A note about a class of differential equations with random initial condition Una nota sobre una clase de ecuaciones diferenciales con condición inicial aleatoria

José Manuel López-Ballesteros[a], Clara Burgos[b], Julia Calatayud[c], Juan Carlos Cortés[d], Marc Jornet[e]

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València

emails: a: jomaloba@alumni.uv.es; b: clabursi@posgrado.upv.es; c: jucagre@alumni.uv.es; d: jccortes@mat.upv.es; e: marcjor@alumni.uv.es

Resumen

This paper shows a nice connection between Differential Equations and Probability through an illustrative example. We apply a successful algebraic strategy together with properties of expectation operator to determine the main statistical properties (mean, variance and covariance) of the solution to a non-autonomous linear differential equation whose initial condition is a random variable. Theoretical findings are illustrated by means of one example.

Introducción

Una de las experiencias docentes más instructivas, desde el punto de vista formativo, es la resolución de problemas cuya solución es conocida por métodos alternativos. La "alternativa"no tiene porqué estar basada, necesariamente, en un razonamiento ni más *corto* ni más *sencillo*, porque en ese contexto lo realmente importante es la *sorpresa* de constatar la existencia de la "alternativa", y reflexionar a partir de ella acerca de las profundas conexiones entre las distintas partes de la matemática. La riqueza de la experiencia formativa se ve incrementada si en la formulación del problema se consideran dos áreas de la Matemática *aparentemente* poco relacionadas.

Esta nota muestra un enfoque alternativo para resolver un problema sobre ecuaciones diferenciales deterministas, que se formulará en un contexto aleatorio a partir de una motivación natural. Como veremos, el tratamiento del problema requerirá, principalmente, de conceptos pertenecientes a las áreas de Ecuaciones Diferenciales y de Probabilidad. Como se mostrará, la solución "alternativa"sigue un proceso más *largo* que el tradicional, pero a cambio arroja luz sobre sobre las relaciones existentes entre las dos áreas de conocimiento antes indicadas, proporcionando una formación matemática transversal, y por tanto más rica.

1. El problema a tratar y su solución

En el area de las Ecuaciones Diferenciales deterministas, el modelo no autónomo *más sencillo* se formula a partir del siguiente problema de valor inicial (PVI) basado en una ecuación diferencial lineal homogénea

$$\left.\begin{array}{r}\dot{x}(t)=f(t)x(t), \quad t>t_0\in\mathbb{R},\\ x(t_0)=x_0.\end{array}\right\} \tag{1}$$

Por ejemplo, en el contexto de la Biología, si $f(t) = k$, siendo k una constante, y $x(t)$ denota el tamaño de una población, en el instante $t > t_0 \geq 0$, el PVI (1) corresponde al denominado Modelo de Malthus para una especie con tasa de crecimiento instantánea k y una población inicial $x_0 > 0$. En la práctica, los datos x_0 y $f(t)$ no suelen conocerse de forma determinista, por lo que es más natural tratarlos como una variable aleatoria y un proceso estocástico, respectivamente. Este enfoque conduce al area de las Ecuaciones Diferenciales Aleatorias [1]. En este trabajo consideraremos el escenario más sencillo en el que la condición inicial es una variable aleatoria, X_0, y $f(t)$ es una función determinista. En este contexto la solución del PVI (1) es un proceso estocástico $X(t)$, y la derivada, $\dot{X}(t)$ debe interpretarse en algún sentido estocástico apropiado. En efecto, como la derivada es un límite y en el contexto de la Teoría de Probabilidad hay dferentes tipos de convergencia, se hace necesario seleccionar algún tipo de convergencia para interpretar el PVI (1) cuando se asume que la condición inicial X_0 es una variable aleatoria. En este trabajo se considera la convergencia en media cuadrática definida en el espacio de Banach $(\mathrm{L}^2_{\mathrm{VA}}(\Omega), ||\cdot||_{2,\mathrm{VA}})$ de las variables alearorias de segundo orden a valores reales, definidas sobre un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Concretamente,

$$\mathrm{L}^2_{\mathrm{VA}}(\Omega) = \left\{X : \Omega \to \mathbb{R} : \mathbb{E}[X^2] < +\infty\right\}, \quad ||X||_{2,\mathrm{VA}} = \left(\mathbb{E}[X^2]\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

siendo $\mathbb{E}[\cdot]$ el operador esperanza. Una sucesión de variables aleatorias de este espacio, $\{X_n : n \geq 0\} \subset \mathrm{L}^2_{\mathrm{VA}}(\Omega)$, se dice que converge en media cuadrática a la variable aleatoria $X \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{VA}}(\Omega)$ si se cumple

$$||X_n - X||_{2,\mathrm{VA}} = \left(\mathbb{E}\left[(X_n - X)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En este caso se escribe $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.c.}} X$.

Una de las principales ventajas de la convergencia en media cuadrática es que se trata de una convergencia fuerte, ya que los resultados que se establecen en este tipo de convergencia son válidos en otro tipo de convergencias, que también son muy importantes en la Teoría de la Probabilidad, como la convergencia en probabilidad y la convergencia en distribución [2]. Como la solución del PVI (1) es un proceso estocástico, $X(t)$, a continuación introducimos el espacio de Banach $\left(\mathrm{L}^2_{\mathrm{PE}}(\Omega), ||\cdot||_{2,\mathrm{PE}}\right)$ donde está definida la solución:

$$\mathrm{L}^2_{\mathrm{PE}}(\Omega) = \left\{X : \mathcal{T} \times \Omega \to \mathrm{L}^2_{\mathrm{VA}}(\Omega) : \int_{\mathcal{T}} \mathbb{E}[(X(t,\omega))^2]\mathrm{d}t < +\infty, \, \omega \in \Omega\right\},$$

siendo $\mathcal{T} = [t_0, \mathcal{T}] \subseteq \mathbb{R}$, $T > t_0$ y

$$||X||_{2,\mathrm{PE}} = \left(\int_{\mathcal{T}} \mathbb{E}[(X(t,\omega))^2]\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathcal{T}} (||X(t,\omega)||_{2,\mathrm{VA}})^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega \in \Omega.$$

Es conveniente añadir que en este trabajo, y en la literatura habitual, se utilizan las siguientes notaciones $X = X(t) = X(t,\omega)$ y $X_0 = X_0(\omega)$ de forma indistinta para denotar un proceso estocástico y una variable aleatoria, respectivamente, porque en general el contexto debe ser suficiente para eliminar cualquier confusión.

Los elementos de X de este espacio se denominan procesos estocásticos cuadrado integrables, y en particular cumplen que para cada $t \in \mathcal{T}$ fijo, la variable aleatoria resultante, $X(t,\omega)$, es de segundo orden, $X(t,\omega) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{VA}}(\Omega)$, es decir $\mathbb{E}\left[(X(t,\omega))^2\right] < +\infty$.

A continuación enunciamos, sin demostración, varios resultados claves para nuestro posterior estudio y que hacen de la convergencia en media cuadrática particularmente adecuada cuando se estudian ecuaciones diferenciales con incertidumbre y el própósito no es solo calcular la solución, si no también sus principales funciones estadísticas, tales como la media, la varianza y la correlación.

Propiedad 1. *([1, p.88]). Dadas dos sucesiones de variables aleatorias $\{X_n : n \geq 1\}$ e $\{Y_n : n \geq 1\}$ en $\mathrm{L}^2_{VA}(\Omega)$ tales que*

$$X_n \xrightarrow[m\to\infty]{m.c.} X, \qquad Y_n \xrightarrow[m\to\infty]{m.c.} Y,$$

entonces se cumple que

$$\mathbb{E}[X_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X], \quad \mathbb{V}[Y_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{V}[Y], \quad \Gamma(X_n, Y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(X, Y), \tag{2}$$

donde $\mathbb{E}[\cdot]$, $\mathbb{V}[\cdot]$ y $\Gamma[\cdot]$ denotan los operadores media, varianza y correlación, respectivamente.

Recuerdese que por definición, la correlación de dos variables aleatorias $X, Y \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{VA}}(\Omega)$ está dada por $\Gamma(X,Y) = \mathbb{E}[XY]$. Por tanto, la tercera expresión de (2) se puede escribir de la siguiente forma equivalente

$$X_n \xrightarrow[m\to\infty]{\text{m.c.}} X, \quad Y_n \xrightarrow[m\to\infty]{\text{m.c.}} Y \Rightarrow \mathbb{E}[X_n Y_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[XY].$$

En el contexto aleatorio, la derivada del proceso estocástico $X(t)$ que aparece en el PVI (1) se interpreta en el sentido de la norma $||\cdot||_{2,\mathrm{PE}}$ de forma habitual. Así, dado $X \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{PE}}(\Omega)$ se dice que el proceso estocástico $\dot{X}(t) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{PE}}(\Omega)$ es derivable en el punto $t \in \mathcal{T} = [t_0, T]$ si se cumple

$$\left\| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \dot{X}(t) \right\|_{2,\mathrm{PE}} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad t, t+h \in \mathcal{T} = [t_0, T].$$

Una propiedad clave de la convergencia en media cuadrática, la cual se infiere de la Propiedad 1, que hace que este tipo de convergencia sea particularmente atractiva para el estudio de ecuaciones diferenciales aleatorias frente a otros tipos de convergencia estocástica es la siguiente:

Propiedad 2. *([1, p.98]) Sea* $X(t) \in \mathrm{L}^2_{PE}(\Omega)$ *derivable en media cuadrática y sea* $\Gamma_X(t,s) \stackrel{\trianglelefteq}{=} \mathbb{E}[X(t)X(s)]$, $s,t \in \mathcal{T} = [t_0, T]$, *la función de correlación del proceso estocástico* $X(t)$*. Entonces se cumple*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_X(t,s)\right) = \mathbb{E}[\dot{X}(t)X(s)], \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{E}[X(t)]\right) = \mathbb{E}[\dot{X}(t)]. \tag{4}$$

Esta propiedad indica que el operador esperanza conmuta con la derivada en media cuadrática (denotada con el punto $(\dot{\cdot})$) dando lugar a una expresión en términos de la derivada determinista $(\frac{\partial}{\partial t})$ de la función de correlación. Análogamente para la funicón media.

La Propiedad 2 es importante porque, como veremos posteriormente, en algunos escenarios puede ser aprovechada para calcular la media, la varianza y la correlación del proceso estocástico solución de una ecuación diferencial aleatoria, sin necesidad de resolver dicha ecuación (lo cual en muchos casos no es posible). Es importante señalar, que a diferencia de lo que sucede en el caso determinista donde los objetivos principales cuando se resuelve una ecuación diferencial son calcular su solución, estudiar condiciones de existencia y unicidad, y estudiar la dependencia de la solución respecto de los parámetros y condiciones iniciales, en el contexto aleatorio además de estudiar estos problemas también son objetivos importantes determinar las principales características del proceso estocástico solución, tales como las funciones media, varianza y covarianza, ya que a partir de ellas se obtiene una descripción de comportamiento estadístico de la solución. Más aún, si se conoce que la solución sigue algún tipo de distribución conocida, como por ejemplo la gausiana, la obtención de las funciones estadísticas media y covarianza permite caracterizar completamente el proceso estocástico solución.

En el caso de la *versión* aleatoria del PVI (1) se puede demostrar, mediante un procedimiento basado en la extensión de resultados deterministas al contexto aleatorio de la media cuadrática que es bastante técnico, que el proceso estocástico solución es

$$X(t) = X_0 e^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau}, \quad t \geq t_0. \tag{5}$$

En este punto es importante señalar que la costosa legitimación teórica de esta expresión en el contexto aleatorio ha motivado la búsqueda del enfoque alternativo que se presenta en la Sección 2. Admitiendo entonces, la representación formal (5), la obtención de la media, la varianza y de la correlación de $X(t)$ puede realizarse primero tomando los correspondientes operadores directamente sobre la ecuación (5) y después aplicando sus propiedades operacionales. De este modo se obtienen la media

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X_0 e^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau}] = \mathbb{E}[X_0] e^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau}, \tag{6}$$

y la covarianza

$$\begin{aligned} \Gamma[X(t)X(s)] &= \mathbb{E}[(X_0 e^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau})(X_0 e^{\int_{t_0}^{s} f(\tau)\mathrm{d}\tau})] \\ &= \mathrm{E}[(X_0)^2] e^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{s} f(\tau)\mathrm{d}\tau}. \end{aligned} \tag{7}$$

Tomando $s = t$ en (7), se obtiene

$$\mathbb{E}[(X(t))^2] = \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau}, \tag{8}$$

por lo que, teniendo en cuenta (6) y (8), la varianza de la solución está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X(t)] &= \mathbb{E}[(X(t))^2] - (\mathbb{E}[X(t)])^2 \\ &= \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau} - (\mathbb{E}[(X_0)])^2 e^{2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau} \\ &= \left(\mathbb{E}[(X_0)^2] - (\mathbb{E}[(X_0)])^2\right) e^{2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau} \\ &= \mathbb{V}[X_0] e^{2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau} > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

2. Una solución alternativa

En este apartado mostramos cómo obtener las funciones media, varianza y covarianza del proceso estocástico solución mediante un enfoque que no requiere de la obtención rigurosa de la solución y que aprovecha la propiedad clave de la convergencia en media cuadrática que se ha presentado en el apartado anterior (Propiedad 2).

2.1. Cálculo de la función media

Basta tomar el operador media en la versión aleatoria del PVI (1) y aplicar la expresión (4) de la Propiedad 2:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\dot{X}(t)] = \mathbb{E}[f(t)X(t)] \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbb{E}[X(t)]\right] = f(t)\mathbb{E}[X(t)], \\ &\mathbb{E}[X_0(t)] = \mathbb{E}[X_0], \end{aligned}$$

de modo que el PVI aleatorio se transforma en el siguiente PVI determinístico, que conserva al linealidad del problema original, y cuya solución es bien conocida,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbb{E}[X(t)]\right] &= f(t)\mathbb{E}[X(t)], \\ \mathbb{E}[X_0(t)] &= \mathbb{E}[X_0], \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X_0]e^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

Obsérvese que la solución coincide con la obtenida anteriormente en la expresión (6).

2.2. Cálculo de la función de correlación

El cálculo de la función de correlación del proceso estocástico solución por el método alternativo es más intrincado. Partimos de la ecuación diferencial aleatoria del PVI (1) y multiplicamos ambos miembros por $X(s)$, $s \geq t_0$,

$$\dot{X}(t)X(s) = f(t)X(t)X(s),$$

tomamos el operador esperanza en ambos miembros y aplicamos su linealidad, ya que $f(t)$ es una función determinista,

$$\mathbb{E}[\dot{X}(t)X(s)] = f(t)\mathbb{E}[X(t)X(s)].$$

Ahora aplicamos la expresión (3) de la Propiedad 2

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_X(t,s)\right) = f(t)\Gamma_X(t,s). \tag{10}$$

Para la condición inicial de PVI (1), razonando de forma similar se obtiene

$$X(0) = X_0 \Rightarrow X(0)X(s) = X_0X(s) \Rightarrow \mathbb{E}[X(0)X(s)] = \mathbb{E}[X_0X(s)],$$

es decir, utilizando la definición de función de correlación

$$\Gamma_X(0,s) = \mathbb{E}[X_0 X(s)],\ s \geq t_0. \tag{11}$$

La solución del PVI determinista (10)–(11), que es de tipo lineal, es claramente

$$\Gamma_X(t,s) = \Gamma_X(0,s) e^{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}, \tag{12}$$

para $s \geq t_0$ fijo.

Ahora determinaremos el valor $\Gamma_X(0,s)$, $s \geq t_0$. Para ello partimos de la ecuación diferencial dada en (1), escrita en términos de la variable s en lugar de t

$$\dot{X}(s) = f(s)X(s), \quad s > t_0.$$

Ahora multiplicamos por $X(0)$ ambos miembros, tomamos el operador esperanza y aplicamos la expresión (3) de la Propiedad 2, con lo cual se obtiene

$$X(0)\dot{X}(s) = f(s)X(0)X(s) \Rightarrow \mathbb{E}[X(0)\dot{X}(s)] = f(s)\mathbb{E}[X(0)X(s)],$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\Gamma_X(0,s)\right) = f(s)\Gamma_X(0,s). \tag{13}$$

Para obtener su correspondiente condición inicial, multiplicamos por $X(0) = X_0$, la condición inicial del PVI (1) aleatorizado y tomamos el operador esperanza

$$X(0)X(0) = X_0X_0 \Rightarrow \mathbb{E}[(X(0))^2] = \mathbb{E}[(X_0)^2],$$

es decir

$$\Gamma_X(0,0) = \mathbb{E}[(X_0)^2]. \tag{14}$$

La solución del PVI determinista (13)–(14), que es de tipo lineal, es

$$\Gamma_X(0,s) = \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{\int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau}. \tag{15}$$

Sustituyendo (15) en (12), se deduce que la expresión de la función de correlación buscada es

$$\Gamma_X(t,s) = \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

la cual coincide con (7). Tomando $s = t$ se obtiene como antes la función varianza.

3. Ejemplo y conclusiones

Concluimos este trabajo ilustrando el desarrollo anterior con un ejemplo. Consideremos el PVI (1) aleatorizado donde $t_0 = 0$, $f(t) = -\frac{1}{t+1}$ y la condición inicial X_0 sigue una distribución beta de parametros $(\alpha; \beta) = (2; 3)$, i.e., $X_0 \sim \mathrm{Be}(2; 3)$, [3]. En este caso, teniendo en cuenta que $\mathbb{E}[X_0] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{2}{5}$ y $\mathbb{V}[X_0] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1}{25}$, por tanto $\mathbb{E}[(X_0)^2] = \frac{1}{25} + (\frac{2}{5})^2 = \frac{1}{5}$, y aplicando las expresiones obtenidas en (6), (9) y (7), respectivamente, se obtienen las funciones media, varianza y correlación de la solución:

$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{2}{5(t+1)}, \quad \mathbb{V}[X(t)] = \frac{1}{25(t+1)^2}, \quad \Gamma_X(t,s) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{t+1} \times \frac{1}{s+1}\right).$$

En la Figura 1 se han representado la función media (o esperanza) y las funciones media más/menos una desviación típica del proceso estocástico solución, $\mathbb{E}[X(t)] \pm \sqrt{\mathbb{V}[X(t)]}$.

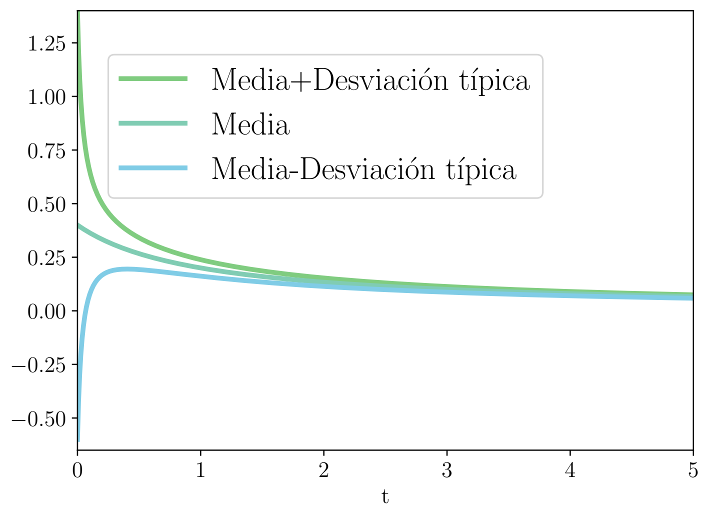

Figura 1: Gráficas de la función media y de la media más/menos una desviación típica del proceso estocástico solución en el contexto del ejemplo.

Y en la Figura 2 la función de correlación en el contexto de este ejemplo.

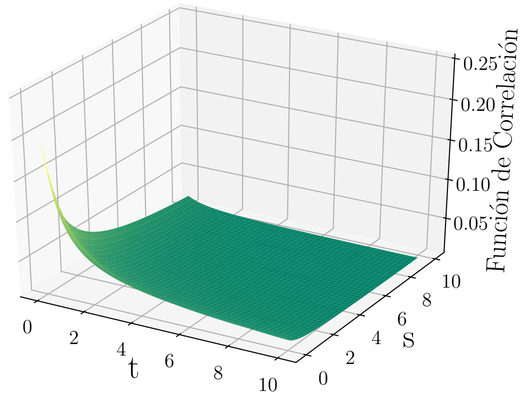

Figura 2: Gráfica de la función de correlación del proceso estocástico solución en el contexto del ejemplo.

Para terminar queremos señalar que el trabajo presentado puede servir de motivación docente para buscar otros contextos de enseñanza universitaria donde importantes conceptos deterministas puedan extenderse al escenario aleatorio, potenciando de esta forma una formación multidisciplinar entre distintas áreas matemáticas.

Referencias

[1] Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Ed. Academic Press. New York.

[2] Quesada, V. y García A. (1988): Lecciones de Cálculo de Probabilidades, Ed. Díaz de Santos. Madrid.

[3] DeGroot, M.H. (1988): Probabilidad y Estadística, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. Madrid.