operacional.

## Modelo de control de Markov

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X_t; t \in T\}$  parametrizada por un conjunto  $T$  que se le conoce como espacio parametral, donde las variables se toman sobre un conjunto llamado espacio de estados (Rincón, 2012). Un proceso de Markov es un modelo donde una vez que se conoce el estado actual del sistema, los estados pasados no influyen en los estados futuros del sistema. Matemáticamente, una propiedad se dice markoviana si dados los estados  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$  se cumple que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (1)$$

donde  $P$  significa la probabilidad condicional de los estados. Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto, es decir,  $\{X_n; n=0,1,2,\dots\}$  con espacio de estados discreto tal que cumple

$$P(x_{n+1} | x_0, x_1, \dots, x_n) = P(x_{n+1} | x_n) \quad (2)$$

para cualquier  $n \geq 0$  y para cualesquiera estados  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ .

Cuando se necesitan tomar decisiones por etapas se emplea la programación dinámica. El objetivo de la programación dinámica es optimizar los costos mediante expresiones analíticas. De acuerdo con Bertsekas (1995) un sistema dinámico tiene la forma

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

donde  $k$  es el índice del tiempo discreto,  $x_k$  es el estado del sistema al tiempo,  $k$ ,  $u_k$  es la variable de decisión,  $w_k$  es la variable de ruido o disturbio y  $N$  es el número de veces donde se aplica el control, también llamado el horizonte.

Un modelo de control de Markov es un sexteto

$$\{X, A, A(x): x \in X, Q, r, c\} \quad (4)$$

donde  $X$  es el espacio de estados,  $A$  es el espacio de control o también llamado el conjunto de acciones,  $A(x)$  es el conjunto de acciones admisibles dado el estado  $x \in X$ ,  $Q$  es la ley de transición dada por un kernel estocástico en  $X$ , dado  $(X, A)$ , y  $r$  y  $c$  son las funciones de ganancia y de costo, respectivamente (Hernández-Lerma y Laserra, 1991), (Mendoza et. al., 2016).

## Aspectos hidrológicos y técnicos

El escurrimiento se define como el agua proveniente de la precipitación que circula sobre o debajo de la superficie terrestre y que llega a una corriente para finalmente ser drenada hasta la salida de la cuenca (García, 1992). Con los volúmenes de escurrimientos en una determinada sección del cauce se construye el hidrograma, en donde se representa el volumen de escurrimiento por unidad de tiempo que pasa de manera continua durante todo un año. Los registros históricos de escurrimientos del presente trabajo se pueden consultar en los trabajos de Arganis et al. (2008) y Alegría (2010), que son casos particulares del área de estudio. Estos registros históricos van desde el año 1952 hasta el año 2017. Con el volumen de escurrimiento se calcula el gasto que circula por una sección, y con ello se determina la curva elevación-gasto. En los trabajos de Domínguez y Arganis (2001) y Arganis et al. (2008) se presentan diferentes cálculos para obtener estas curvas.

Los componentes de un vaso de almacenamiento son el NAMINO (nivel de aguas mínimas de operación), el NAMO (nivel de aguas máximas ordinarias) y el NAME (nivel de aguas máximas extraordinarias). Se pueden consultar los trabajos de Quitana (1981), García (1992) y Alegría (2010), para conocer estos componentes en diferentes partes de México.

Los modelos hidrológicos con ecuaciones estocásticas se han estudiado en los trabajos de Butcher (1971), Yakowitz (1982), Wurbs (1993) y Eschenbach (2001), Labadie (2004), Domínguez et al. (2006), Arganis (2008), Rani y Moreira (2010) y Alegría (2010) introduciendo diferentes parámetros probabilísticos en relación a los escurrimientos y los niveles alcanzados en un embalse, y dividiendo dichos niveles en intervalos discretos. El presente trabajo plantea una metodología a partir de intervalos continuos de los diferentes niveles.

## Objetivo general

El objetivo del presente artículo es obtener un conjunto de ecuaciones analíticas que modelen la generación de energía de presas hidroeléctricas que forman un sistema en cascada empleando técnicas de optimización de control óptima para sistemas markovianos a horizonte infinito en temporada posterior a la época de lluvias.

## Objetivos específicos

1. Determinar el espacio de estados, el espacio de acciones, el espacio de acciones admisibles, la ley de transición y las funciones de ganancia y costo, para integrar un modelo de control de Markov para el sistema hidroeléctrico.
2. Determinar las ecuaciones analíticas de las políticas óptimas en el embalse.
3. Calcular los beneficios esperados del sistema en conjunto.

## MATERIAL Y MÉTODOS

### Modelo de Markov

La Figura 1 presenta el diagrama de flujo del algoritmo utilizado para la obtención de las políticas de operación óptima en forma de funciones analíticas. Estos pasos se detallan a continuación.

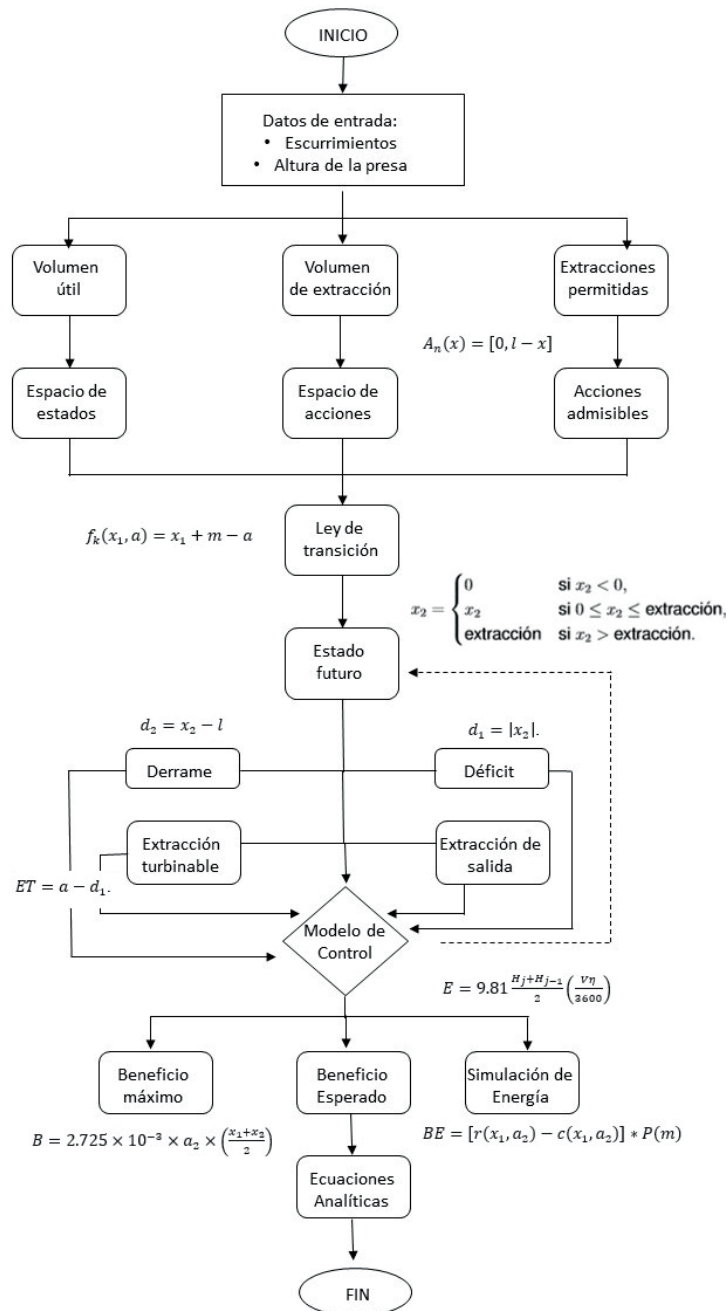


Figura 1 | Diagrama de flujo de la metodología utilizada.

Se calcularon los distintos volúmenes útiles que puede alcanzar el embalse hidroeléctrico. Esto representa el espacio de estados y se determinaron en forma de intervalos cerrados de números reales. Para esto, se tomaron datos físicos de los trabajos de Arganis et al. (2008) y Alegría (2010). Análogamente se calcularon los volúmenes posibles para extraer de cada una de las presas. Estos volúmenes fueron los límites máximos de extracción, y representan el espacio de acciones y también se expresaron en intervalos cerrados. Estos datos se tomaron del trabajo de De la Cruz-Courtois et al. (2018). Luego se calcularon las extracciones físicamente permitidas de acuerdo al nivel en que se encuentra la presa al momento de la toma de decisión. Estas extracciones representan el espacio de acciones admisibles y se plantearon mediante la expresión

$$A_n(x) = [0, l - x] \quad (5)$$

donde  $A_n(x)$  es la extracción que se realizará en millones de  $m^3$ ,  $n$  es la etapa,  $l$  el límite máximo de extracción en millones de  $m^3$  y  $x$  el nivel actual de la presa también en millones de  $m^3$ .

Se calculó el estado futuro de una presa, dado que se tenía el estado inicial a partir de la siguiente ley de transición

$$f_k(x_1, a) = x_1 + m - a \quad (6)$$

donde  $a$  es una acción admisible,  $x_1$  es el estado actual,  $m$  es el ingreso de lluvias y  $k$  la presa analizada; cada uno de estos factores en millones de  $m^3$ .

Para la función de ganancia y la función de costo se promuso la expresión que se observa en la ecuación (7)

$$x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x_2 < 0, \\ x_2 & \text{si } 0 \leq x_2 \leq \text{extracción}, \\ \text{extracción} & \text{si } x_2 > \text{extracción}. \end{cases} \quad (7)$$

donde las extracciones dependerán de los niveles útiles de cada una de las presas, dados en millones de  $m^3$ .

## Beneficios

El beneficio dependió de manera directa si existieron déficits en la generación de energía o si existieron derrames por excedencia. El derrame se calculó mediante la expresión

$$d_2 = x_2 - l \quad (8)$$

donde  $d_2$  es el derrame,  $x_2$  es el estado final y  $l$  es el límite máximo, todo en millones de  $m^3$ . El déficit se calculó por la expresión

$$d_1 = |x_2| \quad (9)$$

La extracción que pasa por las turbinas se calculó con la expresión

$$ET = a - d_1 \quad (10)$$

La extracción de salida se calculó con la expresión  $a_1 = d_2 + ET$  y el beneficio medido en kilowatt-hora se calculó con la expresión

$$B = 2.725 \times 10^{-3} \times a_2 \times \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \quad (11)$$

En este caso la ganancia y el costo se calcularon mediante las expresiones

$$r(x_1, a_2) = B \text{ y } c(x_1, a_2) = d_1 * coef_1 + d_2 * coef_2 \quad (12)$$

donde  $coef_1$  y  $coef_2$  son coeficientes de penalización por déficit y derrame, respectivamente. Estos coeficientes se tomaron del trabajo de Arganis (2008).

El beneficio esperado se calculó con la ecuación

$$BE = [r(x_1, a_2) - c(x_1, a_2)] * P(m) \quad (13)$$

en unidades de kilowatt-hora, donde  $P(m)$  es la probabilidad de que se presentara un ingreso de  $m$  millones de  $m^3$ . Y el beneficio esperado máximo se calculó con la expresión

$$BEM = \int_0^e BE dx_1 \quad (14)$$

donde  $e$  es el estado máximo, en millones de  $m^3$ . Finalmente, el beneficio esperado máximo total, fue la suma de los beneficios de las dos presas estudiadas, es decir

$$BET = BEM_1 + BEM_2 \quad (15)$$

donde  $BEM_1$  y  $BEM_2$  son los beneficios esperados para la presa 1 y la presa 2, respectivamente.

## Simulación de la energía

La energía generada se calculó con la siguiente expresión

$$E = 9.81 \frac{H_j + H_{j-1}}{2} \left( \frac{V \eta}{3600} \right) \quad (16)$$

donde  $H_j$  y  $H_{j-1}$  representan los niveles del embalse en metros,  $V$  el volumen turbinable en millones de  $m^3$  y  $\eta$  la eficiencia de la presa.

## RESULTADOS

En el presente trabajo se planteó un modelo matemático que determina las políticas óptimas de operación de un sistema de embalses que opera en cascada dependiendo de los niveles en que se encuentre. Los niveles se modelaron como intervalos continuos, y las extracciones deseadas como funciones analíticas que dependen de parámetros probabilísticos relacionados con los escurrimientos históricos hidrológicos que se tienen de la región. El trabajo es un planteamiento diferente a los trabajos realizados por Domínguez et. al (2006), Arganis et al. (2008) y Alegría (2010) en el sureste de México. Los datos de la región de estudio se pueden consultar en las referencias bibliográficas anteriores. Al final se obtuvo un conjunto de funciones analíticas que calculan las extracciones que debe realizar un operador dependiendo el nivel y la época del año, que en este caso, se delimitó a los meses de noviembre y diciembre; para que con ello se realizara una simulación de la energía posible que se puede generar con estas políticas determinadas. A continuación se detallan los resultados de este trabajo.

## Espacio de estados

En el modelo de control de Markov (véase ecuación (4)) el espacio de estados está representado por los diferentes volúmenes que puede tomar la presa. En el presente trabajo se consideraron 2 presas en cascada con volúmenes máximos de 6567 millones de m<sup>3</sup> y 3400 millones de m<sup>3</sup> respectivamente. Dichos volúmenes se calcularon mediante los niveles máximos y mínimos de cada una de las presas. Dichos cálculos se pueden encontrar en trabajos como los de Arganis et al. (2008), Alegría (2010) y De la Cruz-Courtois et al. (2018). Así pues, el espacio de estados para cada presa son los intervalos [0,6567] y [0,3400], respectivamente.

## Espacio de acciones

El espacio de acciones es la cantidad máxima de volumen que se puede extraer por cada presa y por etapa. La Tabla 1 muestra las extracciones posibles.

**Tabla 1** | Volúmenes máximos extraíbles por cada presa (De la Cruz-Courtois et al., 2018).

	Presa 1 (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> )	Presa 2 (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> )
Etapa 1	4769.28	6220.80
Etapa 2	2384.64	3110.40
Etapa 3	2384.64	3110.40
Etapa 4	2384.64	3110.40
Etapa 5	4769.28	6220.80
Etapa 6	11923.20	15552.00

Espacio de acciones: Presa 1: [0,4769.28], [0,2384.64], [0,2384.64], [0,2384.64], [0,4769.28] y [0,11923.20].

Espacio de acciones: Presa 2: [0,6220.80], [0,3110.40], [0,3110.40], [0,3110.40], [0,6220.80] y [0,15552.00].

## Espacio de acciones admisibles

De acuerdo con la ecuación (5) y el espacio de acciones de la parte anterior, se tiene que

Presa 1:

$$\begin{aligned}
 A_1(x) &= [0, 4769.28 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 2384.64 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 2384.64 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 2384.64 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 4769.28 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 11923.20 - x]
 \end{aligned} \tag{17}$$

Presa 2:

$$\begin{aligned}
 A_1(x) &= [0, 6220.80 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 3110.40 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 3110.40 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 3110.40 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 6220.80 - x] \\
 A_1(x) &= [0, 15552.00 - x]
 \end{aligned} \tag{18}$$



## Kernel de transición

De la expresión (6) se cumple que:

Presa 1:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, a_1) &= x_1 + m_1 - a_1, a_1 \leq 4769.28 - x_1 \\
 f_2(x_1, a_2) &= x_1 + m_2 - a_2, a_2 \leq 2384.64 - x_1 \\
 f_3(x_1, a_3) &= x_1 + m_3 - a_3, a_3 \leq 2384.64 - x_1 \\
 f_4(x_1, a_4) &= x_1 + m_4 - a_4, a_4 \leq 2384.64 - x_1 \\
 f_5(x_1, a_5) &= x_1 + m_5 - a_5, a_5 \leq 4769.28 - x_1 \\
 f_6(x_1, a_6) &= x_1 + m_6 - a_6, a_6 \leq 11923.20 - x_1
 \end{aligned} \tag{19}$$

Presa 2:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, a_1) &= x_1 + m_1 - a_1, a_1 \leq 6220.80 - x_1 \\
 f_2(x_1, a_2) &= x_1 + m_2 - a_2, a_2 \leq 3110.40 - x_1 \\
 f_3(x_1, a_3) &= x_1 + m_3 - a_3, a_3 \leq 3110.40 - x_1 \\
 f_4(x_1, a_4) &= x_1 + m_4 - a_4, a_4 \leq 3110.40 - x_1 \\
 f_5(x_1, a_5) &= x_1 + m_5 - a_5, a_5 \leq 6220.80 - x_1 \\
 f_6(x_1, a_6) &= x_1 + m_6 - a_6, a_6 \leq 15552.00 - x_1
 \end{aligned} \tag{20}$$

## Funciones de ganancia y costo

Las funciones de ganancia y costo se observan en las ecuaciones (21)

$$\begin{aligned}
 x_2 & \begin{cases} 0 & \text{si } x_2 < 0, \\ x_2 & \text{si } 0 \leq x_2 \leq 6567, \\ 6567 & \text{si } x_2 > 6567 \end{cases} \\
 x_2 & \begin{cases} 0 & \text{si } x_2 < 0, \\ x_2 & \text{si } 0 \leq x_2 \leq 3400, \\ 3400 & \text{si } x_2 > 3400 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{21}$$

## Beneficios

El beneficio de cada una de las presas se calculó con las siguientes expresiones

$$\int_0^{6567} \left( 2.725 \times 10^3 \times \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) - (d_1 c_1 + d_2 c_2) \right) * P(m_1) dx_1 \tag{22}$$

$$\int_0^{3400} \left( 2.725 \times 10^3 \times \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) - (d_1 c_1 + d_2 c_2) \right) * P(m_2) dx_1 \tag{23}$$

La solución de las ecuaciones (22) y (23) forman un conjunto de expresiones analíticas que se muestran a continuación.

## Ecuaciones analíticas de las políticas óptimas

El presente trabajo desarrolló un modelo de políticas óptimas basado en estados continuos. Dichos estados son los volúmenes del embalse. Las siguientes funciones analíticas dependen de la etapa del año y los volúmenes actuales de cada uno de los embalses. Para cada una de las etapas, los estados de la presa 2 recorren desde los 600 millones de m<sup>3</sup> en adelante. Para cada estado de la presa 2, se tienen 2 grupos de funciones, uno para la presa 1 y otro para la presa 2, las cuales representan las extracciones a realizar, en millones de m<sup>3</sup>, donde la variable representa el estado en la presa 1, el cual va desde los 600 millones de m<sup>3</sup> hasta el volumen máximo de 13200 millones de m<sup>3</sup>.

### Etapas 1.

Estado de presa 2: 600 millones de m<sup>3</sup>.

Presa 1:

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 600, & \text{si } 600 \leq x \leq 2400 \\ x - 1800, & \text{si } 2400 \leq x \leq 3600 \\ 1800, & \text{si } 3600 \leq x \leq 6600 \\ \frac{7}{3}x - 13600, & \text{si } 6600 \leq x \leq 7200 \\ 3600, & \text{si } 7200 \leq x \leq 7800 \\ 34800 - 4x, & \text{si } 7800 \leq x \leq 8400 \\ x - 7200, & \text{si } 8400 \leq x \leq 9000 \\ 1800, & \text{si } 9000 \leq x \leq 10800 \\ 3x - 30600, & \text{si } 10800 \leq x \leq 11400 \\ 3600, & \text{si } 11400 \leq x \leq 13200 \end{cases} \quad (24)$$

Presa 2:

$$\text{Extracción} = 1200, \text{ si } 600 \leq x \leq 13200 \quad (25)$$

Estado de presa 2: 1200 millones de m<sup>3</sup>.

Presa 1:

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 600, & \text{si } 600 \leq x \leq 2400 \\ x - 1800, & \text{si } 2400 \leq x \leq 3600 \\ 1800, & \text{si } 3600 \leq x \leq 6000 \\ 3x - 16200, & \text{si } 6000 \leq x \leq 6600 \\ 3600, & \text{si } 6600 \leq x \leq 8400. \\ 37200 - 4x, & \text{si } 8400 \leq x \leq 9000. \\ x - 7800, & \text{si } 9000 \leq x \leq 9600. \\ 1800, & \text{si } 9600 \leq x \leq 10200. \\ 3x - 28800, & \text{si } 10200 \leq x \leq 10800. \\ 3600, & \text{si } 10800 \leq x \leq 13200 \end{cases} \quad (26)$$

Presa 2.:

$$\text{Extracción} = 1200, \text{ si } 600 \leq x \leq 13200 \quad (27)$$

Estado de presa 2: 1800 millones de m<sup>3</sup>.

Presa 1:

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 600, & \text{si } 600 \leq x \leq 2400 \\ x - 1800, & \text{si } 2400 \leq x \leq 3600 \\ 1800, & \text{si } 3600 \leq x \leq 6000 \\ 3x - 16200, & \text{si } 6000 \leq x \leq 6600 \\ 3600, & \text{si } 6600 \leq x \leq 8400 \\ 37200 - 4x, & \text{si } 8400 \leq x \leq 9000 \\ x - 7800, & \text{si } 9000 \leq x \leq 9600 \\ 1800, & \text{si } 9600 \leq x \leq 10200 \\ 3x - 28800, & \text{si } 10200 \leq x \leq 13200 \end{cases} \quad (28)$$

Presa 2:

$$\text{Extracción} = 1200, \text{ si } 600 \leq x \leq 13200. \quad (29)$$

Estado de presa 2: 2400 millones de m<sup>3</sup>.

Presa 1:

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 600, & \text{si } 600 \leq x \leq 2400 \\ x - 1800, & \text{si } 2400 \leq x \leq 3600 \\ 1800, & \text{si } 3600 \leq x \leq 6000 \\ 3x - 16200, & \text{si } 6000 \leq x \leq 6600 \\ 3600, & \text{si } 6600 \leq x \leq 9000 \\ 30600 - 3x, & \text{si } 9000 \leq x \leq 9600 \\ 1800, & \text{si } 9600 \leq x \leq 10200 \\ 3x - 28800, & \text{si } 10200 \leq x \leq 10800 \\ 3600, & \text{si } 10800 \leq x \leq 13200 \end{cases} \quad (30)$$

Presa 2:

$$\text{Extracción} = 1200, \text{ si } 600 \leq x \leq 13200. \quad (31)$$

Estado de presa 2: 3000 millones de m<sup>3</sup>.

Presa 1:

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 600, & \text{si } 600 \leq x \leq 2400 \\ x - 1800, & \text{si } 2400 \leq x \leq 3600 \\ 1800, & \text{si } 3600 \leq x \leq 6000 \\ 3x - 16200, & \text{si } 6000 \leq x \leq 6600 \\ 3600, & \text{si } 6600 \leq x \leq 9000 \\ 30600 - 3x, & \text{si } 9000 \leq x \leq 9600 \\ 3x - 27000, & \text{si } 9600 \leq x \leq 10200 \\ 3600, & \text{si } 10200 \leq x \leq 13200 \end{cases} \quad (32)$$

Presa 2:

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 1200, & \text{si } 600 \leq x \leq 12600 \\ x - 11400, & \text{si } 12600 \leq x \leq 13200 \end{cases} \quad (33)$$

Estado de presa 2: 3600 millones de m<sup>3</sup>.

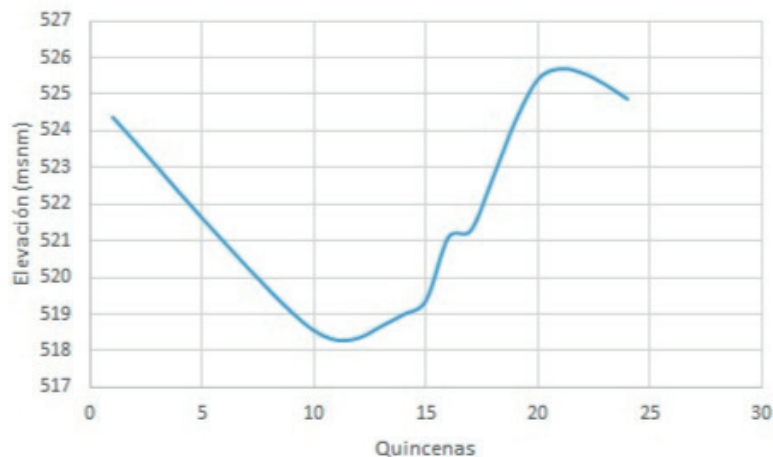
Presa 1:

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 600, & \text{si } 600 \leq x \leq 2400 \\ x - 1800, & \text{si } 2400 \leq x \leq 3600 \\ 1800, & \text{si } 3600 \leq x \leq 5400 \\ 3x - 14400, & \text{si } 5400 \leq x \leq 6000 \\ 3600, & \text{si } 6000 \leq x \leq 8400 \\ 28800 - 3x, & \text{si } 8400 \leq x \leq 9000 \\ 1800, & \text{si } 9000 \leq x \leq 9600 \\ 3x - 27000, & \text{si } 9600 \leq x \leq 10200 \\ 3600, & \text{si } 10200 \leq x \leq 13200 \end{cases} \quad (34)$$

Presa 2:

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 1200, & \text{si } 600 \leq x \leq 12000 \\ x - 10800, & \text{si } 1200 \leq x \leq 13200 \end{cases} \quad (34)$$

Para la simulación del sistema, con los registros históricos de escurrimientos de cada una de las presas, y las características técnicas como el nivel mínimo, nivel de desfogue, volumen mínimo y volumen turbinable, se calcularon los volúmenes de extracción, las curvas de elevación-capacidad y las alturas del embalse. A partir de la ecuación de energía se calculó el beneficio, y se elaboró un promedio por año en GW-hora. La Figura 2 muestra la elevación de la presa 1 en metros sobre nivel del mar (m s.n.m.) a lo largo del año.



**Figura 2** | Elevación promedio de la presa con respecto al tiempo.

La Figura 3 presenta la energía simulada de la presa 1 con respecto al tiempo, a partir de la ecuación de energía.

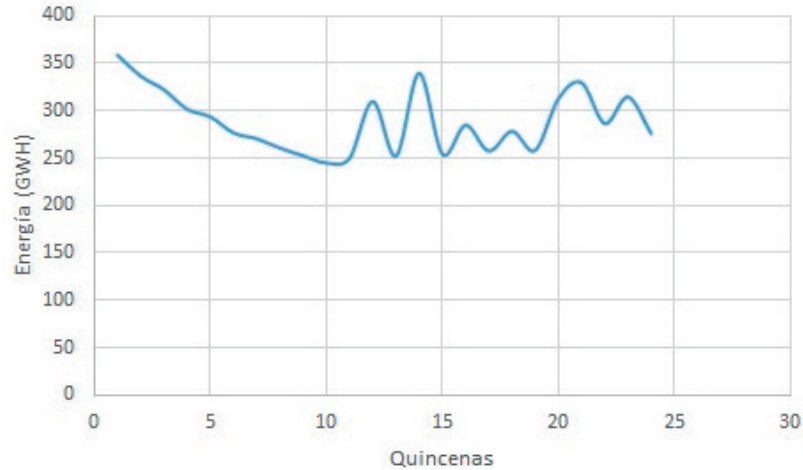


Figura 3 | Energía simulada promedio de la presa 1 con respecto al tiempo.

## DISCUSIÓN

Las ecuaciones (24) a la (35) conforman cada una de las políticas de extracción dependiendo de la etapa y del nivel de cada una de las presas. La manera de interpretar estas ecuaciones se explica a continuación. Se tienen distintos estados de la presa 2 que van desde los 600 millones de  $m^3$  hasta los 3600 millones de  $m^3$ . Para cada uno de estos estados de la presa 2, se cuentan con dos ecuaciones, una para la presa 1 y otra para la presa 2, estas ecuaciones son las políticas óptimas donde la variable  $x$  representa el estado de la presa 1, y dependiendo en dónde se encuentre se sustituirá en la ecuación adecuada. Así, por ejemplo, la capacidad de la presa 1 es de 600 millones de  $m^3$  y la capacidad de la presa 2 es de 7900 millones de  $m^3$ , basta con sustituir  $x=7500$  en el primer grupo de ecuaciones, y se obtienen las extracciones de cada una de las presas en millones de  $m^3$ .

Para la presa 1:  $34800-4(7900)=3200$ .

Para la presa 2: 1200 (*constante*).

De esta manera el operador puede calcular en forma sencilla el volumen de extracción en esta época del año para cada estado de las presas, identificando la ecuación y sustituyendo los respectivos estados, tal y como se observa en la Figura 4.

$$\text{Extracción} = \begin{cases} 600, & \text{si } 600 \leq x \leq 2400 \\ x - 1800, & \text{si } 2400 \leq x \leq 3600 \\ 1800, & \text{si } 3600 \leq x \leq 6600 \\ \frac{7}{3}x - 13600, & \text{si } 6600 \leq x \leq 7200 \\ 3600, & \text{si } 7200 \leq x \leq 7800 \\ 34800 - 4x, & \text{si } 7800 \leq x \leq 8400 \\ x - 7200, & \text{si } 8400 \leq x \leq 9000 \\ 1800, & \text{si } 9000 \leq x \leq 10800 \\ 3x - 30600, & \text{si } 10800 \leq x \leq 11400 \\ 3600, & \text{si } 11400 \leq x \leq 13200 \end{cases}$$

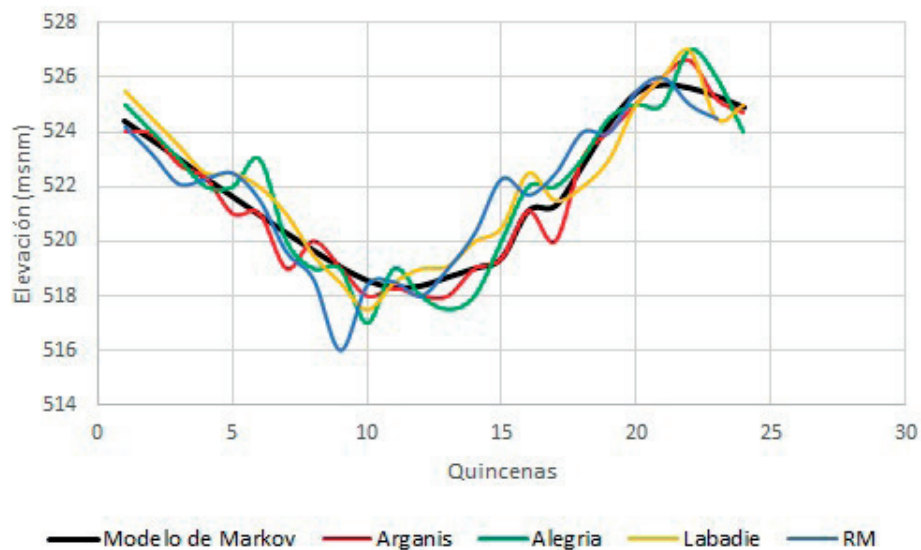
$$\text{Extracción} = 1200, \text{ si } 600 \leq x \leq 13200.$$

Figura 4 | Ejemplo de cálculo de políticas óptimas.

De las ecuaciones analíticas de las políticas óptimas se observa que para los estados de 600, 1200, 1800 y 2400 millones de  $m^3$  para la presa 2, las extracciones de esta misma presa son constantes, específicamente 1200 millones de  $m^3$ ; mientras que para los estados de 3000 y 3600 millones de  $m^3$ , las extracciones ya son funciones que dependen del estado de la presa 1; esto debido a que la presa 2, que se encuentra aguas debajo de la presa 1, aún no ha alcanzado niveles que pongan en alerta la seguridad, y únicamente se extrae la cantidad mínima para satisfacer las demandas energéticas. Por otro lado, las extracciones de la presa 1, se representan por funciones crecientes desde los 600 hasta los 7800 millones de  $m^3$ , a partir del cual las extracciones decrecen hasta los 13200 millones de  $m^3$ .

Además, las Figuras 2 y 3, presentan tanto la elevación como la energía simulada en el año completo, y no solamente en el período de noviembre y diciembre. Se observa que para el caso de la elevación a partir de la quincena 21 a la quincena 24, que corresponde al período estudiado el nivel comienza a descender, luego de tener un máximo antes de ese período, esto debido a que las lluvias han disminuido a partir de esta época del año. Sin embargo, la energía tiene algunos máximos y mínimos en este mismo período, ya que depende de las demandas energéticas de fin de año, y las disposiciones administrativas de las distintas dependencias gubernamentales.

El presente trabajo se limitó a las extracciones a finales de año, cuando la temporada de lluvias está terminando. Queda pendiente el análisis durante la época de lluvias y la época de sequía al inicio del año. Las políticas aquí obtenidas son conservadoras en comparación con los trabajos de Arganis et al. (2008) y Alegría (2010) como se observa en la Figura 6, reduciendo la energía eléctrica producida, pero garantizando la seguridad de la población evitando posibles desbordes o derrames en las obras de excedencia, como se observa en la Figura 5. En las Figuras 5 y 6 también se presentan los trabajos realizados por Labadie (2004) y Rani y Moreira (2010).



**Figura 5** | Elevación de la presa en función de las quincenas para cada uno de los modelos aplicados

Todos los métodos graficados corresponden a la Programación Dinámica Estocástica con algunas variantes, como la incorporación de restricciones (Labadie, 2004) o la discretización de estados (Rani y Moreira, 2010). Se puede observar que el Modelo de Control Markoviano presenta elevaciones de la presa por debajo de los niveles de los otros modelos de manera general. También se observa que la energía se comporta de manera parecida en las primeras y últimas quincenas del año, pero sí disminuye significativamente en los meses de lluvias, que corresponde a las quincenas 10 a la 18, que es precisamente, donde se procura que los niveles del embalse no excedan los niveles máximos. En este sentido, el método presentado ha optado por darle prioridad a los poblados existentes aguas debajo de los embalses. Estos resultados son de útil aplicación para los operarios, que son los encargados de manipular las obras de toma y de desfogue a fin de garantizar las correctas demandas energéticas, y pese a que ellos no tomen las decisiones de los niveles de un embalse, la parte administrativa cuenta con alternativas en el cálculo de políticas de operación de los embalses.

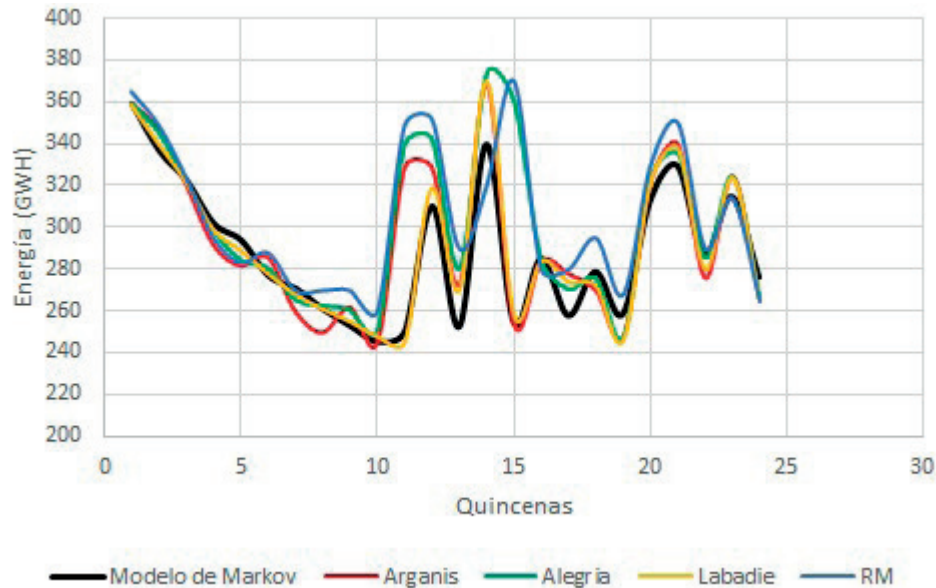


Figura 6 | Energía simulada de la presa en función de las quincenas para cada uno de los modelos aplicados

## CONCLUSIONES

Los modelos de control Markoviano han demostrado ajustarse bastante a la realidad en este trabajo puesto que involucran estados, etapas, objetivos y restricciones. El Planteamiento de este modelo permitió involucrar todas las variables que componen un sistema hidroeléctrico. Además, permitió modelar los niveles de los embalses como espacio de estados; las extracciones como espacio de acciones; las extracciones permitidas como espacio de acciones admisibles; la ecuación de continuidad como el kernel de transición; la energía generada como la función de ganancia; las penalizaciones por derrames y déficits como la función de costo. Ya que, matemáticamente, los espacios de estados y acciones forman conjuntos compactos, existen para la función beneficio, un máximo posible de alcanzar. Las condiciones matemáticas de las funciones anteriores han garantizado que existan dentro de las políticas aleatorizadas un conjunto de políticas deterministas, que puedan optimizar a la función objetivo.

Gracias a la compacidad de los espacios de estados, acciones y acciones admisibles, las políticas óptimas se obtuvieron como funciones continuas sobre intervalos compactos. Así pues, los beneficios se calcularon como soluciones de integrales definidas con respecto a la medida de probabilidad, de las distribuciones de los escurrimientos. El haber trabajado con estados continuos permitió que las políticas óptimas se expresaran en forma continua. Una de las ventajas de utilizar funciones continuas, es disponer de la información para cualquier volumen de la presa, que se traduce a cualquier elevación, y así tener los datos en forma completa.

A diferencia de trabajos como el de Barros (2003), el Modelo de Control aquí presentado trabaja en forma estocástica y no determinista como los Modelos de Programación Lineal o variantes de este modelo. Otra diferencia con el modelo de Barros es la incorporación de funciones multiobjetivos, y que en este trabajo sólo se optimiza la energía. Dentro de los modelos presentados por Labadie (2004), se utilizan espacios discretos y las ecuaciones se resuelven a través de sumatorias. El Modelo de Control emplea integración estocástica y presenta funciones analíticas continuas, que es una de las contribuciones que los modelos anteriores no presentan. Finalmente, aunque la energía se reduce en época de lluvias, se reduce de manera significativa la probabilidad de derrames, lo que lleva a evitar pérdidas en daños materiales y en vidas humanas. Queda como una futura línea de investigación la incorporación de algoritmos computacionales como los que presenta Rani y Moreira (2010), y su aplicación a los sistemas hidroeléctricos de los modelos como los algoritmos genéticos, redes neuronales o la computación evolutiva, entre otros.

## APÉNDICE

### Ecuación de la energía

A continuación, se detalla la obtención de la ecuación 16. La potencia de una turbina se calcula como  $P=\gamma QH\eta$  donde es el peso específico del agua en dimensiones de peso/volumen con unidades que sean congruentes, como, es el gasto o caudal en obtenida de manera sencilla como, con volumen turbinado en y tiempo de turbinación en segundos. Además es la carga sobre la turbina y se calcula como la carga media donde  $y$  representan los niveles del embalse en metros. Finalmente es la eficiencia de la turbina. Por otro lado, la energía está dada por. Sustituyendo la potencia en la ecuación anterior.

$$E = \gamma \frac{V}{t} \left( \frac{H_j - H_{j-1}}{2} \right) \eta t$$

Ya que,  $\gamma=9810 \text{ N/m}^3$ , el volumen está dado en millones de  $\text{m}^3$  y  $1 \text{ h}=3600 \text{ s}$ , si deseamos conocer la energía en unidades GWh se cumple que

$$E = \gamma \frac{V}{t} \left( \frac{H_j - H_{j-1}}{2} \right) \eta t \left( \frac{1}{3600 \times 1000} \right) = 9.81 \left( \frac{H_j - H_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{V \eta}{3600} \right)$$

que es la ecuación 16 buscada.

### Resumen de ecuaciones utilizadas

En este apartado se enuncian las ecuaciones que se utilizan dentro de la metodología que se empleó para el cálculo final de los beneficios y la energía.

Acciones admisibles

$$A_n(x) = [0, l - x] \quad (5)$$

Ley de transición

$$f_k(x_1, a) = x_1 + m - a \quad (6)$$

Estado futuro

$$x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x_2 < 0, \\ x_2 & \text{si } 0 \leq x_2 \leq \text{extracción}, \\ \text{extracción} & \text{si } x_2 > \text{extracción}. \end{cases} \quad (7)$$

Derrame

$$d_2 = x_2 - l \quad (8)$$

Déficit

$$d_1 = |x_2| \quad (9)$$

Extracción turbinable

$$ET = a - d_1. \quad (10)$$

Beneficio

$$B = 2.725 \times 10^{-3} \times a_2 \times \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \quad (11)$$

Ganancia y costo

$$r(x_1, a_2) = B \text{ y } c(x_1, a_2) = d_1 * coef_1 + d_2 * coef_2 \quad (12)$$

Beneficio esperado

$$BE = [r(x_1, a_2) - c(x_1, a_2)] * P(m) \quad (13)$$

Beneficio esperado máximo

$$BEM = \int_0^e BE dx_1 \quad (14)$$



Beneficio esperado total

$$BET = BEM_1 + BEM_2 \tag{15}$$

Energía

$$E = 9.81 \frac{H_j + H_{j-1}}{2} \left( \frac{V\eta}{3600} \right) \tag{16}$$

La Figura 7 presenta un diagrama de flujo con ecuaciones.

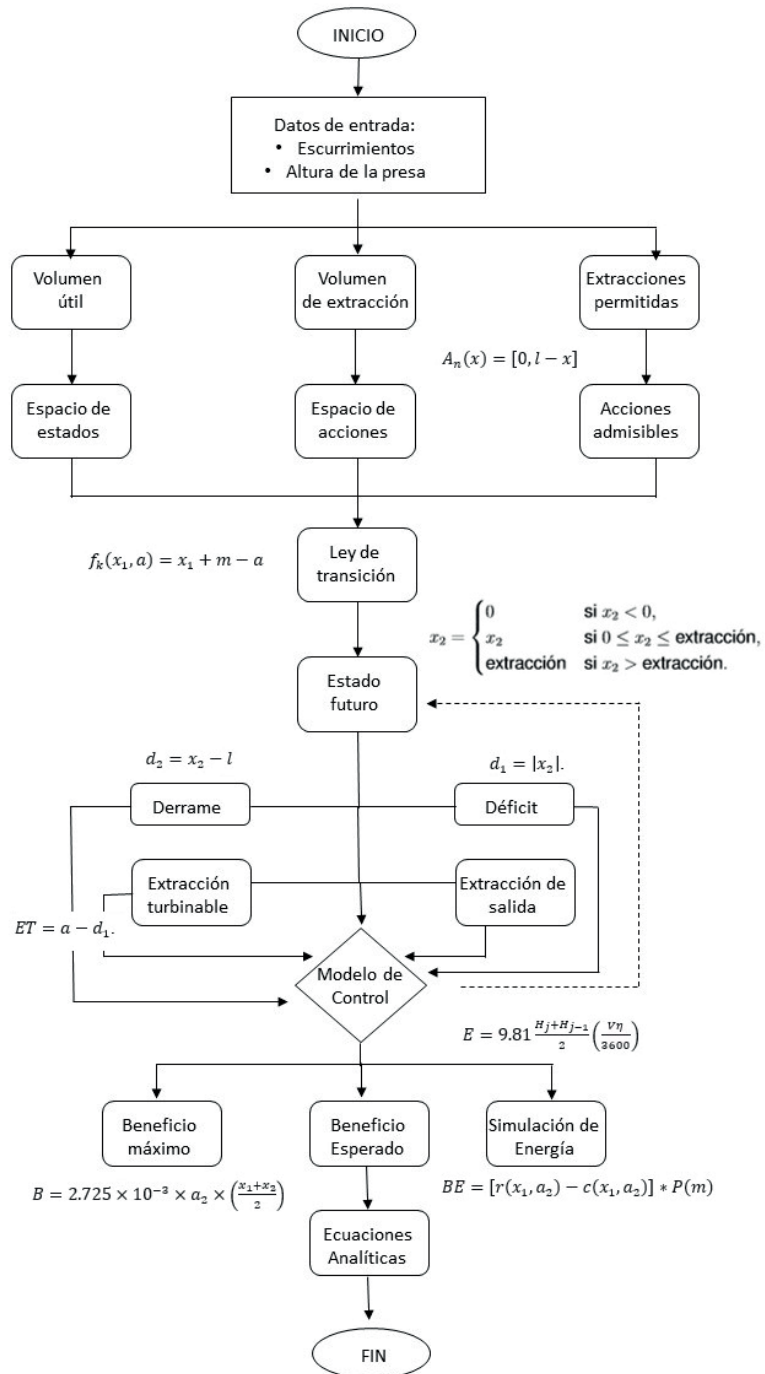


Figura 7 | Diagrama de flujo con ecuaciones.

## REFERENCIAS

- Abolghasemi, R.H. 2008. *Optimization of the Kootenay river hydroelectric system with a linear programming model*. Master Thesis, University of Canada, Canada.
- Ailing, Li. 2004. A study on the large-scale system decomposition-coordination method used in optimal operation of a hydroelectric system. *Water International*, 29(2), 228-231. <https://doi.org/10.1080/02508060408691772>
- Alegria, A. 2010. *Política de operación óptima del sistema de presas del Río Grijalva*. Efectos de la curva guía. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- Arganis, M.L., Domínguez, R., Cisneros-Itube, H., Fuentes-Mariles, G. 2008. Synthetic sample generation of monthly inflows into two dams using the modified Svanidze method. *Hydrological sciences journal*, 53(1), 130-141. <https://doi.org/10.1623/hysj.53.1.130>
- Ahmad, A., El-Shafie, A., Razali, S.F.M., Mohamad, Z.S. 2014. Reservoir optimization water resources: a review. *Water Resources Management*, 28(11), 3391-3405. <https://doi.org/10.1007/s11269-014-0700-5>
- Barros, T.L.M, Tsai, F.T.C., Yang, S., Lopes, J.E.G., Yeh, W.W.G. 2003. Optimization of larg-scale hydropower system operations. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 129(3), 178-188. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2003\)129:3\(178\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2003)129:3(178))
- Bertsekas, D.P. 1995. *Dynamic Programming and Optimal Control*. Prentice-Hall, Massachusetts, USA.
- Butcher, W.S. 1971. Stochastic dynamic programming for optimal reservoir operation. *Journal of the American Water Resources Association*, 71(11), 143-158. <https://doi.org/10.1111/j.1752-1688.1971.tb01683.x>
- Crichigno, J., Talavera, F. 2012. Enrutamiento multicast utilizando optimización multiobjetivo. *Ingeniería y Ciencia*, 4(7), 87-111.
- De la Cruz-Courtois, O., Guichard, R., Arganis, M. 2018. Políticas de operación óptima de presas para generación hidroeléctrica con modelos markovianos y variable continua. *Pakbal*, 44(3), 12-25.
- Domínguez, R., Arganis, M. 2001. *Revisión de las políticas de operación de las presas Angostura y Malpaso en el río Grijalva*. Informe de la Comisión Federal de Electricidad, CDMX, México.
- Domínguez, R., Arganis, M., Carrizosa, E. 2006. *Determinación de avenidas de diseño y ajuste de los parámetros del modelo de optimización de las políticas de operación del sistema de presas del Río Grijalva*. Informe de Comisión Federal de Electricidad, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- Eschenbach, E.A., Magee, T., Zagona, E., Goranflo, M., Shane, R. 2001. Goal programming Decision Support System for Multiobjective Operation of Reservoir Systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 127(2), 108-120. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2001\)127:2\(108\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2001)127:2(108))
- García, V., 1992. *Aprovechamientos hidroeléctricos y de bombeo*. Trillas. CDMX, México.
- Hernández-Lerma, O., Laserre, J. 1991. *Discrete-Time Markov Control processes. Basic optimality criteria*, Springer, New York, USA.
- Labadie, J.W. 2004. Optimal Operation on Multireservoir Systems: State-of-the-art Review. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 130(2), 93-111. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2004\)130:2\(93\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2004)130:2(93))
- Labadie, J.W., Lee, J.H. 2007. Stochastic optimization of multireservoir systems via reinforcement learning. *Water Resources Research*, 43 W11408. <https://doi.org/10.1029/2006WR005627>
- Mendoza-Pérez, A., Jasso-Fuentes, H., De la Cruz-Courtois, O. 2016. Constrained Markov decision processes in Borel spaces: from discounted to average optimality. *Springer Berlin Heidelberg*, 84(3), 489-525. <https://doi.org/10.1007/s00186-016-0551-3>
- Quitana F, F. 1981. *Aplicaciones de la Programación Dinámica a la Operación de Presas*. Tesis. Universidad de Sonora, Sonora, México.

- Rani, D., Moreira, M.M. 2010. Simulation-Optimization Modeling: A Survey and Potential Application in Reservoir Systems Operation. *Water Resources Management*, 24, 1107-1138. <https://doi.org/10.1007/s11269-009-9488-0>
- Rincón, L. 2012. *Introducción a los procesos estocásticos*. Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- Sánchez, C.E., Andreu A.J. 2002. Expansión óptima de sistemas de recursos hídricos superficiales: Aplicación a un sistema real en España. In *II Congreso Intern. de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas* (Vol 1).
- Sánchez, C.E., Wagner, G.A., 2003. *Determinación de reglas de operación óptima para dos embalses, utilizando un algoritmo genético*. Universidad Autónoma de Coahuila, México.
- Sánchez, C.E., Wagner, G.A., 2004. Modelo numérico para la operación óptima de un hidrosistema de aguas superficiales. *Instituto Mexicano de Tecnología del Agua*, 15(2), 23-38.
- Kumar, V., Yadav, S.M. 2018. Optimization of reservoir operation with a new approach in evolutionary computation using TLBO and Jaya Algorithm. *Water Resources Management*, 32, 4375-4391. <https://doi.org/10.1007/s11269-018-2067-5>
- Yakowitz, S.J. 1982. Dynamic Programming Applications in Water Resources. *Water Resources Research*, 18(4), 673-696. <https://doi.org/10.1029/WR018i004p00673>
- Wurbs, R.A. 1993. Reservoir-System Simulation and Optimization Models. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 116(1), 52-70. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(1993\)119:4\(455\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(1993)119:4(455))